

TELEKOMUNIKACIJE ZBIRKA ZADATAKA

AKADEMIJA TEHNIČKO-UMETNIČKIH STRUKOVNIH STUDIJA BEOGRAD,
ODSEK VISOKA ŠKOLA ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA,
BEOGRAD 2024.

dr Slavica Marinković, 1972.
dr Amela Zeković, 1983.
mast. inž. Milutin Nešić, 1978.

Telekomunikacija - zbirka zadataka

Recenzenti: dr Dragana Prokin, dr Ivana Milošević.

Obrada i priprema teksta: dr Slavica Marinković

Korice: Nenad Tolić

Izdavač: Akademija tehničko-umetničkih strukovnih studija Beograd, Starine Novaka 24, Beograd

Za izdavača: Predsednik Akademije dr Vera Petrović

1. izdanje

Tiraž: 50

Štamparija: Birograf comp, d.o.o. Beograd

Beograd, 2024.

Format: B5 (JIS)

ISBN 978-86-6090-165-3

Nastavno veće Visoke škole elektrotehnike i računarstva, na svojoj sednici održanoj 13.02.2024. godine odobrilo je izdavanje i korišćenje ovog udžbenika u nastavi.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

621.391(075.8)(076)

МАРИНКОВИЋ, Славица, 1972-

Telekomunikacije : zbirka zadataka / [Slavica Marinković, Amela Zeković, Milutin Nešić]. - 1. izd. - Beograd : Akademija tehničko-umetničkih strukovnih studija, 2024 (Beograd : Birograf comp). - 161 str. : ilustr. ; 25 cm

Podaci o autorima preuzeti iz kolofona. - Na nasl. str.: Odsek Visoka škola elektrotehnike i računarstva. - Tiraž 50. - Bibliografija: str. 161.

ISBN 978-86-6090-165-3

1. Зековић, Амела, 1983- [аутор]
а) Телекомуникације -- Задаци

COBISS.SR-ID 138241289

Sva prava zadržava izdavač. Nije dozvoljeno da ova publikacija ili bilo koji njen deo bude distribuiran, snimljen, emitovan ili reprodukovan (umnožen) na bilo koji način, uključujući, ali ne i ograničavajući se na fotokopiranje, fotografiju, magnetni ili bilo koji drugi vid zapisa, bez prethodne saglasnosti ili dozvole izdavača.

Predgovor

Materija izložena u ovoj zbirci zadataka predstavlja zadatke i primere koji prate program predavanja predmeta Telekomunikacije koji se sluša na drugoj godini studija na studijskom programu Elektronika i telekomunikacije na Odseku Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu. Izloženi su osnovni koncepti i principi spektralne analize, prenosa signala i kodovanja u telekomunikacijama i pojašnjeno je njihovo razumevanje kroz zadatke. Zadatke u svakom poglavlju prate i zadaci višestrukog izbora odnosno zadaci sa ponuđenim odgovorima ili teorijska pitanja sa ponuđenim odgovorima. Cilj ovog pomoćnog udžbenika je da studenti kroz izradu zadataka provere svoje znanje gradiva koje je izloženo na predavanjima.

Zbirka zadataka se sastoji iz devet poglavlja. U prvom poglavlju se obnavljaju koncepti iz oblasti signala i sistema koji su neophodni za rešavanje telekomunikacionih zadataka. U drugom poglavlju se obrađuju osnovni pojmovi iz teorije informacija: količina informacija i entropija diskretnog izvora bez memorije. Takođe se studenti upoznaju sa Hafmanovim postupkom entropijskog kodovanja i dekodovanja. Treće poglavlje je posvećeno spektralnoj analizi periodičnih signala. U četvrtom poglavlju se obrađuje Furijeova transformacija, osnovne osobine Furijeve transformacije i izračunavanje Furijeve transformacije za karakteristične primere aperiodičnih signala. Peto poglavlje je posvećeno sistemima za prenos signala. Obrađuju se uslovi idealnog prenosa, koncepti filtriranja, slabljenje i izobličenje signala prilikom propagacije kroz medijum za prenos. U šestom poglavlju se obrađuju analogne modulacije. U sedmom poglavlju je izložena osnovna teorija digitalizacije signala: teorema o odabiranju i kvantizacija signala. U osmom poglavlju se obrađuje prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu. Deveto poglavlje obrađuje osnovne pojmove o zaštitnom kodovanju, Hamming-ov i CRC kod.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

1. SIGNALI I SISTEMI	1
1.1. UVOD	1
1.2. OSNOVNI SIGNALI	1
1.2.1. Sinusni signal	2
1.2.2. Jedinična odskočna funkcija	2
1.2.3. Jedinični pravougaoni impuls	3
1.2.4. Sinc impuls	3
1.2.5. Dirakov (Delta) impuls	4
1.3. OSNOVNE OPERACIJE NAD SIGNALIMA	5
1.4. LINEARNI VREMENSKI NEPROMENLJIV SISTEM	5
1.5. ZADACI	8
1.6. ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	16
2. KOLIČINA INFORMACIJA I ENTROPIJSKO KODOVANJE	21
2.1. UVOD	21
2.2. KOLIČINA INFORMACIJA I ENTROPIJA	21
2.3. KODOVANJE IZVORA	22
2.4. ZADACI	23
2.5. ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	28
3. FURIJEOVA ANALIZA PERIODIČNIH KONTINUALNIH SIGNALA	31
3.1. UVOD	31
3.2. FURIJEOVA ANALIZA PERIODIČNIH KONTINUALNIH SIGNALA	32
3.3. ZADACI	34
3.4. ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	46
4. FURIJEOVA ANALIZA APERIODIČNIH KONTINUALNIH SIGNALA	49
4.1. UVOD	49
4.2. FURIJEOV INTEGRAL	50
4.3. OSNOVNE OSOBINE FURIJEOVE TRANSFORMACIJE	50
4.3.1. Furijeova transformacija kosinusnog signala	51
4.4. ZADACI	52
4.5. ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	61
5. SISTEMI ZA PRENOS SIGNALA	63
5.1. UVOD	63
5.2. OPIS SISTEMA U FREKVENCIJSKOM DOMENU	63
5.3. IDEALNI FILTRI	64
5.4. USLOVI IDEALNOG PRENOSA SIGNALA	65

5.5.	IZOBLIČENJA	65
5.6.	SLABLJENJE	66
5.7.	ZADACI	67
5.8.	ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	77
6.	ANALOGNE MODULACIJE	87
6.1.	UVOD	87
6.2.	AMPLITUDSKA MODULACIJA	87
6.3.	FREKVENCIJSKA I FAZNA MODULACIJA	89
6.4.	ZADACI	90
6.5.	ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	101
7.	DIGITALIZACIJA SIGNALA	105
7.1.	UVOD	105
7.2.	DISKRETIZACIJA SIGNALA PO VREMENU	105
7.3.	DISKRETIZACIJA PO AMPLITUDI	108
7.3.1	Uniformni kvantizer	108
7.3.2	Neuniformna kvantizacija	110
7.4.	IMPULSNA KODNA MODULACIJA	110
7.5.	ZADACI	111
7.6.	ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	122
8.	DIGITALNI PRENOS U OSNOVNOM OPSEGU	127
8.1.	UVOD	127
8.2.	OSNOVNI BINARNI LINIJSKI KODOVI	128
8.3.	SPEKTRALNA EFIKASNOST LINIJSKIH KODOVA	130
8.4.	M-ARNI SIGNALI	130
8.5.	UTICAJ KANALA NA PRENOS DIGITALNOG SIGNALA	131
8.5.1	Uticaj šuma	132
8.5.2	Uticaj ograničenja propusnog opsega	134
8.5.3	Granice u prenosu signala	135
8.6.	ZADACI	136
8.7.	ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	142
9.	ZAŠTITNO KODOVANJE	147
9.1.	UVOD	147
9.2.	BINARNI BLOK KODOVI	147
9.2.1	Linearni blok kodovi	148
9.3.	HEMINGOV KOD	149
9.4.	CIKLIČNA PROVERA REDUNDANSE (CRC KOD)	150
9.5.	ZADACI	152
9.6.	ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA	155
10.	LITERATURA	161

1 SIGNALI I SISTEMI

Ciljevi: Obnavljanje i sticanje znanja o osnovnim pojmovima o signalima i sistemima. Razumevanje parametara osnovnih signala koji se koriste u ispitivanju i radu komunikacionih sistema. Sticanje znanja o osobinama linearnih vremenski nepromenljivih sistema i karakterizacije sistema pomoću impulsnog odziva sistema.

1.1 UVOD

Signali su fizičke veličine čija priroda može biti veoma raznolika u zavisnosti od oblasti elektrotehnike u kojoj se primenjuju ili analiziraju. U elektronskim sistemima za prenos podataka fizičke veličine koje se obično koriste su struja ili napon. U ovim sistemima signali služe da se pomoću njih prenese na daljinu poruka, odnosno informacija. U opštem slučaju signali su sve fizičke veličine koje se javljaju na ulazu, izlazu ili unutar sistema za prenos informacija. Signali su funkcije najčešće vremena, ali nezavisna promenljiva može biti i neka druga veličina. Poznavanje osobina nekih osnovnih determinističkih signala je od izuzetnog značaja za analizu i modelovanje signala kao i testiranje i ispitivanje komunikacionih sistema.

Sistem, u opštem smislu, podrazumeva uređaj, proces ili algoritam koji za neki ulazni signal, na svom izlazu generiše izlazni signal. Sistem vrši obradu nad ulaznim signalom i proizvodi izlazni signal. Komunikacioni sistem je skup uređaja i medijuma kroz koji se vrši prenos poruka. Da bi mogli da analiziramo složene sisteme za prenos podataka ili njihove delove (pod sisteme), neophodno je da uvedemo matematički opis i model sistema. Često korišćeni model je linearni vremenski nepromenljivi sistem.

1.2 OSNOVNI SIGNALI

Neki od osnovnih signala čije razumevanje je neophodno za dalje praćenje materije iz oblasti teorije telekomunikacija su sinusni signal, pravougaoni

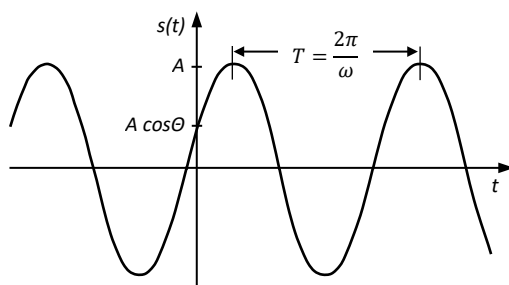
impuls, Sinc impuls, tako da se u ovom poglavlju daju definicije i osobine ovih signala.

1.2.1 Sinusni signal

Poseban značaj u telekomunikacijama imaju prostoperiodični (sinusni) signali. Sinusni signal u potpunosti je definisan svojom učestanošću i amplitudom, kao i početnom fazom. Opšti oblik sinusnog signala je dat formulom

$$s(t) = A \cos(2\pi f t + \theta) = A \cos(\omega t + \theta)$$

U ovom izrazu maksimalna vrednost funkcije $s(t)$ se naziva amplituda sinusnog signala u formuli označena sa A . Najmanji vremenski interval posle koga se sinusna funkcija ponavlja na isti način, odnosno perioda ove periodične funkcije je označen sa $T = 1/f$. Učestanost signala je f , koja se izražava u jedinici Hz (Herc). Oznaka $\omega = 2\pi f$ predstavlja kružnu učestanost. Ceo argument kosinusne funkcije se naziva trenutna faza kosinusnog signala, a θ predstavlja početnu fazu signala. Početna faza predstavlja relativnu poziciju vremenskog oblika signala u odnosu na $t = 0$. Na Slici 1.1 je prikazan vremenski oblik sinusnog signala sa označenim parametrima.



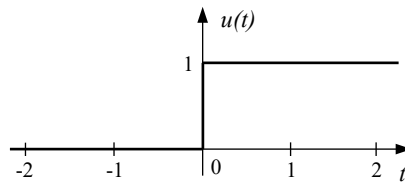
Slika 1.1 Vremenski oblik sinusnog signala

1.2.2 Jedinična odskočna funkcija

Signal u obliku jedinične odskočne funkcije je definisan jednačinom:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

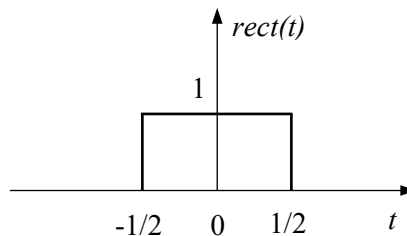
Ova funkcija, koja se još naziva i Hevisajdova funkcija ili jedinična step funkcija, je prikazana na Slici 1.2



Slika 1.2 Jedinična odskočna funkcija

1.2.3 Jedinični pravougaoni impuls

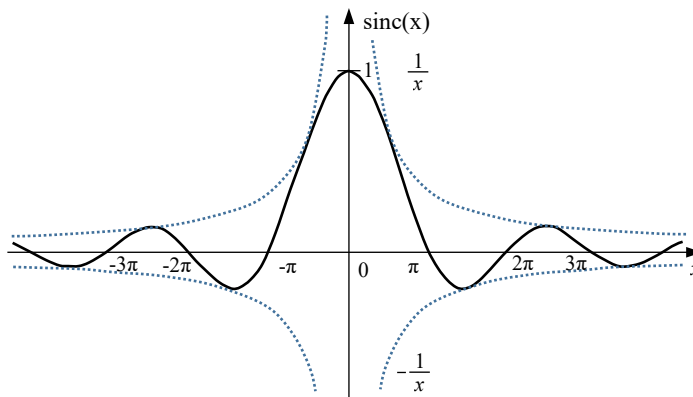
Drugi signal koji se često javlja u komunikacionim sistemima je pravougaoni impuls. Jedinični pravougaoni impuls se često označava sa $p(t)$, $\Pi(t)$ ili u literaturi na engleskom jeziku i kao $rect(t)$. Na Slici 1.3 je prikazan jedinični signal u obliku pravougaonog impulsa.



Slika 1.3 Jedinični pravougaoni impuls

1.2.4 Sinc impuls

Sledeći značajan oblik signala u komunikacionim sistemima je impuls oblika $Sinc(t) = \frac{\sin t}{t}$. Ovaj signal se naziva **Sinc** impuls i predstavlja idealan oblik impulsa za reprezentovanje digitalnih podataka u uslovima kada je sistem za prenos ograničenog opsega. Takođe funkcija oblika $Sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$ se često javlja pri analizi problema u komunikacionim sistemima pa je potrebno dobro poznavati oblik i karakteristike ove funkcije. Grafik funkcije $Sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$ je prikazan na Slici 1.4.



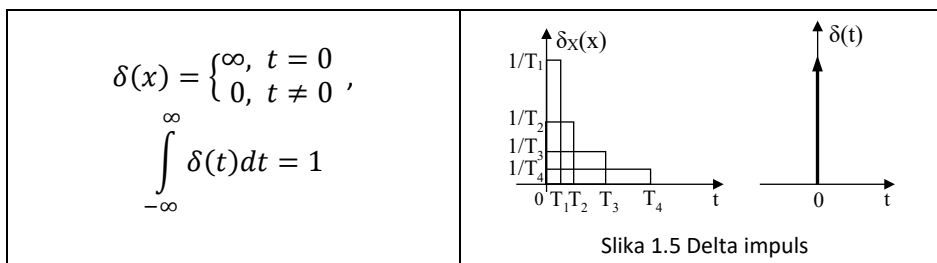
Slika 1.4 Grafik funkcije $\frac{\sin x}{x}$

Primetiti da je Sinc funkcija:

- parna funkcija po x ,
- $\text{Sinc}(x) = 0$ kada je $\sin(x) = 0$ (osim za $x = 0$), odnosno za $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$,
- $\text{Sinc}(0) = 1$,
- $\text{Sinc}(x)$ je proizvod funkcije $\sin(x)$ i monotonno opadajuće funkcije $1/x$ tako da je u pitanju oscilujuća funkcija sa amplitudom koja opada kao $1/x$.

1.2.5 Dirakov (Delta) impuls

Dirakov (Delta) impuls $\delta(t)$ je idealizovan impuls beskonačno kratkog trajanja i beskonačne amplitude tako da mu je ukupna površina jednaka jedinici $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Za Dirakovu (Delta) funkciju važi $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$ gde je $x(t)$ proizvoljna funkcija neprekidna u okolini t_0 . Ova osobina se zove osobina odabiranja (*the "Sifting" Property*) impulsne funkcije.



Slika 1.5 Delta impuls

Na Slici 1.5 je prikazan Delta impuls (desno), a levo je prikazano kako se od aproksimacije Dirakove funkcije pravougaonim impulsom može doći do definicije Dirakovog (Delta) impulsa. Za delta impuls se koristi simbolička predstava pomoću vertikalne strelice. Visina strelice predstavlja površinu ispod signala i označava se pisanjem odgovarajuće konstante pored impulsa na grafiku.

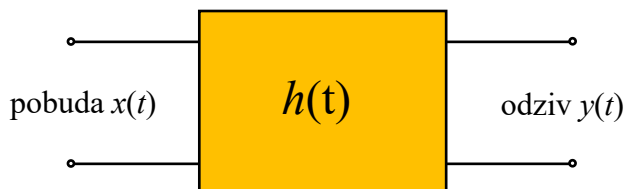
1.3 OSNOVNE OPERACIJE NAD SIGNALIMA

Korisno je poznavati kako se linearnom kombinacijom modifikovanih osnovnih signala može analitički i grafički predstaviti složeni signal. Osnovne modifikacije signala koje se koriste u ovom poglavlju su pomeranje signala u vremenu, inverzija vremena i skaliranje vremena.

Pomeranje signala $x(t)$ u vremenu se označava sa $x(t - t_0)$, odakle se vidi da signal kasni (pomeren u desno) za t_0 ako je $t_0 > 0$, odnosno pomeren je u levo za t_0 ako je $t_0 < 0$. Skaliranje vremena se odnosi na signal dat funkcijom $y(t) = x(t/a)$ gde je rezultujući signal $y(t)$ "razvučena" verzija signala $x(t)$ za $a > 1$ i "ubrzana" verzija signala odnosno verzija sa "komprimovanim vremenom" za $0 < a < 1$. Inverzija vremena se odnosi na signal dat funkcijom $y(t) = x(-t)$. Funkcija $x(-t)$ predstavlja funkciju koja je "lik u ogledalu" funkcije $x(t)$ u odnosu na ordinatnu osu.

1.4 LINEARNI VREMENSKI NEPROMENLJIV SISTEM

Sistem za prenos (Slika 1.6) se može simbolički predstaviti pomoću četvoropola, na čiji se ulaz dovodi pobuda, a na izlazu se dobija odziv.



Slika 1.6 Sistem za prenos

Pod pojmom linearnog sistema podrazumeva se sistem koji ima osobinu da ako pobudni signal $x_i(t)$ daje izlazni signal $y_i(t)$ onda ulazni signal u obliku sume skaliranih signala:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots$$

daje izlazni signal oblika skaliranih odziva na pojedinačne pobude:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots$$

Odnosno u linearnim sistemima važi princip superpozicije.

Vremenski invarijantni (nepromenljivi) sistemi, imaju osobinu da ako pobudnom signalu $x_i(t)$ odgovara izlazni signal $y_i(t)$, onda pobudnom signalu $x(t - \tau)$ odgovara izlazni signal $y(t - \tau)$. Ova osobina govori da ako je ulaz pomeren (kasni) u vremenu i izlaz će kasniti u vremenu za isto vreme τ .

Jedna od osnovnih karakteristika linearnih vremenski nepromenljivih sistema predstavlja impulsni odziv sistema, koji je jedinstven i potpuno opisuje sistem. Impulsni odziv sistema predstavlja odziv sistema na pobudu u vidu idealnog impulsa beskonačno kratkog trajanja i jedinične površine, odnosno delta impulsa $\delta(t)$. Impulsni odziv se obično označava sa $h(t)$ kao što je to prikazano na Slici 1.6. Ako poznamo impulsni odziv sistema onda možemo da izračunamo i odziv na proizvoljnu pobudu $x(t)$ na sledeći način:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

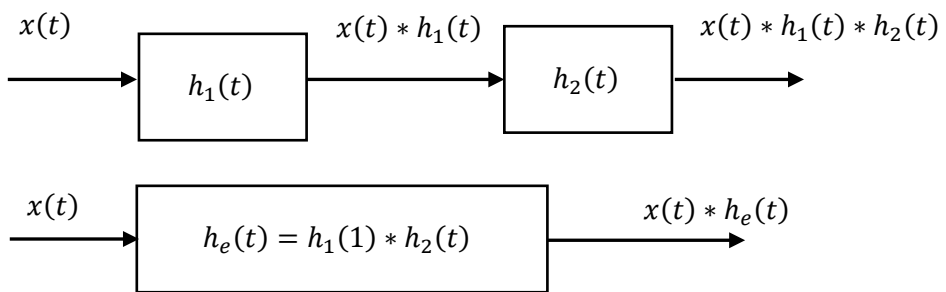
Ovaj integral se naziva konvolucija. Operacija konvolucije se simbolički predstavlja zvezdicom: $y(t) = x(t) * h(t)$. Konvolucija je linearna operacija i za konvoluciju važe osobine komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, odnosno:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t),$$

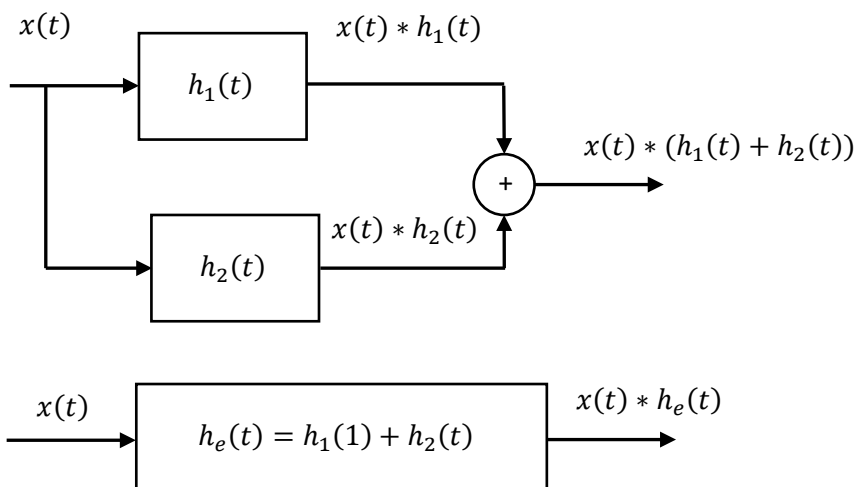
$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t),$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) + (x(t) * h_2(t)).$$

Na osnovu ovih osobina, može se zaključiti da, pri vezivanju podsistema važi da se kaskadno vezani podsistemi mogu predstaviti sistemom čija je ekvivalentna funkcija prenosa data konvolucijom impulsnih odziva pojedinih podsistema, dok se ekvivalentan impulsni odziv paralelno povezanih podsistema može predstaviti zbirom impulsnih odziva pojedinih podsistema. Ovo je ilustrovano na Slici 1.7 i Slici 1.8.



Slika 1.7 Impulzni odziv ekvivalentnog sistema kod kaskadno vezanih sistema



Slika 1.8 Impulzni odziv ekvivalentnog sistema kod paralelno vezanih Sistema

Druga bitna osobina je da konvolucija neke funkcije sa pomerenim delta impulsom ima za rezultat vrednost funkcije u tački u kojoj je lociran delta impuls: $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t_0)$.

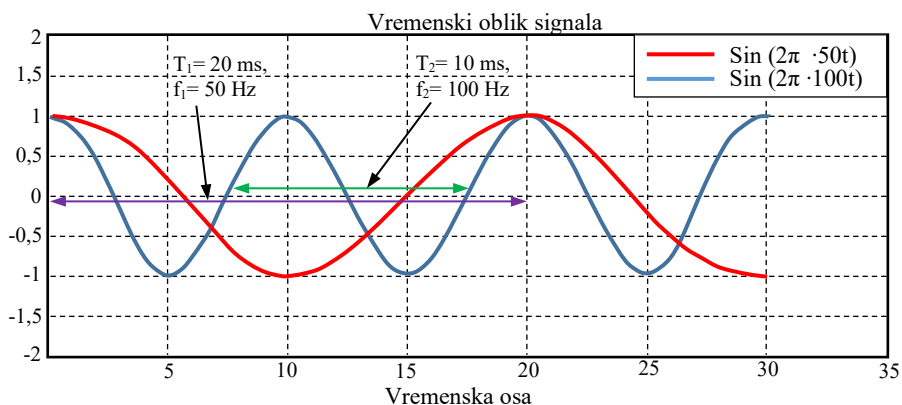
1.5 ZADACI

1. Skicirati signale date funkcijama vremena $\cos(2\pi f_1 t)$ i $\cos(2\pi f_2 t)$ gde je $f_1 = 50 \text{ Hz}$ a $f_2 = 100 \text{ Hz}$. Kolike su periode ovih signala?

Rešenje:

Perioda prvog signala je $T_1 = \frac{1}{f_1} = 20 \text{ ms}$, a drugog $T_2 = \frac{1}{f_2} = 10 \text{ ms}$.

Vremenski oblik signala je prikazan na Slici 1.9.

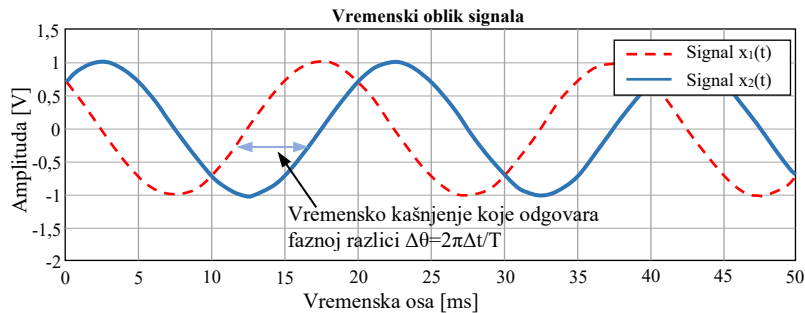


Slika 1.9 Vremenski oblik signala iz Zadatka 1.

2. Skicirati signale date funkcijama vremena $x_1(t) = \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right)$ i $x_2(t) = \cos\left(2\pi f t - \frac{\pi}{4}\right)$ gde je $f = 50 \text{ Hz}$. Odrediti kolika je perioda ova dva signala, kolika je fazna razlika između signala i koliko je vremensko kašnjenje između signala.

Rešenje:

Vremenski oblik signala je prikazan na Slici 1.10.



Slika 1.10 Vremenski oblik signala iz Zadatka 2

Sa slike se može uočiti da je vremensko kašnjenje između signala jednako 5 ms, odnosno četvrtina perioda. Signal $x_2(t)$ kasni za signalom $x_1(t)$ četvrtinu perioda. Ovaj vremenski pomeraj odgovara faznoj razlici između signala od

$$2\pi : T = |\Delta \theta| : \frac{T}{4}, \quad |\Delta \theta| = \pi/2.$$

Dodatno pojašnjenje:

U opštem slučaju kašnjenje je povezano sa faznim pomerajem na sledeći način. Zakašnjena verzija signala $s(t)$ je data sa:

$$s(t - t_1) = A \cos(2\pi f(t - t_1) + \theta) = A \cos(2\pi f t - 2\pi f t_1 + \theta)$$

Ako je uporedimo sa signalom

$$s(t) = A \cos(2\pi f t + \theta) = A \cos(\omega t + \theta)$$

vidimo da je fazna razlika $\Delta\theta = -2\pi f t_1$ odnosno kašnjenje je

$$t_1 = \frac{-\Delta\theta}{2\pi f} = \frac{-\Delta\theta \cdot T}{2\pi}.$$

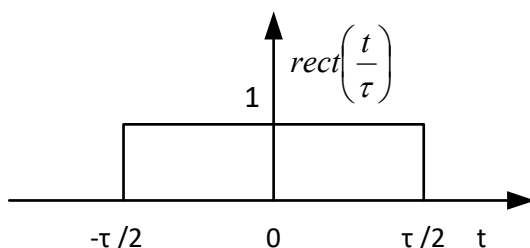
Kašnjenje za faznu razliku $-\pi/2$ je $t_1 = \frac{-\Delta\theta}{2\pi f} = \frac{-\Delta\theta \cdot T}{2\pi} = \frac{T}{4}$.

3. Ako je dat signal u obliku jediničnog pravougaonog impulsa $rect(t)$ nacrtati signal $rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$ gde je $\tau > 1$.

Rešenje:

Signal $p(t) = rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$ je prikazan na Slici 1.11. Za $\tau > 1$ predstavlja „razvučenu“ verziju signala $rect(t)$. Odnosno ako pogledamo šta se dešava za primer $t = 1/2$ i $\tau = 5$, dobijamo $p(1/2) = rect\left(\frac{1}{10}\right)$,

$p(5/2) = \text{rect}\left(\frac{1}{2}\right)$ iz čega sledi da će funkcija $p(t)$ biti jednaka jedinici u intervalu od $-5/2$ do $5/2$.



Slika 1.11 Signal $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

4. Skicirati funkciju $x(t) = \sum_{n=-2}^{n=2} A \cdot \text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$.

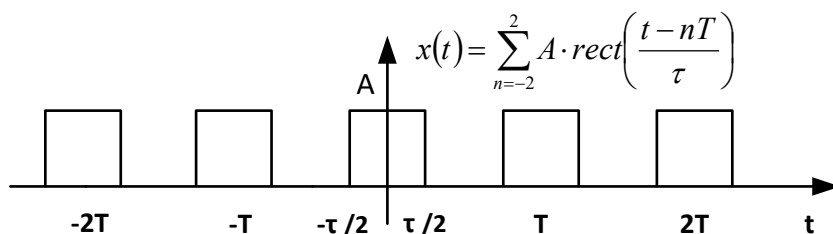
Rešenje:

Ova funkcija predstavlja sumu vremenski pomerenih pravougaonih impulsa koji su skalirani po amplitudi i vremenu. Prvo ćemo posmatrati pravougaoni impuls $\text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$. Ovaj impuls se može predstaviti kao $\text{rect}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{nT}{\tau}\right)$. Funkcija $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ je razmatrana u prethodnom zadatku.

Ova funkcija $p(t)$ je zakašnjena za nT , pa je

$$p(t - nT) = \text{rect}\left(\frac{t - nT}{\tau}\right), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Poslednje što ostaje jeste da se svi signali pomnože (skaliraju po amplitudi) sa A i saberu za sve vrednosti $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, čime dobijamo signal prikazan na Slici 1.12.

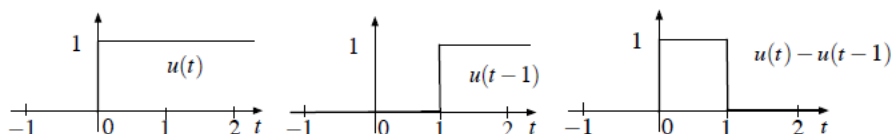


Slika 1.12 Funkcija $x(t) = \sum_{n=-2}^{n=2} A \cdot \text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$

5. Ako je dat jedinični odskočni signal $u(t)$, nacrtati signale: $u(t)$, $u(t - T)$, i $u(t) - u(t - T)$, gde je $T = 1$ s.

Rešenje:

Prvi signal na Slici 1.13 je jedinični odskočni signal $u(t)$. Signal $u(t - T)$ predstavlja zakašnjen jedinični odskočni signal za $T = 1$ s i ovaj signal je prikazan na Slici 1.13 u sredini. Treći signal na Slici 1.13 je dobijen oduzimanjem ova dva signala: $u(t) - u(t - T)$.

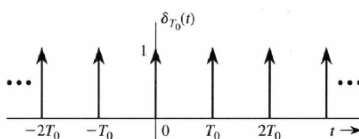


Slika 1.13 Signali $u(t)$, $u(t - T)$ i $u(t) - u(t - T)$, respektivno

6. Nacrtati signal dat formulom: $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT_0)$, gde je $\delta(t)$ Dirakov impuls.

Rešenje:

Signal predstavlja sumu zakašnjenih Dirakovih impulsa. Svaki impuls je zakašnjen za nT_0 gde n ide od $-\infty$ do ∞ . Ovako dobijen signal je prikazan na Slici 1.14.



Slika 1.14 Signal $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT_0)$

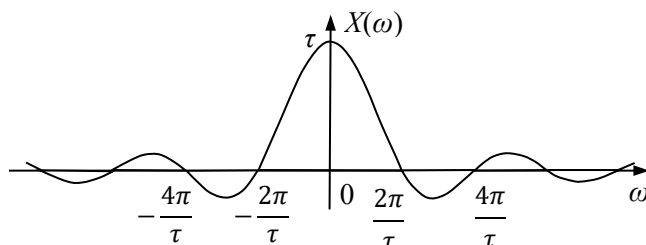
7. Skicirati funkciju $X(\omega) = \tau \frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{(\frac{\omega\tau}{2})}$.

Rešenje:

Ova funkcija se može napisati kao $X(\omega) = \tau \cdot \text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$. Na osnovu osobina **Sinc** funkcije izložene u Poglavlju 1.2.4. možemo zaključiti: nule funkcije su u $\frac{\omega\tau}{2} = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$.

Odnosno nule funkcije su u $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$; za $\omega = 0$ funkcija ima vrednost $\tau \cdot 1$.

Grafik funkcije $X(\omega) = \tau \frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{(\frac{\omega\tau}{2})}$ je prikazan na Slici 1.15.

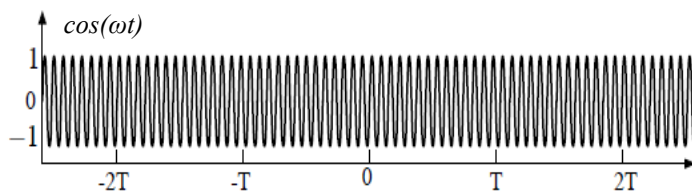
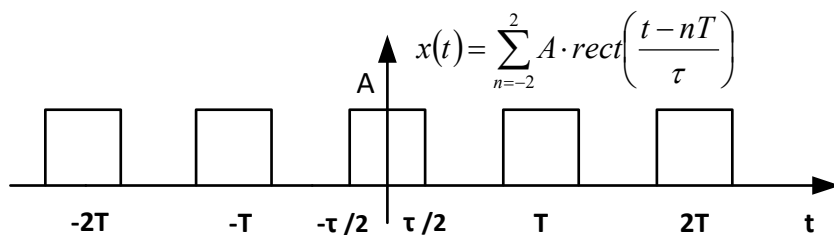


Slika 1.15 Grafik funkcije $X(\omega) = \tau \cdot \text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$.

8. Skicirati funkciju $\sum_{n=-2}^{n=2} A \cdot \text{rect}((t - nT)/\tau) \cdot \cos \omega t$.

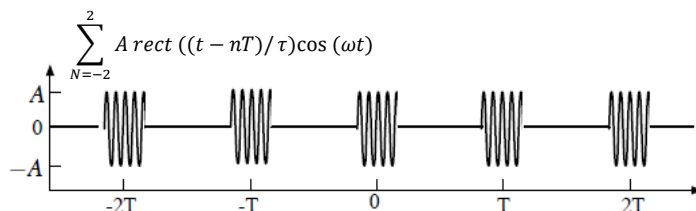
Rešenje:

Funkcija predstavlja proizvod funkcije iz Zadatka 4. i kosinusne funkcije $\cos \omega t$. Kada se nacrtaju ove dve funkcije jedna ispod druge kao što je prikazano na Slici 1.16.



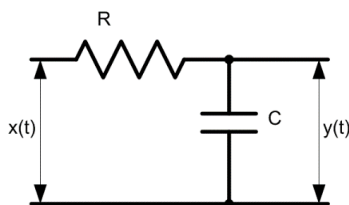
Slika 1.16 Funkcije $A \cdot \text{rect}(\frac{t-nT}{\tau})$ i $\cos \omega t$

Dobija se proizvod (i rešenje zadatka) dat grafikom prikazanim na Slici 1.17.

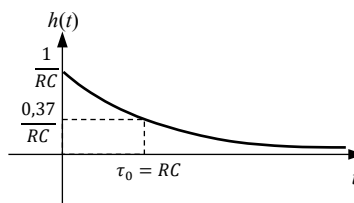


Slika 1.17 Slika Rešenje Zadatka 8: Grafik funkcije $\sum_{n=-2}^2 A \text{rect}((t-nT)/\tau) \cdot \cos \omega t$

9. Izračunati odziv RC kola prikazanog na Slici 1.18 na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije $x(t) = u(t)$ ako je poznat impulsni odziv sistema $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot u(t)$. Impulsni odziv sistema je grafički prikazan na Slici 1.19.



Slika 1.18 RC kolo



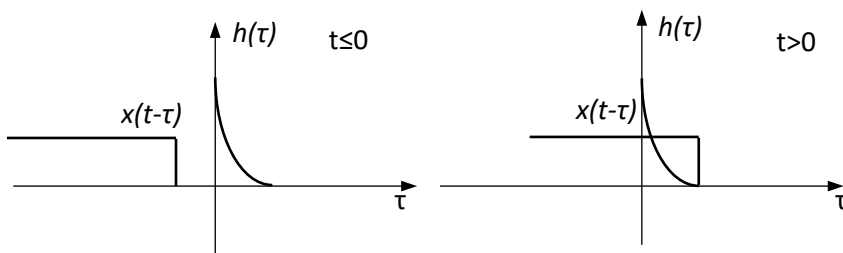
Slika 1.19 Impulsni odziv RC kola

Rešenje:

Odziv sistema (RC kola) na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije je:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Dva slučaja karakteristična za računanje integrala konvolucije su ilustrovana na Slici 1.20 gde je prikazan slučaj za $t \leq 0$ i $t > 0$.



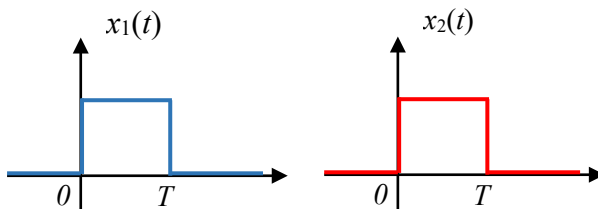
Slika 1.20 Karakteristični slučajevi za računanje konvolucije iz Zadatka 6

Sa slike se vidi da je za $t > 0$

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}\tau} d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = \frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} \Big|_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$

i za $t \leq 0$ $y(t) = 0$.

10. Izračunati konvoluciju dva pravougaona signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ prikazana na Slici 1.21.



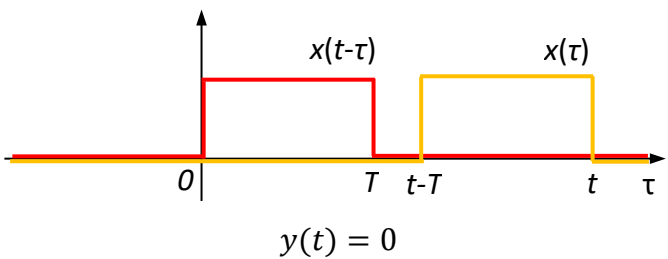
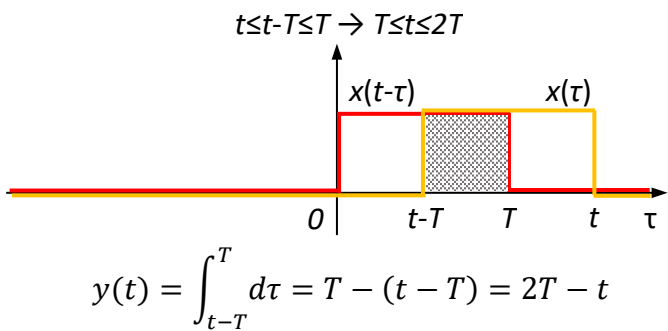
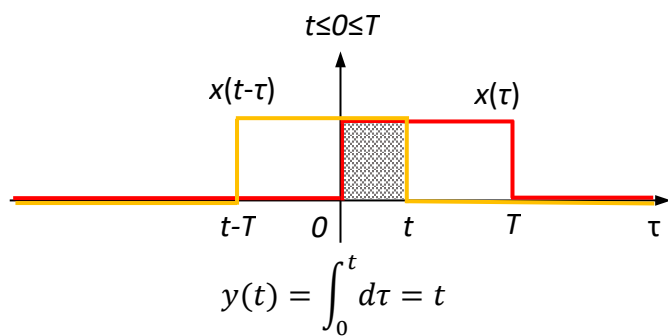
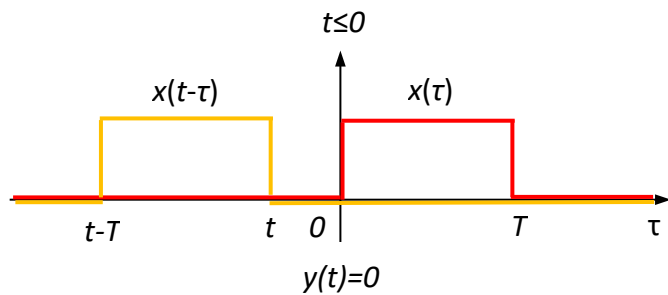
Slika 1.21 Pravougaoni signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ iz postavke Zadatka 10

Rešenje:

Novonastali signal dobijen konvolucijom pravougaonih impulsa $x_1(t)$ i $x_2(t)$ je označen sa $y(t)$. Odnosno $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Pošto su u pitanju identični signali možemo pisati $y(t) = x_1(t) * x_2(t) = x(t) * x(t)$ gde je $x(t) = x_1(t) = x_2(t)$.

