др Владимир Балтић

УЏБЕНИК ИЗ ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИКЕ

АТУСС, ВИШЕР

Б Е О Г Р А Д 2023.

Аутор: *др Владимир Балтић*, професор струковних студија, АТУСС (ВИШЕР) Београд

УЏБЕНИК ИЗ ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИКЕ

Издавач: АТУСС Београд, Старине Новака 24, Београд

за издавача: Председник Академије

Рецензенти: *др Миљан Кнежевић*, доцент Математичког факултета, Београд
др Светлана Штрбац Савић, професор струковних студија, АТУСС (ВИШЕР) Београд

Цртежи и слог: *др Владимир Балтић*

Корице: *др Владимир Балтић*

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-74:004(075.8)

БАЛТИЋ, Владимир, 1973–
Уџбеник из дискретне математике / Владимир Балтић. – 1. изд. – Београд : АТУСС [тј.] Академија техничко-уметничких струковних студија, 2023 (Београд : Birograf comp). – 151 стр. : илустр. ; 28 cm. –

На насл. стр.: ВИШЕР. - Тираж 50. – Напомене уз текст. – Библиографија: стр. 151.

ISBN 978–86–6090–105–9

а) Дискретна математика

COBISS.SR–ID 120050441

ISBN: 978–86–6090–105–9

АТУСС, 2023.

Тираж: 50 примерака

I издање

Штампа: BIROGRAF COMP D.O.O., Београд

Садржај

Предговор

Дискретна математика обухвата велики број различитих математичких области које се баве пребројавањем, моделовањем и одређивањем разних поступака и метода на коначним или пребројивим скуповима. Она има велику примену у рачунарским наукама, где представља њихову математичку основу.

Књига која је пред вама посвећена је неким од најпримењенијих области дискретне математике и написана је, пре свега, на основу садржаја истоименог предмета, чију наставу аутор реализује на I години основних студија смерова РТ и НРТ Високе школе за електротехнику и рачунарство у Београду. Књига је настала као резултат вишегодишњег искуства у раду са студентима и треба да им, као одговарајући уџбеник, олакша праћење наставе и омогући темељнију припрему испита. Њен садржај одговара стандардним програмима предмета из области Дискретне математике, који се, према препорукама *ACM* (*The Association for Computing Machinery*) *Computing Curricula*, изводе, као обавезни, на већини факултета информатике и рачунарства у свету. Књига је подељена на следећих шест поглавља.

Прва глава књиге подсећа читаоца на неке основне појмове комбинаторике. То су појмови варијација, комбинација и пермутације са и без понављања, биномних коефицијената и сви они се примењују за пребројавање одређених објеката. Ово поглавље ће наћи примену и предмету Вероватноћа и статистика са II године.

Друга глава посвећена је класичној Математичкој логици. У њој се дају основе исказног рачуна и неке од његових примена (на скупове, као и електричне шеме), а затим се разматра предикатски рачун I реда и на крају Булове функције.

Трећа глава се бави релацијским структурама, тј. скуповима у које су уведене релације над елементима тих скупова. Специјално се излажу особине скупова који су уређени релацијама поретка, као и скупова на којима су дефинисане релације еквиваленције. Релације су директно повезане са базама података.

У четвртој глави су уведени основни елементи Теорије графова. Обрађени су појмови оријентисаног и неоријентисаног графа и дискутоване неке од њихових особина. Детаљно су дате везе између основних појмова Теорије графова. Графови имају велику примену у програмирању.

У петој глави је разматрана једна специјална класа графова, тзв. стабла, и указано је на неке од њихових примена у рачунарству, као и при кодирању. Уведени су најосновнији појмови Теорије кодирања.

У шестој глави формално се дефинише појам коначне машине, као и њена врло важна специјална врста - коначан аутомат, и указује на њихово коришћење при приказивању рада неких процедура у рачунару. Такође, успоставићемо везу између коначних аутомата и регуларних граматика.

Обзиром на профил стручњака чијем је образовању овај уџбеник намењен, у њему се не улази дубље у теоријска разматрања области које се презентују. Зато је овде већина теорема дата без доказа, али је, с друге стране, велика пажња посвећена давању одговарајућих илустративних примера за већину уведених појмова, као и указивању на њихове примене.

Иако је књига, пре свега, намењена студентима Високе школе за електротехнику и рачунарство, надамо се да она у некој мери може да буде корисна и инжењерима осталих профила, као и свима онима који се баве рачунарством.

Већина цртежа у књизи је нацртана помоћу пакета *WinGCLC* аутора Предрага Јаничића, који се може наћи на адреси

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic/gclc/index.html`

Захваљујемо се рецензентима др Миљану Кнежевићу, доценту Математичког факултета и др Светлани Штрбац Савићу, професору струковних студија на Високој школи за електротехнику и рачунарство, који су пажљиво прочитали целокупан текст и са њиховим коментарима и корисним сугестијама су допринели побољшању квалитета ове књиге.