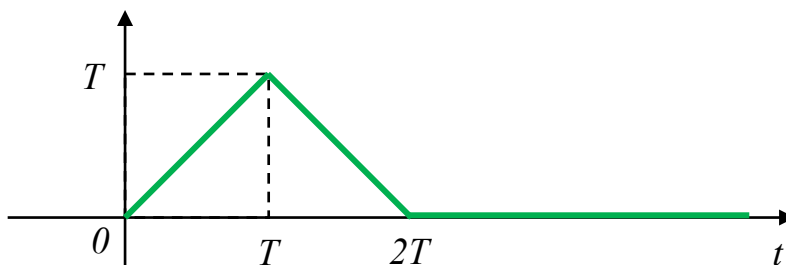
$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Karakteristični slučajevi za računanje integrala konvolucije su prikazani na Slici 1.22:



Slika 1.22 Grafički prikaz računanja integrala konvolucije

Rezultujući signal $y(t)$ je prikazan na Slici 1.23.



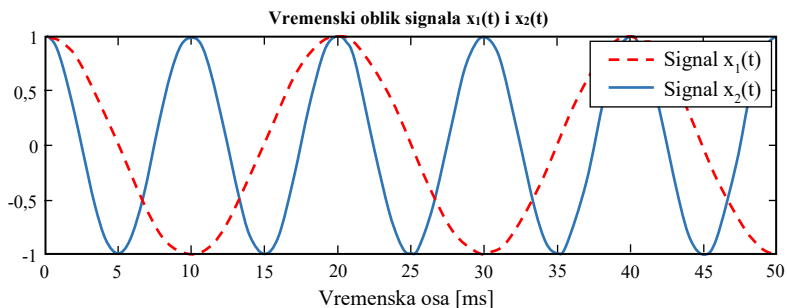
Slika 1.23 Rešenje Zadatka 10

1.6 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Učestanosti u elektrodistributivnoj mreži od 50 Hz koja se koristi u našoj zemlji odgovara perioda od:
a) **20 ms**,
b) 50 ms,
c) 10 ms.
2. Kolika je faza signala koji prednjači u odnosu na kosinusni signal čija je početna faza nula ako je kašnjenje u vremenu jednako $1/6$ perioda?
a) **60**,
b) 180,
c) 45.
3. Kakva je veza između učestanosti i talasne dužine elektromagnetnog talasa?
a) **$\lambda = c/f$** ,
b) $\lambda = cf$,
c) $\lambda = f/c$.

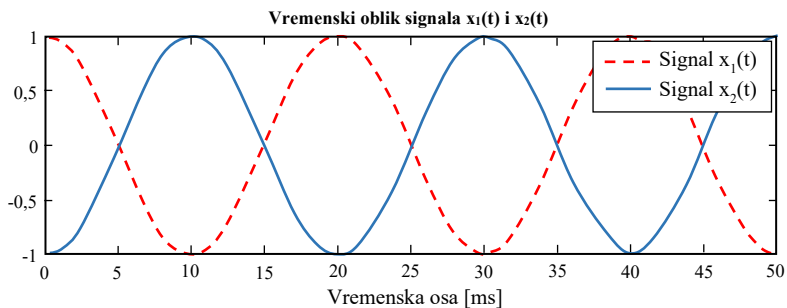
4. Jedinica za talasnu dužinu je:
- a) **m,**
 - b) Hz,
 - c) m/s.
5. Analogni signali imaju sledeće karakteristike:
- a) **menjaju se kontinualno u vremenu i vrednost ovih signala (amplituda) može imati bilo koju vrednost iz nekog opsega,**
 - b) diskretni su i po amplitudi i po vremenu,
 - c) mogu se promeniti samo u diskretnim trenucima vremena i amplitude signala mogu imati vrednosti iz ograničenog skupa diskretnih vrednosti.
6. Digitalni signali imaju sledeće karakteristike:
- a) menjaju se kontinualno u vremenu i vrednost ovakvog signala (amplituda) može imati bilo koju vrednost iz nekog opsega,
 - b) **diskretni su i po amplitudi i po vremenu,**
 - c) diskretni su po vremenu i vrednost ovakvog signala (amplituda) može imati beskonačno mnogo vrednosti.
7. Slučajni signali imaju sledeće karakteristike:
- a) vrednost ovih signala se može tačno predvideti u bilo kom trenutku vremena,
 - b) opis ovog signala je u matematičkom ili grafičkom obliku u potpunosti poznat,
 - c) **vrednosti signala se ne mogu tačno predvideti pa se ovi signali opisuju preko svojih statističkih parametara kao što su srednja vrednost, funkcija gustine verovatnoće.**
8. Periodični signali imaju sledeće osobine:
- a) predstavljaju podklasu slučajnih signala,
 - b) uvek su sinusnog oblika,
 - c) **periodično se ponavljaju posle vremenskog intervala koji se naziva period.**

9. Za signale prikazane na slici možemo reći:



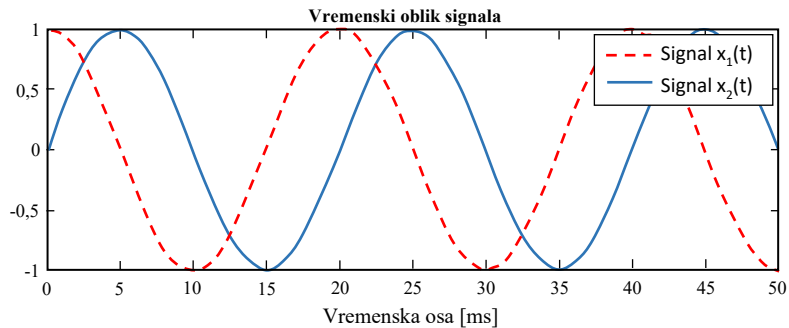
- a) signal $x_1(t)$ ima veću učestanost od signala $x_2(t)$,
- b) signal $x_2(t)$ ima veću učestanost od signala $x_1(t)$,**
- c) ovi signali imaju istu učestanost, a razlikuju se po faznom pomaku.

10. Za sinusne signale prikazane na slici važi:



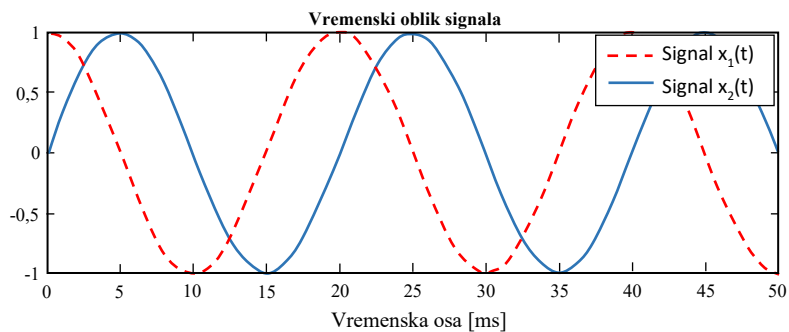
- a) signal $x_1(t)$ ima veću učestanost od signala $x_2(t)$,
- b) signal $x_2(t)$ ima veću učestanost od signala $x_1(t)$,
- c) ovi signali imaju istu učestanost a razlikuju se po faznom pomaku.**

11. Učestanost signala prikazanih na slici je:



- a) učestanost signala $x_1(t)$ je 50 Hz, a signala $x_2(t)$ je 100 Hz,
- b) učestanost signala $x_2(t)$ je 50 Hz, a signala $x_1(t)$ je 100 Hz,
- c) **učestanost oba signala je 50 Hz.**

12. Perioda signala prikazanih na slici je:



- a) perioda signala $x_1(t)$ je 20 ms, a signala $x_2(t)$ je 10 ms,
- b) perioda signala $x_2(t)$ je 20 ms, a signala $x_1(t)$ je 10 ms,
- c) **periode oba signala su iste i iznose 20 ms.**

13. Ako je perioda sinusnog signala 10 ns, onda je učestanost:

- a) **100 MHz,**
- b) 1 GHz,
- c) 10 GHz.

14. Talasna dužina je:

- a) **razdaljina koju talas pređe u toku periode prilikom prostiranja kroz medijum za prenos,**
- b) razdaljina koju talas pređe u toku periode podeljena sa brzinom prostiranja talasa kroz medijum za prenos,
- c) jednaka proizvodu učestanosti i brzine prostiranja talasa kroz medijum za prenos.

2 KOLIČINA INFORMACIJA I ENTROPIJSKO KODOVANJE

Ciljevi: Sticanje znanja o osnovnim pojmovima iz teorije informacija: količini informacija i entropiji diskretnog izvora bez memorije. Razumevanje osnova za entropijsko kodovanje. Poznavanje Hafmanovog koda kao i postupka kodovanja i dekodovanja.

2.1 UVOD

U telekomunikacionom sistemu za prenos podataka, izvor informacije generiše simbole koji se predstavljaju signalima (fizičkim veličinama koje se mogu detektovati), i prenose preko medijuma za prenos signala do prijemnika, koji na osnovu primljenih signala donosi odluku o tome koji simbol je bio poslat.

2.2 KOLIČINA INFORMACIJA I ENTROPIJA

U najjednostavnijem modelu izvora informacija koji se naziva diskretan izvor bez memorije, matematički možemo opisati izvor informacija S na sledeći način. Izvor informacija S šalje jedan od N elemenata izvora, $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}$ koji se nazivaju simboli izvora. Verovatnoće emitovanja određenog simbola date su sa $P(S = s_k) = p_k$, pri čemu se smatra da emitovanje simbola predstavlja potpun skup međusobno isključivih događaja ($\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$).

Za ovakav izvor, količina informacija $Q(s_k)$ koju nosi simbol s_k je data sa

$$Q(s_k) = \log_2 \frac{1}{p_k}.$$

Kada izvor informacija ima samo dva simbola i kada su oba simbola jednako verovatna onda je količina informacija

$$Q(s_k) = \log_2 \frac{1}{1/2} = 1 \text{ Sh.}$$

Jedinica za količinu informacija je Šenon (Sh) mada se danas više koristi jedinica informacioni bit (*information bit*).

Srednja količina informacija po simbolu izvora se naziva entropija izvora:

$$H(s) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \log_2 \frac{1}{p_k}.$$

2.3 KODOVANJE IZVORA

Kodovanje izvora predstavlja preslikavanje simbola koje emituje izvor informacija u novu sekvencu simbola sa ciljem da se odstrani višak informacija, kompaktno (ekonomično) reprezentuje sekvenca simbola koju emituje izvor odnosno da se ostvari kompresija podataka. Obično se koriste binarni kodovi kod kojih se simbolu izvora pridružuje sekvenca bita koja se naziva kodna reč. Broj bita u sekvenci bita koja se pridružuje simbolu se naziva dužina kodne reči.

Srednja dužina kodne reči zavisi od verovatnoće pojavljivanja kodnih reči odnosno, simbola izvora koje kodne reči reprezentuju. Srednja dužina kodne reči označena sa $\bar{L}$ se može naći kao:

$$\bar{L} = \sum_{k=0}^{N-1} p_k l_k$$

gde je p_k , verovatnoća simbola koji se koduje a l_k , dužina k -te kodne reči pridružene tom simbolu.

Entropija daje donju granicu za broj bita koji je potreban u proseku po simbolu izvora:

$$\bar{L} \geq H(s).$$

Postoje različiti načini konstrukcije kodova. Poznat primer konstrukcije koda za koji se može pokazati da postiže minimalnu prosečnu dužinu kodne reči je Hafman-ov postupak.

Uobičajeno je da se Hafmanov kod prikazuje pomoću binarnog stabla. Binarno stablo se sastoji od čvorova i grana. Grane povezuju čvorove. Na najvišem nivou stabla se nalazi početni čvor (koren stabla) koji je povezan sa dva čvora ispod njega (čvorovi na nižem hijerarhijskom nivou). Ostali čvorovi su povezani sa jednim čvorom na višem nivou (prethodnik, roditelj) i sa dva čvora na nižem nivou (naslednici ili deca čvora).

Alogritam za konstruisanje koda je sledeći: napravi se lista čvorova po neopadajućim verovatnoćama pojavljivanja simbola. Dva simbola sa najmanjim

verovatnoćama se udruže u novi simbol čija je verovatnoća jednaka zbiru verovatnoća početnih simbola. Početni simboli su sada levi i desni prethodnik novog simbola. Levi prethodnik novog čvora predstavlja simbol sa manjom verovatnoćom pojavljivanja, a desni sa većom. Grane koje vode od novog čvora ka prethodnicima se označavaju sa "0" i "1". Nova lista simbola se uredi po neopadajućim verovatnoćama. Ovi koraci se ponavljaju sve dok se ne dođe do korena stabla. Ako se pođe od korena stabla i ide ka krajnjim čvorovima (listovi) i pročitana sekvenca bita koja je pridružena granama dobija se kodna reč prema Hafmanovom algoritmu.

2.4 ZADACI

1. Kolika je količina informacija koju sadrži simbol Sh koji pripada diskretnom izvoru bez memorije i čija je verovatnoća emitovanja $1/4$?

Rešenje:

Prema formuli za količinu informacija, simbol čija je verovatnoća emitovanja $1/4$ nosi količinu informacija

$$Q(s_k) = \log_2 \frac{1}{1/4} = 2 \text{ Sh.}$$

2. Kolika je maksimalna entropija diskretnog izvora bez memorije koji ima $N = 4$ elementa (simbola)?

Rešenje:

Kako je entropija diskretnog izvora maksimalna kada su verovatnoće simbola podjednake, onda je:

$$H_{\max}(S) = 4 \times \frac{1}{4} \times \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} \right) = 2 \text{ Sh/simb.}$$

3. Pretpostavimo da izvor informacija S bez memorije šalje jedan od $N=6$ elemenata izvora i da su verovatnoće emitovanja simbola date sa $(1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8)$. Kolika je entropija takvog izvora?

Rešenje:

Entropija ovog izvora je:

$$H(S) = 2 \times \frac{1}{4} \times \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} \right) + 4 \times \frac{1}{8} \times \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{8}} \right) = 2,5 \frac{\text{Sh}}{\text{simb.}}$$

4. Binarni izvor informacija emituje jedan od dva simbola izvora s_1 ili s_2 koji se uobičajeno nazivaju bitima i označavaju sa 0 i 1. Ako su verovatnoće emitovanja simbola izvora s_1 ili s_2 date sa p i $(1-p)$ izračunati entropiju binarnog izvora. Izračunati entropiju za $p = 0,2$, $p = 0,3$ i $p = 0,45$.

Rešenje:

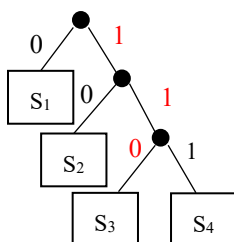
Prema formuli za entropiju izvora imamo:

$$H(S) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \text{ Sh/simb, tako da se dobija:}$$

- a) $p = 0,2 \quad H(S) = 0,72 \text{ Sh/simb,}$
- b) $p = 0,3 \quad H(S) = 0,88 \text{ Sh/simb,}$
- c) $p = 0,45 \quad H(S) = 0,99 \text{ Sh/simb.}$

5. Za Hafmanovo kodno stablo dato na Slici 2.1:

- a) enkodovati sekvencu simbola $s_1 s_3 s_2$,
- b) dekodovati primljenu sekvencu 111010110.



Slika 2.1 Slika uz Zadatak 5

Rešenje:

Na osnovu Hafmanovog stabla prikazanog na Slici 2.1. mogu se odrediti kodne reči za simbole kao što je to prikazano u tabeli:

s_1	0
s_2	10
s_3	110
s_4	111

- a) Na osnovu gornje tabele sekvencu simbola s_1, s_2, s_3 se preslikava u binarnu sekvencu 010110 ($s_1, s_2, s_3 \rightarrow 010110$).

b) s_4, s_1, s_2, s_3 .

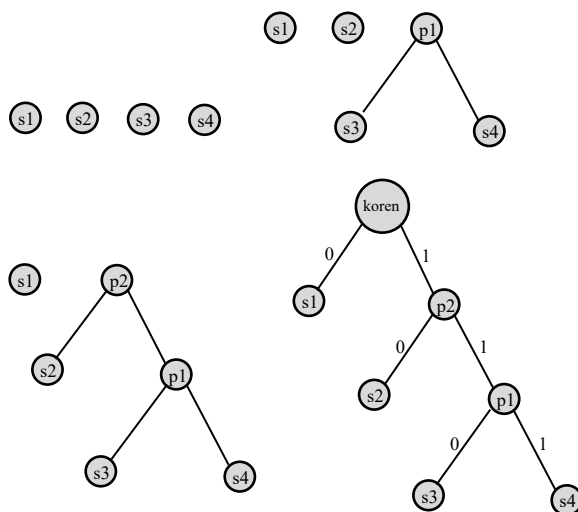
6. Za diskretan izvor bez memorije sa $N=4$ simbola čije su verovatnoće pojavljivanja date u tabeli:

Simboli izvora s_i	Verovatnoća pojavljivanja simbola $P(s_i)$
s_1	0,50
s_2	0,25
s_3	0,125
s_4	0,125

- Nacrtati Hafmanovo stablo (konstruisati Hafmanovim postupkom kod).
- Kolika je entropija ovog izvora?
- Izračunati prosečnu dužinu reči za ovaj kod.
- Uporediti ovu prosečnu dužinu reči sa kodom koji koristi fiksnu dužinu reči da reprezentuje simbole izvora.

Rešenje:

- Na Slici 2.2 je prikazan postupak konstrukcije Hafmanovog koda.



Slika 2.2 Postupak konstrukcije Hafmanovog koda za Zadatak 6

b) Entropija izvora je:

$$H(S) = 0,5 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,5} \right) + 0,25 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,25} \right) + 2 \cdot 0,125 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,125} \right),$$

$$H(S) = 1,75 \text{ Sh/simb.}$$

c) Prosečna dužina kodne reči za ovaj kod je:

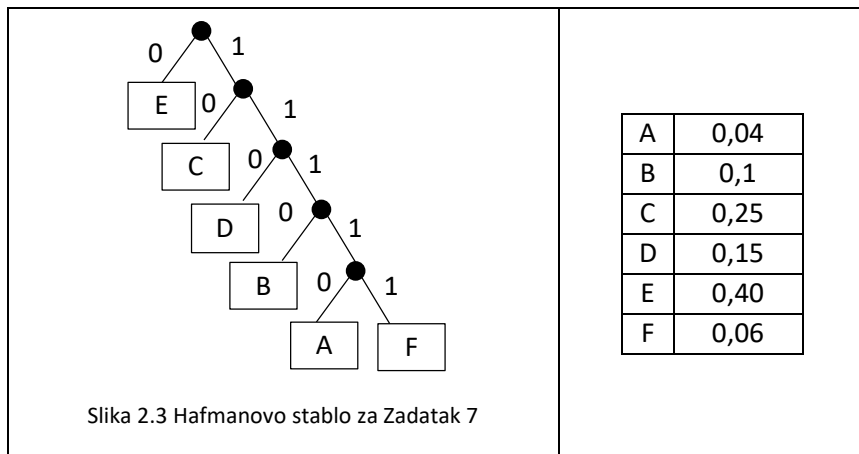
$$\bar{L} = 0,5 \cdot 1 + 0,25 \cdot 2 + 0,125 \cdot 3 + 0,125 \cdot 3 = 1,75 \text{ bit/simb}$$

d) Način konstrukcije koda sa fiksnom dužinom reči je jednostavan. Odredi se najmanji broj bita kojim je moguće reprezentovati simbole izvora: $\lceil \log_2 N \rceil$, gde je N broj simbola izvora a znak $[x]$ označava najmanju celobrojnju vrednost veću od x. Svaki simbol se mapira u različitu binarnu sekvencu. U tabeli je dat uporedni prikaz kodnih reči za reprezentaciju simbola koristeći Hafmanov kod koji je konstruisan pod a) i koristeći kod sa fiksnom dužinom reči.

Simboli izvora si	Verovatnoće pojavljivanja simbola P(si)	Kod (promenljiva dužina reči)	Kod (fiksna dužina reči)
s ₁	0.5	0	00
s ₂	0.25	10	01
s ₃	0.125	110	10
s ₄	0.125	111	11

Prosečna dužina reči po simbolu izvora za kod sa fiksnom dužinom kodne reči iznosi dva bita. Iz ovog primera se vidi da je srednja dužina reči u slučaju koda promenljive dužine manja nego u slučaju koda fiksne dužine.

7. Za Hafmanovo stablo koje je prikazano na Slici 2.3 i za verovatnoće simbola date u tabeli:



- Enkodovati sekvencu simbola DAFF.
- Dekodovati sekvencu 101110010.
- Izračunati prosečnu dužinu reči za ovaj kod.
- Izračunati količine informacija za svaki simbol i entropiju izvora.

Rešenje:

Simbol	Verovatnoća	Količina informacija (Sh/simb)	Kodna reč	Dužina kodne reči (bit)
A	0,04	4,6439	11110	5
B	0,1	3,3219	1110	4
C	0,25	2	10	2
D	0,15	2,737	110	3
E	0,40	1,32	0	1
F	0.06	4.059	11111	5

- 11011110111111111.
- CBEC.
- $L_{av} = 0,04 \cdot 5 + 0,1 \cdot 4 + 0,25 \cdot 2 + 0,15 \cdot 3 + 0,4 \cdot 1 + 0,06 \cdot 5 = 2,25$ bit/simb.
- $$H = 0,1 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,1} \right) + 0,25 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,25} \right) + 0,15 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,15} \right) + 0,4 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,4} \right) + 0,06 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,06} \right) + 0,04 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,04} \right) = 2,2008$$
Sh/simb.

2.5 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

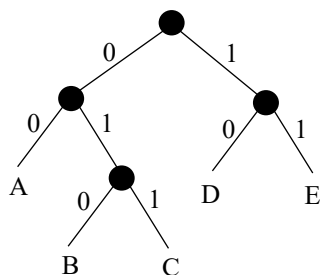
1. Jedinica za količinu informacija je:
 - a) Herc,
 - b) Šenon,**
 - c) Erlang.
2. Količina informacija koju nosi simbol disretnog izvora bez memorije:
 - a) opada ako verovatnoća simbola opada,
 - b) opada ako verovatnoća simbola raste.**
 - c) ne zavisi od verovatnoće pojavljivanja simbola.
3. Količina informacija koju nosi simbol čija je verovatnoća pojavljivanja p data sa:
 - a) $\log_2 \frac{1}{p}$,**
 - b) $p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1-p}$,
 - c) $p \log_2 \frac{1}{p}$.
4. Entropija predstavlja:
 - a) maksimalnu količinu informacija po simbolu izvora,
 - b) srednju količinu informaciju po simbolu izvora,**
 - c) zbir količine informacija pojedinih simbola.
5. Entropija binarnog izvora je maksimalana kada je:
 - a) verovatnoća emitovanja simbola 0 jednaka 1, a verovatnoća emitovanja simbola 1 jednaka 0,
 - b) verovatnoća emitovanja simbola 0 jednaka 0, a verovatnoća emitovanja simbola 1 jednaka 1,
 - c) verovatnoća emitovanja simbola 0 jednaka 1/2 i verovatnoća emitovanja simbola 1 jednaka 1/2 .**
6. Količina informacija koju nosi simbol s_i koji pripada diskretnom izvoru bez memorije i čija je verovatnoća emitovanja 0.1 je:
 - a) 1 Sh,
 - b) 2,15 Sh,
 - c) 3,32 Sh.**

7. Maksimalna entropija diskretnog izvora bez memorije koji ima $N=8$ elementa (simbola) je:
- 1 Sh/simb,
 - 2 Sh/simb,
 - 3 Sh/simb.**
8. Pretpostavimo da izvor informacija S bez memorije šalje jedan od $N=5$ elemenata izvora i da su verovatnoće emitovanja simbola date sa: (0,4; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1) . Entropija ovog izvora je:
- 2,5 Šenona po simbolu,
 - 2,12 Šenona po simbolu,**
 - 5 Šenona po simbolu.
9. Kolika je prosečna dužina reči za kod dat u tabeli:

Simboli izvora s_i	Verovatnoće pojavljivanja simbola $P(s_i)$	Kod (promenljiva dužina reči)
s_1	0,4	0
s_2	0,2	10
s_3	0,2	110
s_4	0,2	1110
s_5	0,1	1111

- 4 bit/simb,
 - 1,3 bit/simb,**
 - 2,5 bit/simb.
10. Minimalna prosečna dužina kodne reči koja je potrebna za opis nekog izvora:
- je jednaka entropiji izvora,**
 - je jednaka broju simbola izvora,
 - je jednaka zbiru količina informacija koju nose simboli izvora.
11. Za kodovanje izvora važi (zaokružiti sve tačne odgovore):
- cilj kodovanja izvora je kompaktna reprezentacija simbola izvora odnosno kompresija,**
 - kodovanje izvora smanjuje broj bita potrebnih za prenos informacija,**
 - kodovanje izvora je naziv za tehniku kojom se otklanja degradacija signala usled uticaja kanala u prijemu.

12. Hafman-ov kod je:
- a) kod sa fiksnom dužinom kodne reči,
 - b) kod sa promenljivom dužinom kodne reči,**
 - c) konvolucionni kod.
13. Hafman-ov kod daje najbolje rezultate u smislu kompresije (u poređenju sa kodom sa fiksnom dužinom reči):
- a) ako su verovatnoće simbola u diskretnom izvoru bez memorije iste,
 - b) ako su verovatnoće simbola u diskretnom izvoru bez memorije različite,**
 - c) uvek daje lošije rezultate nego kod sa fiksnom dužinom reči.
14. Pretpostavimo da imamo dva binarna izvora obeležena sa A i B. Verovatnoća da je simbol izvora A jednak 1 je 0,8. Verovatnoća da je simbol izvora B jednak 1 je 0,6. Za entropije izvora A i B važi:
- a) $H_A > H_B$,
 - b) $H_A = H_B$,
 - c) $H_A < H_B$.**
15. Za binarno stablo prikazano na slici koje odgovara Hafmanovom kodu za izvor sa 5 simbola dekodovati simbole za primljenu sekvencu 000001001101101.



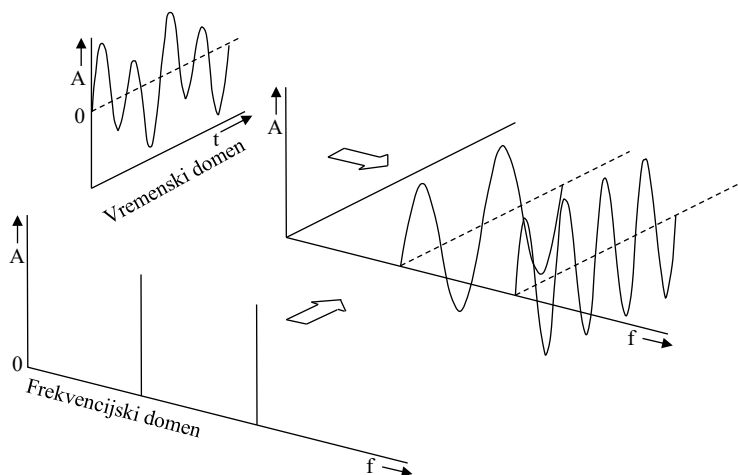
- a) AABCCD,**
- b) ADAABB,
- c) CBBAAC.

3 FURIJEOVA ANALIZA PERIODIČNIH KONTINUALNIH SIGNALA

Ciljevi: Sticanje osnovnih znanja o frekvencijskoj analizi periodičnih kontinualnih signala pomoću teorije Furijeovih redova. Razumevanje frekvencijske analize signala i sticanje znanja o spektru osnovnih oblika periodičnih signala.

3.1 UVOD

Signali se mogu posmatrati i analizirati na različite načine u zavisnosti od konkretne primene. Veoma često se analizira frekvencijski sadržaj signala. Na Slici 3.1 je ilustrovan različit prikaz karakteristika signala u vremenskom i frekvencijskom domenu za signal koji se sastoji od dve sinusoide. Vremenski oblik daje prikaz zavisnosti promene amplitude kompozitnog signala od vremena, dok frekvencijski prikaz pokazuje amplitudu i učestanost pojedinih sinusnih komponenti.



Slika 3.1 Ilustracija posmatranja signala u vremenskom i frekvencijskom domenu

3.2 FURIJEOVA ANALIZA PERIODIČNIH KONTINUALNIH SIGNALA

Matematička transformacija kojom se signal predstavlja u frekvencijskom domenu je bazirana na Furijeovoj teoriji. Periodični signal, $x(t)$, čija je perioda T , se može razviti u Furijeov red, odnosno predstaviti beskonačnom sumom sinusnih komponenti na sledeći način:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t),$$
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),$$

gde je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, osnovna kružna učestanost, a a_n , b_n , c_n su koeficijenti Furijeovog reda koji se mogu izračunati:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt,$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt,$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt,$$
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$
$$\theta_n = \arctg \frac{-b_n}{a_n}.$$

Periodični signali imaju diskretan spektar i spektralne komponente na učestanostima koje su celobrojni umnožak osnovne učestanosti signala. Komponenta na učestanosti $n\omega_0$ se naziva n-ti harmonik. Osnovna učestanost zavisi od periode periodičnog signala: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Koeficijent $\frac{a_0}{2}$ predstavlja jednosmernu (DC) komponentu signala (komponentu čija je učestanost nula).

Veoma često se koristi i kompleksni oblik Furijeovog reda. On se dobija kada primenimo vezu između kompleksne eksponencijalne funkcije i trigonometrijskih funkcija

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x,$$

odnosno

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

Svaka kosinusna komponenta se može predstaviti kao:

$$s_n(t) = c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),$$

$$s_n(t) = \underbrace{\frac{c_n}{2} e^{j\theta_n}}_{F_n} e^{jn\omega_0 t} + \underbrace{\frac{c_n}{2} e^{-j\theta_n}}_{F_{-n}} e^{-jn\omega_0 t}.$$

Kada se sve kosinusne komponente složenoperiodičnog signala predstave na ovaj način dobija se kompleksni oblik Furijeovog reda, koji je pogodniji za matematičku analizu signala. Odnosno:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad F_n = |F_n| e^{j\theta_n}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Kompleksni koeficijent Furijeovog reda, $|F_n|$ predstavlja amplitudski spektar, a θ_n fazni spektar. Ovakav spektar sadrži i negativne učestanosti, pa se naziva još i dvostrani spektar signala. Negativne učestanosti nisu fizički opravdane, ali je ovakav opis pogodan zbog jednostavnijeg matematičkog opisa.

Neke od korisnih osnovnih osobina razvoja funkcije u Furijeov red koje se kriste u analizi signala su:

- Koeficijent $F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$, predstavlja srednju vrednost, odnosno jednosmernu komponentu signala.
- Amplitudski spektar realnog signala je parna, a fazni spektar neparna funkcija učestanosti, odnosno indeksa harmonika:

$$F_{-n} = F_n^*, |F_{-n}| = |F_n|, \theta_{-n} = -\theta_n.$$

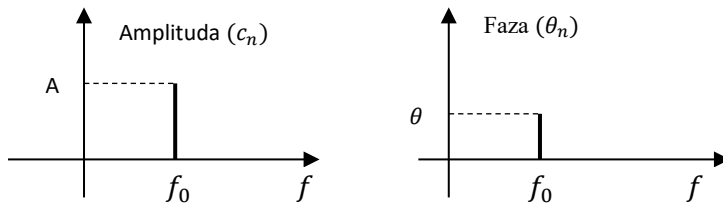
- Razvoj u Furijeov red ima osobinu linearnosti, odnosno ako razvoj periodičnog signala $x(t)$, čija je perioda T , simbolički označimo sa $x(t) \leftrightarrow X_n$ a periodičnog signala $y(t)$, iste periode, sa $y(t) \leftrightarrow Y_n$, onda važi: $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX_n + bY_n$.
- Vremenski pomeraj ne menja amplitudu Furijeovih koeficijenata već samo fazu, odnosno: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f_0 t_0} X_n$.

3.3 ZADACI

1. Nacrtati jednostrani i dvostrani spektar signala $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$.

Rešenje:

Spektar signala se može prikazati sa dva grafika. Na jednom se daje prikaz zavisnosti amplituda spektralnih komponenti od frekvencije: amplitudska frekvencijska karakteristika (amplitudski spektar), a na drugom prikaz zavisnosti faza spektralnih komponenti od frekvencije: fazna frekvencijska karakteristika (fazni spektar). Jednostrani spektar se crta direktno iz polarnog oblika Furijeovog reda. Na x -osi je učestanost, a na y -osi amplituda, odnosno faza signala. Pošto se signal u ovom zadatku sastoji od jedne kosinusne komponente onda je već predstavljen u obliku Furijeovog reda i na Slici 3.2 su prikazani jednostrani amplitudski i fazni spektar signala.



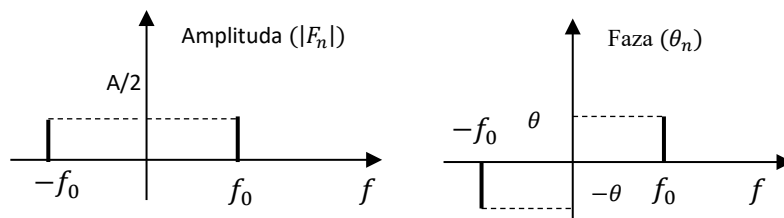
Slika 3.2 Jednostrani spektar signala $A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

Dvostrani spektar se crta iz kompleksnog oblika Furijeovog reda. Za kosinusni signal možemo da napišemo:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} + Ae^{j(\omega_0 t + \theta)}}{2},$$

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j(\omega_0 t)} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j(\omega_0 t)}.$$

Kod dvostranog spektra postoje: komponenta na učestanosti f_0 i komponenta na učestanosti $-f_0$ čije amplitude su jednake $A/2$. Dvostrani spektar uključuje i negativne učestanosti. Amplitudski spektar je parna funkcija učestanosti dok je fazni spektar neparna funkcija učestanosti. Dvostrani spektar je prikazan na Slici 3.3.



Slika 3.3 Dvostrani spektar signala $A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

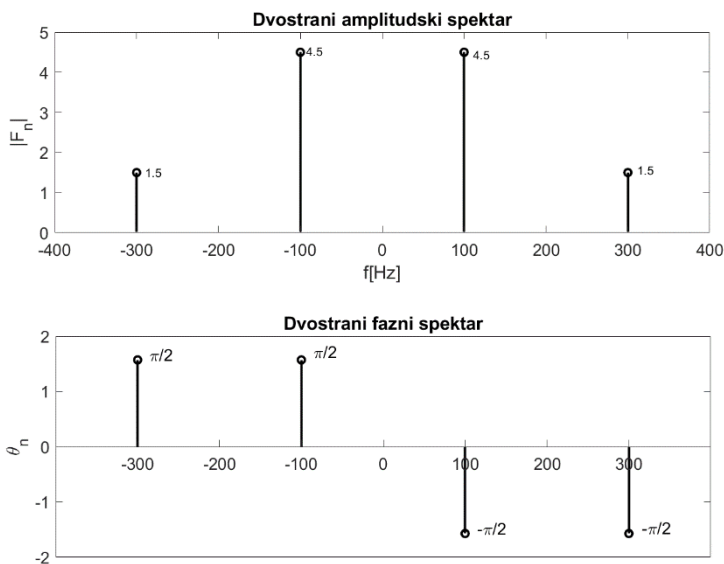
2. Za periodičan signal dat formulom:

$$f(t) = 9 \cos\left(2\pi \cdot f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(6\pi \cdot f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

nacrtati jednostrani i dvostrani amplitudski i fazni spektar signala ako je $f_0 = 100$ Hz.

Rešenje:

Signal se sastoji iz dve sinusne komponente čije su učestanosti 100 Hz i 300 Hz. Dvostrani amplitudski i fazni spektar su prikazani na Slici 3.4.



Slika 3.4 Dvostrani amplitudski i fazni spektar za signal iz Zadatka 2

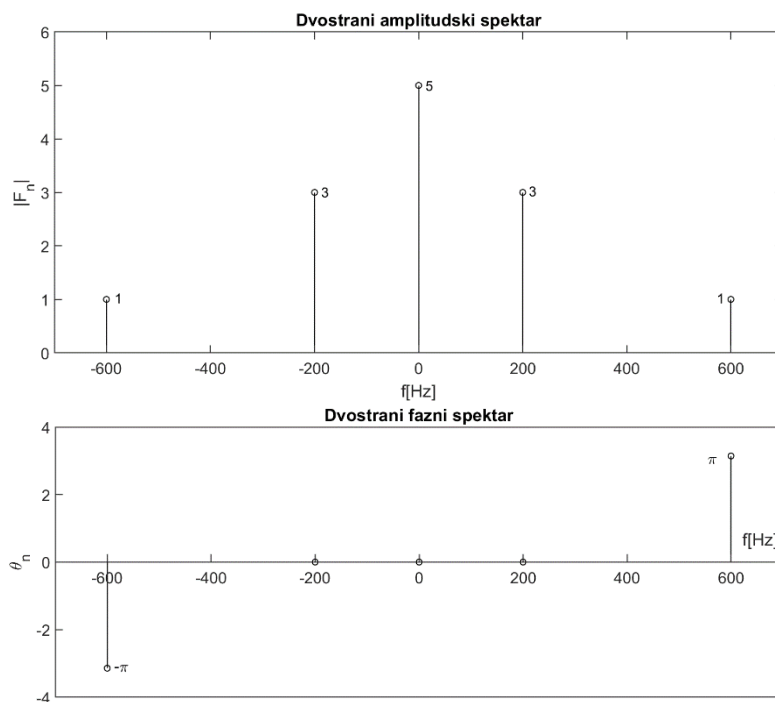
3. Za periodičan signal dat formulom:

$$f(t) = 5 + 6 \cos(2\pi \cdot f_0 t) + 2 \cos(6\pi \cdot f_0 t + \pi).$$

Nacrtati dvostrani amplitudski i fazni spektar signala ako je $f_0 = 200$ Hz.

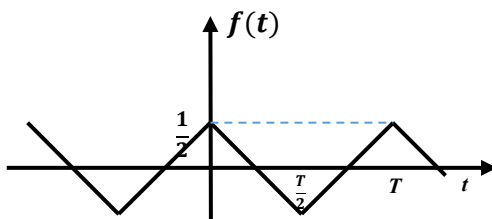
Rešenje:

Signal se sastoji iz dve sinusne komponente čije učestanosti su 200 Hz i 600 Hz i jednosmerne komponente. Dvostrani amplitudski i fazni spektar su prikazani na Slici 3.



Slika 3.5 Dvostrani amplitudski i fazni spektar za signal iz Zadatka 3

4. Za signal prikazan na Slici 3.6 perioda iznosi $T=1$ ms.



Slika 3.6 Periodični signal iz Zadatka 4.

Razvoj funkcije koja opisuje ovaj signal u Furijeov red je dat formulom:

$$f(t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin \frac{n \cdot 2\pi t}{T}.$$

- Kolika je jednosmerna komponenta signala?
- Kolika je osnovna učestanost signala?
- Kolika je učestanost petog harmonika?
- Nacrtati dvostrani amplitudski spektar signala (dovoljno je prikazati prvih pet harmonika u spektru signala).

Rešenje:

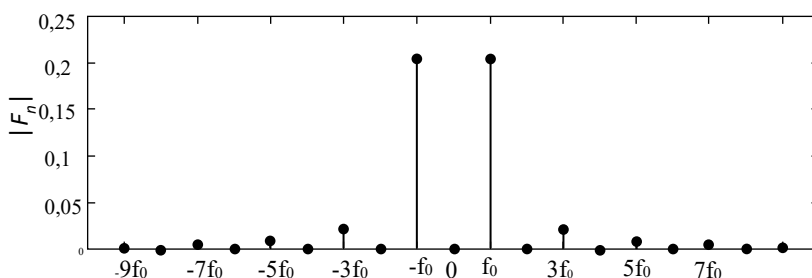
- a) Signal $f(t)$ se može napisati:

$$f(t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin \left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot t}{T} \right),$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi^2} \left[\sin \left(\frac{2\pi \cdot t}{T} \right) - \frac{1}{9} \sin \left(\frac{3 \cdot 2\pi \cdot t}{T} \right) + \frac{1}{25} \sin \left(\frac{5 \cdot 2\pi \cdot t}{T} \right) + \dots \right].$$

Iz izraza za signal $f(t)$ se vidi da je jednosmerna komponenta signala jednaka nuli, pošto ne postoji komponenta čija je učestanost nula.

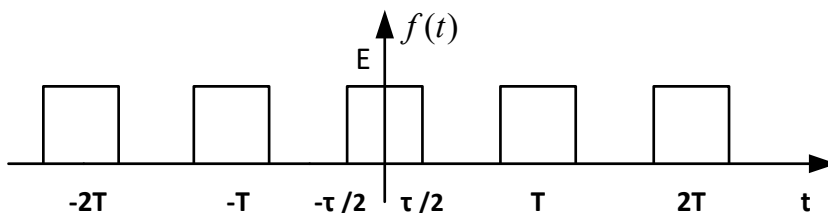
- Osnovna učestanost signala je jednaka: $f_0 = \frac{1}{T} = 1 \text{ kHz}$.
- Učestanost petog harmonika je: $5 \cdot f_0 = 5 \text{ kHz}$.
- Dvostrani amplitudski spektar je prikazan na Slici 3.7.



Slika 3.7 Dvostrani amplitudski spektar za signal iz Zadatka 4.

5. Izračunati izraz za Furijeove koeficijente za periodičnu povorku pravougaonih impulsa prikazanu na Slici 3.8 koristeći trigonometrijski oblik Furijeovog reda:

- a) za proizvoljno trajanje impulsa τ , proizvoljnu učestanost signala $f = \frac{1}{T}$ i proizvoljnu amplitudu signala E ,
- b) izračunati Furijeove koeficijente za $E = 1$ i $\tau = \frac{T}{2}$,
- c) izračunati Furijeove koeficijente za $E = 1$ i $\tau = \frac{T}{4}$.



Slika 3.8 Periodična povorka impulsa iz Zadatka 5

Rešenje:

a) Signal na slici se može predstaviti matematičkom funkcijom koja opisuje signal u toku jedne periode (u intervalu $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$):

$$f(t) = \begin{cases} E, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad \text{za} \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}.$$

Na osnovu teorije razvoja funkcije u Furijeov red imamo:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t).$$

Koeficijenti Furijeovog reda su:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = 2E \frac{\tau}{T} = 2\alpha, \quad \text{gde je} \quad \alpha = \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cdot \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} E \cdot \left. \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2}{T} E \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2) - \sin(-n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0},$$

$$a_n = \frac{2}{T} E \frac{2 \cdot \sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0} = E \frac{4\tau/2 \sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{T n\omega_0 \left(\frac{\tau}{2}\right)},$$

$$a_n = 2E \frac{\tau}{T} \text{Sinc}\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

$$a_n = 2E\alpha \cdot \text{Sinc}\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \sin(n\omega_0 t) dt = 0.$$

b) Za primer gde je $E=1$ i $\tau = T/2$ odnosno $\alpha = 1/2$ imamo:

$$a_0 = \frac{2E\tau}{T} = 1,$$

$$a_n = \frac{2E\tau \sin(n\omega_0\tau/2)}{T n\omega_0(\tau/2)} = 2E\alpha \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2}{3\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{2}{5\pi}, \dots$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \dots \right].$$

c) Za primer gde je $E=1$ i $\tau = T/4$ odnosno $\alpha = 1/4$ imamo:

$$a_0 = \frac{2E\tau}{T} = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2E\tau \sin(n\omega_0\tau/2)}{T n\omega_0(\tau/2)} = 2E\alpha \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{-\sqrt{2}}{5\pi}, \dots$$

6. Izračunati Furijeove koeficijente za periodičnu povorku impulsa iz prethodnog zadatka koristeći kompleksni oblik Furijeovog reda:

- za proizvoljno trajanje impulsa τ , proizvoljnu učestanost signala $f = \frac{1}{T}$ i proizvoljnu amplitudu signala E ,
- za $E = 1$, i $\tau = \frac{T}{2}$, skicirati amplitudski spektar signala,
- za $E = 1$, i $\tau = T/4$, skicirati amplitudski spektar signala.

Rešenje:

a)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt,$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}},$$

$$F_n = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{+jn\omega_0 \tau/2}}{-jn\omega_0} = \frac{E}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} \cdot \frac{e^{-\frac{jn\omega_0 \tau}{2}} - e^{+\frac{jn\omega_0 \tau}{2}}}{-jn\omega_0},$$

$$F_n = \frac{E\tau}{T} \cdot \frac{e^{+\frac{jn\omega_0 \tau}{2}} - e^{-\frac{jn\omega_0 \tau}{2}}}{\underbrace{2 \cdot j}_{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}} \cdot \frac{1}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}},$$

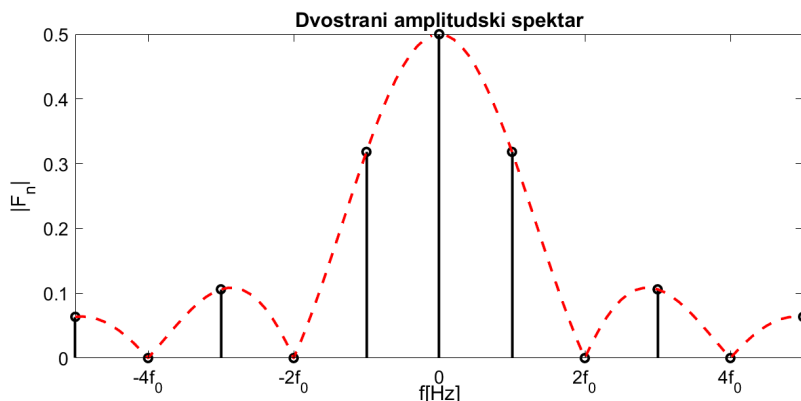
$$F_n = \frac{E\tau \sin n\omega_0 \tau/2}{T n\omega_0 \tau/2}.$$

b) za $\tau = T/2$ i $E = 1, \alpha = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$:

$$F_n = \frac{E\tau \sin n\omega_0 \tau/2}{T n\omega_0 \tau/2} = E \cdot \alpha \cdot \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}$$

$$F_0 = \frac{1}{2}, F_1 = \frac{1}{\pi}, F_{-1} = \frac{1}{\pi}, F_2 = 0, F_{-2} = 0, F_3 = \frac{-1}{3\pi}, F_{-3} = \frac{-1}{3\pi}, \\ F_4 = 0, F_{-4} = 0, F_5 = \frac{1}{5\pi}, F_{-5} = \frac{1}{5\pi}, \dots$$

Dvostrani spektar signala je prikazan na Slici 3.9:



Slika 3.9 Amplitudski spektar signala iz Zadatka 6 b).

Obvojnica (anvelopa) amplitudskog spektra se dobija kada se diskretne vrednosti $n\omega_0$ zamene kontinualnom promenljivom ω . Odnosno, anvelopa je data sa $\frac{E\tau \sin \omega\tau/2}{T \omega\tau/2}$.

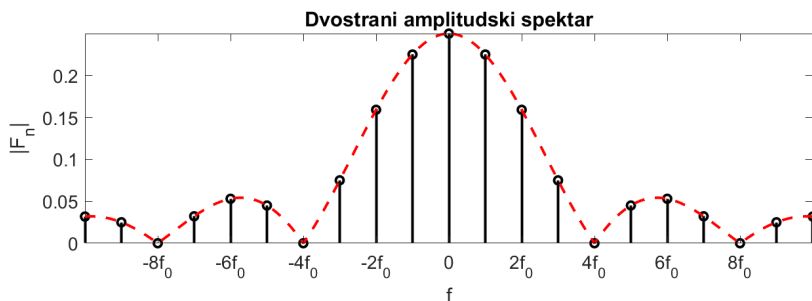
c) za $E = 1$, $\tau = T/4$, $\alpha = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$:

$$F_n = \frac{E\tau \sin n\omega_0\tau/2}{T n\omega_0\tau/2} = E \cdot \alpha \cdot \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}},$$

$$F_0 = \frac{1}{4}, F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, F_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, F_2 = \frac{1}{2\pi}, F_{-2} = \frac{1}{2\pi}, F_3 = \frac{\sqrt{2}}{6\pi},$$

$$F_{-3} = \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, F_4 = 0, F_{-4} = 0, F_5 = \frac{-\sqrt{2}}{10\pi}, F_{-5} = \frac{-\sqrt{2}}{10\pi}, \dots$$

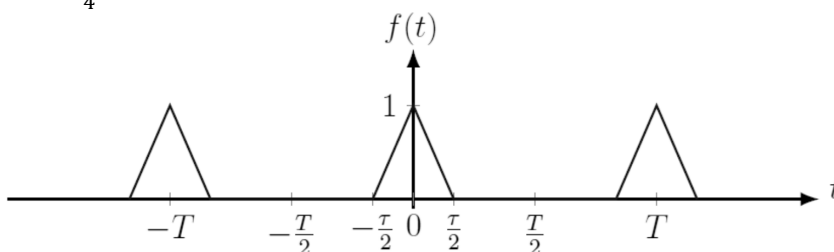
Dvostrani spektar signala je prikazan na Slici 3.10:



Slika 3.10 Amplitudski spektar signala iz Zadatka 6 c).

7. Izračunati izraz za Furijeove koeficijente za periodičnu povorku trougaonih impulsa prikazanu na Slici 3.11 koristeći trigonometrijski oblik Furijeovog reda:

- za proizvoljno trajanje impulsa τ , proizvoljnu učestanost signala $f = \frac{1}{T}$ i amplitudu signala $E = 1$,
- za $\tau = \frac{T}{2}$, skicirati amplitudski spektar signala,
- za $\tau = \frac{T}{4}$, skicirati amplitudski spektar signala.



Slika 3.11 Periodična povorka trougaonih impulsa iz Zadatka 7

Rešenje:

a) Signal na slici se može predstaviti matematičkom funkcijom koja opisuje signal u toku jedne periode (u intervalu $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2}, \\ E + \frac{2Et}{\tau} & \text{za } -\frac{\tau}{2} \leq t < 0, \\ E - \frac{2Et}{\tau} & \text{za } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{za } \frac{\tau}{2} < t \leq \frac{T}{2}, \end{cases}$$

Pošto je u pitanju parna funkcija možemo da pišemo:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{4E}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left(1 - \frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{4E}{T} \left[t - \frac{2t^2}{2\tau} \right]_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{\tau}{T} \cdot E = \alpha \cdot E,$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \left(1 - \frac{2t}{\tau}\right) \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$a_n = \frac{4E}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{\frac{\tau}{2}} - \frac{8E}{T\tau} \left[\frac{t \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{\frac{\tau}{2}} - \frac{8E}{T\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} dt,$$

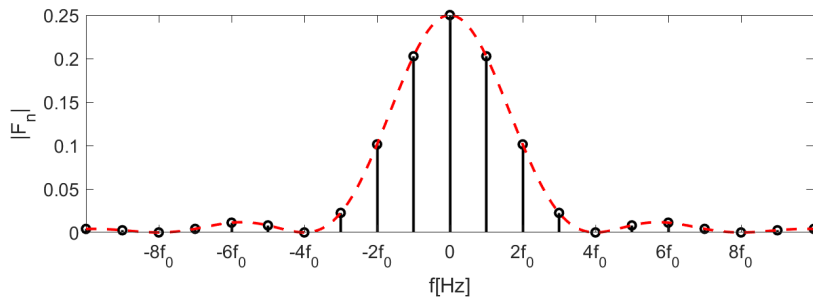
$$a_n = \frac{4E}{n\omega_0 T} \sin\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) - \frac{8E}{\tau T} \frac{\tau}{2} \frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_0} - \frac{8E}{\tau T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} dt,$$

$$a_n = \frac{8E}{n^2 \omega_0^2 \tau T} \left(1 - \cos\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)\right) = \frac{2E}{n^2 \pi^2 \alpha} (1 - \cos(n\pi\alpha)),$$

$$a_n = \alpha E \frac{\left(\sin\left(\frac{n\pi\alpha}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{n\pi\alpha}{2}\right)^2}.$$

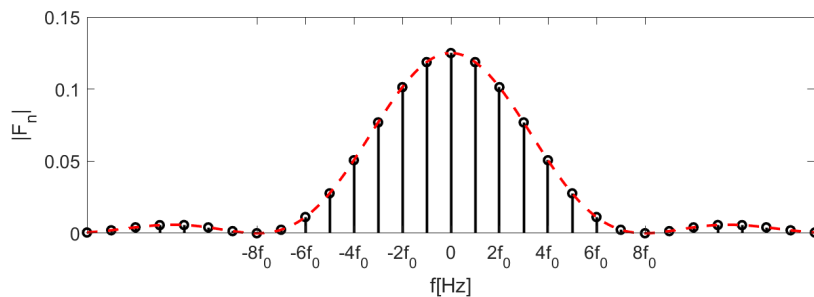
$b_n = 0$ jer je $f(t)$ parna funkcija.

b) Amplitudski spektar signala za $\tau = \frac{T}{2}$ je prikazan na Slici 3.12. Isprekidanom linijom je prikazana obvojinica (anvelopa amplitudskog spektra).



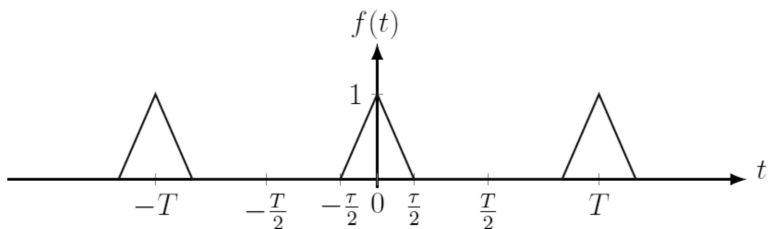
Slika 3.12 Spektar signala iz Zadatka 7 b)

c) Amplitudski spektar signala za $\tau = \frac{T}{4}$ je prikazan na Slici 3.13. Isprekidanom linijom je označena anvelopa amplitudskog spektra.



Slika 3.13 Amplitudski spektar signala iz Zadatka 7 c).

8. Izračunati koeficijente Furijeovog reda za periodičnu povorku impulsa prikazanu na Slici 3.14 koristeći kompleksni oblik Furijeovog reda za proizvoljno trajanje impulsa τ , proizvoljnu učestanost signala $f = \frac{1}{T}$ i amplitudu signala $E = 1$.



Slika 3.14 Periodična povorka trougaonih impulsa iz Zadatka 8

Rešenje:

Primititi da je u pitanju povorka impulsa ista kao u prethodnom zadatku. Signal na slici se može predstaviti matematičkom funkcijom koja opisuje signal u toku jedne periode (u intervalu $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \\ E + \frac{2Et}{\tau} & \text{za } -\frac{\tau}{2} \leq t < 0 \\ E - \frac{2Et}{\tau} & \text{za } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za } \frac{\tau}{2} < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 E \left(1 + 2\frac{t}{\tau} \right) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \left(1 - 2\frac{t}{\tau} \right) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \right],$$

$$F_n = \frac{E}{T} \left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \right] + \frac{E}{T} \left[\frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 t e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt - \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} t e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \right],$$

$$F_n = E \left[\frac{e^{jn\frac{\pi}{T}\tau} - e^{-jn\frac{\pi}{T}\tau}}{j2\pi n} \right] + E \left[-\frac{e^{jn\frac{\pi}{T}\tau}}{j2\pi n} - \frac{T}{2\tau} \frac{e^{jn\frac{\pi}{T}\tau}}{(\pi n)^2} + \frac{T}{2\tau(\pi n)^2} \right] + E \left[\frac{T}{2\tau(\pi n)^2} + \frac{e^{-jn\frac{\pi}{T}\tau}}{j2\pi n} - \frac{T}{2\tau(\pi n)^2} e^{-jn\frac{\pi}{T}\tau} \right],$$

$$F_n = \frac{E \cdot T}{2\tau(\pi n)^2} \left[-e^{jn\frac{\pi}{T}\tau} - e^{jn\frac{\pi}{T}\tau} + 2 \right],$$

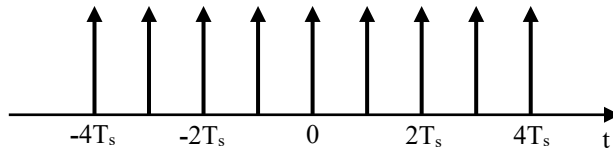
$$F_n = \frac{E \cdot T}{2\tau(\pi n)^2} \left(\frac{e^{jn\frac{\pi}{T}\tau} - e^{-jn\frac{\pi}{T}\tau}}{2j} \right) \left(\frac{e^{jn\frac{\pi}{T}\tau} - e^{-jn\frac{\pi}{T}\tau}}{2j} \right),$$

$$F_n = \frac{E \cdot 2T}{\tau} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{n\pi\tau}{2T} \right)}{(\pi n)^2},$$

$$F_n = \frac{E \cdot \alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 \left(n\pi \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(n\pi \frac{\alpha}{2} \right)^2}.$$

9. Izračunati koeficijente Furijeovog reda za periodičnu povorku Dirakovih impulsa prikazanu na Slici 3.15.

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



Slika 3.15 Periodična povorka Dirakovih impulsa

Rešenje:

Koeficijenti Furijeovog reda povorke Dirakovih impulsa se mogu naći kao:

$$F_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}.$$

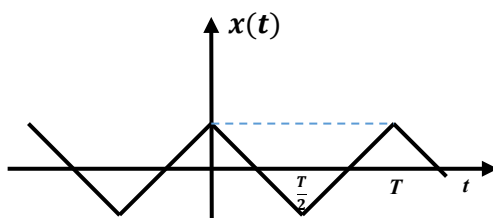
Kada se funkcija $x_\delta(t)$ predstavi razvojem u Furijeov red imamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t}.$$

3.4 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Za spektralnu analizu kontinualnih i periodičnih signala se koristi:
a) Furijeov red,
b) Furijeova transformacija,
c) diskretna Furijeova transformacija.
2. Spektar periodičnog signala je:
a) kontinualna funkcija učestanosti,
b) diskretan (linijski) spektar,
c) uvek beskonačan.
3. Dvostrani amplitudski spektar realnog signala je:
a) parna funkcija učestanosti,
b) neparna funkcija učestanosti,
c) ni parna, ni neparna.
4. Dvostrani fazni spektar realnog signala je:
a) parna funkcija učestanosti,
b) neparna funkcija učestanosti,
c) ni parna, ni neparna funkcija.
5. Vremenski pomeraj:
a) ne menja amplitudu Furijeovih koeficijenata već samo fazu,
b) menja i fazu i amplitudu Furijeovih koeficijenata,
c) ne menja ni fazu ni amplitudu Furijeovih koeficijenata.
6. Generalno, povećanjem broja članova u sumi Furijeovog reda aproksimacija originalne funkcije se:
a) poboljšava,
b) pogoršava,
c) ne menja.

7. Za signal prikazan na slici $T=1$ ms.



Razvoj funkcije u Furijeov red dat je formulom:

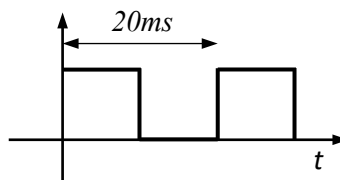
$$x(t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n \cdot 2\pi t}{T}.$$

Kolika je učestanost petog harmonika?

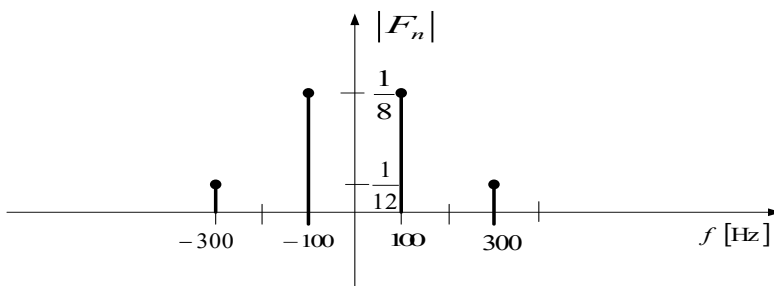
- a) 1kHz,
- b) 10 kHz,
- c) **5kHz.**

8. Treći harmonik signala sa slike ima frekvenciju:

- a) 50 Hz,
- b) **150 Hz,**
- c) 300 Hz.



9. Za signal čiji je dvostrani amplitudski spektar prikazan na slici, vremenski oblik signala je:



a) $\frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t) + \frac{1}{6} \cos(2\pi \cdot 300 \cdot t),$

b) $\frac{1}{8} \cos(100 \cdot t) + \frac{1}{12} \cos(300 \cdot t),$

c) $\frac{1}{7} \cos(3\pi \cdot 100 \cdot t) + \frac{1}{9} \cos(2\pi \cdot 314 \cdot t).$

10. Srednja snaga periodičnog signala je:

a) jednaka nuli,

b) jednaka zbiru srednjih snaga pojedinačnih harmonika,

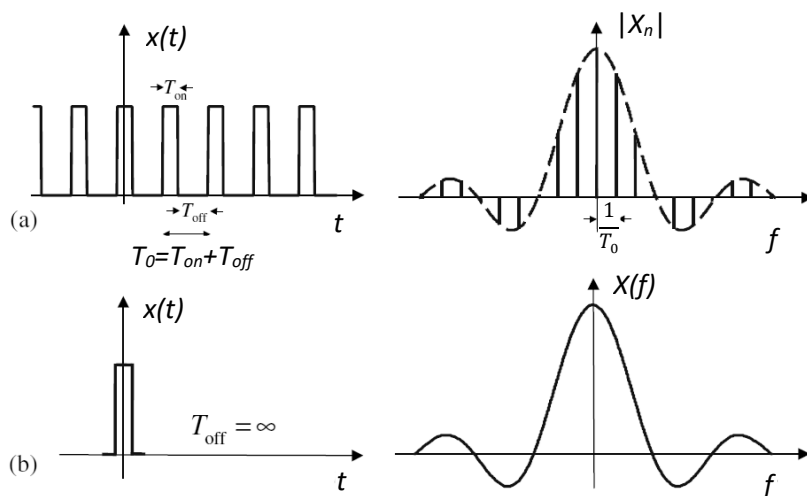
c) beskonačna.

4 FURIJEOVA ANALIZA APERIODIČNIH KONTINUALNIH SIGNALA

Ciljevi: Sticanje osnovnih znanja o Furijeovoj transformaciji i njenoj primeni u analizi signala. Sticanje znanja o osnovnim osobinama Furijeove transformacije i spektru osnovnih oblika aperiodičnih signala.

4.1 UVOD

Kada se period periodičnog signala povećava osnovna učestanost signala se smanjuje i spektralne komponente postaju sve bliže po učestanosti. U graničnom slučaju kada perioda signala teži beskonačnosti, odnosno kada preiodičan signal postaje aperiodičan, spektar signala postaje kontinualna funkcija učestanosti. Ovo je ilutstrovano na slici 4.1 na primeru periodične povorke pravougaonih impulsa kada period $T_0 \rightarrow \infty$.



Slika 4.1 Ilustracija promene spektra periodičnog signala kada postaje aperiodičan

4.2 FURIJEOV INTEGRAL

Analiza aperiodičnih signala obavlja se pomoću Furijeovog integrala. Ovaj integral se dobija kada se u izrazu za Furijeov red stavi da $T_0 \rightarrow \infty$, $n\omega_0 \rightarrow \omega$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$. Kompleksna veličina

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

se naziva Furijeov integrali ili Furijeova transformacija aperiodične funkcije $f(t)$. To je kontinualna funkcija po učestanosti ω koja predstavlja kontinualni kompleksni spektar aperiodične funkcije. Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

se naziva inverzna Furijeova transformacija.

U opštem slučaju $F(j\omega)$ je kompleksna veličina i može se pisati kao $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$, gde je $|F(j\omega)|$ amplitudska spektralna karakteristika, a $\theta(\omega)$ fazna spektralna karakteristika.

4.3 OSNOVNE OSOBINE FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

Neka je Furijeova transformacija funkcije $f(t)$ data funkcijom $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

Važe sledeće osobine:

- Osobina linearnosti: $\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$.
- Osobina vremenskog pomeraja: $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$.
Vremenski pomeraj ne menja amplitudski spektar signala već samo fazni spektar.
- Osobina frekvencijskog pomeraja: $\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(j\omega - \omega_0)$.
- Osobina modulacije: $\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}F[j(\omega + \omega_0)]$
- Osobina konvolucije: Integral oblika $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau$ ima posebnu ulogu u analizi sistema u vremenskom domenu i naziva se konvolucija. Simbolički se konvolucija dva signal označava zvezdicom,

odnosno, za ovaj primer $y(t) = u(t) * h(t)$. Konvolucija dva signala u vremenskom domenu jednaka je proizvodu njihovih spektara u frekvencijskom domenu, odnosno:

$$\mathcal{F}\{u(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h(t)\} = U(j\omega) \cdot H(j\omega).$$

- Osobina dualnosti : zbog sličnosti u izrazima za Furijeovu transformaciju i inverznu Furijeovu transformaciju važi osobina dualnosti. Osobina dualnosti vremena i frekvencije kod Furijeove transformacije, kaže, da ako je poznata Furijeova transformacija signala $x(t)$ i jednaka je $X(j\omega)$ onda će Furijeova transformacija signala $X(t)$ biti data sa $2\pi x(-\omega)$.

4.3.1 Furijeova transformacija kosinusnog signala

Za signal $\cos(\omega_0 t)$ se može koristeći Ojelrovu (Euler) formulu napisati:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

Na osnovu osobine Dirakove funkcije važi da je inverzna Furijeova transformacija:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

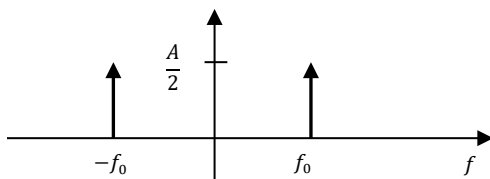
Iz prethodnih izraza se vidi da je

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \text{ i } \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

pa je Furijeova transformacija kosinusne funkcije data sa

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} (2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)).$$

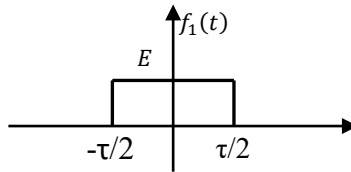
Spektar kosinusnog signala amplitude A je prikazan na Slici 4.2.



Slika 4.2 Spektar signala $A \cdot \cos(\omega_0 t)$

4.4 ZADACI

1. Izračunati Furijeovu transformaciju pravougaonog impulsa prikazanog na Slici 4.3 i dati grafički prikaz spektra signala.



Slika 4.3 Pravougaoni impuls iz Zadatka 1.

Rešenje:

Kada se u izraz za Furijeovu transformaciju zameni funkcija prikazana na Slici 4.3 dobija se:

$$F_1(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = E \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}},$$

$$F_1(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = E \cdot \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{+j\omega\tau/2}}{-j\omega},$$

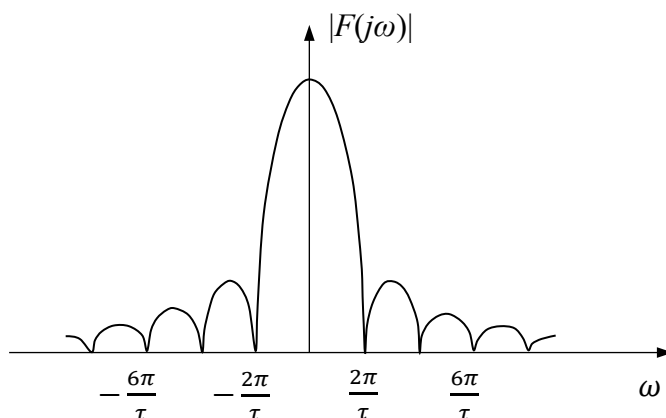
$$F_1(j\omega) = E \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{\tau}{\frac{\tau}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{j\omega},$$

$$F_1(j\omega) = E \cdot \tau \cdot \frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{2 \cdot j} \cdot \frac{1}{\omega \frac{\tau}{2}},$$

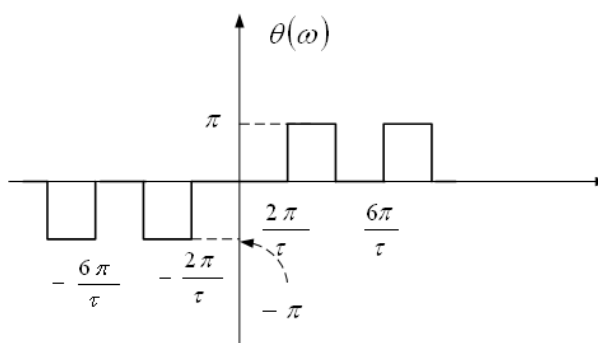
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}$

$$F_1(j\omega) = E\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

Grafički prikaz amplitudskog i faznog spektra signala je dat na Slici 4.4 i Slici 4.5. Na prvoj slici je prikazana spektralna gustina amplituda $|F(j\omega)|$, a na drugoj spektralna gustina faza.

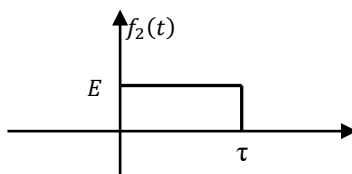


Slika 4.4 Amplitudski spektar (spektralna gustina amplituda) usamljenog pravougaonog impulsa iz Zadatka 1



Slika 4.5 Fazni spektar (spektralna gustina faza) usamljenog pravougaonog impulsa iz Zadatka 1

2. Izračunati Furijeovu transformaciju pravougaonog impulsa prikazanog na Slici 4.6 i dati grafički prikaz spektra signala. Uporediti signale i spektre iz prethodnog i ovog zadatka.



Slika 4.6 Usamljeni pravougaoni impuls iz Zadatka 2

Rešenje:

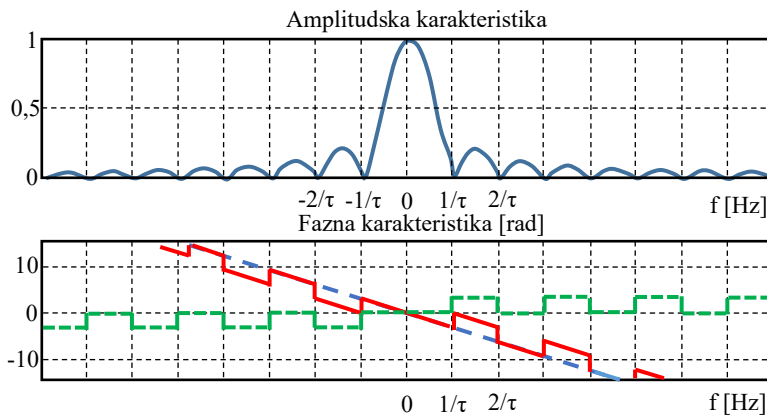
Na osnovu izraza za Furijeovu transformaciju dobijamo da je spektar signala:

$$F_2(j\omega) = \int_0^{\tau} E e^{-j\omega t} dt = E \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{\tau},$$

$$F_2(j\omega) = E \frac{e^{-j\omega\tau} - 1}{-j\omega} = E \cdot e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}}}{-j\omega},$$

$$F_2(j\omega) = E\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}.$$

Ako uporedimo signale iz prethodnog i ovog zadatka vidimo da je pravougaoni impuls u ovom zadatku zakašnjena verzija impulsa iz Zadatka 1. Odnosno, može se pisati: $f_2(t) = f_1(t - \tau/2)$. Ako uporedimo spektre vidimo da je $F_2(j\omega) = F_1(j\omega)e^{-j\omega\tau/2}$. Amplitudski spektar signala $f_2(t)$ je isti kao i amplitudski spektar signala u prethodnom zadatku. Amplitudski i fazni spektar signala $f_2(t)$ su prikazani na Slici 4.7.



Slika 4.7 Amplitudski i fazni spektar za signal iz Zadatka 2

3. Dokazati osobinu vremenskog pomeraja: $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$, gde je sa $\mathcal{F}\{f(t)\}$ simbolički označena Furijeova transformacija funkcije $f(t)$. Pomoću ove osobine rešiti prethodni zadatak.

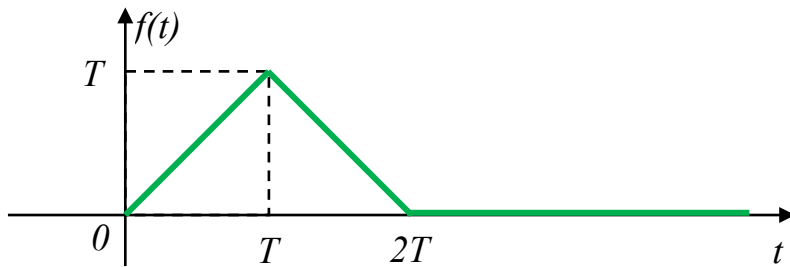
Rešenje:

Furijeova transformacija funkcije zakašnjene u vremenu za t_0 se može izračunati na osnovu definicije Furijeove transformacije na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt, \\ \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega(t-t_0)} e^{-j\omega t_0} d(t - t_0), \\ \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} &= F(j\omega) e^{-j\omega t_0}.\end{aligned}$$

Prethodni zadatak se može rešiti i poznajući kako izgleda Furijeova transformacija provougaoanog impulsa iz Zadatka 1 (Slika 4.3) i koristeći formulu izvedenu u ovom zadatku $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$. Primititi da je impuls $f_2(t)$ iz Zadatka 2 jednak zakašnjenom impulsu iz Zadatka 1 odnosno: $f_2(t) = f_1(t - \tau/2)$, odnosno da je $t_0 = \tau/2$. Iz prethodnog sledi $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_1(j\omega) e^{-j\omega \tau/2}$ gde je $F_1(j\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$.

4. Izračunati Furijeovu transformaciju trougaonog impulsa prikazanog na Slici 4.8.



Slika 4.8 Trougaoni impuls iz Zadatka 4.

Rešenje:

$$\begin{aligned}F(j\omega) &= \int_0^T t e^{-j\omega t} dt + \int_T^{2T} (2T - t) e^{-j\omega t} dt, \\ F(j\omega) &= \int_0^T t e^{-j\omega t} dt + \int_T^{2T} 2T e^{-j\omega t} dt - \int_T^{2T} t e^{-j\omega t} dt, \\ F(j\omega) &= \left. \frac{te^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_0^T + \left. \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \right|_0^T + 2T \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_T^{2T} - \left. \frac{te^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_T^{2T} - \left. \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \right|_T^{2T},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{T e^{-j\omega T}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega T} - 1}{\omega^2} + 2T \frac{e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T}}{-j\omega} \\
&\quad - \frac{2T e^{-j\omega T} - T e^{-j\omega T}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T}}{\omega^2}, \\
F(j\omega) &= \frac{1}{\omega^2} (e^{-j\omega T} - 1 - e^{-j\omega 2T} + e^{-j\omega T}), \\
F(j\omega) &= \frac{1}{\omega^2} e^{-j\omega T} (1 - e^{j\omega T} - e^{-j\omega T} + 1), \\
F(j\omega) &= \frac{1}{\omega^2} e^{-j\omega T} 4 \left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right)^2, \\
F(j\omega) &= e^{-j\omega T} T^2 \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.
\end{aligned}$$

5. Dokazati osobinu konvolucije: $\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(j\omega)F_2(j\omega)$, gde je sa $\mathcal{F}\{f(t)\}$ simbolički označena Furijeova transformacija funkcije $f(t)$. Pomoću ove osobine rešiti prethodni zadatak.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \\
\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt, \\
\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau, \\
\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} \right) d\tau, \\
\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) (e^{-j\omega\tau}) d\tau, \\
\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= F_1(j\omega) F_2(j\omega).
\end{aligned}$$

Prethodni zadatak se može rešiti ako primetimo da se funkcija prikazana na Slici 4.8 može dobiti konvolucijom dva pravougaona impulsa kao što je to pokazano u Zadatku 10. u Poglavlju 1. Na osnovu osobine konvolucije sledi da je Furijeova transformacija trougaonog impulsa jednaka proizvodu

Furijevih transformacija pravougaonih impulsa. U ovom poglavlju u Zadatku 2 je izračunata Furijeova transformacija pravougaonog impulsa. Tako da možemo da pišemo:

$$F(j\omega) = F_1(j\omega)F_2(j\omega), \text{ gde je } F_1(j\omega) = F_2(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2},$$

Furijeova transformacija pravougaonog impulsa.

$$F(j\omega) = F_1(j\omega)F_2(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{j\omega T}{2}} \cdot T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{j\omega T}{2}},$$

$$F(j\omega) = T^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 e^{-j\omega T}.$$

6. Dokazati osobinu modulacije:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2}F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}F[j(\omega + \omega_0)],$$

gde je sa $\mathcal{F}\{f(t)\}$ simbolički označena Furijeova transformacija funkcije $f(t)$.

Rešenje:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\},$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{-j\omega_0 t}\},$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt,$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt,$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2}F(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega + \omega_0)).$$

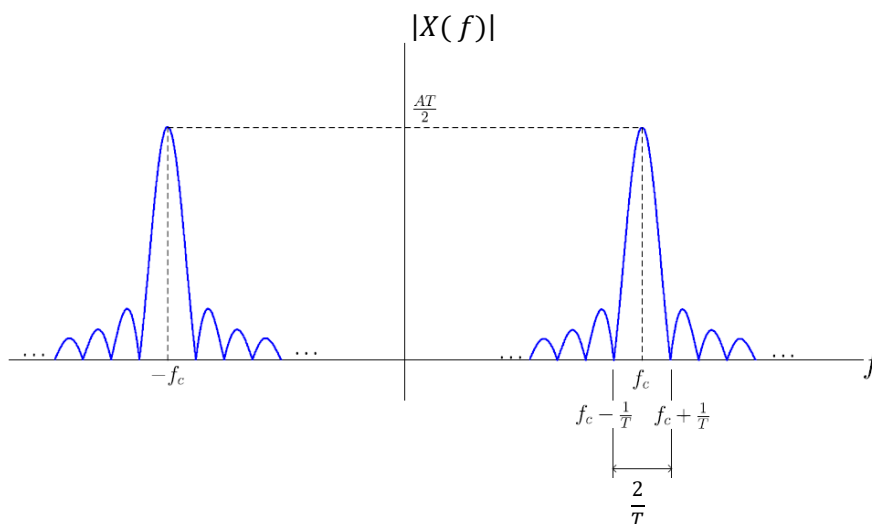
7. Koristeći osobinu modulacije izračunati i skicirati spektar signala dobijenog množenjem pravougaonog impulsa iz Zadatka 1 i kosinusne funkcije $\cos(\omega_c t)$, odnosno impulsa oblika:

$$x(t) = \begin{cases} E \cos(\omega_c t), & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Smatrati da je $\omega_c \gg 2\pi/\tau$, tako da se može smatrati da je preklapanje spektralnih komponenti iz domena pozitivnih i negativnih učestanosti zanemarljivo.

Rešenje:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_c)), \\ \mathcal{F}\{x(t)\} &= \frac{1}{2}E\tau \frac{\sin((\omega - \omega_c)\tau/2)}{(\omega - \omega_c)\tau/2} + \frac{1}{2}E\tau \frac{\sin((\omega + \omega_c)\tau/2)}{(\omega + \omega_c)\tau/2}. \end{aligned}$$



Slika 4.9 Amplitudski spektar signala iz Zadatka 7

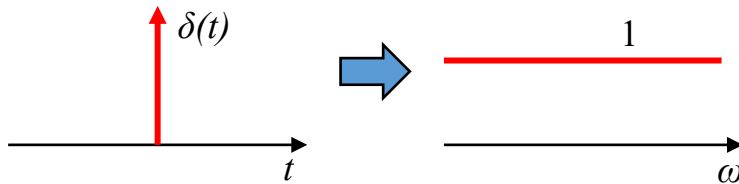
8. Nacrtati spektar signala Dirakove funkcije $x(t) = \delta(t - t_0)$.

Rešenje:

Na osnovu osobine Dirakove funkcije $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)$ sledi da je Furijeova transformacija funkcije $x(t)$ data sa:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}.$$

Vremenski oblik i amplitudski spektar signala su prikazani na Slici 4.10.

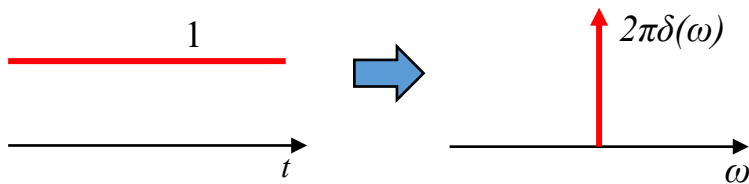


Slika 4.10 Amplitudski spektar signala iz Zadatka 8.