Унапред смо захвални на корисним сугестијама, примедбама и указивању на грешке свима онима који буду ову књигу користили.

Београд, мај 2023. Аутор

1. Комбинаторика

Комбинаторика, наука о распоредима објеката, је важан део дискретне математике. Проучавање ове области почело је још у XVII веку, упоредо са настанком теорије вероватноће, када су се решавали први комбинаторни проблеми везани са коцкањем, тј. са играма на срећу.
Комбинаторика је област математике која се бави:

- пребројавањем скупова (тј. одређивањем броја елемената скупова);
- испитивањем/доказивањем постојања (егзистенције) одређених комбинаторних структура;
- класификацијом комбинаторних структура;
- екстремалним проблемима (проблеми $\min, \max$);
- проблемима комбинаторне оптимизације и одговарајућим алгоритмима.

Ми ћемо се у овом курсу Дискретне математике бавити само пребројавањем, јер остали делови комбинаторике нису баш најелементарнији. Пребројавање неких објеката са одређеним својствима представља важан део комбинаторике. Скупове морамо пребројавати да бисмо решили различите врсте проблема. На пример, пребројавањем се може утврдити колико има начина да добијемо флеш ројал (енг. flush royale) у првом дељењу покера. Или можемо да одредимо да ли смо предвидели довољно различитих таблица за све таксисте у Београду или рачунарских адреса да би се задовољиле потребе за њима на неком сајту? Техникама пребројавања се одређује сложеност алгоритама, а користе се и приликом одређивања колика је вероватноћа неког случајног догађаја.

У овој глави ћемо увести основне појмове из комбинаторике као што су пермутације, варијације, комбинације, али ћемо поменути и композиције и партиције броја (оне налазе примену при израчунавању сложености алгоритма). Даћемо и њихове основне особине, као и методе за израчунавање колико их има (много су значајнији поступци којима долазимо до тога броја од пуког памћења неких формула!). Такав приступ налази примену у предмету Вероватноћа и статистика који је изборни предмет на другој години ове Школе.

Још један важан део комбинаторике је генерисање свих објеката одређене врсте. Ово је често неопходно у рачунарским симулацијама, као и у писању одређених програма. У петом поглављу представићемо алгоритме помоћу којих је могуће генерисати све уређене и неуређене изборе елемената скупа или добити један такав избор на случајан начин.

1.1 Основни принципи пребројавања

У овом поглављу ћемо упознати основне принципе пребројавања: Принцип једнакости, Принцип збира, Принцип производа, Дирихлеов принцип и Принцип укључења–искључења.

Принцип једнакости

Када X има n елемената пишемо $|X| = n$ и кажемо да је *кардиналност* (или *величина*) *скупа* X једнака n. Често пишемо и

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

што је само други начин да се каже да постоји бијекција f (пресликавање f је бијекција ако је „1-1 “ и „на“) из $\mathbb{N}_n$ ($\mathbb{N}_n$ је скуп првих n природних бројева) у скуп X таква да је $f(i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. За празан скуп посебно усвајамо да је

$$|\emptyset| = 0.$$

Сада долазимо до првог принципа пребројавања — Принципа једнакости.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.1. Принцип једнакости. Ако између два коначна скупа A и B постоји бијекција, тада је $|A| = |B|$.

ПРИМЕР 1.1.1. *Републичко такмичење 1997. за VII разред*
Да ли међу природним бројевима мањим од 1000 има више оних чији је збир цифара 13 или је више оних чији је збир цифара 14?

Решење 1. Задатак бисмо могли да урадимо тако што бисмо одредили све бројеве < 1000 који имају збир цифара 13 и све бројеве < 1000 који имају збир цифара 14:

49, 58, 67, 76, 85, 94, 139, 148, 157, 166, 175, 184, 193, 229, 238, 247, 256, 265, 274, 283, 292, 319, 328, 337, 346, 355, 364, 373, 382, 391, 409, 418, 427, 436, 445, 454, 463, 472, 481, 490, 508, 517, 526, 535, 544, 553, 562, 571, 580, 607, 616, 625, 634, 643, 652, 661, 670, 706, 715, 724, 733, 742, 751, 760, 805, 814, 823, 832, 841, 850, 904, 913, 922, 931, 940;

59, 68, 77, 86, 95, 149, 158, 167, 176, 185, 194, 239, 248, 257, 266, 275, 284, 293, 329, 338, 347, 356, 365, 374, 383, 392, 419, 428, 437, 446, 455, 464, 473, 482, 491, 509, 518, 527, 536, 545, 554, 563, 572, 581, 590, 608, 617, 626, 635, 644, 653, 662, 671, 680, 707, 716, 725, 734, 743, 752, 761, 770, 806, 815, 824, 833, 842, 851, 860, 905, 914, 923, 932, 941, 950.