Takođe treba primetiti da je inverzna Furijeova transformacija

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}.$$

Ovo pokazuje osobinu dualnosti, odnosno Furijeova transformacija konstantne funkcije je jednaka Dirakovom (delta) impulsu u frekvenzijskom domenu. Vremenski oblik i spektar konstantne funkcije su prikazani na Slici 4.11.



Slika 4.11 Vremenski oblik i spektar konstantne funkcije

9. Koristeći osobinu dualnosti prikazati spektar signala:

$$x(t) = 2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}.$$

Rešenje:

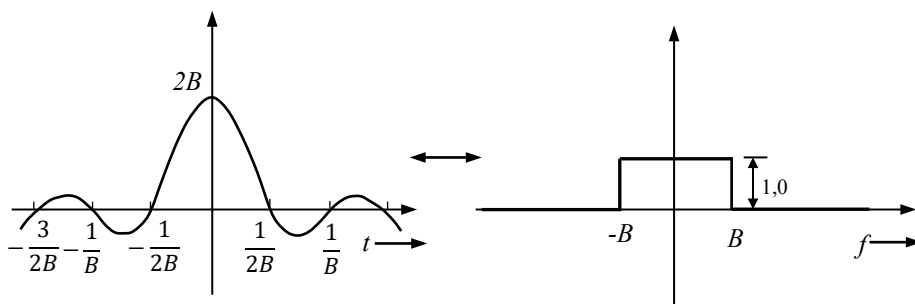
Na osnovu rezultata iz Zadatka 1 možemo da napišemo Furijeovu transformaciju pravougaonog signala $\text{rect}(\frac{t}{2B})$:

$$\mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{2B}\right)\right\} = 2B \frac{\sin(2\pi Bf)}{2\pi Bf}.$$

Na osnovu teoreme dualnosti znamo da ako je Furijeova transformacija signala $x(t)$ jednaka $X(jf)$ onda će Furijeova transformacija signala $X(t)$ biti data sa $x(-f)$, odnosno u našem primeru

$$\mathcal{F}\left\{2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}\right\} = \text{rect}\left(-\frac{t}{2B}\right).$$

Signal i njegov spektar su prikazani na Slici 4.12.



Slika 4.12 Vremenski oblik i spektar funkcije $2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$

Treba primetiti da je spektar impulsa oblika $\frac{\sin(t)}{t}$ u vremenskom domenu dat pravougaonom funkcijom u frekvencijskom domenu. Impuls ovakvog oblika ima ograničen spektar. U Zadatku 1 smo videli da pravougaona funkcija u vremenskom domenu, odnosno impuls ograničen u vremenu, ima spektar oblika $\frac{\sin(\omega)}{\omega}$, odnosno beskonačan spektar.

4.5 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

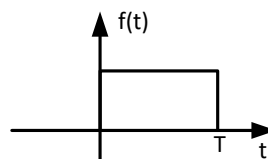
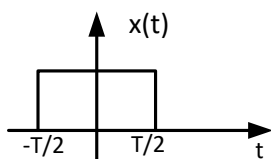
1. Amplitudski spektar usamljenog pravougaonog impulsa amplitude E i trajanja τ je jednak:

a) $|F(j\omega)| = \left| E\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|,$

b) $|F(j\omega)| = 1,$

c) $|F(j\omega)| = \delta(\omega).$

2. Signali prikazani na slici imaju:

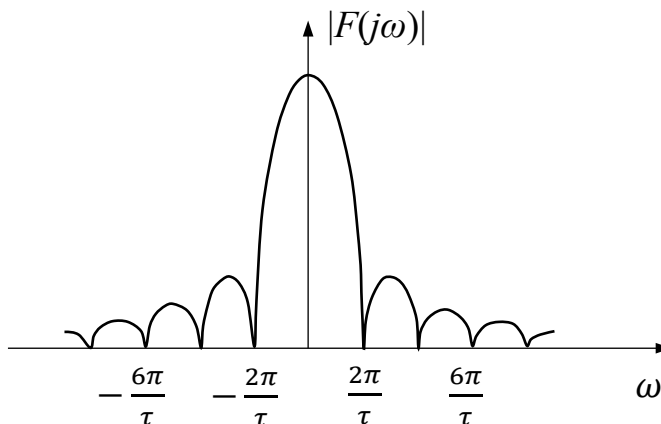


a) isti amplitudski spektar a različit fazni spektar,

b) isti fazni a različit amplitudski spektar,

c) isti i amplitudski i fazni spektar.

3. Na slici je prikazan spektar usamljenog pravougaonog impulsa trajanja τ . Odrediti širinu spektra signala po kriterijumu prve nule u spektru signala u Hz.



a) $1/\tau,$

b) $2/\tau,$

c) $6/\tau.$

4. Za širinu spektra signala usamljenog pravougaonog impulsa po kriterijumu prve nule u spektru signala važi:

- a) širina spektra signala se smanjuje ako se trajanje impulsa smanjuje,
- b) **širina spektra signala se povećava ako se trajanje impulsa smanjuje,**
- c) širina spektra signala ne zavisi od trajanja impulsa.

5 SISTEMI ZA PRENOS SIGNALA

Ciljevi: Upoznavanje sa opisom sistema za prenos signala u frekvencijskom domenu, uslovima idealnog prenosa, filtrima i konceptima filtriranja, i osobinama relanih medijuma za prenos signala.

5.1 UVOD

Opis sistema za prenos signala u vremenskom domenu je bio predstavljen u prvom poglavlju. Sistemi kao i signali se mogu analizirati i posmatrati u frekvencijskom domenu. Teorijsko modelovanje i analiza daju podatke o idealnim (željenim) karakteristikama sistema. Poznajući idealne karakteristike, mogu se dizajnirati i analizirati realni sistemi za prenos signala. Linearni vremenski nepromenljivi sistemi (*LTI --Linear time-invariant system*) se mogu opisati u frekvencijskom domenu preko funkcije prenosa sistema. Funkcija prenosa sistema je kompleksna veličina koja pokazuje delovanje sistema na amplitudu i fazu spektralnih komponenti signala i naziva se još frekvencijska karakteristika sistema. U zavisnosti od oblika ove funkcije neke od spektralnih komponenti signala će biti oslabljene, a neke pojačane. Ova osobina LTI sistema se naziva filtriranje. Signali kojima se prenose informacije u praksi se mogu smatrati signalima ograničenog spektra. Sitemi za prenos se projektuju tako da propuštaju samo određeni opseg učestanosti. Ovaj opseg se naziva propusni opseg sistema. Idealni sistemi se mogu opisati karakteristikama idealnih filtara.

5.2 OPIS SISTEMA U FREKVENCIJSKOM DOMENU

U frekvencijskom domenu sistem za prenos se opisuje kompleksnom funkcijom $H(j\omega)$ koja opisuje kako linearan sistem utiče na amplitudu i fazu ulaznog signala. Ako je na ulazu sistema prisutan signal $x(t)$ čija je Furijeova transformacija $X(j\omega)$ a na izlazu imamo signal $y(t)$, čija je Furijeova transformacija $Y(j\omega)$ onda je

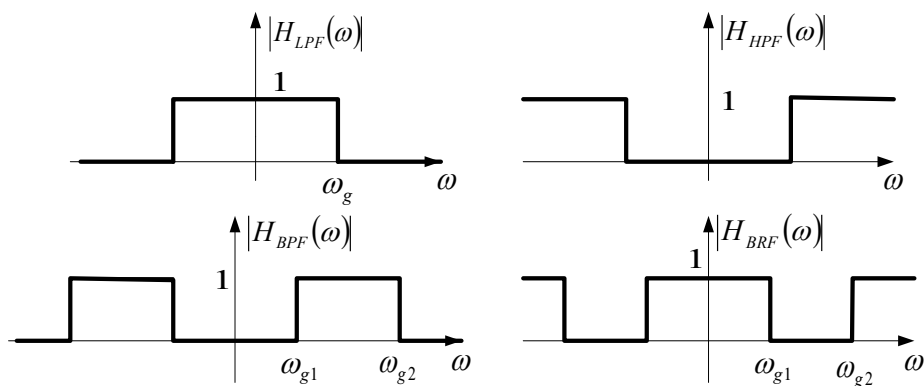
$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega), \quad H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

gde je $H(j\omega)$ kompleksna veličina koja se naziva prenosna funkcija sistema. Moduo ove kompleksne veličine $|H(j\omega)|$ se naziva amplitudska karakteristika, a argument $\gamma(\omega)$ predstavlja faznu karakteristiku sistema.

U vremenskom domenu odziv na proizvoljnu pobudu se računa kao konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva sistema. U frekvencijskom domenu spektar izlaznog signala je dat proizvodom spektra ulaznog signala i funkcije prenosa sistema. Funkcija prenosa sistema predstavlja Furijeovu transformaciju impulsnog odziva sistema.

5.3 IDEALNI FILTRI

Idealni filtri propuštaju određeni opseg učestanosti bez slabljenja, a ostali deo spektra signala beskonačno slabe. U zavisnosti od propusnog opsega filtri se dele na: propusnike niskih učestanosti (*Lowpass Filters* – LPF), propusnike visokih učestanosti (*Highpass Filters* – HPF), propusnike opsega učestanosti (*Bandpass Filters* – BPF), nepropusnike opsega učestanosti (*Band-Reject Filters* – BRF). Frekvencijske karakteristike idealnih filtara su prikazane na Slici 5.1.



Slika 5.1 Karakteristike idealnih filtara

Često se za amplitudsku frekvencijsku karakteristiku ne daje direktna zavisnost funkcije $H(f)$ od učestanosti nego se prikazuje: $|H(jf)| = 20 \cdot \log_{10}|H(jf)|$ u zavisnosti od učestanosti, pri čemu se i frekvencijska osa crta sa logaritamskom podelom.

U ovom slučaju se pojačanje koje unosi filter izražava u decibelima. Pošto pasivni filteri unose pojačanje manje od jedan, odnosno imaju negativno pojačanje izraženo u decibelima, onda se definiše i slabljenje kao:

$$\alpha(f) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{|H(jf)|} \right).$$

5.4 USLOVI IDEALNOG PRENOSA SIGNALA

Idealan sistem za prenos ne unosi izobličenja u signal. Odziv idealnog sistema $y(t)$ na pobudu signalom $x(t)$ se u vremenskom domenu može predstaviti:

$$y(t) = Ax(t - t_0).$$

Izlaz idealnog sistema je zakašnjena verzija ulaznog signala i pomnožena konstantom A. U frekvencijskom domenu uslovi idealnog prenosa su dati sa:

$$H(j\omega) = Ae^{j\omega t_0}.$$

Odnosno, amplitudska frekvencijska karakteristika sistema je ravna funkcija, nezavisna od učestanosti, a fazna karakteristika je linearna funkcija učestanosti:

$$\gamma(\omega) = -\omega t_0.$$

Definiše se i karakteristika faznog kašnjenja kao:

$$\theta(\omega) = \omega t_0.$$

5.5 IZOBLIČENJA

Linearna izobličenja nastaju kada karakteristika sistema za prenos odstupa od idealne. Izlazni signal nije istog oblika kao ulazni, odnosno javljaju se izobličenja. Realni sistemi za prenos u većoj ili manjoj meri izobličavaju signal.

Amplitudska izobličenja nastaju u linearnim sistemima u kojima amplitudska karakteristika odstupa od idealne. Fazna izobličenja nastaju kada karakteristika faznog kašnjenja odstupa od idealne.

Linearni sistemi ne generišu komponente novih učestanosti, odnosno komponente koje nisu postojale u spektru ulaznog signala. U linearnim

sistemima važi princip superpozicije: odziv sistema može da se posmatra kao suma odziva na pojedinačne komponente ulaznog signala.

Nelinearni sklopovi u sastavu telekomunikacionog sistema uzrokuju nelinearna izobličenja signala. Za nelinearne sisteme ne važi princip superpozicije i na izlazu se javljaju komponente novih učestanosti. Nelinearna izobličenja nastaju usled prisustva nelinearnih elemenata kao što su diode, tranzistori,...

5.6 SLABLJENJE

Za prenos signala na daljinu koriste se medijumi za prenos kao što su upredene parice, koaksijalni kablovi, optički kablovi, ili slobodan prostor kao što je to slučaj kod bežičnog prenosa signala.

Jedna od glavnih karakteristika uticaja kanala na prenos signala je slabljenje. Slabljenje koje utiče na signal u medijumu za prenos signala zavisi od razdaljine pa se definiše podužno slabljenje. Podužno slabljenje se obično izražava u jedinici dB/km.

Pri dizajniranju telekomunikacionih veza veoma je bitno uzeti u obzir gubitke koji se javljaju u medijumu za prenos i koji ograničavaju domet veze. Osnovni proračun primljene snage u sistemima za prenos signala podrazumeva da se proračunaju osnovni gubici koji nastaju prilikom prenosa signala. Pošto se vrednosti za snage u telekomunikacionom sistemu mogu menjati u velikom rasponu pogodno je predajnu (P_t) snagu i primljenu (P_r) snagu izraziti u decibelima u odnosu na neku vrednost koja je pogodna za određeni sistem. Na primer često se za snagu koristi decibel u odnosu na milivat:

$$P(\text{dBm}) = 10 \log \frac{P(W)}{1 \text{ mW}}.$$

Druga pogodnost izražavanja snage u dBm je što se sada primljena snaga u jedinicama dBm jednostavno računa kao:

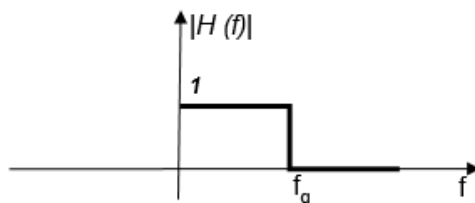
$$P_r(\text{dBm}) = P_t(\text{dBm}) - \text{Ukupni gubici (dB)}$$

5.7 ZADACI

1. Ako se ulazni signal oblika:

$$x(t) = 3 \cos\left(2\pi \cdot 200t + \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos\left(2\pi \cdot 400t + \frac{\pi}{8}\right) + 3 \sin(2\pi \cdot 600t),$$

dovodi na ulaz idealnog filtra čija je amplitudska karakteristika prikazana na Slici 5.2.

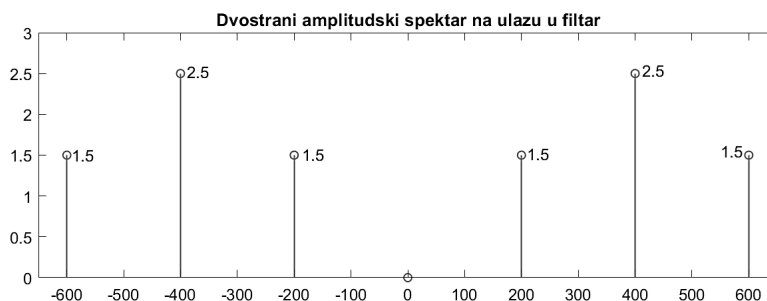


Slika 5.2 Amplitudska frekvencijska karakteristika filtra iz Zadatka 1

i ako je $f_g=500$ Hz, nacrtati amplitudski spektar signala na ulazu i izlazu filtra. Koji filter je prikazan na Slici 5.2?

Rešenje:

a) Spektar signala na ulazu filtra je prikazan na Slici 5.3. Signal se sastoji iz tri komponente čije su učestanosti 200 Hz, 400 Hz i 600 Hz. Na slici je prikazan dvostrani amplitudski spektar.



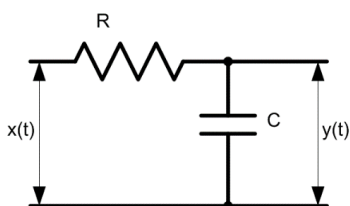
Slika 5.3 Spektar signala na ulazu filtra

Na Slici 5.2 je prikazana amplitudska frekvencijska karakteristika idealnog filtra propusnika niskih učestanosti. Spektar signala na izlazu iz filtra je prikazan na Slici 5.4. Spektar sadrži samo komponente na učestanosti 400 Hz i 200 Hz jer je granična učestanost filtra 500 Hz.



Slika 5.4 Spektar signala na izlazu filtra

2. Naći odziv ($y(t)$) RC kola prikazanog na slici ako je $R=1\text{ k}\Omega$ i $C=100\text{ nF}$ pri pobudi $x(t) = \cos(2\pi \cdot 1000t)$.



Rešenje:

$$R \cdot C = 1 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

$$\omega_g = 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g},$$

$$H(j2\pi \cdot 1000) = \frac{1}{1 + j \frac{2\pi \cdot 1000}{10000}} = 0,84 \angle -32,14^\circ,$$

$$y(t) = 0,84 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t - 32,14^\circ).$$

3. Ako je data funkcija prenosa filtra

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$$

naći za koliko decibela će biti oslabljena amplituda ulaznog signala na izlazu filtra. Ulazni signal ima učestanost deset puta veću od granične učestanosti filtra ($\omega=10\omega_g$).

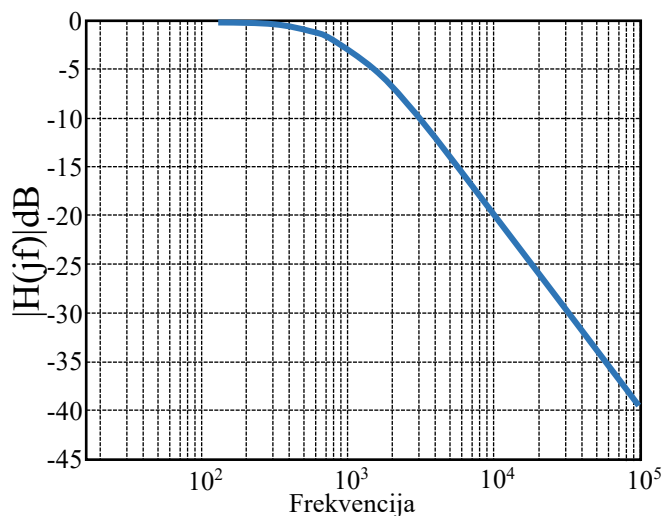
Rešenje:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g},$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega/\omega_g)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 100}} = 0,0995,$$

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\sqrt{\frac{1}{1 + 100}} = 20\log 0,0995 = -20,0432 \text{ dB}.$$

4. Pročitati sa grafika na Slici 5.5 koliko je slabljenje komponenti signala na učestanostima 200 Hz i 2000 Hz. Pročitati sa grafika kolika je granična učestanost filtra. Pročitati sa grafika za koliko decibela filter više slabi komponentu signala na učestanosti 2000 Hz u odnosu na komponentu signala na 1000 Hz. Uporediti slabljenja koje unosi filter na učestanostima $f=10000$ Hz i $f=100000$ Hz.

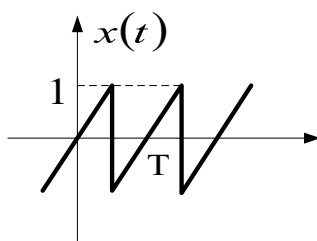


Slika 5.5 Amplitudska frekventijska karakteristika filtra iz Zadatka 4

Rešenje:

Sa grafika se može pročitati: na učestanosti 200 Hz slabljenje je ≈ 0 dB, na učestanosti 2000 Hz slabljenje je ≈ 7 dB, odnosno $20\text{Log}_{10}(H(\omega)) \approx -7$ dB. Granična učestanost je definisana za učestanost na kojoj je $20\text{Log}_{10}(H(\omega)) \approx -3$ dB. Sa grafika se vidi da je to $f_g = 1000$ Hz. Slabljenje na učestanosti 1000 Hz je ≈ 3 dB a na učestanosti 2000 Hz ≈ 7 dB. Razlika je 4dB. Slabljenje na $f = 10000$ Hz je ≈ 20 dB, slabljenje na $f = 100000$ Hz ≈ 40 dB. Slabljenje na $f = 10000$ je ≈ 20 dB, slabljenje na $f = 20000$ je ≈ 26 dB.

5. Signal $x(t)$ čiji je vremenski oblik prikazan na Slici 5.6 ima periodu $T=0.1$ ms.

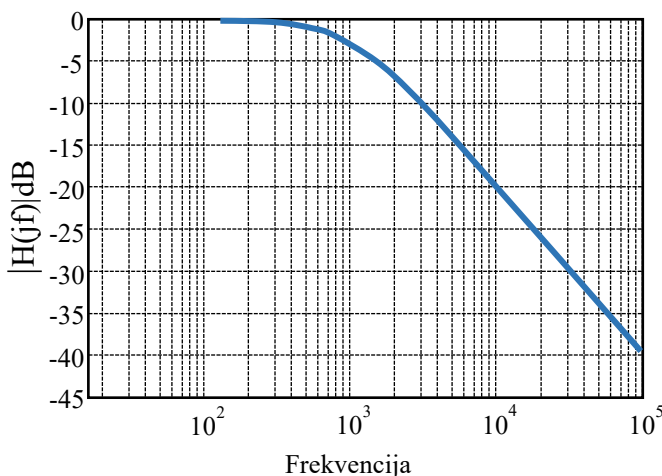


Slika 5.6 Vremenski oblik signala iz Zadatka 5.

Razvoj funkcije $x(t)$ u Furijeov red je dat formulom:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\omega_0 t).$$

Ovaj signal dolazi na ulaz filtra čija je amplitudska frekvencijska karakteristika prikazana na Slici 5.7:



Slika 5.7 Amplitudska frekvencijska karakteristika filtra iz Zadatka 5

Izračunati amplitude prva tri harmonika na izlazu iz filtra.

Rešenje:

Signal na ulazu se može predstaviti kao:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sin(n\omega_0 t),$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \dots \right].$$

Amplitude prva tri harmonika na ulazu u filter su date sa:

Redni broj harmonika	Učestanost harmonika	Amplituda na ulazu u filter $ X_n $
n=1	$1 \cdot f_0 = 10 \text{ kHz}$	$\frac{2}{\pi}$
n=2	$2 \cdot f_0 = 20 \text{ kHz}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$
n=3	$3 \cdot f_0 = 30 \text{ kHz}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3}$

Na osnovu amplitudske frekvencijske karakteristike filtra može se pročitati kako filter menja amplitude harmonika:

Učestanost harmonika	$20 \log \left(\left \frac{Y(j2\pi \cdot n \cdot f_0)}{X(j2\pi \cdot n \cdot f_0)} \right \right) = 20 \log \left(\frac{ Y_n }{ X_n } \right)$	$\frac{ Y_n }{ X_n }$
$1 \cdot f_0 = 10 \text{ kHz}$	-20 dB	0,1
$2 \cdot f_0 = 20 \text{ kHz}$	-26 dB	0,05
$3 \cdot f_0 = 30 \text{ kHz}$	-30 dB	0,032

Na izlazu, amplitude harmonika su date sa:

Učestanost harmonika	Amplitude harmonika na izlazu iz filtra $ Y_n $
$1 \cdot f_0 = 10 \text{ kHz}$	$2/\pi \cdot 0.1 = 0,0637$
$2 \cdot f_0 = 20 \text{ kHz}$	$2/\pi \cdot 1/2 \cdot 0.05 = 0,0159$
$3 \cdot f_0 = 30 \text{ kHz}$	$2/\pi \cdot 1/3 \cdot 0.032 = 0,0068$

6. Izvesti izraz i nacrtati impulsni odziv idealnog sistema propusnika niskih učestanosti. Prenosna funkcija idealnog sistema propusnika niskih učestanosti je data sa:

$$H(jf) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi f_0 t}, & f \leq f_0 \\ 0, & f > f_0 \end{cases}.$$

Rešenje:

Impulsni odziv idealnog sistema propusnika niskih učestanosti je dat inverznom Furijeovom transformacijom prenosne funkcije sistema propusnika niskih učestanosti.

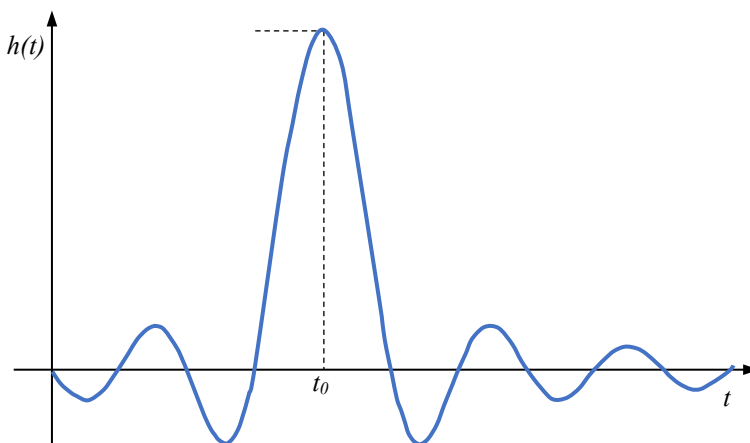
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(jf)e^{-2\pi f t} df,$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{j2\pi f(t-t_0)} df,$$

$$h(t) = \int_{-f_N}^{f_N} Ae^{j2\pi f(t-t_0)} df,$$

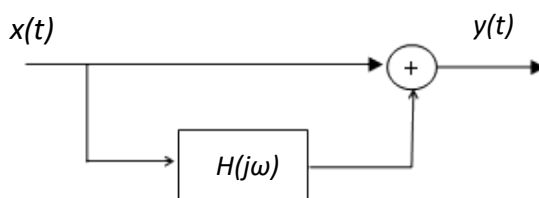
$$h(t) = 2Af_N \frac{\sin(2\pi f_N(t-t_0))}{2\pi f_N(t-t_0)}.$$

Impulsni odziv je prikazan na Slici 5.8.



Slika 5.8 Impulsni odziv idealog sistema propusnika niskih učestanosti

7. Za prenosni sistem prikazan na Slici 5.9 izračunati ekvivalentnu prenosnu funkciju i napisati izraz za izlazni signal ako je poznat ulazni signal. Komentarisati kakva izobličenja se javljaju u ovom sistemu. Prenosna funkcija bloka na slici označenog sa $H(j\omega)$ je $H(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$.



Slika 5.9 Sistem za prenos

Rešenje:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + H(j\omega) \cdot X(j\omega),$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + e^{-i\omega\tau} \cdot X(j\omega),$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \underbrace{(1 + e^{-j\omega\tau})}_{H_e(j\omega)},$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \underbrace{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right)}_{H_e(j\omega)},$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \underbrace{2 \cdot e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \frac{(e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}})}{2}}_{H_e(j\omega)},$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \underbrace{2 \cdot e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}_{H_e(j\omega)}.$$

Iz poslednjeg izraza za ekvivalentnu funkciju prenosa se vidi da amplitudska karakteristika odstupa od idealne pa se javljaju amplitudska izobličenja.

Furijeova transformacija izlaznog signala je:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + e^{-i\omega\tau} \cdot X(j\omega).$$

Pošto znamo da je Furijeova transformacija zakašnjelog signala

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Možemo da zaključimo da $e^{-i\omega\tau} \cdot X(j\omega)$ odgovara signalu $x(t - \tau)$

Tako da je ukupan signal $y(t)$ dat sa:

$$y(t) = x(t) + x(t - \tau).$$

8. Optički komunikacioni link dugačak je 55 km. Na raspolaganju su optički kablovi dužine 5km u kojima se nalaze optička vlakna čiji je koeficijent slabljenja 0.35 dB/km. Gubici na fiksnim spojevima između segmenata optičkih vlakana su 0.01 dB. Predajnik i prijemnik su spojeni na optička vlakna konektorima. Gubici na konektorskim spojevima su 0.75 dB. Ako je izlazna snaga predajnika 2.5 mW, odrediti potrebnu osetljivost prijemnika u dBm (minimalnu optičku snagu na ulazu u prijemnik potrebnu za detekciju signala). Uzeti u obzir i rezervu snage (zaštitu) $R = 3,15$ dB koja obezbeđuje da kada se pojavi nepredviđeno dodatno slabljenje veza i dalje funkcioniše.

Rešenje:

Gubici na optičkom linku se mogu odrediti kao:

$$A = \alpha \cdot L + \alpha_s \cdot N_s + \alpha_k \cdot N_k \text{ [dB]},$$

gdje je α koeficijent slabljenja optičkog vlakna na linku, L dužina linka, α_s srednji gubici spojeva, N_s broj spojeva na linku, α_k srednji gubici konektora i N_k broj konektora na linku.

Primljena snaga u dBm je jednaka:

$$P_r = P_t - \text{Ukupni gubici},$$

gde je P_t predajna snaga u dBm. Primljena snaga mora biti veća od osetljivosti prijemnika. Prilikom projektovanja optičkog sistema prenosa uzima se i odgovarajuća rezerva, kako bi se uzele u obzir i buduće modifikacije konfiguracije kabla (dodatni spojevi, povećanje dužine kabla, varijacije temperature, starenje materijala).

Gubici na vlaknu uzrokovani slabljenjem iznose:

$$A_{fiber} = \alpha \cdot L,$$

gde je α – koeficijent slabljenja, L – dužina vlakna.

$$A_{fiber} = \alpha \cdot L = 0,35 \frac{\text{dB}}{\text{km}} \cdot 55 \text{ km} = 19,25 \text{ dB}.$$

Za optički link od 55 km potrebno je 11 kablova dužine 5 km. Kablove je potrebno spojiti fiksnim spojevima kojih ima 10. Ukupni gubici na fiksnim spojevima iznose :

$$A_s = \alpha_s \cdot N_s = 10 \cdot 0,01 \text{ dB} = 0,1 \text{ dB}.$$

Gubici na konektorima i rezerva (R) sistema su dati:

$$A_k = \alpha \cdot N_k = 2 \cdot 0,75 \text{ dB} = 1,5 \text{ dB}, R = 4 \text{ dB}.$$

Ukupno slabljenje je:

$$A = A_{fiber} + A_s + A_k = 19,25 \text{ dB} + 0,1 \text{ dB} + 1,5 \text{ dB} = 20,85 \text{ dB}.$$

Izlazna snaga predajnika u decibelima u odnosu na 1 mW je:

$$P_{tx}(\text{dBm}) = 10 \log \frac{P_{tx}(\text{mW})}{1 \text{ mW}} = 10 \log \left(\frac{2,5 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} \right) = 3,98 \text{ dBm} \approx 4 \text{ dBm}$$

Primljena snaga je:

$$P_{rx} = 4 \text{ dBm} - 20,85 \text{ dB} - 3,14 \text{ dB} = -20 \text{ dBm}.$$

9. Minimalna snaga u prijemu da bi se signal detektovao iznosi -30 dBm. Koristi se 90 km vlakna sa nastavljanim segmentima dužine od po 10 km. Gubici na vlaknu usled slabljenja duž vlakna su 0.2 dB/km . Gubici na fiksnim spojevima između segmenata vlakana su 0.2 dB. Predajnik i prijemnik su spojeni na optička vlakna konektorima na kojima su gubici 0.8 dB po konektoru. Izračunati minimalnu snagu predajnika ako se ostavi i rezerva snage R = 5 dB koja obezbeđuje da kad se pojavi nepredviđeno dodatno slabljenje veza i dalje funkcioniše.

Rešenje:

Slabljenje koje unosi optičko vlakno je:

$$A_{fiber} = \alpha \cdot L = 0,2 \frac{\text{dB}}{\text{km}} \cdot 90 \text{ km} = 18 \text{ dB}.$$

Slabljenje koje unose fiksni spojevi optičkih vlakna je:

$$A_s = \alpha_s \cdot N_s = 8 \cdot 0,2 \text{ dB} = 1,6 \text{ dB} \text{ (9 kablova sa 8 fiksnih spojeva)}.$$

Slabljenje koje unose konektori:

$$A_k = \alpha \cdot N_k = 2 \cdot 0,8 \text{ dB} = 1,6 \text{ dB}.$$

Ukupno slabljenje:

$$A = A_{fiber} + A_s + A_k = 18 \text{ dB} + 1,6 \text{ dB} + 1,6 \text{ dB} = 21,2 \text{ dB}.$$

Traži se predajna snaga P_{tx} [dBm].

Primljena snaga je data sa:

$$P_{rx}[\text{dBm}] = P_{tx}[\text{dBm}] - A[\text{dB}] - R[\text{dB}] = -30 \text{ dBm},$$

$$P_{tx}[\text{dBm}] = P_{rx}[\text{dBm}] + 26,2 [\text{dB}] = -3,8 \text{ dBm},$$

$$P_{tx}[\text{mW}] = 0,42 \text{ mW}.$$

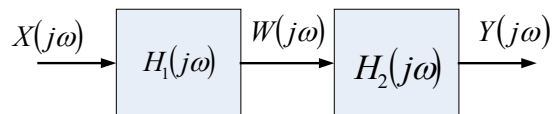
5.8 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Prenos će biti idealan ako je amplitudska karakteristika prenosne funkcije:
 - a) **konstantna**,
 - b) linearna,
 - c) kvadratna funkcija učestanosti.

2. Prenos će biti idealan ako je fazna karakteristika prenosne funkcije:
 - a) konstantna,
 - b) **linearna**,
 - c) kvadratna fukcija učestanosti.

3. Linearni sistem za prenos ne unosi fazna izobličenja ako je grupno kašnjenje:
 - a) linearna funkcija učestanosti,
 - b) **konstantno**,
 - c) kvadratna funkcija učestanosti.

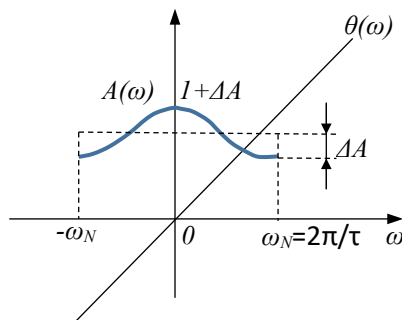
4. Ako je sa $h(t)$ označen impulsni odziv linearnog sistema onda je odziv na proizvoljnu pobudu $x(t)$ dat:
- a) **konvolucijom pobudnog signala i impulsnog odziva sistema,**
 - b) proizvodom pobudnog signala i impulsnog odziva sistema,
 - c) korelacijom pobudnog signala i impulsnog odziva sistema.
5. Ako je poznata prenosna funkcija LTI sistema $H(j\omega)$ i ako je poznat spektar pobudnog signala $X(j\omega)$ onda je spektar izlaznog signala (odziva na pobudu) dat:
- a) konvolucijom prenosne funkcije sistema i Furijeove transformacije pobudnog signala,
 - b) **proizvodom prenosne funkcije sistema i Furijeove transformacije pobudnog signala,**
 - c) zbirom prenosne funkcije sistema i Furijeove transformacije pobudnog signala.
6. Ekvivalentna prenosna funkcija sistema prikazanog na slici je:



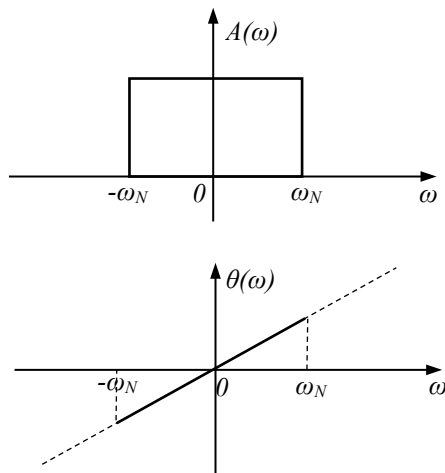
- a) **$H_e(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$,**
- b) $H_e(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$,
- c) $H_e(j\omega) = H_1(j\omega) * H_2(j\omega)$.

(gde $*$ označava konvoluciju)

7. Sistem čija je amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja prikazana na slici:



- a) ne unosi izobličenja,
b) unosi amplitudska izobličenja,
 c) unosi fazna izobličenja.
8. Sistem čija su amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja prikazane na slici predstavlja:



- a) **idealan sistem, propusnik niskih učestanosti,**
 b) sistem propusnik niskih učestanosti koji unosi fazna izobličenja,
 c) sistem propusnik visokih učestanosti koji unosi fazna izobličenja.

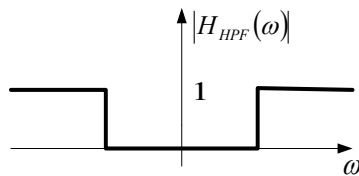
9. Odziv idealnog NF sistema na pobudu u obliku pravougaonog impulsa:

- a) ne zavisi od širine propusnog opsega sistema i isti je kao pobuda,
- b) ne zavisi od širine propusnog opsega sistema, ali nije isti kao pobuda,
- c) **zavisi od širine propusnog opsega sistema.**

10. U nelinearnim sistemima:

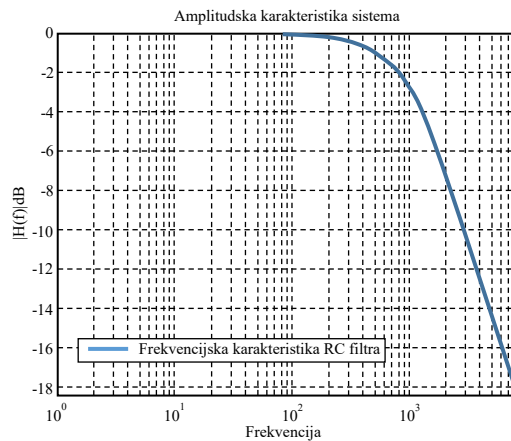
- a) važi princip superpozicije,
- b) **na izlazu se javljaju komponente novih učestanosti u odnosu na spektar ulaznog signala,**
- c) mogu se opisati linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima.

11. Na slici je prikazana amplitudska karakteristika idealnog filtra:



- a) propusnika niskih učestanosti,
- b) **propusnika visokih učestanosti,**
- c) propusnika opsega učestanosti.

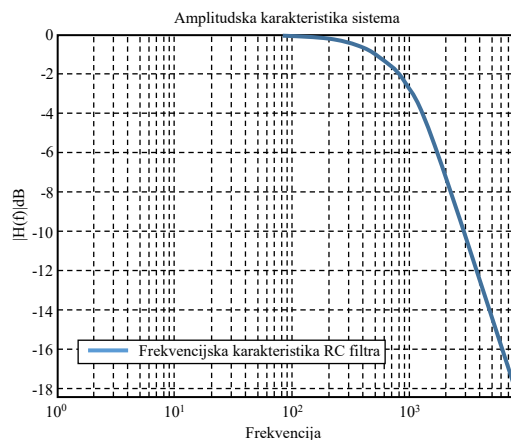
12. Na slici je prikazana amplitudna frekvencijska karakteristika RC filtra



Ako je na ulazu u RC filter prisutan sinusni signal učestanosti 1000 Hz i amplitude 1 V kolika je amplituda signala na izlazu iz filtra:

- a) **0.707 V,**
- b) 2 V,
- c) 1 V.

13. Na slici je prikazana amplitudna frekvencijska karakteristika RC filtra.



Sa slike pročitati koliko je približno slabljenje na učestanosti 1000 Hz.

- a) 0 dB,
- b) 1 dB,
- c) **3 dB.**

14. Dekada je:

- a) **opseg frekvencija za koje je odnos najveće i najmanje frekvencije 10,**
- b) opseg frekvencija za koje je odnos najveće i najmanje frekvencije 2,
- c) opseg frekvencija za koje je odnos najveće i najmanje frekvencije 3.

15. Koja je uloga upredanja parica kod kablova sa paricama:

- a) povećanje podužne otpornosti,
- b) **povećanje otpornosti na elektromagnetnu interferenciju,**
- c) povećanje preslušavanja.

16. Koji medijum za prenos ima najmanje podužno slabljenje:

- a) upredene parice,
- b) **optičko vlakno,**
- c) koaksijalni kabl.

17. Koji kablovi su označeni sa UTP:

- a) **neoklopljene parice,**
- b) oklopljenje parice,
- c) koaksijalni kabl.

18. Koaksijalni kabl se sastoji

- a) od upredenih provodnika od bakra,
- b) od staklenog jezgra i plastičnog omotača,
- c) **od unutrašnjeg bakarnog provodnika i spoljašnjeg omotača u obliku metalnog plašta.**

19. Tipične karakteristike optičkog vlakna su:

- a) velika otpornost na savijanje i mehaničke uticaje,
- b) velike dimenzije,
- c) **malo podužno slabljenje.**

20. Kod optičkog vlakna:

- a) monomodno vlakno ima veći prečnik jezgra od multimodnog,
- b) multimodno vlakno ima prečnik jezgra veći od monomodnog,**
- c) monomodno i multimodno vlakno imaju isti prečnik jezgra.

21. Najbolje karakteristike u pogledu podužnog slabljenja imaju:

- a) multimodna vlakna sa postepenom promenom indeksa prelamanja,
- b) multimodna vlakna sa skokovitom promenom indeksa prelamanja,
- c) monomodna vlakna.**

22. Kroz optičko vlakno informacija se prenosi pomoću:

- a) radio talasa,
- b) svetlosti,**
- c) mikrotalasa.

23. U pogledu uticaja na širenje impulsa prilikom prenosa kroz optičko vlakno najbolje karakteristike imaju:

- a) multimodna vlakna sa postepenom promenom indeksa prelamanja,
- b) multimodna vlakna sa skokovitom promenom indeksa prelamanja,
- c) monomodna vlakna.**

24. Elektromagnetni talasi u oblasti frekvencija od 1 GHz do 300 GHz se zovu:

- a) infracrveni,
- b) mikrotalasi,**
- c) kratki talasi.

25. Jezgro optičkog vlakna se pravi od:

- a) stakla ili plastike,**
- b) bakra,
- c) metalnog cilindra.

26. Omotač optičkog vlakna se pravi od:

- a) **stakla ili plastike,**
- b) bakra.
- c) metalnog cilindra.

27. Indeks prelamanja omotača kod optičkog vlakna u odnosu na jezgro je,

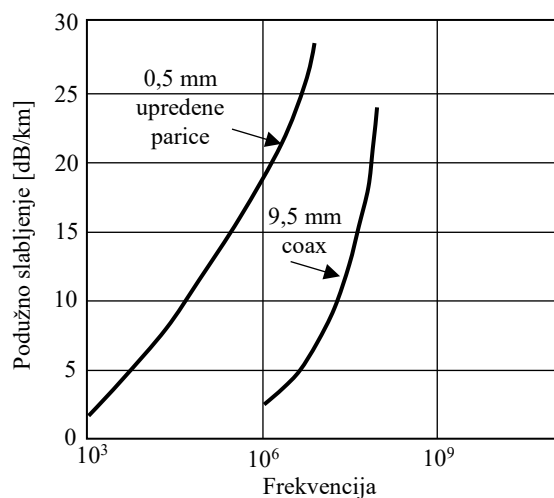
- a) **manji,**
- b) veći,
- c) isti.

28. Za vlakno sa podužnim slabljenjem od 0,35 dB/km izračunati koliko je ukupno slabljenje na optičkoj telekomunikacionoj liniji dužine 10 km ako na njoj postoji jedan fuzioni spoj (splajs) koji unosi slabljenje 0,01 dB i dva konektorska spoja. Jedan konektorski spoj unosi slabljenje od 0,75 dB.

- a) 3.5 dB,
- b) 1.86 dB,
- c) **5.01 dB.**

29. Na osnovu slike približno pročitati koliko je podužno slabljenje upredenih parica na učestanosti 106 Hz.

- a) 3 dB/km,
- b) **18 dB/km,**
- c) 10 dB/km.



30. Skraćenica OTDR u nazivu instrumenta znači:
- a) **Optički reflektometar u vremenskom domenu,**
 - b) Optički sistem sa vremenskim multipleksiranjem,
 - c) Optički sistem sa multipleksiranjem talasnih dužina.

31. Na OTDR grafiku
- a) **na x-osi je razdaljina a na y-osi slabljenje,**
 - b) na x-osi je vreme a na y-osi slabljenje,
 - c) na x-osi je učestanost a na y-osi slabljenje.

32. OTDR instrument:
- a) **ima izvor svetlosti koji šalje impuls u vlakno i senzor koji meri povratno rasejanje i refleksije,**
 - b) šalje impuls u vlakno i meri širinu proširenog izlaznog impulsa na drugom kraju vlakna.
 - c) radi na principu merenja električnog šuma.

33. OTDR instrument je namenjen za (zaokružiti sve tačne odgovore):

- a) **merenje dužine vlakna,**
- b) **lociranje prekida ili spojeva na vlaknu,**
- c) merenje BER-a pri prenosu digitalnog signala vlaknom.

34. Kako se osnovno povezuje OTDR i vlakno:

- a) **OTDR se povezuje tako što se jedan kraj vlakna spoji sa OTDR uređajem preko odgovarajućeg konektora,**
- b) OTDR se povezuje tako što se oba kraja testiranog vlakna spoje sa OTDR uređajem preko konektora,
- c) OTDR beskontaktno meri slabljenje duž vlakana.

35. Za merenje dužine vlakna OTDR-om potrebno je poznavati:

- a) **indeks prelamanja vlakna,**
- b) podužno slabljenje vlakna,
- c) broj konektora duž vlakna.

36. Podužno slabljenje vlakna se može proceniti:

- a) **preko nagiba krive na grafiku OTDR-a,**
- b) razlikom između maksimuma i minimuma slabljenja na događajima duž vlakna,
- c) sabiranjem maksimalnih slabljenja na OTDR grafiku.

37. Ako je potrebno locirati mesto duž vlakna gde se pojavljuje slabljenje koristi se:

- a) Splajser,
- b) **OTDR,**
- c) OPM.

38. Mrtve zone prilikom testiranja OTDR-om:

- a) **su oblasti na grafiku iza reflektivnih događaja koji uzrokuju Frenelovu refleksiju.**

- b) oblasti na grafiku iza nereflektivnih događaja koji rezultuju gubicima u optičkom vlaknu.
- c) oblasti na grafiku gde je prostorna rezolucija merenja velika.

39. Nedostaci testiranja OTDR-om su:

- a) pojava mrtvih zona,**
- b) pojava Frenelovih refleksija,
- c) pojava povratnog rasejanja.

40. Nedostaci testiranja OTDR-om su:

- a) potreban je pristup oba kraja vlakna koje se testira,
- b) nemogućnost detektovanja mesta pojave slabljenja duž vlakna,
- c) teškoće pri testiranju kratkih optičkih kablova.**

41. Prednosti testiranja OTDR-om su:

- a) Odlične performanse pri testiranju kratkih optičkih deonica,
- b) Mogućnost dobrog dokumentovanja merenja,**
- c) Mogućnost lociranja konektora ili prekida u vlaknu.**

6 ANALOGNE MODULACIJE

Ciljevi: Upoznavanje i sticanje znanja o postupcima analognih modulacija sa prostoperiodičnim nosiocem. Utvrđivanje teorijskih znanja kroz primere i opis i razumevanje osobina moduliranih signala u vremenskom i spektralnom domenu.

6.1 UVOD

Analognim modulacijama zovemo postupak obrade kontinualnog signala koji predstavlja električni ekvivalent poruke. Cilj ovakve obrade signala je da se signal prilagodi prenosu kroz komunikacioni kanal. Analogne modulacije prostoperiodičnim nosiocem podrazumevaju promenu jednog od karakterističnih parametara sinusnog signala koji se naziva nosilac u skladu sa promenama signala koji želimo da prenesemo. Signal dobijen postupkom modulacije se naziva modulirani signal, dok se ulazni signal (signal na ulazu u sklop za modulaciju (modulator)) naziva modulišući signal. Amplitudska modulacija podrazumeva promenu amplitude signala nosioca sa promenom modulišućeg signala, frekvencijska i fazna modulacija predstavljaju postupak obrade signala gde se vrši promena frekvencije odnosno faze nosioca u skladu sa promenom modulišućeg signala. Demodulacija je proces inverzan procesu modulacije i obavlja se u prijemniku. Pomoću demodulatora se iz primljenog moduliranog signala izdvaja modulišući signal. Kao nosilac kod analognih modulacija može se koristiti i periodična povorka impulsa i tada govorimo o analognim impulsnim modulacijama.

6.2 AMPLITUDSKA MODULACIJA

Kod konvencionalne amplitudske modulacije (KAM, *Conventional Amplitude Modulation* - CAM), modulirani signal se može predstaviti jednačinom:

$$u_{CAM}(t) = [U_0 + k_U u_m(t)] \cos(\omega_0 t) = U_0 \left[1 + \frac{k_U U_m}{U_0} m(t) \right] \cos(\omega_0 t),$$

$$u_{CAM}(t) = \left[U_0 + \frac{\Delta U_0}{U_0} \right] \cos(\omega_0 t) = U_0 [1 + m_0 m(t)] \cos(\omega_0 t),$$

Gde je $u_m(t) = U_m m(t)$, modulišući signal, U_m je maksimalna vrednost modulišućeg signala, $m(t)$ normalizovana vrednost modulišućeg signala, $U_0 \cos(\omega_0 t)$ je signal nosilac (*Carrier*), k_U konstanta proporcionalnosti, i m_0 indeks ili stepen modulacije.

Kod konvencionalne amplitudske modulacije sve dok je ispunjen uslov:

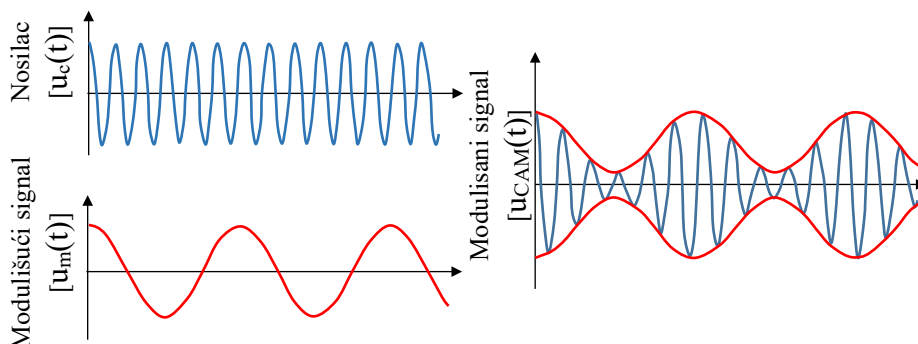
$$U_0 + k_U u_m(t) > 0,$$

anvelopa signala (kriva koja spaja pozitivne vrhove modulisanog signala) će pratiti promene modulišućeg signala. Ovo je ilustrovano na Slici 6.1, gde su prikazani modulišući signal, nosilac i modulisani signal za indeks modulacije 0,7.

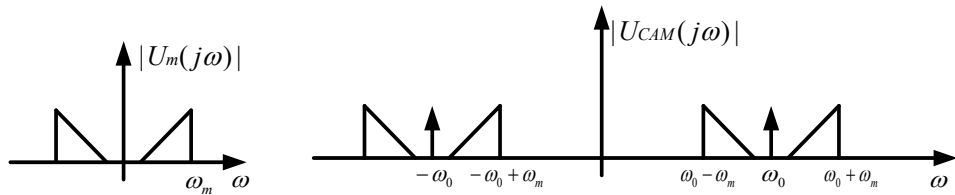
Spektar konvencionalno amplitudski modulisanog signala je prikazan na Slici 6.2. Može se primetiti da je spektar nastao pomeranjem spektra modulišućeg signala u oblast oko učestanosti nosioca. Spektar koji se nalazi u opsegu učestanosti od ω_0 do $\omega_0 + \omega_m$ naziva se viši bočni opseg (VBO, *Upper Sideband*, USB), a njemu simetričan spektar u opsegu od $\omega_0 - \omega_m$ do ω_0 naziva se niži bočni opseg (NBO, eng. *Lower Sideband*, LSB). Spektar sadrži i komponentu na učestanosti ω_0 koja potiče od nosioca.

Takođe, treba primetiti da spektar modulisanog signala zauzima dva puta veći opseg od spektra signala u osnovnom opsegu učestanosti:

$$B = (f_0 + f_m) - (f_0 - f_m) = 2f_m$$



Slika 6.1 Vremenski oblik nosica, modulišućeg i modulisanog signala.



Slika 6.2 Spektar modulišućeg i modulisanog signala

Konvencionalna amplitudska modulacija omogućava jednostavnu demodulaciju signala tako što se na prijemu detektuje anvelopa signala. Postoje i druge vrste amplitudski modulisanog signala kao što je amplitudska modulacija sa dva bočna opsega, bez nosioca (AM-2BO, eng. *Double Sideband* – DSB) i amplitudska modulacija sa jednim bočnim opsegom (AM-1BO, eng. *Single Sideband* – SSB). Kod amplitudske modulacije sa dva bočna opsega prenosi se samo gornji i donji bočni opseg bez nosioca. Kod amplitudske modulacije sa jednim bočnim opsegom prenosi se samo jedan bočni opseg.

6.3 FREKVENCIJSKA I FAZNA MODULACIJA

Kod ugaonih modulacija nosilac je oblika

$$u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)),$$

gde se $\varphi(t)$ menja sa promenom modulišućeg signala, dok je anvelopa signala konstantna.

Frekvencijski modulisan signal se može predstaviti sledećim izrazom

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left(2\pi f_0 t + k_f \int u_m(t) dt\right),$$

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_0 \int m(t) dt),$$

gde $\delta f = \Delta f_0 \int u_m(t) dt$ predstavlja trenutnu devijaciju učestanosti nosioca, odnosno odstupanje od učestanosti f_0 . Trenutna devijacija učestanosti nosioca je srazmerna modulišućem signalu. Spektar je teže izračunati nego kod amplitudske modulacije. Za procenu spektra signala može se koristiti Carson-ov obrazac:

$$B = 2(\Delta f_0 + f_m) = 2f_m(m + 1),$$

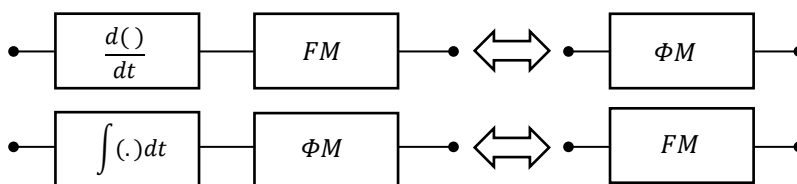
gde je $m = \frac{\Delta f_0}{f_m} = \frac{k_f U_m}{f_m}$ indeks modulacije.

Kod fazne modulacije trenutna devijacija faze je srazmerna modulišućem signalu i fazno modulisani signal se može predstaviti kao:

$$u_{PM}(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + k_\phi U_m m(t)),$$

$$u_{PM}(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\Phi_0 m(t)).$$

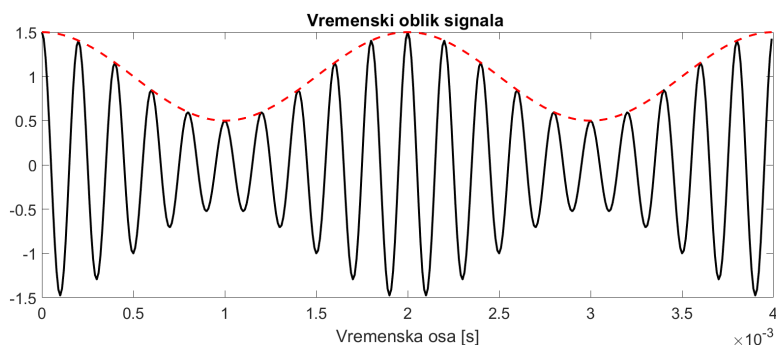
gde $\Delta\Phi_0 m(t)$ predstavlja trenutno odstupanje faze od vrednosti $2\pi f_0 t$ i naziva se trenutna devijacija faze, a $\Delta\Phi_0$ je maksimalna devijacija faze ili samo devijacija faze. Iz izraza za frekvencijsku i faznu karakteristiku se vidi da postoji veza između ove dve modulacije koja je ilustrovana na Slici 6.3.



Slika 6.3 Veza između frekvencijske i fazne modulacije

6.4 ZADACI

1. Modulišući signal $x(t) = U_m \cos(2\pi \cdot 500 \cdot t)$ moduliše nosilac $u_c(t) = U_c \cos(2\pi \cdot 5000 \cdot t)$. Vremenski oblik modulisanog signala je prikazan na Slici 6.4 kao i anvelopa signala (isprekidanom linijom). Odrediti indeks modulacije i izraziti ga u procentima. Odrediti amplitude nosica i učestanosti i amplitude gornjeg i donjeg bočnog opsega. Izračunati maksimalnu i minimalnu vrednost anvelope signala. Nacrtati spektar signala i označiti učestanosti i amplitude spektralnih komponenti.



Slika 6.4 Vremenski oblik modulisanog signala iz Zadatka 1

Rešenje:

Na osnovu vremenskog oblika modulisanog signala prikazanog na Slici 6.4 možemo da pročitamo maksimalnu vrednost anvelope signala:

$$(u_{CAM})_{max} = 1,5 \text{ V},$$

i minimalnu vrednost anvelope:

$$(u_{CAM})_{min} = 0,5 \text{ V}.$$

Iz vremenskog oblika modulišućeg signala moguće je odrediti indeks modulacije:

$$m_0 = \frac{(u_{CAM})_{max} - (u_{CAM})_{min}}{(u_{CAM})_{max} + (u_{CAM})_{min}},$$

gde je $(u_{CAM})_{max}$ maksimalna a $(u_{CAM})_{min}$ minimalna vrednost anvelope signala. U ovom primeru indeks modulacije je:

$$m_0 = \frac{(u_{CAM})_{max} - (u_{CAM})_{min}}{(u_{CAM})_{max} + (u_{CAM})_{min}} = 0,5.$$

Odnosno u procentima 50%.

Amplituda nosioca je:

$$U_0 = \frac{(u_{CAM})_{max} + (u_{CAM})_{min}}{2} = 1 \text{ V}.$$

Modulisani signal ima oblik:

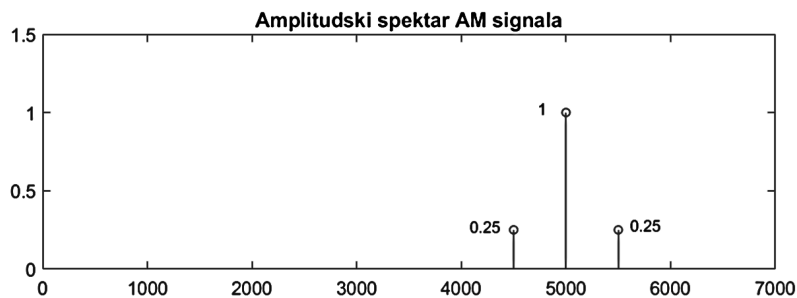
$$U_0[1 + m_0 \cos(2\pi \cdot 500 \cdot t)] \cos(2\pi \cdot 5000 \cdot t),$$

odnosno kada primenimo transformaciju proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir:

$$u_{CAM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{U_0 m_0}{2} \cos(2\pi \cdot 4500 \cdot t) + \frac{U_0 m_0}{2} \cos(2\pi \cdot 5500 \cdot t).$$

Iz poslednjeg izraza se može naći učestanost donjeg i gornjeg bočnog opsega: 4,5 kHz i 5,5 kHz. Amplitude donjeg i gornjeg bočnog opsega su 0,25 V.

Spektar modulisanog signala je prikazan na Slici 6.5.



Slika 6.5 Amplitudski spektar modulisanog signala iz Zadatka 1

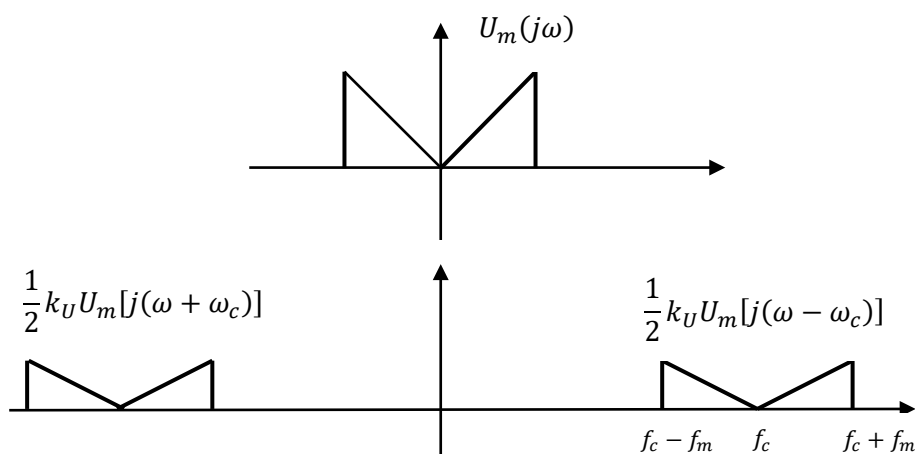
2. Modulišući signal $u_m(t)$ zauzima spektar od 0 do f_m . Ako se ovaj signal pomnoži nosiocem $u_c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ gde je $f_c = 765$ kHz, odrediti kolika je maksimalana učestanost modulišućeg signala ako spektar modulisanog signala zauzima 1 % od vrednosti nosioca.

Rešenje:

Kada signal $u_m(t)$ pomnožimo nosiocem dobija se amplitudski modulisan signal sa dva bočna opsega. Spektar signala je dat izrazom:

$$U_{2BO}(j\omega) = \frac{1}{2}k_U U_m[j(\omega - \omega_c)] + \frac{1}{2}k_U U_m[j(\omega + \omega_c)],$$

gde je sa $U_m(j\omega)$ označen spektar modulišućeg signala. Spektar modulišućeg i modulisanog signala su predstavljeni na Slici 6.6.



Slika 6.6 Spektar modulišućeg i AM-DSB modulisanog signala

Posle modulacije spektar zauzima dvostruko veći opseg nego što je opseg modulišućeg signala, tako da iz uslova zadatka imamo:

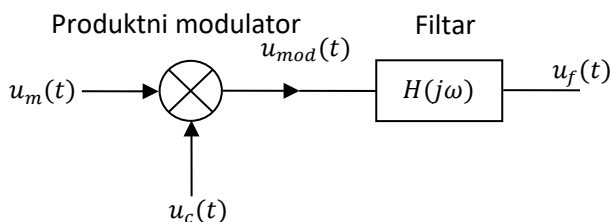
$$B = 2f_m = 0,01 \cdot 765 \cdot 10^3 \text{ Hz},$$

$$f_m = 3825 \text{ Hz}.$$

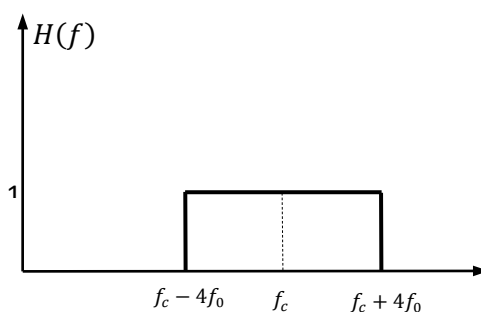
3. Periodični signal $u_m(t)$ osnovne učestanosti 100 Hz dolazi na ulaz produktnog modulatora, iza koga se nalazi filter propusnik opsega učestanosti, kao što je prikazano na Slici 6.7. Modulišućí signal je dat jednačinom:

$$u_m(t) = U + U \cos(\omega_0 t) - \frac{U}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{U}{5} \cos(5\omega_0 t).$$

Produktni modulator množi ulazni signal kosinusnim signalom učestanosti $f_c = 10 \text{ kHz}$ pri čemu je konstanta modulatora k_U , odnosno, signalom $u_{mod}(t) = k_U \cdot u_m(t) \cdot u_c(t)$. Odrediti učestanosti amplitude spektralnih komponenti na izlazu filtra ako je karakteristika filtra idealna i prikazana na Slici 6.8.



Slika 6.7 Produktni modulator iz Zadatka 3



Slika 6.8 Karakteristika filtra iz Zadatka 3

Rešenje:

Signal na izlazu produktnog modulatora je dat jednačinom:

$$u_{mod}(t) = k_U \cdot u_m(t) \cdot u_c(t).$$

$$u_{mod}(t) = k_U \left[U + U \cos(\omega_0 t) - \frac{U}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{U}{5} \cos(5\omega_0 t) \right] \cdot U_0 \cos(\omega_c t).$$

$$u_{mod}(t) = k_U \cdot U \cdot U_0 \cos(\omega_c t)$$

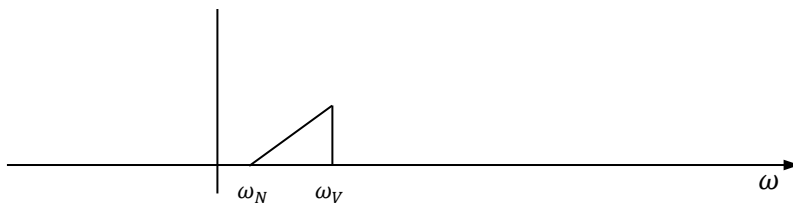
$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} k_U \cdot U \cdot U_0 \cdot \cos((\omega_c - \omega_0)t) + \frac{1}{2} k_U \cdot U_0 \cdot U \cdot \cos((\omega_c + \omega_0)t) \\ &- \frac{1}{2} k_U \cdot U_0 \cdot \frac{U}{3} \cos((\omega_c - 3\omega_0)t) - \frac{1}{2} k_U \cdot U_0 \cdot \frac{U}{3} \cos((\omega_c + 3\omega_0)t) \\ &+ \frac{1}{2} k_U \cdot U_0 \cdot \frac{U}{5} \cos((\omega_c - 5\omega_0)t) + \frac{1}{2} k_U \cdot U_0 \cdot \frac{U}{5} \cos((\omega_c + 5\omega_0)t) \end{aligned}$$

Na osnovu gornjeg izraza, učestanosti komponenti pre filtra su:

$$f_0, (f_c - f_0), (f_c + f_0), (f_c - 3f_0), (f_c + 3f_0), (f_c - 5f_0), (f_c + 5f_0).$$

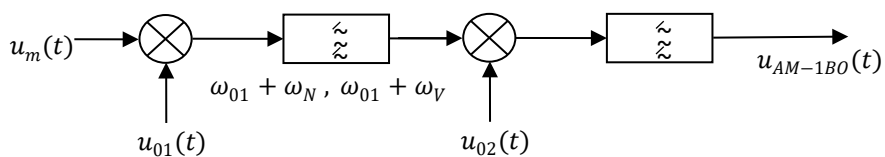
Filtar propušta samo učestanosti od $(f_c - 4f_0)$ do $(f_c + 4f_0)$ Hz, što znači da će na izlazu postojati samo komponente na učestanostima: $f_0, (f_c - f_0), (f_c + f_0), (f_c - 3f_0), (f_c + 3f_0)$, sa amplitudama $k_U \cdot U \cdot U_0, \frac{1}{2} k_U \cdot U \cdot U_0, \frac{1}{2} k_U \cdot U \cdot U_0, \frac{1}{2} k_U \cdot U \cdot U_0, \frac{1}{2} k_U \cdot U \cdot U_0$.

4. Ako je spektar ulaznog $u_m(t)$ signala prikazan na Slici 6.9:



Slika 6.9 Spektar ulaznog signala iz Zadatka 4

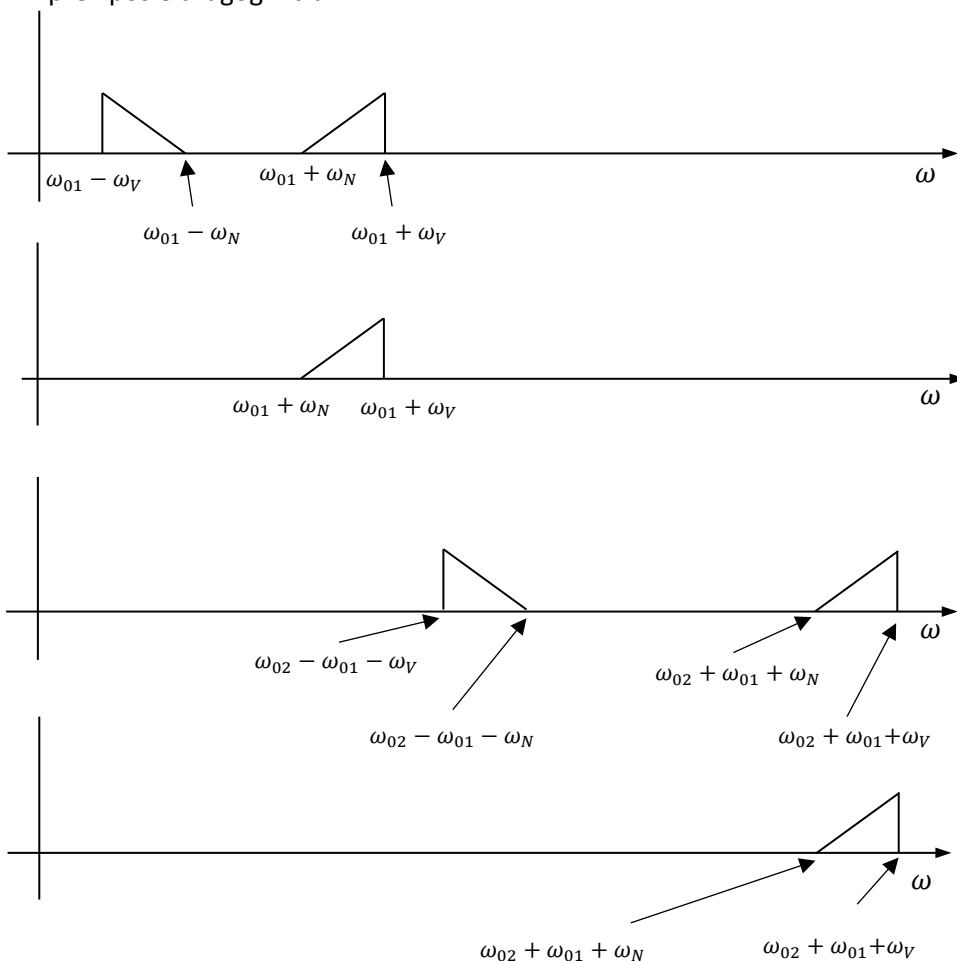
Nacrtati amplitudske spektre signala u sistemu prikazanom na Slici 6.10 u tačkama: pre prvog filtra, posle prvog filtra, pre drugog filtra i posle drugog filtra. Smatrati da su filtri propusnici opsega učestanosti idealni. Signali $u_{01}(t), u_{02}(t)$ su dati sa: $u_{01}(t) = 2\cos(\omega_{01}t), u_{02}(t) = 2\cos(\omega_{02}t)$.



Slika 6.10 Blok šema modulatora iz Zadatka 4

Rešenje:

Na Slici 6.11 su prikazani spektri signala pre prvog filtra, posle prvog filtra i pre i posle drugog filtra.



Slika 6.11 Prikaz spektra u karakterističnim tačkama na izlazu sistema iz Zadatka 4

Posle prvog modulatora, odnosno pre prvog filtra, spektar je pomoću produktne modulacije pomeren oko učestanosti nosioca ω_{01} . Na izlazu prvog filtra propušta se samo opseg učestanosti od $\omega_{01} + \omega_N$ do $\omega_{01} +$

ω_V , odnosno na izlazu ovog filtra imamo samo gornji bočni opseg. Sada je ovaj signal ulazni modulišući signal za drugi produktni modulator, s tim što je donja učestanost spektra ovako dobijenog modulišućeg signala sada $\omega_{01} + \omega_N$. Na izlazu iz drugog modulatora imamo da je razmak po frekvencijama između donjeg i gornjeg bočnog opsega jednak $2\omega_{01} + 2\omega_N$. Drugi filter propušta samo gornji bočni opseg i na izlazu imamo amplitudski modulisan signal sa jednim bočnim opsegom koji zauzima frekvencijski opseg od učestanosti $\omega_{02} + \omega_{01} + \omega_N$ do $\omega_{02} + \omega_{01} + \omega_V$.

5. Pokazati da se demodulacija CAM signala može izvršiti produktnim demodulatorom u kome se primljeni CAM signal množi lokalno generisanim nosiocem iste učestanosti kao u predajniku i eventualno pomerene faze, odnosno signalom oblika $2 \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$, gde je ω_0 učestanost nosioca, a θ fazna razlika između nosioca u predajniku i prijemniku. Ovakva demodulacija se naziva sinhrona ili koherentna demodulacija.

Rešenje:

Konvencionalno amplitudski modulisani signal je dat formulom:

$$u_{CAM}(t) = U_0[1 + m_0 m(t)] \cos(\omega_0 t).$$

Produktni demodulator množi modulisani signal lokalno generisanim nosiocem oblika $\cos(\omega_0 t + \theta)$. Na izlazu demodulatora imamo:

$$u = \{U_0[1 + m_0 m(t)] \cos(\omega_0 t)\} \cdot 2 \cos(\omega_0 t + \theta),$$

$$u = U_0[1 + m_0 m(t)] \cdot 2 \cdot \frac{\cos \theta + \cos(2\omega_0 t + \theta)}{2},$$

$$u = U_0 \cdot \cos \theta + U_0 \cdot m_0 m(t) \cdot \cos \theta + U_0[1 + m_0 m(t)] \cdot \cos(2\omega_0 t + \theta).$$

Iz poslednje jednačine se vidi da na izlazu produktnog demodulatora imamo jednosmernu komponentu, signal proporcionalan modulišućem signalu i signal čiji se spektar nalazi oko učestanosti $2\omega_0$. Filtrom propusnikom niskih učestanosti možemo da eliminišemo komponente oko učestanosti $2\omega_0$. Treba odstraniti i jednosmernu komponentu posle čega se dobija:

$$u_{DEM} = U_0 \cdot m_0 \cdot m(t) \cdot \cos \theta.$$

Treba primetiti da demodulisani signal zavisi od $\cos \theta$, odnosno zavisi od razlike u faznim stavovima nosioca u modulatoru i lokalno generisanog nosioca u prijemniku. Ako su signali nosioca sinhronizovani i po učestanosti

i po fazi u prijemniku se dobija najveći mogući demodulisani signal. Ako je fazna razlika $\theta = \frac{\pi}{2}$ izlazni signal će biti jednak nuli.

6. Prostoperiodični signal frekvencije 10 kHz se frekvencijski moduliše prostoperiodičnim signalom frekvencije 100 MHz. Maksimalna devijacija frekvencije FM signala iznosi 100 kHz. Proceniti, koliki frekvencijski opseg zauzima ovaj signal primenom Carson-ovog obrasca.

Rešenje:

Indeks modulacije je definisan jednačinom:

$$m = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{100 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 10.$$

Primenom Carson-ovog obrasca:

$$B = 2\Delta f + 2f_m,$$

$$B = 2f_m(m + 1) = 2 \cdot 10 \text{ kHz}(10 + 1) = 220 \text{ kHz}.$$

7. Prostoperiodičan signal $m(t) = 4\cos(2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 t)$ se dovodi na ulaz frekvencijskog modulatora sa konstantom proporcionalnosti k_f . Izračunati maksimalnu devijaciju frekvencije, indeks modulacije i opseg koji zauzima modulisani signal.

Rešenje:

Maksimalna devijacija frekvencije nosećeg signala odgovara maksimalnoj vrednosti modulišućeg signala pomnoženog sa konstantom proporcionalnosti. Maksimalna vrednost modulišućeg signala je 4V pa je maksimalna devijacija frekvencije:

$$\Delta f = 4V \cdot k_f = 4V \cdot 10 \text{ kHz/V} = 40 \text{ kHz}.$$

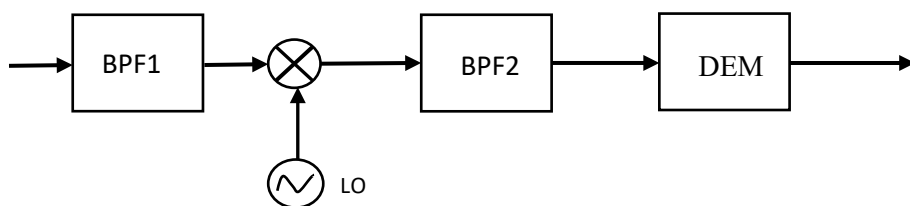
Indeks modulacije je:

$$m = \frac{k_f A_m}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{40}{8} = 5,$$

$$B = 2\Delta f + 2f_m = 2 \cdot 40 \text{ kHz} + 2 \cdot 8 \text{ kHz} = 96 \text{ kHz}.$$

8. Na Slici 6.12 je prikazana principna blok šema prijemnika frekvencijski modulisanog signala sa konverzijom na međuučestanost (MF, eng.

Intermediate Frequency – IF). Signal se dovodi na ulaz prvog filtra propusnika opsega učestanosti (BPF1) čiji propusni opseg može da se menja. Zadatak ovog filtra je da propusti željeni signal i da oslabi učestanosti koje mogu da se pojave na ulazu drugog filtra usled konverzije na međuučestanost. Posle filtriranja filtrom BPF1 signal se pojačava i množi u produktnom modulatoru učestanošću lokalnog oscilatora koja iznosi f_{LO} i koja takođe može da se menja. Množenjem se obavlja konverzija (mešanje) na međufrekvencijsku učestanost koja iznosi $(f_{LO} - f_i) = 10,7$ MHz. Drugi filter (BPF2) propušta opseg željenog signala koji se sada nalazi oko MF učestanosti, zatim se signal pojačava i dovodi u FM demodulator. Na ulaz prijemnika dolazi FM signal iz oseg od 87,5 MHz do 108 MHz. Opseg koji zauzima i -ti signal iznosi $B = 180$ kHz, a razmak između nosioca je 200 kHz. Ako na ulaz prijemnika dolazi signal centralne učestanosti $f_i = 87,5$ MHz, izračunati kolika treba da je vrednost učestanosti lokalnog oscilatora f_{LO} . Ako se može smatrati da je BPF2 idealan filter propusnik opsega učestanosti širine 180 kHz čija je centralna učestanost 10,7 MHz, kakva bi trebalo da je karakteristika filtra BPF1 da ne dolazi do interferencije sa signalima iz drugih opsega.



Slika 6.12 Principalska blok šema prijemnika frekvencijski modulisanog signala sa konverzijom na međuučestanost

Rešenje:

Vrednost učestanosti lokalnog oscilatora (LO) treba da bude:

$$(f_{LO} - f_i) = f_{MF}, \quad f_{LO} = f_{MF} + f_i = 98,2 \text{ MHz.}$$

Na izlazu mešača imamo signal:

$$u_1(t) = \sum_i u_{FM,i}(t) \cos(2\pi \cdot f_{LO} \cdot t)$$

Od svakog i -tog kanala nastaju dva transilirana spektra signala:

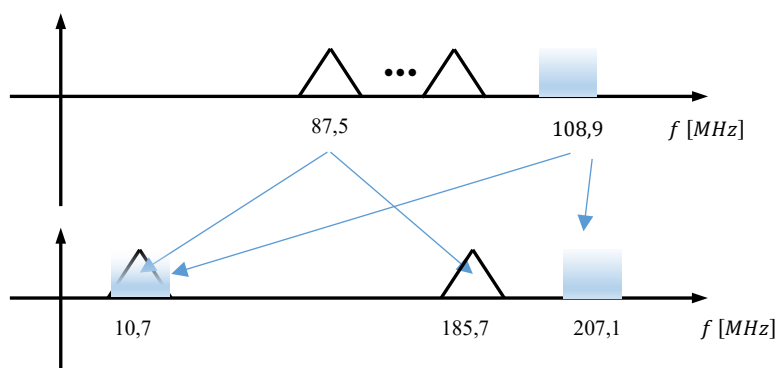
- komponenta $\frac{1}{2} U_{FM,i}(2\pi j(f_{LO} - f_i))$ oko učestanosti $(f_{LO} - f_i)$,
- komponenta $\frac{1}{2} U_{FM,i}(2\pi j(f_{LO} + f_i))$ oko učestanosti $(f_{LO} + f_i)$.

Analiziranjem spektra koji se dobija na izlazu mešača (Slika 6.13) može se primetiti da se za $f_{LO} = 98,2$ MHz i spektar ulaznog signala koji je centriran oko 87,5 MHz, posle konverzije na međuučestanost, dobija se spektar na MF učestanosti 10,7 MHz. Takođe se može primetiti da će se i spektar oko učestanosti 108,9 MHz pojaviti na učestanosti 10,7 MHz i preklopiti sa spektrom ulaznog signala. Spektar na učestanosti 108,9 MHz treba da bude što više oslabljen filtrom BPF1. Ova učestanost se naziva simetrična učestanost (eng. *Image Signal*) i nalazi se na učestanosti:

$$f_{i,sim} = f_i + 2f_{MF} = f_{LO} + f_{MF} = 108,9 \text{ MHz.}$$

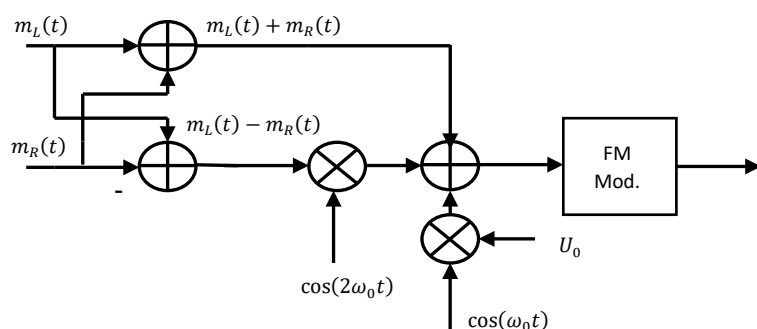
Filtar BPF1 treba da propusti željeni signal i potisne simetričnu učestanost. Njegova idealna karakteristika je data sa:

$$H_{BPF1}(f) = \begin{cases} 1, & f_i - B/2 < f < f_i + B/2 \\ 0, & f_{i,sim} - B/2 < f < f_{i,sim} + B/2 \end{cases}$$



Slika 6.13 Prikaz uticaja simetrične učestanosti u prijemniku sa konverzijom na međuučestanost u Zadatku 8.

9. Na Slici 6.14 je prikazana blok šema stereofonskog prenosa audio signala pomoću FM modulacije. Sa $m_L(t)$ je označen levi kanal, a sa $m_R(t)$ desni. Nacrtati spektar signala na ulazu u FM modulator koristeći simboličku predstavu za spektre signala u vidu trougaonog oblika (ali označiti učestanosti) i proceniti potreban opseg za prenos FM modulisanog signala ako se može uzeti da audio signali $m_L(t)$ i $m_R(t)$ imaju spektar od 0 do $f_m = 15$ kHz i ako se zna da je maksimalna devijacija učestanosti $\Delta f = 75$ kHz. Koliki opseg je potreban za monofonski prenos audio signala, ako se za monofonske emisije prenosi samo $m_L(t) + m_R(t)$ signal? Učestanost f_0 iznosi 19 kHz.



Slika 6.14 Principijska blok šema za stereofonski prenos audio signala pomoću FMmodulacije u Zadatku 9.

Rešenje:

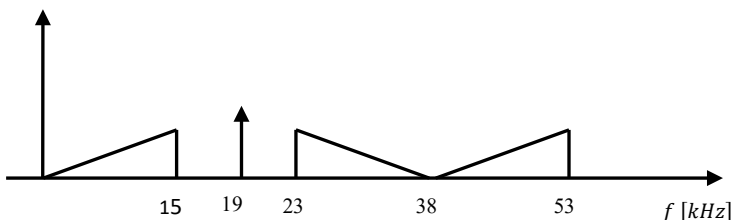
Na osnovu blok dijagrama predajnika na Slici 6.14 vidi se da se prvo formiraju signali $m_L(t) - m_R(t)$ i $m_L(t) + m_R(t)$. Signal $m_L(t) - m_R(t)$ se vodi na ulaz produktnog modulatora na čijem izlazu imamo AM-2BO signal koji zauzima opseg oko učestanosti $2f_0 = 38 \text{ kHz}$. Spektr ovako dobijenog signala je u opsegu od $2f_0 - f_m = 38 \text{ kHz} - 15 \text{ kHz} = 23 \text{ kHz}$ do $2f_0 + f_m = 38 \text{ kHz} + 15 \text{ kHz} = 53 \text{ kHz}$. Signal $m_L(t) + m_R(t)$ se nalazi u opsegu od 0 Hz do $f_m = 15 \text{ kHz}$. Ovaj signal se sabira sa AM-2BO signalom i sinusnim signalom na učestanosti $f_0 = 19 \text{ kHz}$. Rezultujući spektr na ulazu u FM modulator ima spektr prikazan na Slici 6.15.

Na osnovu Carson-ovog obrasca možemo da procenimo širinu spektra signala na izlazu FM modulatora:

$$B = 2\Delta f + 2f_m = 2 \cdot 75 \text{ kHz} + 2 \cdot 53 \text{ kHz} = 256 \text{ kHz}.$$

U slučaju kada se prenosi samo $m_L(t) + m_R(t)$ signal imamo:

$$B = 2\Delta f + 2f_m = 2 \cdot 75 \text{ kHz} + 2 \cdot 15 \text{ kHz} = 180 \text{ kHz}.$$



Slika 6.15 Prikaz spektra na ulazu u FM modulator u Zadatku 10

6.5 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Nosilac je:
 - a) slučajan signal,
 - b) pomoćni deterministički signal,**
 - c) aperiodični signal.

2. Modulišući signal može biti:
 - a) samo analogni,
 - b) samo digitalni,
 - c) i analogni i digitalni signal.**

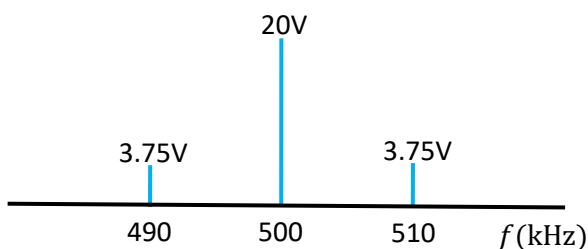
3. Modulirani signal je:
 - a) signal na ulazu u modulator,
 - b) signal na izlazu iz modulatora,**
 - c) signal koji se sabira sa signalom poruke.

4. Modulacija je:
 - a) postupak variranja nekog parametra nosioca srazmerno promeni modulišućeg signala (signala poruke),**
 - b) postupak ekstrakcije signala poruke iz primljenog signala,
 - c) postupak transformacije signala u digitalan signal.

5. Analogne modulacije podrazumevaju da je modulišući signal:
 - a) analogni,**
 - b) digitalni,
 - c) uvek sinusni.

6. Kod konvencionalne amplitudske modulacije nosilac je:
 - a) povorka pravougaonih impulsa,
 - b) sinusni signal,**
 - c) slučajan signal.

7. Modulacija se primenjuje:
- a) samo kod radio prenosa,
 - b) samo kod žičnog prenosa,
 - c) **može da se koristi i kod žičnog i kod bežičnog prenosa.**
8. Koji od ovih razloga su tipični razlozi za primenu modulacije (zaokružiti sve tačne odgovore):
- a) **medijum za prenos ne dozvoljava prenos u osnovnom opsegu,**
 - b) **praktični razlozi realizacije sistema i povećanje otpornosti na šum i smetnje,**
 - c) **multipleksiranje signala.**
9. Modulacija kod koje se amplitude sinusnog nosioca menjaju u skladu sa promenama amplitude modulišućeg signala se zove:
- a) **amplitudska modulacija,**
 - b) frekvencijska modulacija,
 - c) fazna modulacija.
10. Sinusni signal amplitudski moduliše sinusni nosilac koristeći konvencionalnu amplitudsku modulaciju. Na slici je prikazan spektar modulisanog signala. Kolika je učestanost gornjeg bočnog opsega:
- a) 490 kHz,
 - b) 500 kHz,
 - c) **510 kHz.**



11. Za istu sliku, kolika je učestanost nosioca?
- a) 490 kHz,
 - b) 500 kHz,**
 - c) 510 kHz.
12. Za istu sliku kolika je učestanost modulišućeg signala?
- a) 10 kHz,**
 - b) 20 kHz,
 - c) 510 kHz.
13. Sinusni signal amplitudski moduliše sinusni nosilac. Ako je učestanost modulišućeg signala 10 kHz a učestanost nosioca 500 kHz, kolika je učestanost donjeg bočnog opsega:
- a) 490 kHz,**
 - b) 500 kHz,
 - c) 510 kHz.
14. U slučaju konvencionalne amplitudske modulacije, gde je nosilac amplitude 2 V i frekvencije 10 Hz, a modulišuci signal sinusna funkcija amplitude 1 V i frekvencije 1 Hz, a indeks modulacije 0.5, odrediti amplitudu gornjeg bočnog opsega.
- a) 2 V,
 - b) 1/2 V,**
 - c) 1/4 V.
15. U slučaju konvencionalne amplitudske modulacije, gde je nosilac amplitude 2 V i frekvencije 10 Hz, a modulišuci signal sinusna funkcija amplitude 1 V i frekvencije 1 Hz, a indeks modulacije 0.5, odrediti frekvenciju gornjeg bočnog opsega.
- a) 11 Hz,**
 - b) 2 Hz,
 - c) 9 Hz.

16. Prednost konvencionalne amplitudske modulacije (CAM) je:
- a) veliki stepen iskorišćenja (dobar energetski bilans),
 - b) mali opseg koji zauzima CAM signal,
 - c) **jednostavna demodulacija.**
17. Kod konvencionalno amplitudski modulisanog signala (CAM) prenosi se:
- a) gornji bočni opseg,
 - b) gornji i donji bočni opseg,
 - c) **gornji bočni opseg, donji bočni opseg i nosilac.**
18. Ako modulišući signal u osnovnom opsegu učestanosti zauzima spektar od 0 do f_m , onda posle amplitudske modulacije sa dva bočna opsega (AM-DSB), modulisani signal zauzima opseg:
- a) f_m ,
 - b) **$2f_m$,**
 - c) $f_m/2$.
19. Amplitudska modulacija sa potisnutim jednim bočnim opsegom (SSB) se koristi da bi se:
- a) **smanjio opseg koji zauzima modulisan signal,**
 - b) povećala imunost na smetnje,
 - c) olakšala demodulacija.

7 DIGITALIZACIJA SIGNALA

Ciljevi: Upoznavanje sa digitalizacijom signala korišćenjem impulsne kodne modulacije. Upoznavanje sa teoremom o odabiranju, spektrom diskretizovanog signala u slučaju idealnog odabiranja i praktičnim načinima odabiranja. Razumevanje pojave preklapanja spektra. Upoznavanje sa diskretizacijom signala po amplitudi i greškom koja se unosi prilikom kvantizacije. Razumevanje uticaja frekvencije odabiranja i broja kvantizacionih nivoa na binarni protok na izlazu impulsno kodnog modulatora.

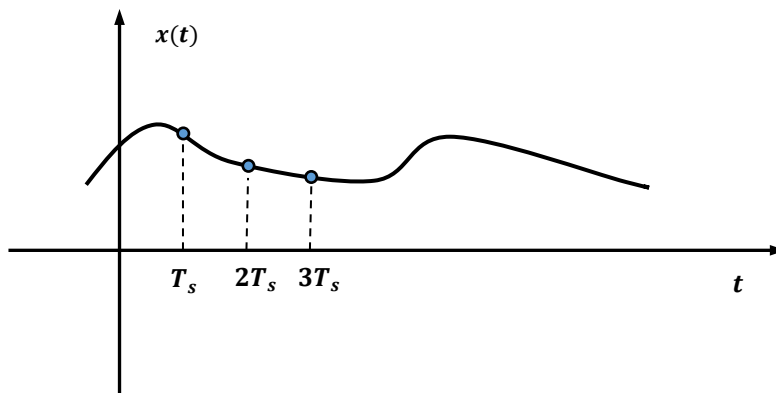
7.1 UVOD

Digitalni sistemi prenosa signala imaju mnogobrojne prednosti u odnosu na analogne sisteme prenosa zbog čega se danas sve više koriste. Neke od prednosti digitalnog prenosa su mogućnost korišćenja sofisticirane digitalne obrade signala koja omogućava korigovanje grešaka u prenosu, obezbeđivanje tajnosti prenosa podataka, lakše otklanjanje neželjenih uticaja kanala na signal, lakše multipleksiranje signala... Zbog napretka u tehnologiji izrade digitalnih kola i signal procesora kao i njihove mogućnosti da obrađuju signale većom brzinom, digitalni komunikacioni sistemi danas dominiraju i u sistemima koji su tradicionalno bili analogni. Da bi analogni signali mogli da se prenose digitalnim sistemima prenosa potrebno ih je prvo digitalizovati, odnosno pretvoriti u digitalne signale. Digitalizacija signala podrazumeva diskretizaciju analognog signala po vremenu i amplitudi pre dalje digitalne obrade i prenosa.

7.2 DISKRETIZACIJA SIGNALA PO VREMENU

Veoma bitan korak u digitalizaciji signala predstavlja diskretizacija signala u vremenu. Diskretizacija signala u vremenu podrazumeva odmeravanje (*Sampling*) signala u određenim ekvidistantnim vremenskim trenucima i predstavljanje signala diskretnim signalom koji je definisan samo u tim vremenskim trenucima odmeravanja. Vrednosti diskretnog signala su jednake

vrednostima analognog signala u trenucima odmeravanja. Postupak odmeravanja se zove još odabiranje ili uzorkovanje, a diskretne vrednosti dobijene ovim postupkom odbircima ili odmercima signala. Na Slici 7.1 je prikazan proces odmeravanja signala:



Slika 7.1 Ilustracija procesa odabiranja proizvoljnog signala sa periodom odabiranja T_s

Teorema o odabiranju signala (odmeravanju signala) koja je poznata kao Šenonova, Nikvistova ili Kotelnikova teorema, kaže da se svaki signal čiji je spektar signala ograničen učestanošću f_m može jednoznačno predstaviti odbircima u određenim vremenskim trenucima ako je period odabiranja (odmeravanja) T_s takav da $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$. Ako se signal odabira na ovakav način, analogni signal se može potpuno rekonstruisati iz svojih odbiraka. Alternativno možemo napisati da učestanost odabiranja $f_s = \frac{1}{T_s}$ mora da bude barem dva puta veća od maksimalne učestanosti u spektru signala, odnosno zahteva se da je:

$$f_s \geq 2f_m.$$

Signal može da se diskretizuje u vremenu ako se pomnoži periodičnom povorkom uskih impulsa. Trajanje impulsa bi trebalo da bude što manje, odnosno u idealnom slučaju beskonačno malo, tako da idealnu diskretizaciju teorijski možemo predstaviti množenjem analognog signala povorkom Dirakovih impulsa. Impulсни signal koji se dobija ovakvim odabiranjem se može predstaviti:

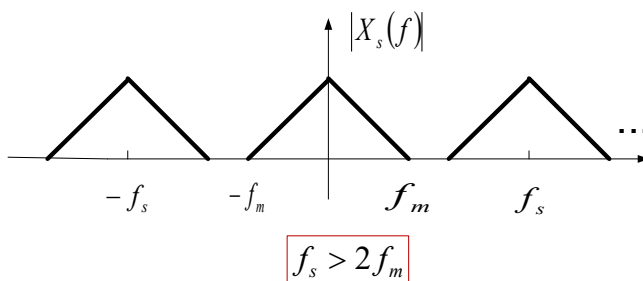
$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s).$$

Spektar signala, dobijenog idealnim postupkom odabiranja, je jednak beskonačnoj sumi transliranih spektara kontinualnog signala pomnoženih sa

$\frac{1}{T_s}$. Izraz za spektar diskretizovanog signala se dobija kada nađemo Furijeovu transformaciju signala $x_s(t)$:

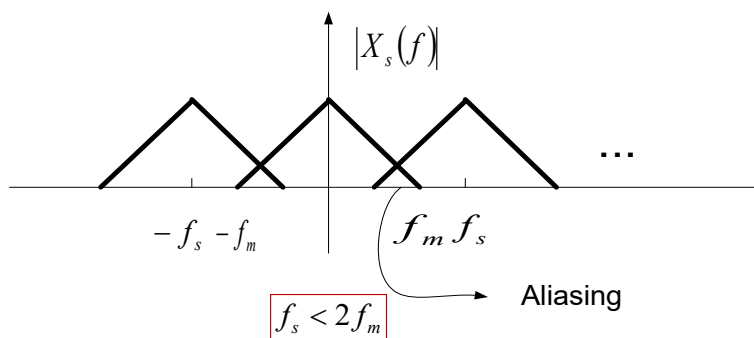
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - n\omega_s)).$$

Spektar diskretizovanog signala $X_s(j\omega)$ je prikazan na Slici 7.2 gde je podrazumevano da je spektar analognog signala predstavljen trougaonim oblikom:



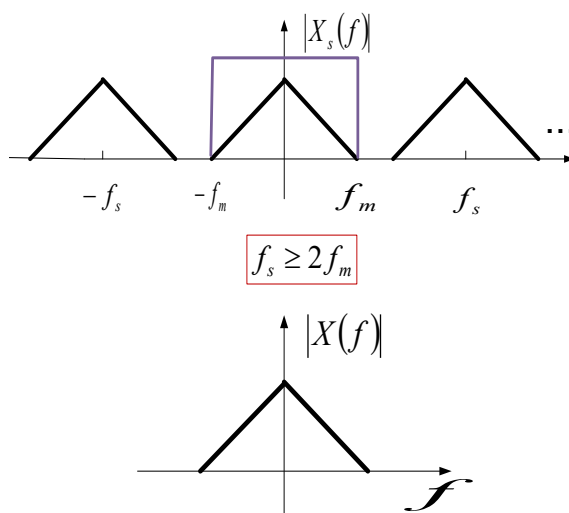
Slika 7.2 Spektar idealno diskretizovanog signala

Sa Slike 7.3 je moguće uočiti da ako je učestanost odabiranja manja od minimalane učestanosti odabiranja f_s (koja se zove još i Nikvistova brzina odmeravanja) da će doći do preklapanja spektra (eng. *Aliasing*). Ovo je ilustrovano na Slici 7.3.



Slika 7.3 Prikaz pojave preklapanja spektra prilikom odabiranja signala neodgovarajućom učestanošću odmeravanja

Da ne bi došlo do pojave preklapanja spektra koriste se *antialiasing* filtri koji obezbeđuju da se sve spektralne komponente preko učestanosti $f_s/2$ potisnu pre procesa diskretizacije. Originalni analogni signal se može rekonstruisati iz odbiraka pomoću filtra propusnika niskih učestanosti što je ilustrovano na Slici 7.4.



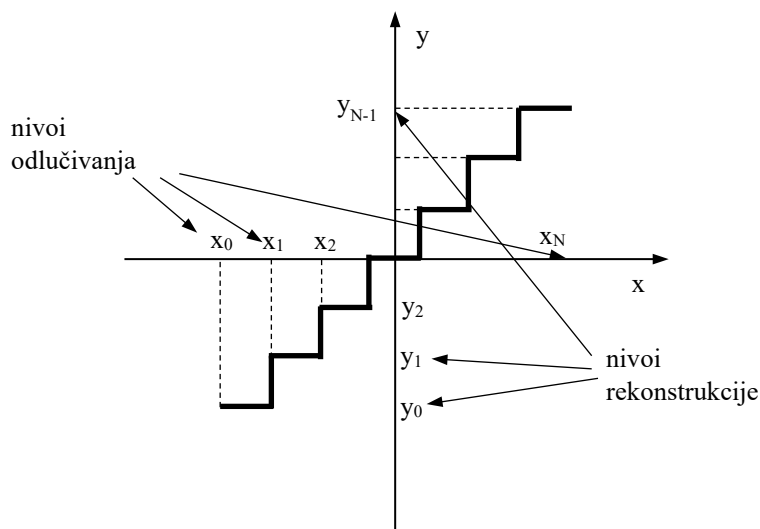
Slika 7.4 Proces rekonstrukcije signala iz odbiraka pomoću idealnog NF filtra

7.3 DISKRETIZACIJA PO AMPLITUDI

Da bi se signal predstavio u digitalnom obliku koji može da se skladišti i obrađuje u digitalnim sistemima potrebno je ograničiti rezoluciju amplitude diskretnog signala (broj bita kojima se predstavlja vrednost svakog odbirka). Zbog toga je potrebno izvršiti diskretizaciju signala po amplitudi. Postupak diskretizacije signala po amplitudi se naziva kvantizacija (eng. *Quantization*). Kod kvantizacije signala ceo opseg mogućih amplituda signala koje može imati analogni signal se izdela na kvantizacione intervale koji su u najjednostavnijem slučaju iste širine. Sve moguće vrednosti analognog signala iz određenog kvantizacionog intervala se preslikavaju u jednu vrednost u okviru kvantizacionog intervala. Širina kvantizacionog intervala se naziva korak kvantizacije.

7.3.1 Uniformni kvantizer

Najjednostavniji kvantizer ima kvantizacione intervale iste širine. Vrednosti unutar kvantizacionih intervala u koje se preslikavaju (na koje se zaokružuju) sve amplitude ulaznog analognog signala se nalaze na aritmetičkoj sredini granica intervala. Ove vrednosti se nazivaju kvantizacionim nivoima. Ovakav kvantizer se naziva uniformni ili ravnomerni kvantizer. Prenosna karakteristika uniformnog kvantizera sa N kvantizacionih nivoa je prikazana na Slici 7.5.



Slika 7.5 Karakteristika uniformnog kvantizera

Postupkom kvantizacije se unosi greška, koja se naziva greška kvantizacije i ona iznosi $e_i = x - y_i$, gde je x vrednost analognog signala koja se nalazi u intervalu $x \in [x_i, x_{i+1})$, a y_i vrednost i -tog kvantizacionog nivoa na koju se zaokružuju sve vrednosti analognog signala iz ovog intervala. Ovaj kvantizer je optimalan za analogni signal sa uniformnom raspodelom amplituda u smislu da se pravi najmanja srednja kvadratna greška (eng. *Mean Square Error*) koja je definisana kao:

$$MSE_q = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx,$$

gde je $p(x)$ gustina verovatnoće amplituda analognog signala $x(t)$.

Greška usled kvantizacije se naziva još i šum kvantizacije i srednja kvadratna greška predstavlja snagu šuma kvantizacije. Koliki je uticaj greške zavisi od toga kolika je ona u odnosu na snagu signala pa se definiše i odnos signal-šum kvantizacije.

Za uniformnu raspodelu amplitude ulaznog signala čije vrednosti se nalaze u intervalu $[x_{min}, x_{max}]$ i uniformni kvantizer sa N kvantizacionih nivoa, korak kvantizacije je $\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$. Greška za uniformnu raspodelu amplitude signala čija je funkcija gustine verovatnoće pojavljivanja amplituda:

$$p(x) = \frac{1}{x_{max} - x_{min}} = \frac{1}{N \cdot \Delta}$$

nalazi se u intervalu $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$ i uniformno je raspodeljena. Srednja snaga šuma kvantizacije je :

$$MSE_q = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx = \frac{N}{N \cdot \Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12},$$

srednja snaga signala je:

$$P_s = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 p(x) dx = \frac{1}{x_{max} - x_{min}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 dx = \frac{\Delta^2 N^2}{12},$$

odnos signal-šum kvantizacije je $SNR_q = \frac{P_s}{MSE_q} = N^2$, ili u decibelima $SNR_q [dB] = 10 \log_{10} N^2$.

7.3.2 Neuniformna kvantizacija

U opštem slučaju ulazni signal u kvantizer ne mora imati uniformnu raspodelu. U tom slučaju uniformni kvantizer nije optimalan. Bolje rezultate daje kvantizer kod koga je korak kvantizacije promenljiv. Tako na primer za signal govora koji ima raspodelu amplitude takvu da su verovatnije male amplitude signala nego velike, bolje je male amplitude signala, koje se češće pojavljuju, kvantizovati sa manjim korakom kvantizacije a veće koje se ređe pojavljuju sa većim korakom kvantizacije. Ovo će doprineti da ukupna srednja kvadratna greška, koja zavisi od verovatnoće pojavljivanja amplitude, bude manja. Algoritam koji za zadatu gustinu verovatnoće amplitude ulaznog signala i broj kvantizacionih nivoa daje optimalne vrednosti intervala odlučivanja i kvantizacionih nivoa se zove Max-Lloyd kvantizer. Zbog kompleksnosti ovog algoritma u praksi se često koristi drugačiji način ostvarivanja neuniformne kvantizacije. Amplituda signala se prvo propusti kroz nelinearan sklop koji se naziva kompresor koji utiče na to da se promeni raspodela amplitude signala tako da bude približnija uniformnoj i da može da se koristi uniformni kvantizer. U prijemniku se koristi sklop sa inverznom karakteristikom u odnosu na kompresor koji se naziva ekspandor.

7.4 IMPULSNA KODNA MODULACIJA

Kod digitalizacije signala postupkom koji se zove impulsna kodna modulacija (eng. *Pulse Coded Modulation* – PCM) posle kvantizacije se vrši kodovanje

odnosno predstavljanje mogućih vrednosti kvantizovanih odbiraka brojevima. Za prenos elektronskim kolima pogodnije je predstaviti dekadne brojeve u binarnom obliku. Za predstavljanje N kvantizacionih nivoa potrebno je $n = \log_2 N$ bita. Na izlazu PCM koda imamo niz bita koji reprezentuje analogni signal, tako što su izvršeni postupci odabiranja, kvantizacije i kodovanja. Binarni protok (broj bita u sekundi) na izlazu PCM koda zavisi od brzine odmeravanja (f_s) i broja bita (n) koji se koristi za reprezentovanje odbirka:

$$R_b = f_s \cdot n$$

Jedinica za binarni protok je bit u sekundi (bit/s). Da bi se preneo preko telekomunikacionog kanala niz bita se predstavlja impulsima. U zavisnosti od osobina prenosnog kanala mogu se koristiti različiti oblici impulsa.

7.5 ZADACI

1. Izračunati kolika je potrebno bajtova memorije za zapis 10 minuta audio signala CD kvaliteta sa dva kanala koji je dobijen odabiranjem sa učestanošću 44,1 kHz i kodovanjem sa 16 bita po odmerku.

Rešenje:

$$2 \cdot 44100 \cdot \frac{\text{odB}}{\text{s}} \cdot 16 \frac{\text{bit}}{\text{odB}} \cdot 600 \text{ s} = 846720000 \text{ b} = 105840000 \text{ B} = 105,84 \text{ MB}$$

2. Ako se sinusni signal učestanosti 3000 Hz odabira učestanošću 9000 Hz, nacrtati spektar dobijenog diskretizovanog signala. Nacrtati spektar signala kada se signal odabira učestanošću od 5000 Hz.

Rešenje:

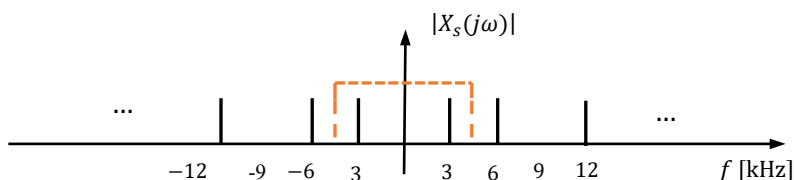
Spektar diskretizovanog signala jednak je beskonačnoj sumi periodično ponovljenih (transliranih oko celobrojnog umnoška učestanosti odabiranja) spektara kontinualnog signala pomnoženih sa $\frac{1}{T_s}$ odnosno spektar diskretizovanog signala je dat sa:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - k\omega_s)).$$

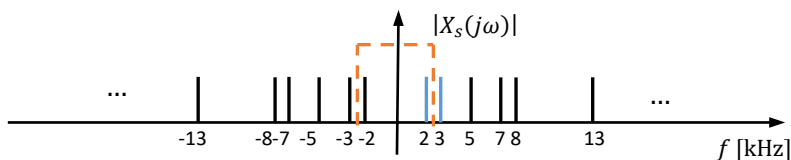
Pošto je signal koji se diskretizuje sinusni signal, njegov dvostrani spektar se sastoji iz komponente na učestanosti 3000 Hz i simetrične komponente

na učestanosti -3000 Hz. Posle diskretizacije signala gde je učestanost odabiranja 9000 Hz imamo komponente na učestanosti 3000 Hz i -3000 Hz, zatim na učestanostima $(9000-3000)$ Hz, $(9000+3000)$ Hz $(-9000+3000)$ Hz, $(-9000-3000)$ Hz i tako dalje, odnosno na učestanostima $k f_s \pm f_m$, $k = 0, \pm 1, \dots$.

Spektar diskretnog signala koji je dobijen diskretizovanjem sinusnog signala učestanosti 3000 Hz i kada je učestanost odabiranja 9000 Hz je prikazan na Slici 7.6. Spektar diskretizovanog signala sadrži beskonačno mnogo komponenti. Na Slici 7.6 su prikazane samo komponente koje se dobijaju za $k = 0, \pm 1$. Na Slici 7.7 je prikazan spektar u slučaju odabiranja učestanošću 5000 Hz koja ne ispunjava uslov teoreme o odabiranju. Na Slici 7.7 su prikazane samo komponente koje se dobijaju za $k = 0, \pm 1, \pm 2$. Možemo da primetimo da se u opsegu od 0 do $f_s/2$ pojavljuje i komponenta na učestanosti 2 kHz koja se zove *aliasing* komponenta odnosno komponenta koja se pojavljuje usled preklapanja spektra uzrokovanog neodgovarajućom učestanošću odabiranja. Prilikom rekonstrukcije signala pomoću filtra propusnika niskih učestanosti granične učestanosti $f_s/2$ na izlazu bismo u ovom slučaju dobili sinusni signal učestanosti 2 kHz. Na slikama je prikazan isprekidanom linijom idealan filter propusnik niskih učestanosti čija je granična učestanost $f_s/2$.



Slika 7.6 Spektar diskretizovanog signala iz Zadatka kada se koristi učestanost odabiranja 9 kHz



Slika 7.7 Spektar diskretizovanog signala iz Zadatka kada se koristi učestanost odabiranja 5 kHz

3. Izvesti izraz za spektar diskretizovanog signala kod idealnog odabiranja. Signal koji se diskretizuje $x_a(t)$ je ograničenog spektra sa maksimalnom učestanošću f_m u spektru signala.

Rešenje:

Idealno diskretizovan $x_s(t)$ signal se dobija kada analogni signal pomnožimo periodičnom povorkom Dirakovih impulsa:

$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s).$$

Spektar idealno diskretizovanog signala se dobija kada nađemo Furijeovu transformaciju signala $x_s(t)$:

$$X_s(j\omega) = \mathcal{F} \left\{ x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \right\}.$$

Možemo da pišemo (Zadatak 9 Poglavlje 3):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t}.$$

$$X_s(j\omega) = \mathcal{F} \left\{ x_a(t) \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t} \right\}.$$

Kada se primeni osobina frekvencijskog pomeraja dobija se:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - n\omega_s)).$$

4. Izvesti izraz za signal u vremenskom domenu koji se dobija kada se signal rekonstruiše iz odbiraka pomoću idealnog filtra propusnika niskih učestanosti penosne funkcije:

$$H_{LPF}(j\omega) = \begin{cases} T_s, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases}.$$

Rešenje:

Granična učestanost filtra je $f_g = f_m = f_s/2$ jednaka maksimalnoj učestanosti u spektru analognog signala odnosno polovini učestanosti odabiranja (idealna rekonstrukcija iz odbiraka).

U vremenskom domenu rekonstruisani signal je dat konvolucijom ulaznog impulsnog signala dobijenog idealnom diskretizacijom $x_s(t)$ i impulsnog odziva sistema propusnika niskih učestanosti $h_{LPF}(t)$:

$$x(t) = x_s(t) * h_{LPF}(t).$$

Idealno diskretizovan signal je dat sa

$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s).$$

Dok je odziv NF filtra (Zadatak 6, Poglavlje 5)

$$h_{LPF}(t) = 2T_s f_g \frac{\sin(2\pi f_g t)}{2\pi f_g t},$$

gde je prenosna funkcija filtra data sa $H_{LPF}(j\omega) = \begin{cases} T_s, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases}$

$$x(t) = x_s(t) * h_{LPF}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) h_{LPF}(t - nT_s),$$

$$x(t) = x_s(t) * h_{LPF}(t) = 2T_s f_g \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \frac{\sin(2\pi f_g(t - nT_s))}{2\pi f_g(t - nT_s)}.$$

Za $f_g = \frac{f_s}{2} = f_m$:

$$x(t) = x_s(t) * h_{LPF}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \frac{\sin(2\pi f_m(t - nT_s))}{2\pi f_m(t - nT_s)} = x_a(t).$$

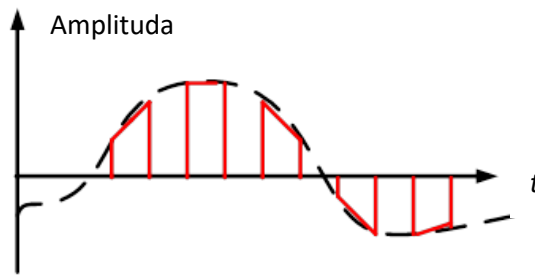
5. U praksi nije moguće odmeravati signale Dirakovim impulsima, već se korise uski impulsi konačnog trajanja. Posle množenja signala povorkom impulsa $u_0(t)$ čija perioda je T_s , a trajanje impulsa je τ i amplituda U_0 dobija se povorka impulsa gde je amplituda svakog impulsa u intervalu

$$nT_s - \frac{\tau}{2} < t < nT_s + \frac{\tau}{2}$$

jednaka amplitudi signala koji se odmerava. Dobijeni signal se naziva impulsno amplitudski modulisan signal (*Pulse Amplitude Modulation* – PAM). Može se primetiti da je kod ovakve modulacije nosilac povorka impulsa čiji je razvoj u Furijeov red dat sa (Zadatak 4 Poglavlje 3):

$$u_0(t) = U_0 \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_s \tau/2)}{n\omega_s \tau/2} e^{j\omega_s t}$$

dok modulišući signal predstavlja signal koji želimo da diskretizujemo. Signal koji se dobija ovakvim postupkom odabiranja je prikazan na Slici 7.8. Ovakav način odabiranja se naziva prirodno odabiranje. Pokazati kako izgleda spektar diskretizovanog signala posle ovakvog načina odabiranja.



Slika 7.8 Signal dobijen prirodnim odabiranjem signala

Rešenje:

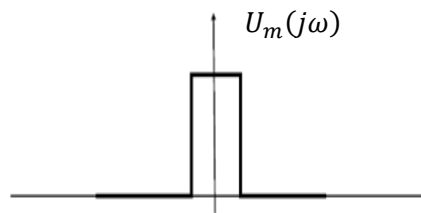
Množenjem signala koji želimo da diskretizujemo (modulišućeg signala) $u_m(t)$ povorkom impulsa dobija se impulsno amplitudski modulisan signal sa prirodnim odabiranjem :

$$u_{PAM}(t) = u_m(t)u_0(t) = U_0 \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_m(t) \frac{\sin(n\omega_s\tau/2)}{n\omega_s\tau/2} e^{jn\omega_s t}.$$

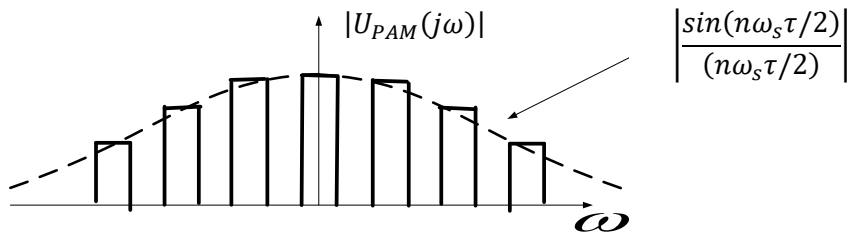
Ako nađemo Furijeovu transformaciju PAM signala dobićemo kako izgleda spektar diskretizovanog signala:

$$U_{PAM}(j\omega) = U_0 \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_s\tau/2)}{n\omega_s\tau/2} U_m(j(\omega - n\omega_s)),$$

gde je sa $U_m(j\omega)$ označen signal koji se diskretizuje, a čiji je spektar ograničen učestanošću ω_m . Spektar diskretizovanog signala je prikazan na Slici 7.10 gde je spektar ulaznog analognog signala simbolično predstavljen pravougaonikom prikazanim na Slici 7.9.



Slika 7.9 Spektar analognog signala



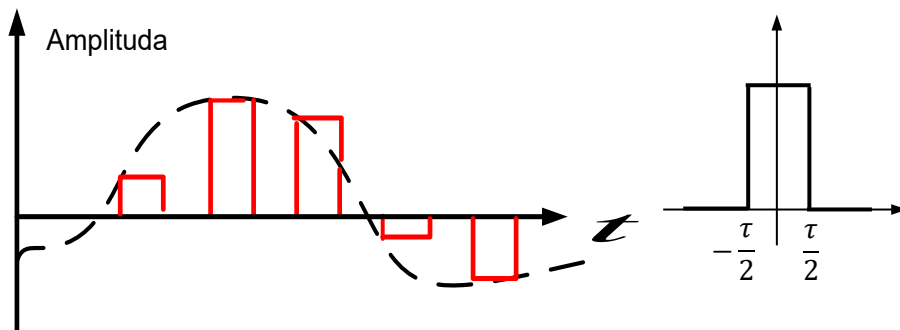
Slika 7.10 Spektral dobijen prirodnim odabiranjem analognog signala

Može se primetiti da su u spektru diskretizovanog signala ponovljene (translirane) komponente oko učestanosti $n\omega_s$ pomnožene različitim konstantama (za razliku od spektra kod idealnog odabiranja gde su svi spektri pomnoženi istom konstantom $\frac{1}{T_s}$), ali translirani spektri signala nisu izobličeni, odnosno sve komponente u opsegu

$$n\omega_s - \omega_m \leq \omega \leq n\omega_s + \omega_m$$

su pomnožene istom konstantom. Demodulacija (rekonstrukcija signala iz odbiraka) može se izvršiti filtrom propusnikom niskih učestanosti pri čemu mora da bude ispunjen uslov $\omega_s \geq 2\omega_m$.

6. U praksi se često koristi jednostavniji postupak odabiranja kod koga odbirci imaju konstantne amplitude za vreme trajanja impulsa. Kolo koje implementira ovakav način odabiranja je poznato pod nazivom *Sample and Hold* - SH kolo. Ovakav način odabiranja se naziva regularno odabiranje (*Flat Top Sampling*) i ilustrovano je na Slici 7.11. Pokazati kako izgleda spekter diskretizovanog signala i uporediti ga sa spektrom kod idealnog diskretizovanja signala i spektrom kod sistema za diskretizovanje signala sa prirodnim odabiranjem.



Slika 7.11 Diskretizacija signala regularnim odabiranjem

Slika 7.12
Pravougaoni impuls

Rešenje:

Signal se kod regularnog odabiranja može predstaviti:

$$u_{SH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_m(nT_s) p(t - nT_s),$$

gde je $p(t)$ jedinični pravougaoni impuls jedinične amplitude i trajanja τ prikazan na Slici 7.12.

Periodična povorka impulsa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s)$ se može predstaviti konvolucijom usamljenog pravougaonog impulsa $p(t)$ i povorke Dirakovih impulsa na sledeći način:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s) = p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s).$$

Diskretizovani signal kod regularnog odabiranja može se predstaviti:

$$u_{SH}(t) = p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_m(nT_s) \delta(t - nT_s).$$

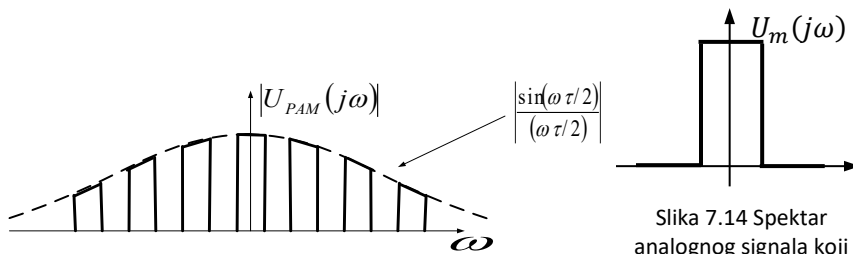
Može se primetiti da je spektar diskretizovanog signala:

$$U_{SH}(j\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} \cdot \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_m(nT_s) \delta(t - nT_s)\right\},$$

gde je sa $\mathcal{F}\{x(t)\}$ označena Furijeova transformacija signala $x(t)$. Spektar usamljenog pravougaonog impulsa je izračunat u Zadatku 1 u poglavlju 4, dok $\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_m(nT_s) \delta(t - nT_s)\}$ predstavlja spektar kod idealnog odabiranja koji je izračunat u Zadatku 3 u ovom poglavlju. Na osnovu prethodnih zaključaka možemo da pišemo:

$$U_{SH}(j\omega) = \tau \frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{(\frac{\omega\tau}{2})} \cdot \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_m(j(\omega - n\omega_s)).$$

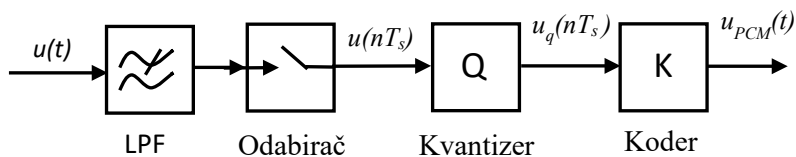
Spektar analognog signala i signala dobijenog regularnim odabiranjem su prikazani na Slici 7.13. Treba primetiti da su spektralne komponente dobijenog signala modifikovane težinskim faktorom $\frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{(\frac{\omega\tau}{2})}$ koji je kontinualna funkcija učestanosti zbog čega će se javiti linearno amplitudsko izobličenje. Ovaj efekat se ne javlja kod idealnog i prirodnog odabiranja.



Slika 7.13 Spektar signala dobijenog regularnim odabiranjem

Slika 7.14 Spektar analognog signala koji se diskretnizuje

7. Na Slici 7.15 je prikazana blok šema digitalizacije signala primenom PCM sa linearnom kvantizacijom. Odabiranje signala se obavlja ravnomerno (u jednakim vremenskim intervalima) sa periodom odabiranja $T = 125 \mu\text{s}$. Vrednosti amplituda odbiraka se kvantizuju u uniformnom kvantizeru sa 8 kvantizacionih nivoa. Ako je ulazni signal kosinusni signal $u(t) = U_0 \cos\left(2\pi f_m t + \frac{\pi}{5}\right)$, $f_m = 3 \text{ kHz}$, amplitude $U_0 = 1V$, prikazati vremenski oblik signala na izlazu PCM koda $u_{PCM}(t)$, kao i vrednosti amplitude signala na izlazu odabirača $u(nT_s)$ i kvantizera $u_q(nT_s)$. Smatrati da amplitudski opseg kvantizera odgovara maksimalnoj promeni ulaznog signala i da se u koderu koristi binarni kod i da se binarna jedinica predstavlja impulsom amplitude U a binarna nula odsustvom impulsa. Izračunati vrednosti za osam uzastopnih odbiraka, počevši od trenutka $t = 0$ i prikazati vremenski oblik $u_{PCM}(t)$ za prva tri odbirka.



Slika 7.15 Blok šema PCM koda

Rešenje:

$$u(t) = U_0 \cos\left(2\pi f_m t + \frac{\pi}{5}\right), \quad f_m = 3 \text{ kHz},$$

$$u(nT_s) = U_0 \cos\left(2\pi f_m \cdot n \cdot T_s + \frac{\pi}{5}\right), \quad T_s = 125 \mu\text{s},$$

$$u(nT_s) = U_0 \cos\left(2\pi f_m \cdot n \cdot \frac{1}{f_s} + \frac{\pi}{5}\right), \quad f_s = \frac{1}{T_s} = 8 \text{ kHz},$$

$$u(nT_s) = 1V \cdot \cos\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{3}{8} + \frac{\pi}{5}\right).$$

Vrednosti za $n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ su date redom:

[0,8090 -0,9877 0,5878 0,1564 -0,8090 0,9877 -0,5878 -0,1564].

Ove vrednosti se zaokružuju u kvantizeru na vrednosti kvantizacionih nivoa. Koristi se uniformna kvantizacija sa $N=8$ kvantizacionih nivoa tako da je korak kvantizacije jednak:

$$\Delta = \frac{(u(t))_{max} - (u(t))_{min}}{N} = \frac{1 - (-1)}{8} = 0,25V.$$

Širine svih kvantizacionih interval su jednake Δ pa su nivoi odlučivanja (granice intervala) date sa:

[$X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8$] = [-1 -0,75 -0,5 -0,25 0 0,25 0,5 0,75 1].

Nivoi rekonstrukcije (kvantizacioni nivoi) nalaze se na sredini intervala:

[$Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6 Y_7$] = [-0,875 -0,625 -0,375 -0,125 0,125 0,375 0,625 0,875].

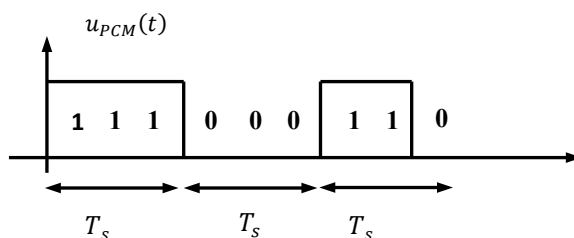
Svakom od kvantizacionih nivoa pridružuje se binarni kod dužine $n = \log_2 N = 3$ bita. Vrednosti mogućih kvantizacionih nivoa i binarne reči dužine 3 bita koje su im pridružene su prikazane u sledećoj tabeli:

Kvantizacioni nivoi	-0,875	-0,625	-0,375	-0,125	0,125	0,375	0,625	0,875
Binarni kod	000	001	010	011	100	101	110	111

Za izračunate odbirke signala $u(nT_s)$ dobijamo:

$u(nT_s)$	0,809	-0,9877	0,5878	0,1564	-0,809	0,9877	-0,5878	-0,1564
$u_q(nT_s)$	0,875	-0,875	0,625	0,125	-0,875	0,875	-0,625	-0,125
Binarni kod	111	000	110	100	000	111	001	100

Vremenski oblik signala na izlazu PCM koda je prikazan na Slici 7.16.



Slika 7.16 Signal na izlazu PCM kodera iz Zadatka 7.

8. Signal $u(t)$ se prenosi sistemom sa PCM. Kvantizacija odbiraka se obavlja sa osam kvantizacionih nivoa. Funkcija gustine verovatnoće signala $u(t)$ je data izrazom:

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |u(t)| \leq 2, \\ 0, & \text{za ostale vrednosti.} \end{cases}$$

Odrediti nivoe odlučivanja i nivoe rekonstrukcije, srednju kvadratnu vrednost greške koja se unosi postupkom kvantizacije i odnos signal šum kvantizacije.

Rešenje:

Na osnovu funkcije gustine verovatnoće možemo zaključiti da je maksimalna vrednost ulaznog signal jednaka $(u(t))_{max} = 2V$, a minimalna $(u(t))_{min} = -2V$. Odnosno amplituda signala je uniformno raspodeljena i nalazi se u opsegu $[-2V, 2V]$. Pošto se koristi uniformni kvantizer sa 8 kvantizacionih nivoa korak kvantizacije je isti i iznosi:

$$\Delta = \frac{2 - (-2)}{8} = 0,5V.$$

Kod uniformne kvantizacije širine kvantizacionih intervala su iste pa su granice intervala (nivoi odlučivanja) dati sa:

$$X_0 = (u(t))_{min}, \quad X_i = X_0 + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Nivoi odlučivanja u ovom primeru su dati sa:

$$[X_0 \ X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6 \ X_7 \ X_8] = [-2 \ -1,5 \ -1 \ -0,5 \ 0 \ 0,5 \ 1 \ 1,5 \ 2].$$

Kvantizacioni nivoi (nivoi rekonstrukcije) se nalaze na sredini kvantizacionih intervala:

$$Y_i = \frac{X_i + X_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Nivoi rekonstrukcije u ovom primeru su dati sa:

$$[Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6 Y_7] = [-1,75 \ -1,25 \ -0,75 \ -0,25 \ 0,25 \ 0,75 \ 1,25 \ 0,75].$$

Srednja kvadratna greška kvantizacije je:

$$MSE_q = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{0,5^2}{12} = 0,0208 \text{ V}^2.$$

Odnos signal-šum kvantizacije je:

$$SNR_q = \frac{P_s}{MSE_q} = N^2,$$

ili u decibelima:

$$SNR_q [dB] = 10 \log_{10} N^2,$$

Odnosno:

$$SNR_q = 64, SNR_q [dB] = 10 \log_{10} 64 = 18,06 \text{ dB}.$$

9. Signal govora se koduje postupkom impulsne kodne modulacije (PCM). Ako je učestanost odabiranja signala 8 kHz i ako se svaki odbirak koduje sa 8 bita izračunati binarni protok na izlazu PCM koda.

Rešenje:

Nakon A/D konverzije postupkom PCM protok digitalizovanog telefonskog signala je $8000 \text{ odb/s} \cdot 8 \text{ bita/odb} = 64 \text{ kb/s}$.

10. Neka se prenosi signal govora čiji je opseg 4 kHz tako što se koristi PCM sa uniformnom kvantizacijom. Ako se signal odmerava najmanjom frekvencijom za korektno odmeravanje odrediti maksimalni broj bita za kodovanje PCM signala podrazumevajući da je maksimalni binarni protok 128 kbit/s.

Rešenje:

$$f_s = 2 \cdot f_m = 8 \text{ kHz}, R_{b,PCM} = f_s \cdot n \leq 128 \text{ kb/s} \rightarrow n = 128 \text{ kb/s} / 8 \text{ kHz} = 16 \text{ bita}.$$

11. Uniformno raspodeljen signal se koduje sistemom PCM sa uniformnim kvantizerom. Ako je maksimalna učestanost u spektru ovog signala 15 kHz i ako je odnos signal - šum kvantizacije minimalno 72 dB, izračunati minimalni binarni protok signala na izlazu PCM kodera.

Rešenje:

Da bi se dobio minimalni binarni protok potrebno je odmeravati signal najmanjom učestanošću odabiranja i koristiti najmanji broj bita za kodovanje odbiraka. Pošto je maksimalna učestanost u spektru signala 15 kHz onda je minimalna učestanost odabiranja dvostruko veća odnosno 30 kHz. Minimalni broj bita se može izračunati na osnovu odnosa signal-šum kvantizacije:

$$SNR_q [dB] = 10 \cdot \log_{10} N^2 = 20 \cdot \log_{10} N = 20 \log_{10} 2^n,$$

gde je N broj kvantizacionih nivoa, a n broj bita kojim se reprezentuje svaki kvantizacioni nivo. Iz poslednjeg izraza možemo izračunati minimalni broj bita:

$$20 \cdot \log_{10} 2^n \geq 72, \quad 20 \cdot n \cdot \log_{10} 2 \geq 72, \quad n \geq 11.9589, \quad n_{min} = 12.$$

Minimalni binarni protok je: $R_{b,min} = f_{s,min} \cdot n_{min} = 360 \text{ kb/s}$.

7.6 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Najniža učestanost odabiranja (Nikvistova učestanost) koja ne dovodi do pojave preklapanja spektra je:
 - a) **2fm (gde je fm najviša učestanost u spektru signala),**
 - b) 2fm (gde je fm najniža učestanost u spektru signala),
 - c) fm (gde je fm najviša učestanost u spektru signala).
2. Preklapanje spektra nastaje:
 - a) **usled nedovoljne učestanosti odabiranja signala,**
 - b) usled zaokruživanja vrednosti odbirka signala,
 - c) usled korišćenja kompandera.

3. Preklapanje spektra se može izbeći:
- a) **ograničavanjem spektra signala i povećanjem učestanosti odabiranja,**
 - b) povećanjem broja kvantizacionih nivoa i korišćenjem nelinearne kvantizacije,
 - c) povećanjem broja nivoa u digitalnom signalu i korišćenjem modulacije.
4. Ako je učestanost sinusnog signala 2 kHz i ako se signal odabira učestanošću od 3.5 kHz pojaviće se aliasing komponenta na učestanosti:
- a) **1,5 kHz,**
 - b) 500 Hz,
 - c) 3,5 kHz.
5. Greška kvantizacije je naziv za grešku koja nastaje:
- a) usled nedovoljne učestanosti odabiranja signala,
 - b) **usled zaokruživanja vrednosti odbirka signala,**
 - c) usled korišćenja kompandera.
6. Greška kvantizacije:
- a) **se smanjuje ako broj kvantizacionih nivoa raste,**
 - b) se smanjuje ako se broj kvantizacionih nivoa smanjuje,
 - c) ne zavisi od broja kvantizacionih nivoa.
7. Nelinearna kvantizacija podrazumeva:
- a) da je korak kvantizacije uvek isti,
 - b) **da se korak kvantizacije menja,**
 - c) da je korak kvantizacije uniforman.
8. Za uniformno raspodeljen signal u granicama od $-X_{max}$ do $+X_{max}$, koristi se uniformni kvantizer sa $N=2^n$ nivoa kvantizacije. Ako se korak kvantizacije smanji dva puta, srednja kvadratna greška (snaga šuma kvantizacije) se:
- a) smanji dva puta,
 - b) poveća dva puta,
 - c) **smanji četiri puta.**
9. Korišćenjem kompresora i ekspandora kod postupka kvantizacije govora se:

- a) **smanjuje šum kvantizacije,**
- b) povećava binarni protok,
- c) povećava učestanost odabiranja.

10. Signal se prenosi sistemom sa PCM modulacijom. Maksimalna učestanost u spektru signala je 4000 Hz. Ovaj signal se odabira učestanošću od 8000 Hz. Svaki odbirak se kvantizuje sa 256 nivoa. Odrediti binarni protok signala na izlazu iz PCM modulatora.

- a) **64000 bps,**
- b) 8000 bps,
- c) 4000 bps.

11. Signal govora se odabira, kvantizuje i koduje sa 4 bita po odbirku. Rezultujući signal je PCM signal. Odrediti broj kvantizacionih nivoa za PCM modulator koji koristi 4 bita.

- a) **16 nivoa,**
- b) 8 nivoa,
- c) 4 nivoa.

12. Povećanjem učestanosti odabiranja se:

- a) **povećava binarni protok na izlazu PCM koda,**
- b) smanjuje binarni protok na izlazu PCM koda,
- c) smanjuje potreban opseg za prenos PCM signala.

13. Povećanjem broja nivoa kvantizacije se:

- a) smanjuje binarni protok,
- b) **povećava binarni protok,**
- c) smanjuje potreban opseg za prenos.

14. Korišćenjem kompresora i ekspandora kod postupka kvantizacije:

- a) **ostvaruje se neuniformna kvantizacija,**
- b) ostvaruje se ravnomerna kvantizacija,
- c) izbegava se potreba za kvantizacijom.

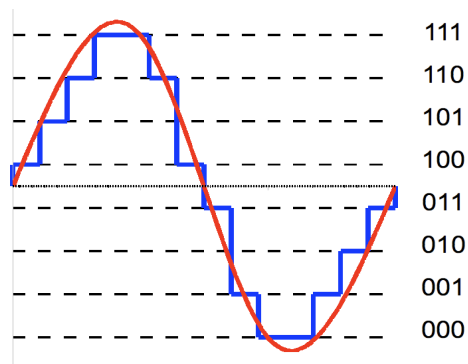
15. Kvantizacija se koristi:

- a) **uvek prilikom digitalizacije signala,**
- b) samo pri digitalizaciji govora,
- c) samo pri digitalizaciji slike.

16. Uniformna kvantizacija je optimalna (daje najmanju grešku):

- a) **kada ulazni signal ima uniformnu raspodelu,**
- b) kada ulazni signal ima Gausovu raspodelu,
- c) uvek daje najmanju grešku.

17. Na slici je prikazan postupak kvantizacije sinusnog signala. Koliko kvantizacionih nivoa se koristi?



- a) 4,
- b) 3,
- c) **8.**

18. Originalna slika je kvantizovana i dobijene su dve slike. Koja od slika koristi veći broj nivoa kvantizacije?

- a) **leva,**
- b) desna,
- c) koriste isti broj nivoa kvantizacije.



19. Za prethodno pitanje: Koja od ove dve slike će zahtevati veći memorijski prostor za skladištenje?

- a) **leva,**
- b) desna,
- c) nema razlike.

20. Pri kodovanju govora PCM-om za digitalnu telefoniju se koristi

- a) **8 bita,**
- b) 16 bita,
- c) 24 bita.

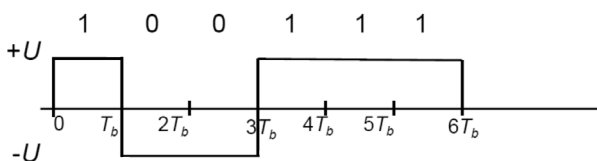
8 DIGITALNI PRENOS U OSNOVNOM OPSEGU

Ciljevi: Upoznavanje i sticanje znanja o prenosu digitalnog signala u osnovnom opsegu. Poznavanje osnovnih linijskih kodova i njihovih karakteristika. Razumevanje uticaja kanala na prenos digitalnog signala, verovatnoće greške, ograničenja propusnog opsega i šuma. Upoznavanje sa granicama u prenosu signala.

8.1 UVOD

Digitalni prenos u osnovnom opsegu podrazumeva prenos niza digitalnih simbola koji su reprezentovani (kodovani) odgovarajućim oblikom impulsa. Ovi oblici impulsa se nazivaju linijskim kodovima. Različiti linijski kodovi imaju različite karakteristike. Najznačajniji kriterijumi za izbor linijskog koda su verovatnoća greške na prijemu, potreban opseg za prenos signala, jednostavnost određivanja trenutka kada počinje i završava se svaki simbol (osobina samosinhronizacije), kompleksnost predajnika i prijemnika, postojanje jednosmerne komponente u spektru signala i mogućnost detekcije grešaka koje su nastale tokom prenosa.

Na Slici 8.1 je predstavljen jedan primer reprezentacije binarnih simbola impulsima. U ovom primeru binarni simbol "1" predstavlja pozitivnu vrednost napona $+U$, a binarni simbol "0" predstavlja negativnu vrednost napona $-U$. Trajanje impulsa (bita) je označeno sa T_b . Brzina signaliziranja (binarni protok) je jednak broju bita koji se prenosi u jedinici vremena: $R_b = 1/T_b$ (jedinica je bit/s ili b/s ili bps – *bits per second*).



Slika 8.1 Primer reprezentacije binarnih simbola impulsima

Ovakav prenos digitalnog signala ne koristi pomoćni nosilac pa se naziva prenos u osnovnom opsegu. Digitalne signale kao i analogne je moguće prenositi i u

transponovanom opsegu korišćenjem nosioca, kada govorimo o digitalnim modulacionim postupcima sa nosiocem.

8.2 OSNOVNI BINARNI LINIJSKI KODOVI

Postoji veliki broj različitih linijskih kodova. Osnovni linijski kodovi koji se obrađuju u ovom poglavlju su unipolarni kod bez povratka na nulu (*Non-return-to-zero* – NRZ), unipolarni kod sa povratkom na nulu (*Return-to-zero* – RZ), polarni kod bez povratka na nulu, polarni kod sa povratkom na nulu, bipolarni NRZ i RZ kod (*Alternate Mark Inversion* - AMI) i Mančester kod.

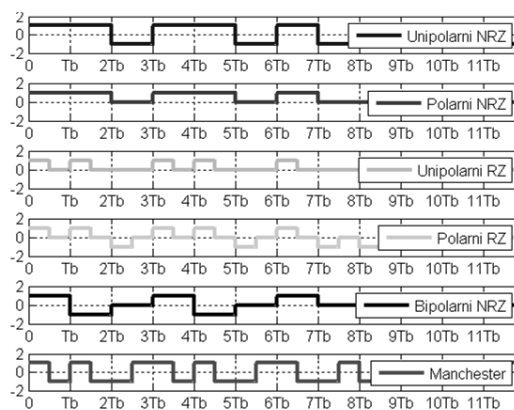
Kod unipolarnih kodova signal je uvek istog polariteta. Jedan naponski nivo se koristi za reprezentaciju binarnog simbola 1, a odsustvo napona za reprezentaciju simbola 0. Kod polarnih kodova, jedan binarni simbol je predstavljen pozitivnim, dok je drugi binarni simbol predstavljen negativnim impulsom. Kod bipolarnih kodova se koriste tri naponska nivoa. Pozitivni i negativni naponski nivo se koristi za reprezentovanje binarnog simbola 1, tako što se naizmenično koriste, čime se eliminiše jednosmerna (DC) komponenta.

Kod unipolarnog koda bez povratka na nulu, signal je konstantan u toku trajanja celog bita (T_b). Kod unipolarnog koda sa povratkom na nulu signal je konstantan u toku dela trajanja vremenskog intervala koji odgovara prenosu jednog bita, obično je to polovina vremenskog intervala, a u drugoj polovini je jednak nuli. Kod Mančester koda postoji promena signala na polovini trajanja bita. Ova promena nivoa omogućava sinhronizaciju i istovremeno enkodira binarni simbol. Prelazak sa visokog na niski naponski nivo predstavlja binarni simbol 1 dok obrnuta promena reprezentuje binarni simbol 0.

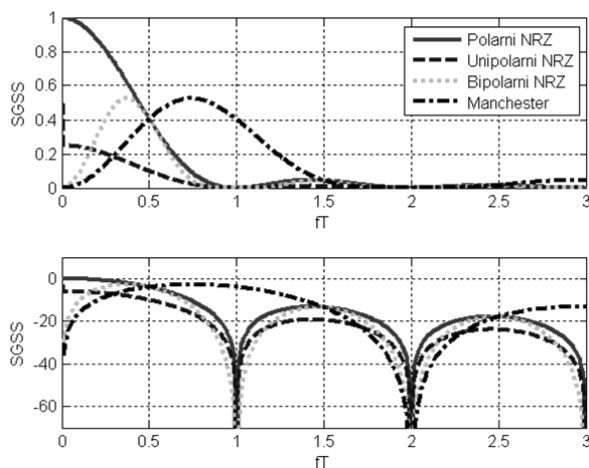
Na Slici 8.2 je prikazan primer talasnog oblika sekvence bita enkodirane polarnim i unipolarnim NRZ kodom, bipolarni NRZ (AMI) kodom i Mančester kodom. Na Slici 8.3 je prikazan spektar ovih signala (spektralna gustina srednje snage – SGSS, *Power Spectral Density* - PSD). Na prvoj polovini ove slike je data SGSS sa linearnom razmerom, dok je na drugoj slici predstavljeno $10\log SGSS$ kako bi se lakše uočile nule u spektru signala.

Prednosti NRZ i RZ kodova su što su jednostavni za realizaciju. NRZ kod takođe ima i dobre osobine u pogledu širine potrebnog propusnog opsega za prenos, dok je RZ kodu potreban dvostruko veći frekvencijski opseg za prenos signala u poređenju sa NRZ kodom. Kod unipolarne varijante NRZ i RZ koda postoji DC komponenta. Unipolarne varijante nemaju dobre osobine kada je u pitanju

sinhronizacija, što je naročito izraženo kod kodovanja dugog niza nula, a kod NRZ i kod dugog niza simbola 1. Polarne varijante NRZ i RZ kodova nemaju DC komponente. U pogledu sinhronizacije bolje osobine ima RZ nego NRZ kod. Kod bipolarnog koda se vidi da nema gubitka sinhronizacije za dugi niz simbola 1, ali i dalje postoji problem sa gubitkom sinhronizacije za dugi niz binarnih simbola 0. Ovaj kod nema DC komponentu ni značajne spektralne komponente u blizini DC komponente i ima dobru spektralnu efikasnost. Zbog pravila naizmeničnog kodovanja binarnog simbola 1 pozitivnim i negativnim naponskim nivoom, moguća je i detekcija greške na prijemu kada je ovo pravilo narušeno. Mančester kod ima dobre osobine u pogledu sinhronizacije, odsustvo DC komponente i značajnih komponenti u blizini DC komponente, a nedostatak je veliki opseg potreban za prenos.



Slika 8.2 Primer talasnog oblika sekvence bita enkodirane različitim linijskim kodovima



Slika 8.3 Spektralna gustina srednje snage – SGSS različitih linijskih kodova

8.3 SPEKTRALNA EFIKASNOST LINIJSKIH KODOVA

Za poređenje različitih kodova koristi se veličina koja se naziva spektralna efikasnost i koja predstavlja odnos binarnog protoka i potrebnog frekvencijskog opsega ($\eta = R_b/B$). Jedinica koja se koristi za spektralnu efikasnost je b/s/Hz.

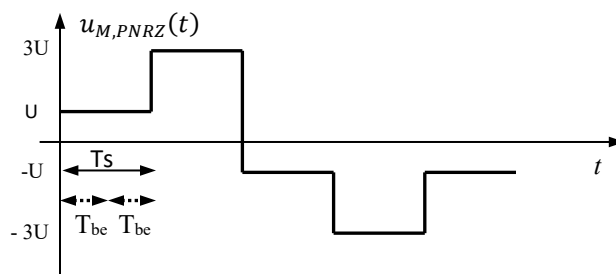
Spektri digitalnih signala koji koriste pravougaone impulse imaju beskonačnu apsolutnu širinu spektra signala (opseg frekvencija u kojem je spektralna gustina srednje snage signala različita od nule). Uobičajeni kriterijum za određivanje praktične širine opsega potrebnog za prenos digitalnog signala je kriterijum prve nule u spektru signala. Sa slike 8.3 se može videti da se za polarni, unipolarni i bipolarni NRZ prva nula nalazi na učestanosti $1/T_b$, dok je za Mančester prva nula na učestanosti $2/T_b$. U sledećoj tabeli su date spektralne efikasnosti osnovnih binarnih linijskih kodova.

Kod	Potreban opseg za prenos po kriterijumu prve nule u spektru signala	Spektralna efikasnost
Unipolarni NRZ	R_b	1 b/s/Hz
Polarni NRZ	R_b	1 b/s/Hz
Unipolarni RZ	$2R_b$	1/2 b/s/Hz
Polarni RZ	$2R_b$	1/2 b/s/Hz
Bipolarni RZ	R_b	1 b/s/Hz
Bipolarni NRZ	R_b	1 b/s/Hz
Mančester	$2R_b$	1/2 b/s/Hz

8.4 M-ARNI SIGNALI

Binarni signali mogu u toku trajanja jednog impulsa koji odgovara prenosu jednog binarnog simbola (bita) imati jednu od dve moguće vrednosti napona. M-arni digitalni signali u toku jednog intervala T_s koji odgovara prenosu jednog M-arnog simbola mogu imati M različitih nivoa amplituda napona. Za M-arne signale definiše se brzina signaliziranja (simbolski protok) kao: $R_s = 1/T_s$. Jedinica koja se koristi je simbol u sekundi (simb/s).

Primer M-arnog polarnog NRZ signala sa $M=4$ naponska nivoa je prikazan na Slici 8.4.



Slika 8.4 Polarni NRZ signal sa M=4 naponska nivoa

Kada se koriste M-arni signali, može se definisati i ekvivalentni binarni protok na sledeći način: ako signal ima M nivoa amplituda, svaki nivo predstavlja $n = \log_2(M)$ bita. U intervalu T_s se može poslati n bita trajanja $T_{be} = T_s/n$ gde T_{be} označava ekvivalentni binarni signalizacioni interval. Ekvivalentni binarni protok je $R_{be} = 1/T_{be} = n \cdot R_s$ b/s.

Spektralna efikasnost M-arnog koda je data odnosom ekvivalentnog binarnog protoka i širine propusnog opsega potrebnog za prenos signala. Za polarni M-arni NRZ signal spektralna efikasnost je

$$\eta = \frac{R_{eb}}{B} = \log_2 M \text{ bit/s/Hz}$$

gde je potreban opseg za prenos B računat po kriterijumu prve nule u spektru signala.

8.5 UTICAJ KANALA NA PRENOS DIGITALNOG SIGNALA

Pri prenosu digitalnih signala dolazi do slabljenja i izobličenja impulsa (usled neidealne karakteristike prenosnog sistema, usled ograničenja propusnog opsega), superponiranja šuma na koristan signal kao i interferencije koja potiče od drugih signala.

U digitalnim sistemima neidealni uslovi prenosa dovode do pojave grešaka u prepoznavanju binarnog simbola na prijemu. Kao mera kvaliteta digitalnog prenosa se koristi verovatnoća greške odnosno odnos broja bita koji su primljeni sa greškom i ukupnog broja poslatih bita (BER- *Bit Error Rate*):

$$BER = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

gde je n broj bita primljenih sa greškom, a N ukupan broj poslatih bita.

8.5.1 Uticaj šuma

Svaki neželjeni električni signal koji se superponira na koristan signal predstavlja šum. Šum može da dovede do grešaka u prijemniku i ograničava brzinu signaliziranja. Verovatnoća greške zavisi od odnosa snage signala (S) i snage šuma (N). Odnos signal-šum (eng. *Signal to Noise Ratio*) se često izražava decibelima (dB):

$$\text{SNR (dB)} = 10 \cdot \log_{10}(S/N).$$

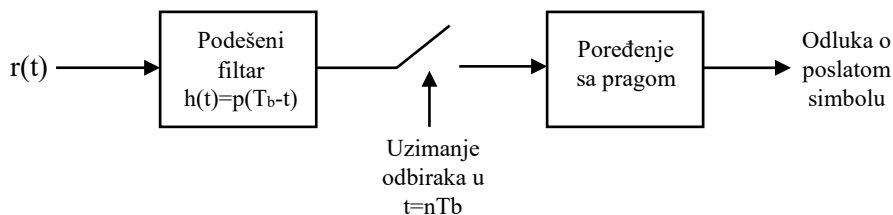
Da bismo mogli teorijski da izračunamo verovatnoću greške potrebno je da usvojimo odgovarajući model šuma. Osnovni model koji se koristi je beli Gausov šum, odnosno šum koji ima ravnu, konstantnu spektralnu gustinu srednje snage (beli šum) i Gausovu raspodelu amplituda (Gausov šum) (eng. *Additive White Gaussian Noise* – AWGN). Spektralna gustina srednje snage AWGN je konstantna i iznosi $\frac{N_0}{2} \frac{W}{\text{Hz}}$.

U prijemniku na osnovu primljenog signala u intervalu koji odgovara poslatom bitu treba odlučiti da li je bio poslat binarni simbol 0 ili 1, tako da verovatnoća greške bude minimalna. Prijemnik za koji se dobija minimalna verovatnoća greške se naziva optimalni prijemnik.

Za polarni i unipolarni NRZ signal koristi se pravougaoni impuls $p(t)$ trajanja T_b . Optimalni prijemnik se sastoji od filtra čiji je impulsni odziv

$$h(t) = p(T_b - t)$$

zatim sledi kolo za odabiranje koje uzima odbirke u trenucima $t = nT_n$. Ovi odbirci se prosleđuju detektoru koji poredi dobijene vrednosti sa određenim pragom i na osnovu toga odlučuje koji simbol je bio poslat. Za unipolarni NRZ signal prag je jednak polovini amplitude impulsa, dok je za polarni NRZ jednak nuli. Pošto impulsni odziv filtra zavisi od oblika impulsa koji se koristi ovaj filter se naziva podešeni filter (eng. *Matched Filter* – MF). Na Slici 8.5 je prikazan optimalan prijemnik.



Slika 8.5 Optimalni prijemnik za polarni i unipolarni NRZ

Verovatnoća greške za polarni i unipolarni NRZ signala i optimalni prijemnik je data izrazima:

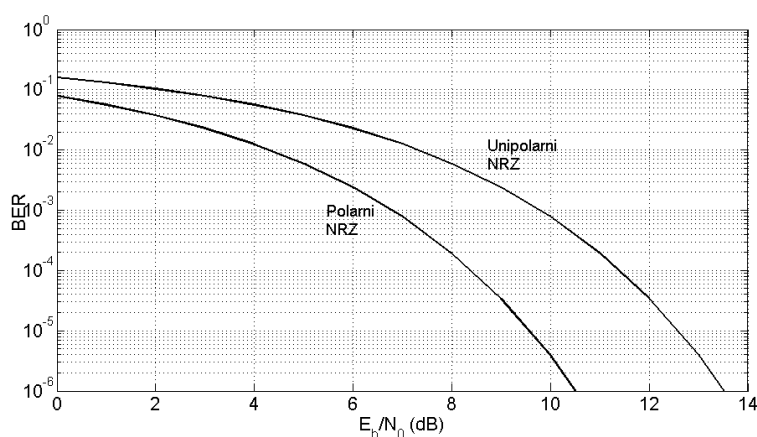
$$P_{e,PNRZ} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad P_{e,UNRZ} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

gde je E_b srednja energija po bitu, $N_0/2$ spektralna gustina srednje snage šuma a $\operatorname{erfc}(x)$ se naziva komplementarna funkcija greške i predstavlja integral:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz$$

U digitalnim komunikacijama se kao mera odnosa signal-šum (*Signal-to-Noise Ratio* - SNR) uzima odnos $\frac{E_b}{N_0}$, i obično se izražava u decibelima odnosno $10 \log \left(\frac{E_b}{N_0} \right)$.

Verovatnoća greške za ove kodove je prikazana na Slici 8.6.

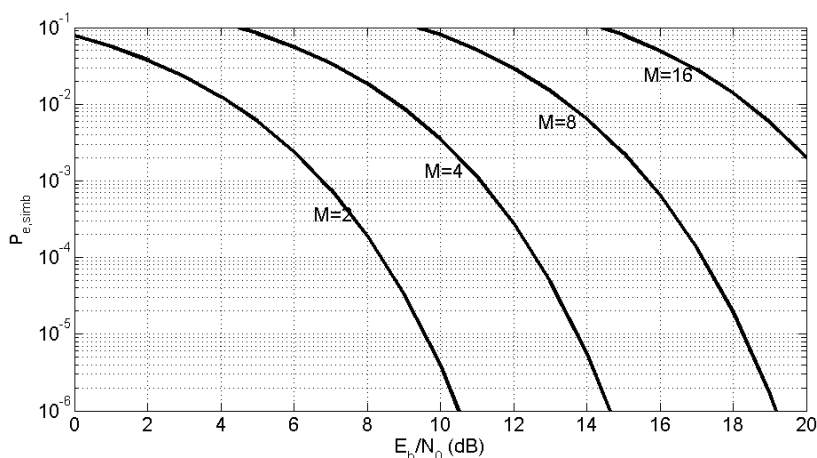


Slika 8.6 Verovatnoća greške kod polarnog i unipolarnog NRZ koda

Za M-arni polarni NRZ signal se pragovi odlučivanja nalaze na jednakim rastojanjima između susednih nivoa. Verovatnoća greške po simbolu je data sa:

$$P_{e,simb} = \frac{(M-1)}{M} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}}$$

Verovatnoća greške za M=2, 4, 8 ili 16 je prikazna na Slici 8.7.



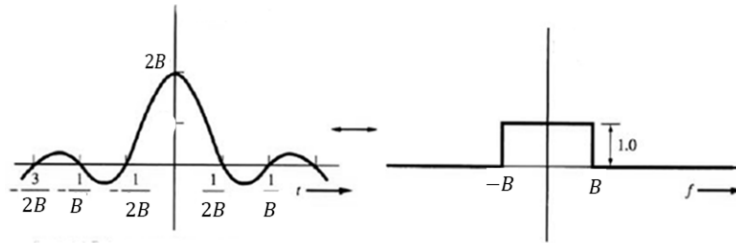
Slika 8.7 Verovatnoća greške polarnog M-arnog NRZ koda za M=2, 4, 8, ili 16

8.5.2 Uticaj ograničenja propusnog opsega

Realni kanali se ponašaju kao kanali sa ograničenim frekvencijskim opsegom. Ograničenje spektra signala dovodi do širenja impulsa u vremenskom domenu tako da može doći do preklapanja signala koji odgovaraju simbolima poslatim u različitim vremenskim intervalima. Ova pojava se naziva intersimbolska interferencija (*Inter Symbol Interference* - ISI).

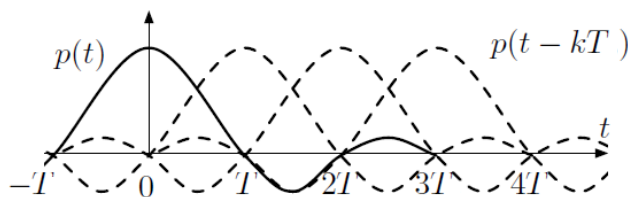
Kolika će biti ISI zavisi od oblika impulsa i moguće je izabrati oblik impulsa tako da u trenucima odabiranja u prijemniku ne dolazi do ove pojave.

Idealni impuls koji obezbeđuje da ne dolazi do pojave ISI je impuls oblika $2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{(2\pi Bt)}$, gde je B propusni opseg sistema. U Zadatku 1 u Poglavlju 4 je pokazano da ovakav impuls ima ograničen spektar (Slika 8.8).



Slika 8.8 Impuls oblika $2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{(2\pi Bt)}$ i njegov spektar

Ako je na raspolaganju idealni kanal širine B onda se korišćenjem ovakvog oblika impulsa može poslati signal bez prisustva ISI tako što se impulsi šalju u trenucima kada funkcija $\frac{\sin(2\pi Bt)}{(2\pi Bt)}$ prolazi kroz nule kao što je prikazano na Slici 8.9. Minimalno rastojanje između impulsa je $T=1/(2B)$. Maksimalna brzina prenosa za binarno signaliziranje je $R_{max} = \frac{1}{T} = 2B$.



Slika 8.9 Signaliziranje idealnim Nikvistovim impulsima

8.5.3 Granice u prenosu signala

U odsustvu šuma (idealni kanal ali ograničenog opsega) maksimalna brzina signaliziranja koja se može postići pri prenosu digitalnih signala a da pri tome ne dođe do intersimbolske interferencije zavisi od širine propusnog opsega kanala (B) i broja naponskih nivoa koji se koriste za reprezentaciju digitalnog signala (M): $R_{max} = 2 \cdot B \cdot \log_2 M$.

U kanalu sa šumom maksimalna brzina prenosa podataka koja dozvoljava proizvoljno malu verovatnoću greške na prijemu (kapacitet kanala) je:

$R_{max} = C = B \cdot \log_2(1 + S/N)$, gde S/N označava odnos snage signala i snage šuma.

8.6 ZADACI

1. Skicirati vremenski oblik unipolarnog i polarnog NRZ signala, unipolarnog i polarnog RZ signala, bipolarnog NRZ koda i Mančester enkodiranog signala za binarnu sekvencu 100101100011. Izračunati srednju snagu polarnog NRZ signala, polarnog signala sa povratkom na nulu. Ako je trajanje binarnog simbola $T_b = 1 \mu s$ izračunati koliki opseg je potreban za prenos polarnog NRZ signala, polarnog RZ signala i spektralnu efikasnost ovih kodova.

Rešenje:

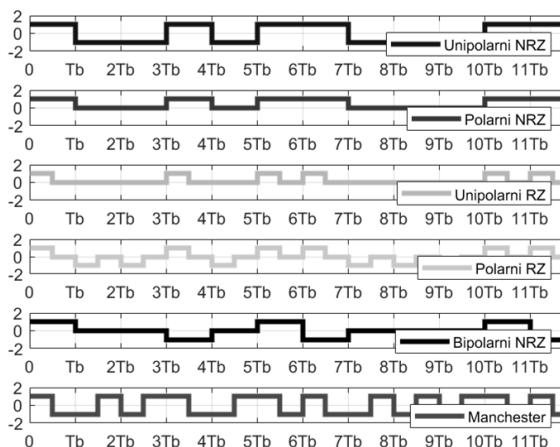
Vremenski oblici signala su prikazani na Slici 8.10.

Srednja snaga binarnog signala, ako se podrazumeva ista verovatnoća pojavljivanja simbola 0 i simbola 1, je data sa:

$$P_{av} = \frac{E_{b,av}}{T_b} = \frac{1}{T_b} \left[\frac{1}{2} E_0 + \frac{1}{2} E_1 \right],$$

gde, E_0 energija signala u toku signalizacionog intervala pri prenosu simbola 0, E_1 energija signala u toku signalizacionog intervala pri prenosu simbola 1.

Energija signala u toku signalizacionog intervala koji odgovara simbolu 0 i simbolu 1 je : $E_0 = \int_0^{T_b} u_0(t)^2 dt$ i $E_1 = \int_0^{T_b} u_1(t)^2 dt$, gde su $u_0(t)$ i $u_1(t)$ oblici impulsa koji odgovaraju simbolima 0 i 1 i podrazumeva se jedinična otpornost.



Slika 8.10 Vremenski oblici signala iz Zadatka 1

Za polarni NRZ signal imamo:

$$E_0 = \int_0^{T_b} U^2 dt = U^2 \cdot T_b \text{ i } E_1 = \int_0^{T_b} (-U)^2 dt = U^2 \cdot T_b, P_{av} = U^2.$$

Za unipolarni NRZ signal imamo:

$$E_0 = \int_0^{T_b} 0^2 dt = 0 \text{ i } E_1 = \int_0^{T_b} (-U)^2 dt = U^2 \cdot T_b, P_{av} = \frac{U^2}{2}.$$

Za polarni RZ signal imamo:

$$E_0 = \int_0^{T_b} U^2 dt = U^2 \cdot \frac{T_b}{2} \text{ i } E_1 = \int_0^{T_b} (-U)^2 dt = U^2 \cdot \frac{T_b}{2}, P_{av} = \frac{U^2}{2}.$$

Za unipolarni RZ signal imamo:

$$E_0 = \int_0^{T_b} 0^2 dt = 0 \text{ i } E_1 = \int_0^{T_b} (-U)^2 dt = U^2 \cdot \frac{T_b}{2}, P_{av} = \frac{U^2}{4}.$$

Širina spektra signala po kriterijumu prve nule u spektru signala za polarni i unipolarni NRZ iznosi

$$B_{NRZ} = R_b = \frac{1}{1\mu s} = 1 \text{ MHz},$$

dok za polarni i unipolarni RZ je dva puta veća

$$B_{RZ} = 2R_b = \frac{2}{1\mu s} = 2 \text{ MHz}$$

Spektralne efikasnosti su:

$$\eta_{NRZ} = \frac{R_b}{B_{NRZ}} = \frac{1 \text{ Mbit}}{1 \text{ MHz}} = 1 \text{ bit/s/Hz},$$

$$\eta_{RZ} = \frac{R_b}{B_{RZ}} = \frac{1 \text{ Mbit}}{2 \text{ MHz}} = 0,5 \text{ bit/s/Hz}$$

2. Maksimalna učestanost u spektru audio signala je 20 kHz, kolika je minimalna učestanost odabiranja? Signal se kvantizuje sa 65536 nivoa a zatim binarno koduje. Odrediti broj bita koji je potreban za reprezentovanje odbirka i binarni protok na izlazu iz koderu audio signala ako se koristi učestanost odabiranja 44100Hz i ako se koristi kvantizacija sa L=65536 nivoa. Ovako kodovan signal prenosi se u osnovnom opsegu kroz kanal ograničenog propusnog opsega širine 500 kHz. Odrediti koji M-arni polarni NRZ kod treba koristiti da bi se uspešno preneo signal.

Rešenje:

Minimalna učestanost odabiranja je jednaka

$$f_{s,min} = 2 \cdot f_m = 2 \cdot 20 \text{ kHz} = 40 \text{ kHz}$$

Pošto se koristi 65536 kvantizacionih nivoaa, za predstavljanje ovih nivoaa potrebno je $\log_2 65536 = 16$ bita. Binarni protok na izlazu audio koda je $R_b = 44100 \cdot 16 = 705,6 \text{ kbit/s}$. Za M-arni polarni NRZ po kriterijumu prve nule u spektru signala širina spektra signala je

$$B_{MPNRZ} = \frac{R_b}{\log_2 M}.$$

Ova širina spektra signala treba da bude manja od 500 kHz koliki je i propusni opseg kanala. Dobija se da je minimalna vrednost $M=4$, jer je

$$B_{MPNRZ} = \frac{R_b}{2} = \frac{705,6 \text{ kbit/s}}{2} = 352,8 \text{ kHz}$$

zadovoljava uslov da je širina spektra signala manja od propusnog opsega kanala.

3. Odrediti verovatnoću greške u prijemniku, ako se prenosi polarni NRZ signal binarnog protoka $R_b = 100 \text{ Mbit/s}$ i binarnog protoka $R_b = 10 \text{ Mbit/s}$, ako je primljena snaga na ulazu u prijemnik jednaka $P_r = 7 \mu\text{W}$. Spektralna gustina srednje snage šuma na ulazu u prijemnik je $N_0 = 10^{-14} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$.

Rešenje:

Za binarni protok $R_b = 100 \text{ Mbit/s}$ trajanje signalizacionog intervala (bita) je $T_b = \frac{1}{R_b} = 10^{-8} \text{ s}$ srednja energija po bitu je:

$$E_b = P_r \cdot T_b = 7 \mu\text{W} \cdot 10^{-8} \text{ s} = 7 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Verovatnoća greške zavisi od odnosa srednje energije po bitu i spektralne gustine srednje snage šuma:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{7 \cdot 10^{-14}}{10^{-14}} = 7.$$

Na osnovu izraza za verovatnoću greške

$$P_{e,PNRZ} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{b,av}}{N_0}} \right) = 9,1405 \cdot 10^{-5},$$

možemo proceniti verovatnoću greške pomoću Slike 8.6. Odnos signal-šum u decibelima je:

$$\frac{E_b}{N_0} \text{ (dB)} = 10 \cdot \log 7 = 8,45 \text{ dB},$$

pa se sa slike može očitati verovatnoća greške $9 \cdot 10^{-5}$.

Za binarni protok $R_b = 50 \text{ Mbit/s}$ trajanje signalizacionog intervala (bita) je:

$$T_b = \frac{1}{R_b} = 0,02 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Srednja energija po bitu je:

$$E_b = P_r \cdot T_b = 7 \mu\text{W} \cdot 0,02 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 14 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Verovatnoća greške zavisi od odnosa srednje energije po bitu i spektralne gustine srednje snage šuma:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{14 \cdot 10^{-14}}{10^{-14}} = 14.$$

Na osnovu izraza za verovatnoću greške

$$P_{e,PNRZ} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{b,av}}{N_0}} \right) = 6,07 \cdot 10^{-8}.$$

4. Odrediti maksimalni binarni protok za kanal bez šuma sa propusnim opsegom $B=20 \text{ kHz}$ i prenosom digitalnog signala koji koristi M-arni kod gde je $M=8$.

Rešenje:

Maksimalna brzina signaliziranja kada se koristi M-arno signaliziranje (prenos M-arnih simbola) je:

$$R_{max} = 2 \cdot B \cdot \log_2 M.$$

Za podatke iz zadatka maksimalna brzina signaliziranja iznosi

$$R_{max} = 2 \cdot 20000 \cdot \log_2 8 = 120 \frac{\text{kb}}{\text{s}}.$$

5. Koliko je potrebno koristiti nivoa za M-arno signaliziranje da bi mogli da prenesemo signal binarnog protoka 512 kbps kroz kanal širine propusnog opsega od 100 kHz?

Rešenje:

Maksimalna brzina signaliziranja kada se koristi M-arno signaliziranje (prenos M-arnih simbola) je:

$$R_{max} = 2 \cdot B \cdot \log_2 M.$$

Kada je poznata maksimalna brzina signaliziranja (maksimalni binarni protok) onda iz prethodne jednačine možemo izračunati broj potrebnih nivoa signala M koji će omogućiti da spektar potreban za prenos signal bude manji od B=100 kHz:

$$M \geq 2^{\frac{R_{max}}{2 \cdot B}} = 5,89.$$

Da bi M bio stepen dvojke koristimo M=8.

6. Kolika je teorijski maksimalna brzina prenosa koja dozvoljava proizvoljno malu verovatnoću greške na prijemu (kapacitet kanala) za frekvencijski ograničene kanale sa šumom sa sledećim parametrima:

- a) Propusni opseg 40 KHz SNR = 30 dB,
- b) Propusni opseg 120 KHz SNR = 10 dB.

Rešenje:

Kapacitet kanala je dat sa:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right).$$

a) SNR=30 dB $\rightarrow S/N=10^3$

$$C = 40 \cdot 10^3 \cdot \log_2(1 + 10^3) = 299 \text{ kb/s.}$$

b) SNR=10 dB $\rightarrow S/N=10^1$

$$C = 120 \cdot 10^3 \cdot \log_2(1 + 10^1) = 415,13 \text{ kb/s.}$$

7. Kolika je maksimalna brzina signaliziranja za kanal propusnog opsega 3 kHz i odnos signal-šum 35 dB?

Rešenje:

Prema uslovu za maksimalnu brzinu signaliziranja u kanalu sa šumom mora da bude ispunjeno:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 34,88 \text{ kb/s.}$$

Za binarno signaliziranje da ne bi došlo do Intersimbolske intereferencije potrebno je da:

$$R_{max} = 2B = 6 \frac{kb}{s}.$$

Pošto drugi uslov omogućava znatno manju brzinu prenosa onda nije moguće sa binarnim signaliziranjem postići brzinu prenosa koju daje prvi uslov.

Da bi se postigla ova brzina signaliziranja potrebno je koristiti

$$M = 2^{(R_{max}/(2B))} = 56,23 \text{ nivoaa.}$$

8. Izračunati maksimalnu brzinu signaliziranja za prenos bez ISI i potreban odnos signal-šum (u dB) za postizanje ove brzine prenosa ako se koriste M-arni signali sa $M=2$ i 4 preko kanala sa šumom čiji propusni opseg iznosi 20 kHz.

Rešenje:

a) Maksimalna brzina signaliziranja koja se može postići pri prenosu digitalnih signala a da pri tome ne dođe do intersimbolske intereferencije je:

$$R_{max} = 2B \cdot \log_2 M = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \log_2 2 = 40 \text{ kb/s.}$$

Iz jednačine za kapacitet kanala:

$$R_{max} = C = B \cdot \log_2 (1 + S/N),$$

u kanalu sa šumom za postizanje ove brzine prenosa potreban je odnos signal-šum:

$$\frac{S}{N} = 2^{\left(\frac{C}{B}\right)} - 1 = 2^{\frac{40000}{20000}} - 1 = 3,$$

$$\frac{S}{N} \text{ (dB)} = 10 \log \frac{S}{N} = 4,77 \text{ dB.}$$

b)

$$R_{max} = C = 2 \cdot B \cdot \log_2 M = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \log_2 4 = 80 \text{ kb/s.}$$

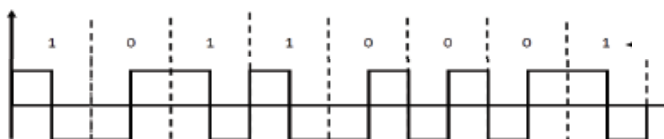
$$\frac{S}{N} = 2^{\left(\frac{C}{B}\right)} - 1 = 2^{\frac{80000}{20000}} - 1 = 15$$

$$\frac{S}{N} \text{ (dB)} = 10 \log \frac{S}{N} = 11,76 \text{ dB}$$

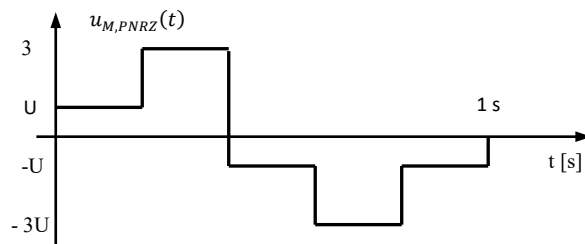
8.7 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Prenos u osnovnom opsegu podrazumeva:
 - a) korišćenje pomoćnog nosioca koji premešta signal u opseg viših učestanosti,
 - b) prenos bez pomoćnog nosioca,**
 - c) radio prenos.
2. Koliki je opseg potreban za prenos polarnog NRZ signala u osnovnom opsegu učestanosti ako se prenosi signal sa binarnim protokom 1 Mbps (spektar se određuje po kriterijumu prve nule u spektru signala)?
 - a) 2 MHz,
 - b) 1 MHz,**
 - c) 0,5 MHz.
3. Spektralna efikasnost se definiše kao:
 - a) količnik Eb/N0 potreban za postizanje odgovarajuće verovatnoće greške,
 - b) količnik ekvivalentnog binarnog protoka i potrebnog opsega za prenos signala,**
 - c) količnik broja pogrešno primljenih bita i ukupnog broja poslatih bita.
4. Spektralna efikasnost polarnog NRZ signala je (spektar se određuje po kriterijumu prve nule u spektru signala):
 - a) 1 bit/s/Hz,**
 - b) 2 bit/s/Hz,
 - c) 0,5 bit/s/Hz.

5. Radio prenos signala zahteva:
- a) premeštanje spektra u viši opseg učestanosti,**
 - b) prenos u osnovnm opsegu učestanosti,
 - c) digitalizovanje signala.
6. Kod M-arnih signala, svakom M-arnom simbolu se mogu pridružiti:
- a) $\log_2(M)$ bita,**
 - b) M bita.
 - c) $\log_{10} M$ bita.
7. Ako je snaga signala $10\mu\text{W}$ i snaga šuma 1 nW koliki je odnos signal šum u dB?
- a) 10 dB,
 - b) 40 dB,**
 - c) 30 dB.
8. Na slici je prikazan:



- a) unipolarni binarni signal bez povratka na nulu (UNRZ),
 - b) Manchester enkodirani signal,**
 - c) polarni binarni signal bez povratka na nulu (PNRZ),
9. Od čega zavisi koliko brzo možemo da šaljemo signal preko medijuma za prenos. Zaokružiti sve tačne odgovore.
- a) propusnog opsega kanala,**
 - b) broj nivoa digitalnog signala,**
 - c) kvaliteta kanala.**
10. Za M-arni signal prikazan na slici gde je $M=4$ odrediti ekvivalentni binarni protok.



- a) 5 b/s,
- b) 10 b/s,**
- c) 1 b/s.

11. Za kanal bez šuma teorijski maksimalni binarni protok je (R - binarni protok, B propusni opseg kanala, L - broj nivoa digitalnog signala):

- a) $R=2B \cdot \log_2 L$,**
- b) $R=B/2$,
- c) $R=B \cdot L$.

12. Za kanal bez šuma koji ima propusni opseg od 15 kHz ako se koristi binarni digitalni signal, maksimalni binarni protok je:

- a) $R=20\text{ kbps}$,
- b) $R=30\text{ kbps}$,**
- c) $R=10\text{ kbps}$.

13. Za kanal bez šuma sa propusnim opsegom od 30000 Hz sa prenosom digitalnog signala sa osam nivoa signala (za svaki nivo se šalju 3 bita), maksimalni binarni protok je:

- a) $R=60\text{ kbps}$,
- b) $R=30\text{ kbps}$,
- c) $R=180\text{ kbps}$.**

14. Ako želimo da pošaljemo signal preko kanala bez šuma sa propusnim opsegom od 20 kHz brzinom od 120 kbps koliko nivoa u M -arnom signaliziranju nam je potrebno.

- a) $M=6$,
- b) $M=2$,
- c) $M=8$.**

15. Maksimalna brzina prenosa signala preko kanala sa šumom je :

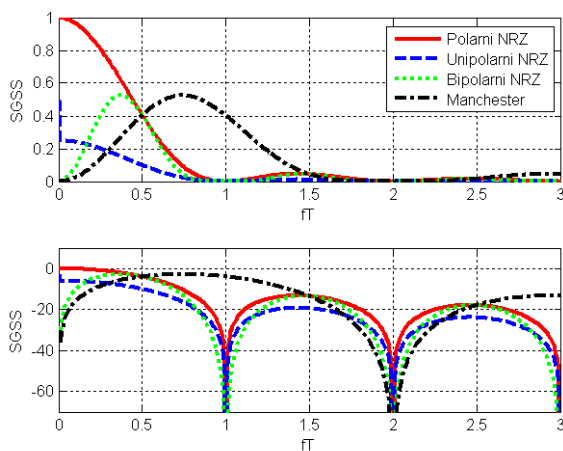
- a) $R = B \log_2(SNR+1)$,
- b) $R = 2B * SNR$,
- c) $R = SNR/B$,

16. Dijagram oka je:

- a) prikaz zavisnosti verovatnoće greške od odnosa signal-šum,
- b) **prikaz preklapljenih oblika signala iz svih signalizacionih interval,**
- c) prikaz spektra signala.

17. Na slici je pokazana zavisnost spektralne gustine srednje snage signala (SGSS) za različite linijske kodove. Na osnovu slike zaokružiti tačne odgovore.

- a) **Mančester kod zauzima dva puta veći opseg od ploarnog NRZ (po kriterijumu prve nule u spektru signala),**
- b) polarni NRZ zauzima dva puta veći opseg od Mančester koda,
- c) **mančester kod nema značajne komponente u blizini DC komponente.**



18. BER (*Bit Error Rate*) se izražava u jedinicama:

- a) dB,
- b) **neimenovan broj,**
- c) bit/s.

19. BER (*Bit Error Rate*)

- a) **predstavlja broj pogrešno primljenih bita podeljen sa ukupnim brojem poslatih bita,**
- b) odnos srednje energije po bitu i spektralne gustine snage šuma,
- c) maksimalnu brzinu prenosa signala.

20. E_b/N_0 označava

- a) broj pogrešno primljenih bita podeljen sa ukupnim brojem poslatih bita,
- b) **odnos srednje energije po bitu i spektralne gustine snage šuma (odnos signal-šum u digitalnim sistemima),**
- c) maksimalnu brzinu prenosa signala.

21. BER (*Bit Error Rate*)

- a) **opada sa porastom odnosa signal-šum,**
- b) raste sa smanjivanjem odnosa signal-šum,
- c) ne zavisi od odnosa signal-šum.

9 ZAŠTITNO KODOVANJE

Ciljevi: Upoznavanje i sticanje znanja o zaštitnom kodovanju. Upoznavanje sa Hemingovim kodom i CRC kodom.

9.1 UVOD

Zaštitni kodovi imaju za cilj da omoguće detekciju i korekciju grešaka u prijemniku. Detekcija i korekcija grešaka je moguća, jer se na predaji unosi redundansa u signal koji se prenosi. Redundansa se u prenošene podatke može uneti na različite načine pa se kodovi dele na blok kodove i konvolucione kodove.

9.2 Binarni blok kodovi

Binarni blok koder prihvata sukcesivne sekvence od k bita (informacioni biti) i predstavlja ih kodnim rečima dužine n bita, gde je $n > k$. Blok kod se označava sa (n, k) , a veličina $Rc = k/n$ se naziva kodni količnik (eng. *Code Rate*). Dodatnih $n-k$ bita predstavljaju redundansu koja se unosi i koja omogućava detekciju i korekciju grešaka.

Najjednostavnija detekcija greške se može ostvariti metodom provere na parnost. Kodovi parnosti na informacionih k bita koje generiše izvor informacija dodaju jedan ekstra bit. Bit se dodaje tako da u dobijenoj kodnoj reči broj jedinica (ili nula) paran ili neparan. Ako se na prijemu pojavi kodna reč kod koje je ovo pravilo narušeno to znači da je došlo do greške. Ovakav kod omogućava detekciju jedne greške. Drugi jednostavan kod koji može da omogući i detekciju i korekciju greške jeste postupak kodovanja ponavljanjem poruke. Međutim ovakvi jednostavni kodovi nemaju veliku mogućnost korigovanja grešaka ako je redundansa koja se unosi mala. Za praktičan zaštitni kod zahteva se da omogući što veću mogućnost korekcije grešaka uz što manje dodavanje redundanse.

Sposobnost koda da detektuje i koriguje greške zavisi od Hemingovog rastojanja.

Hemingovo rastojanje između dve kodne reči je broj pozicija u kojima se dve binarne sekvence razlikuju. Na primer kodna reč $c_1 = 10011101$ i kodna reč $c_2 = 11010111$ imaju Hemingovo rastojanje $d_H = 3$. Kada se sekvence bita sabere po modulu 2 dobiće se jedinice na pozicijama na kojima se ove dve kodne reči razlikuju: $c_1 \oplus c_2 = 01001010$, odnosno broj jedinica u ovako dobijenoj sekvenci bita predstavlja Hemingovo rastojanje. Težina kodne reči se definiše kao broj binarnih simbola 1 koje sadrži posmatrana kodna reč.

Minimalno Hemingovo rastojanje $d_{H,min}$ predstavlja minimalno rastojanje koje se dobije računanjem Hemingovog rastojanja između svih parova kodnih reči:

$$d_{H,min} = \min\{d_H(c_i, c_j) | c_i \neq c_j\}.$$

Broj grešaka koji se može detektovati (D) i korigovati (C) zavisi od Hemingovog rastojanja na sledeći način:

$$d_{H,min} \geq D + C + 1,$$

gde je $C \leq D$.

Broj grešaka koje (n,k) blok kod može otkriti (detektovati) je:

$$e_d \leq d_{H,min} - 1.$$

Broj grešaka koje kod može garantovano korigovati je

$$e_c = \left\lfloor \frac{1}{2}(d_{H,min} - 1) \right\rfloor.$$

Dekodovanje primljene kodne reči se može izvršiti metodom minimalnog Hemingovog rastojanja: primljena kodna reč se uporedi sa svim mogućim kodnim rečima i izlaz postupka dekodovanja je kodna reč koja je najbliža primljenoj kodnoj reči.

9.2.1 Linearni blok kodovi

Pored zahteva da kodovi omogućavaju što veću korekciju grešaka uz što manje dodavanje redundanse, za praktične primene zahteva se i da kompleksnost koda i dekodera bude što manja.

Linearni blok kodovi imaju dodatne osobine koje omogućavaju da se lakše proceni koliko je kod dobar, odnosno kolika je njegova mogućnost korekcije i

detekcije grešaka. Takođe ako kod ima jednostavan matematički opis to obično znači da je moguća jednostavna implementacija.

Kod linearnih binarnih blok kodova bilo koje dve kodne reči c_i i c_j sabrane bit po bit po modulu dva daju opet kodnu reč. Kod linearnog blok koda minimalno Hemingovo rastojanje je jednako najmanjoj težini nenulnih kodnih reči u kodu.

9.3 HEMINGOV KOD

Postoji veliki broj različitih kodova za detekciju i korekciju grešaka. Jedan primer je Hemingov kod. Hemingov kod ima lepu strukturu tako da omogućava jednostavnu detekciju i korekciju grešaka. Hemingov kod omogućava detekciju i korekciju jedne greške. Hemingov kod (n, k) formira $n - k$ proveru na parnost. Rezultat proveru na parnost je binarni vektor dužine $n - k$ koji se naziva sindrom. Vrednost sindroma pokazuje poziciju greške.

Broj različitih vrednosti sindroma mora biti $2^{n-k} \geq n + 1$, jer postoji n pozicija u kodnoj reči gde bi se mogla desiti greška i slučaj kada nema greške.

Da bi vrednost sindroma pokazivala poziciju greške kontrolni biti se nalaze na pozicijama $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-k-1}$. Ovih pozicija ima $n - k$. Na ostalim k pozicija se nalaze informacioni biti. Prvi kontrolni bit (k_1) se nalazi na poziciji $2^0 = 1$, drugi (k_2) na poziciji $2^1 = 2$, treći kontrolni bit (k_3) na poziciji $2^2 = 4$ i tako redom, odnosno i -ti kontrolni bit k_i treba staviti na poziciju 2^{i-1} . Kontrolnih bita ima $(n - k)$. Prvi kontrolni bit vrši proveru na parnost informacionih bita čije pozicije kada se podele sa 2 daju ostatak 1 (to su biti na pozicijama 3, 5, 7...). Drugi kontrolni bit vrši proveru na parnost informacionih bita koji se nalaze na pozicijama koje pri deljenju sa $2^2 = 4$ imaju ostatak 2, 3. Te pozicije su: 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15... Treći kontrolni bit vrši proveru na parnost informacionih bita koji se nalaze na pozicijama koje pri deljenju sa $2^3 = 8$ imaju ostatak 4, 5, 6, 7. Te pozicije su 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15...

Odnosno, da bi vrednost sindroma pokazivala poziciju greške potrebno je da proveru na parnost vršimo tako što i -ti kontrolni bit koji se nalazi na poziciji 2^{i-1} vrši proveru na parnost svih informacionih bita koji su na takvim pozicijama u kodnoj reči da binarna predstava pozicije ima jedinicu na i -toj poziciji. Ovo je ilustrovano za (7,4) kod u tabeli:

Pozcija	Binarni zapis
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Ako reprezentujemo kodnu reč vektorom $\mathbf{c} = (c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7) = (k_1 k_2 i_1 k_3 i_2 i_3 i_4)$ gde i_i označava i -ti informacioni a k_i i -ti kontrolni bit, onda se na osnovu prethodnog algoritma dobijaju sledeće provere na parnost kod (7,4) koda:

$$k_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4,$$

$$k_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4,$$

$$k_3 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4,$$

Prilikom dekodovanja se formira sindrom na isti način kao kontrolni biti kod kodovanja, samo se sada uzimaju u obzir i kontrolni biti. Ako primljenu sekvencu označimo vektorom $\mathbf{r} = (r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7)$, sindrom se dobija:

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7,$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7,$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7,$$

Kada se pogleda dekadni ekvivalent binarnog broja koji odgovara sindromu $s = (s_3 s_2 s_1)$ dobiće se pozicija greške. Da bi se korigovala greška, na toj poziciji se binarna vrednost komplementira.

9.4 CIKLIČNA PROVERA REDUNDANSE (CRC KOD)

Ciklični kodovi su podklasa linearnih blok kodova. Svaka kodna reč je ciklično pomerena neka druga kodna reč. Zbog ove dodatne osobine ovi kodovi imaju efikasnu implementaciju procedura kodovanja i dekodovanja.

Ciklična provera redundanse (eng. *Cyclic Redundancy Check* -CRC) je postupak kodovanja koji je često korišćen kod u praksi za detekciju grešaka. CRC kodovi imaju dobre performanse u pogledu detekcije grešaka i koriste jednostavna kola za kodovanje i dekodovanje. Ciklični kodovi se opisuju generatorskim polinomom. Takođe informacioni biti poruke i kodne reči se predstavljaju polinomima.

Binarni simboli u kodnoj reči (vektoru) mogu se posmatrati kao koeficijenti polinoma po proizvoljnoj promenljivoj x . Kodnoj reči $(c_{n-1}c_{n-2}\dots c_1 c_0)$ odgovara polinom $(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1 x^1 + c_0$. Svi koeficijenti uz x^i su 0 ili 1. Polinomi se mogu množiti konstantom (0 ili 1), sabirati i međusobno množiti i deliti samo što svi koeficijenti mogu biti samo 0 ili 1, odnosno koristi se modularna aritmetika gde se polinomi sabiraju množe i dele koristeći aritmetiku po modulu 2. Sabiranje i oduzimanje su identični logičkoj operaciji ekskluzivno ili.

Binarne sekvence informacionih bita (poruke) dužine k bita se takođe posmatraju kao polinomi:

$$m(x) = m_{k-1}x^{k-1} + m_{k-2}x^{k-2} + \dots + m_1x^1 + m_0.$$

Bit najveće težine (krajnje levi) je koeficijent uz x^{k-1} sledeći bit je koeficijent uz x^{k-2} i tako redom. Od k informacionih bita generiše se r ($r = n - k$) kontrolnih bita koja zajedno sa k informacionih bita formiraju kodnu reč dužine n . Ovi kontrolni biti se generišu tako da je reprezentacija dobijene kodne reči u obliku polinoma deljiva sa nekim unapred specificiranim polinomom $g(x)$. U prijemniku se proverava da li je primljena kodna reč (polinom) deljiva sa polinomom $g(x)$ bez ostatka. Ako je ostatak deljenja jednak nuli onda nije došlo do greške. Polinom $g(x)$ se naziva generatorski ili generišući polinom.

Postupak CRC kodovanja je sledeći. Polinom $m(x)$ koji odgovara poruci se pomnoži sa x^{n-k} , što je ekvivalentno dodavanju $r = n - k$ nula na k informacionih bita. Rezultujući polinom (koji odgovara dobijenoj sekvenci dužine n bita) se podeli generatorskim polinomom $g(x)$. Deljenjem polinoma dobija se količnik $q(x)$ i ostatak $r(x)$: $\frac{x^{n-k}m(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$. Ako se od $x^{n-k}m(x)$ oduzme $r(x)$, što je ekvivalentno zameni poslednjih $n - k$ bita u sekvenci dobijenoj množenjem $x^{n-k}m(x)$ sa $n - k$ bita koji odgovaraju polinomu $r(x)$, dobija se polinom (koji odgovara kodnoj reči CRC koda) koji je deljiv bez ostatka sa $g(x)$.

U prijemniku se vrši provera da li je primljena kodna reč deljiva sa generatorskim polinomom bez ostatka.

9.5 ZADACI

1. Ako se koristi linearni blok kod definisan pomoću tabele:

Informacioni biti	Kodna reč:
00	00000
01	01110
10	10011
11	11101

- Koliki je kodni količnik?
- Koliko je minimalno Hemingovo rastojanje?
- Dekodovati primljenu sekvencu 10101 ako se u prenosu desila samo jedna greška?

Rešenje:

a) Kodni količnik je $R=k/n=2/5$.

b) Upoređivanjem težina nenulatih kodnih reči utvrđuje se da je:

$$d_{H,\min} - 1 = 3$$

c) Upoređivanjem primljene kodne reči sa svim kodnim rečima vidimo da je najbliža kodna reči primljenoj kodnoj reči 11101. Tako da na izlazu dekodera imamo sekvencu informacionih bita 11.

2. Za Hemingov kod (7,4):

- Odrediti kodnu reč za sekvencu informacionih bita 1101.
- Za primljenu kodnu reč 1010111 odrediti da li je došlo do greške, na kojoj poziciji je greška i dekodovati primljenu sekvencu.

Rešenje:

a) Za određivanje kodne reči koristi se algoritam opisan u poglavlju 9.3.

Ako reprezentujemo kodnu reč vektorom

$$c = (c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7) = (k_1 k_2 i_1 k_3 i_2 i_3 i_4),$$

gde i_i označava i -ti informacioni a k_i i -ti kontrolni bit, onda za informacionu sekvencu iz zadatka imamo

$$c_i = (k_1 k_2 1 k_3 1 0 1).$$

Na osnovu algoritma za postupak Hemingovog kodovanja dobijaju se sledeće provere na parnost:

$$k_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1,$$

$$k_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0,$$

$$k_3 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0,$$

Kodna reč koja odgovara kodnoj sekvenci 1101 je

$$\mathbf{c} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1).$$

b) Primljena kodna reč je $\mathbf{r} = (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)$.

Prilikom dekodovanja se formira sindrom na isti način kao kontrolni biti kod kodovanja samo se sada uzimaju u obzir i kontrolni biti. Sindrom se dobija:

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Dekadna vrednost koja odgovara sindromu (100) je 4, odnosno greška se desila na četvrtoj poziciji. Korekcija četvrtog bita se vrši sabiranjem sa jedinicom po modulu 2 (odnosno njegovim komplementiranjem):

$$r_4 = r_4 \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0.$$

Korigovana kodna reč je $(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$, informaciona sekvenca koja odgovara ovoj kodnoj reči je $(1\ 1\ 0\ 1)$.

3. Za poruku (blok od k informacionih bita) $m = (1\ 1\ 1\ 0)$ i generatorski polinom (n,k) CRC koda čija je binarna reprezentacija $g = (1\ 0\ 1\ 1)$:

a) Napisati koliko je n i koliko je k.

b) Napisati polinome koji odgovaraju poruci i generatorskom polinomu.

c) Enkodovati poruku.

Rešenje:

a) Poruci koja se koduje m (odnosno blok od k informacionih bita) odgovara polinom stepena k-1:

$$m(x) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 = x^3 + x^2 + x.$$

b) Generatorski polinom je polinom stepena $n-k$, a njegova binarna reprezentacija je dužine $n-k+1$ bita. Informaciona reč je dužine k bita. Iz uslova zadatka $k = 4$ i $n - k + 1 = 4$ dobijamo da je u pitanju $(n, k) = (7, 4)$ CRC kod.

c) Za enkodovanje poruke primenjuje se algoritam opisan u poglavlju 9.4:

$$\frac{x^{n-k}m(x)}{g(x)} = \frac{x^3(x^3 + x^2 + x)}{x^3 + x + 1},$$

$$\frac{x^{n-k}m(x)}{g(x)} = x^3 + x^2 + \frac{x^2}{x^3 + x + 1}.$$

Ostatak pri deljenju je $r(x) = x^2$. Polinom $r(x)$ je polinom stepena $n - k - 1$, a njegova binarna reprezentacija ima dužinu od $n - k$ bita. Za $r(x) = x^2$ i $(7, 4)$ CRC kod iz zadatka binarna reprezentacija $r(x)$ je $(1\ 0\ 0)$. Kodna reč se dobija kada se k informacionih bita dopune sa $n - k$ bita koji odgovaraju binarnoj reprezentaciji $r(x)$. Kodna reč je $(1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$.

4. Za primljenu kodnu reč $c = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ i generatorski polinom (n, k) CRC koda čija je binarna reprezentacija $g = (1\ 0\ 1\ 1)$. Proveriti da li je došlo do grške u prenosu.

Rešenje:

Na prijemu treba podeliti polinom koji odgovara kodnoj reči sa generatorskim polinomom i proveriti da li postoji ostatak pri deljenju. Ako je ostatak jednak nuli nije došlo do greške.

$$\frac{c(x)}{g(x)} = \frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x + 1} = x^3 + x^2 + 1.$$

Pošto je ostatak jednak nuli, nije došlo do greške u prenosu.

5. Za primljenu kodnu reč $c = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)$ i generatorski polinom (n, k) CRC koda čija je binarna reprezentacija $g = (1011)$. Proveriti da li je došlo do grške u prenosu.

Rešenje:

$$\frac{c(x)}{g(x)} = \frac{x^6 + x^5 + x^4 + 1}{x^3 + x + 1} = x^3 + x^2 + \frac{x^2 + 1}{x^3 + x + 1}.$$

Postoji ostatak pri deljenju primljene kodne reči i generatorskog polinoma iz čega se može zaključiti da je došlo do greške.

9.6 ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Zaštitni kodovi (kodovi za kontrolu grešaka – error control codes) se koriste da bi se:

- a) smanjila kompleksnost sistema,
- b) mogle detektovati i/ili korigovati greške u prenosu,**
- c) izvršila kompresija signala.

2. Zaštitni kodovi (u odnosu na sistem bez zaštitnih kodova) dovode do:

- a) smanjivanja brzine prenosa informacija ili povećanja potrebnog opsega za prenos informacija,**
- b) povećanja brzine prenosa informacija ili smanjenja potrebnog opsega za prenos informacija,
- c) ne utiču na brzinu prenosa informacija ili opseg potreban za prenos informacija.

3. Zaštitni kod (n,k) :

- a) k informacionih bita mapira u kodnu reč dužine n bita,**
- b) n informacionih bita mapira u kodnu reč dužine k bita,
- c) 2^k informacionih bita mapira u 2^n kodnih reči.

4. Zaštitni kod (n,k) ima:

- a) 2^k kodnih reči,**
- b) 2^n kodnih reči,
- c) 2^{n-k} kodnih reči.

5. Ako se zadrži brzina prenosa informacija, u sistemu sa zaštitnim kodom se potreban opseg za prenos podataka:

- a) ne menja,
- b) poveća k/n puta,
- c) **poveća n/k puta.**

6. Koliko je Hemingovo rastojanje između kodnih reči 10011101 i 11010110?

- a) 2,
- b) 3,
- c) **4 .**

7. Ako je minimalno Hemingovo rastojanje za blok kod označeno sa $d_{H,min}$, maksimalni broj grešaka koje može detektovati ovaj kod je dat sa:

- a) $d_{H,min} - 13$,
- b) $d_{H,min} + 1$,
- c) $\lfloor (d_{H,min} - 1) / 2 \rfloor$.

8. Za Hemingov (7,4) kod važi:

- a) **može da koriguje 1 grešku,**
- b) može da koriguje 2 greške,
- c) može da koriguje 3 greške.

9. Ako su sve kodne reči jednog linearnog blok koda date u tabeli:

Informacioni biti	Kodna reč:
0000	0000000
0001	0001011
0010	0010111
0100	0100101
1000	1000110
1100	1100011
1010	1010001
1001	1001101
0110	0110010
0101	0101110
0011	0011100
1110	1110100
1101	1101000
1011	1011010
0111	0111001
1111	1111111

Koliko je minimalno Hemingovo rastojanje?

- a) 4,
- b) 3,**
- c) 2.

10. Za isti kod, koliko maksimalno grešaka može da se detektuje?

- a) 4,
- b) 3,
- c) 2.**

11. Za isti kod, koliko maksimalno grešaka može da se koriguje?

- a) 3,
- b) 2,
- c) 1.**

12. Za Hemingov kod (7,4) koliko bita parnosti (kontrolnih bita) ima:

- a) 4,
- b) 3,**
- c) 2.

13. Ako je vrednost sindroma za Hemingov (7,4) kod data sa $S(s_3, s_2, s_1) = S(110)$ i ako je primljena sekvenca 1010111 odrediti ispravnu kodnu reč:

- a) 1010110,
- b) 1010101,**
- c) 1010111.

14. Kod Hemingovog (7,4) koda koliko ima različitih mogućih vrednosti sindroma:

- a) 8,**
- b) 4,
- c) 16.

15. Ako pretpostavimo da je za Hemingov (7,4) kod došlo do greške na šestom bitu u kodnoj reči, vrednost sindroma je:

- a) $S(s_3, s_2, s_1) = S(0, 0, 0)$,
- b) $S(s_3, s_2, s_1) = S(1, 0, 0)$,
- c) $S(s_3, s_2, s_1) = S(1, 1, 0)$.**

16. Koje su tipične osobine CRC koda koji se koriste za detekciju grešaka:
- a) veliki broj redundantnih bita u odnosu na dužinu poruke koja se koduje,
 - b) jednostavnost implementacije koda i dekodera,**
 - c) nemogućnost detektovanja paketskih grešaka.
17. Binarna reprezentacija generatorskog polinoma $g(x) = x^3 + x + 1$ je:
- a) 1101,
 - b) 1011,**
 - c) 1001.
18. Dužina binarne reprezentacije poruke (bloka od k informacionih bita) kojoj odgovara polinom $x^7 + x^6 + x^2 + 1$ je:
- a) 4 bita,
 - b) 8 bita,**
 - c) 7 bita.
19. Stepen polinoma koji odgovara kodnoj reči (n, k) CRC koda je:
- a) $n - k - 1$,
 - b) $k - 1$,
 - c) $n - 1$.**
20. Kod (n, k) CRC koda stepen polinoma koji odgovara ostatku deljenja $x^{(n-k)}$ $m(x)$ sa $g(x)$ je:
- a) $n - k - 1$,**
 - b) $k - 1$,
 - c) $n - 1$.
21. Kod (n, k) CRC koda stepen polinoma $g(x)$ je:
- a) $n - k - 1$,
 - b) $k - 1$,
 - c) $n - k$.**
22. Kod (n, k) CRC binarna reprezentacija $g(x)$ je dužine:
- a) $n - k + 1$,**
 - b) k ,
 - c) $n - k$.

23. (n, k) CRC kod koji koristi generatorski polinom $g(x) = x^3 + x + 1$ onda je $r = n - k$:

- a) 4,
- b) 7,
- c) **3.**

24. Kod CRC koda množenje polinoma koji odgovara poruci $m(x)$ sa $x^{(n-k)}$ odgovara:

- a) **dopunjavanju binarne reprezentacije poruke sa $(n-k)$ nula na mestima najmanje težine,**
- b) skraćivanju poruke na $(n-k)$ bita,
- c) Invertovanju $(n-k)$ tog bita poruke.

25. Kod CRC koda se kodna reč formira tako što se na $x^{(n-k)} m(x)$ doda

- a) Količnik deljenja $x^{(n-k)} m(x)$ sa $g(x)$,
- b) **Ostatak pri deljenju $x^{(n-k)} m(x)$ sa $g(x)$,**
- c) $(n-k)$ nula.

(Napomena $m(x)$ je polinom koji odgovara k informacionih bita a $g(x)$ je generatorski polinom.)

26. Svaka kodna reč CRC koda je:

- a) Deljiva sa $r(x)$,
- b) **Deljiva sa $g(x)$,**
- c) Deljiva sa $q(x)$.

(Napomena $m(x)$ je polinom koji odgovara k informacionih bita, $m(x)$ je generatorski polinom, $r(x)$ je ostatak pri deljenju $x^{(n-k)} m(x)$ sa $g(x)$, a $q(x)$ je količnik pri deljenju sa $x^{(n-k)} m(x)$ sa $g(x)$.)

27. Binarna reprezentacija ostatka pri deljenju $x^{(n-k)} m(x)$ sa $g(x)$:

- a) **predstavlja redundantne bite koji se dodaju posle k informacionih bita,**
- b) uvek mora da bude nula,
- c) ima dužinu veću od $(n-k)$.

28. Ostatak pri deljenju $x^{(n-k)} m(x)$ sa $g(x)$ je polinom reda

- a) k ,
- b) **$n-k-1$,**
- c) n .

10 LITERATURA

- [1] Miroslav L. Dukić, "Principi telekomunikacija", Akademska misao, Beograd 2008.
- [2] P. Ivaniš, V. Blagojević, Uvod u digitalne telekomunikacije, Akademska misao, 2020.
- [3] Miroslav L. Dukić, Goran Marković, Dejan Vujić, "Principi telekomunikacija, zbornik rešenih zadataka", Akademska misao, Beograd 2008.
- [4] B. M Todorović, "Osnove telekomunikacija", Akademska misao, 2021. Beograd
- [5] G. Marković, " Osnovi telekomunikacionih sistema", Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet 2012.
- [6] Momčilo Dimić, "Telekomunikacije", VETŠ, Beograd, 1999.
- [7] Momčilo Dimić, "Zbirka rešenih Zadataka iz telekomunikacija", VETŠ, Beograd, 1999.
- [8] Ilija S. Stojanović, "Osnovi Telekomunikacija", BIGZ, 1972.
- [9] Ž. Đurović, materijali za predavanja u elektronskoj formi, Signali i sistemi (13E052SISG), https://automatika.etf.bg.ac.rs/images/FAJLOVI_srpski/predmeti/izborni_kursevi_ostali/SI/SI2SIS/SkriptaDjurovic.pdf
- [10] Mirjana Simić-Pejović, "Primena Furijeove analize u telekomunikacijama", elektronski užbenik, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2020. <https://www.etf.bg.ac.rs/uploads/files/udzbenici/2020/Primena%20Furijeove%20analize%20u%20telekomunikacijama.pdf>
- [11] Behrouz A. Forouzan, "Data Communications and Networking", 4th Edition McGraw-Hill, 2007.
- [12] W. Stallings, "Data and Computer Communications" 8th Edition, Pearson Education, Inc., Pearson Prentice Hall, 2007.
- [13] Leon W.Couch II, "Digital and Analog Communications Systems", 8th edition, Prentice Hall, 2013.
- [14] Prof. Paul Cuff, Princeton University, Lecture notes, <https://www.princeton.edu/~cuff/ele301/schedule.html>