Како и једних и других бројева има по 75, има их исто. ■

Решење 2. Природни бројеви мањи од 1000 су једноцифрени, двоцифрени или троцифрени. Ми ћемо их бројати одједном, тако што ћемо једноцифренимдописати две 0 на почетку, а двоцифреним једну 0:

$$8 \rightsquigarrow 008; \qquad 67 \rightsquigarrow 067; \qquad 328 \rightsquigarrow 328.$$

Сада када смо „дозволили“ да број почиње са 0, истовремено ћемо бројати све (сад су то све троцифрени, али могу да почињу и са 0, које не утичу на збир цифара).

Уместо сваке цифре c пишемо цифру $9-c$:

$$067 \quad \rightsquigarrow \quad 932; \qquad\qquad 328 \quad \rightsquigarrow \quad 671.$$

Број $\overline{xyz}$ (са збиром цифара 13, тј. $x+y+z=13$ се слика у број са цифрама $9-x$, $9-y$, $9-z$ који има збир цифара $9-x+9-y+9-z = 27-(x+y+z) = 27-13 = 14$,
па и једних и других бројева има исто! ■

Лепа илустрација овог принципа је и доказ Теореме 1.2.2, где смо успоставили бијекцију између подскупова и низа битова.

Принцип збира

ТЕОРЕМА 1.1.1. **Принцип збира.** Ако су A и B дисјунктни коначни скупови (тј. $A \cap B = \emptyset$), тада је

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \quad \square$$

Овај принцип се може проширити на унију произвољног броја дисјунктних коначних скупова A_1, A_2, ..., A_n:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Принцип збира ћемо користити кад год у задатку разбијамо на случајеве (али треба водити рачуна да неки број не бројимо више пута!).

ПРИМЕР 1.1.2. Студент може да добије испитно питање на систему Мудл из једне од три потпуно различите групе питања: комбинаторика (K), графови (G) и релације (R). Из комбинаторике има 12 питања, из графова има 18 питања, а из релација има 9 питања. Колико има различитих питања која студент може да добије?

Решење. Студент бира питање из скупа $K \cup G \cup R$ који, а ту има (по Принципу збира)

$$|K \cup G \cup R| = |K| + |G| + |R| = 12 + 18 + 9 = 39$$

различитих питања. ■

ПРИМЕР 1.1.3. Која је вредност промењиве k након извршења следећег кода?

```
A := 0
for j_1 := 1 to x_1
    A := A + 1
end for
for j_2 := 1 to x_2
    A := A + 1
end for
    ⋮
for j_s := 1 to x_s
    A := A + 1
end for
```

Решење. Почетна вредност промењиве A је $A = 0$. Блок кода се састоји од s различитих **for** петљи, које нису угњеждене. У сваком кораку сваке петље, A се повећава за 1. У првој **for** петљи A повећавамо x_1 пута за по 1, тј. након ње повећан је за x_1, слично након друге **for** петље се повећа за x_2, ... , након последње **for** петље се повећа за x_s. По Принципу збира Добијамо да ће вредност промењиве A по извршењу програма бити $A = 0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_s$. ■

Принцип производа

Прво се подсетимо шта представља Декартов производ два скупа $A \times B$, као и скупа са самим собом $A^2 = A \times A$. Овај појам ће имати значајну улогу и касније када уводимо појам релације.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.2. Декартов производ два скупа $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, B \in B\}$, док је $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$.

ТЕОРЕМА 1.1.2. **Принцип производа.** Број елемената скупа $X \times Y$ је $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. □

Овај принцип се може проширити на производ и више коначних скупова $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

ПРИМЕР 1.1.4. Колико постоји различитих низова битова 0 и 1 дужине 8 (тј. $\neq$ бајтова)?

Решење. Тражени низови битова су елементи скупа $\{0, 1\}^8$. Сваки од осам битова може да се изабере на два начина (или 0 или 1), па принцип производа каже да постоји укупно $2^8 = 256$ различитих низова битова дужине 8. ■

ПРИМЕР 1.1.5. *Школско такмичење 1988. за VII разред*

Колико има петоцифрених бројева код којих је прва цифра парна, трећа цифра непарна, а последња цифра прост број?

Решење.

На I месту мора бити **парна цифра и** $\neq 0$, тј. $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ (*4 могућности*).
На III месту мора бити **непарна цифра**, тј. $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (*5 могућности*).
На V месту мора бити **цофра бити прост број**, тј. $e \in \{2, 3, 5, 7\}$ (*4 могућности*).
На II и IV месту може бити **било која цифра**, тј. $b, d \in \{0, 1, 2, 3, ..., 8, 9\}$ (*10 могућности*).

$$\begin{array}{ccccccccccc} a & & b & & c & & d & & e & & \\ \text{—} & & \text{—} & & \text{—} & & \text{—} & & \text{—} & & \\ 4 & \cdot & 10 & \cdot & 5 & \cdot & 10 & \cdot & 4 & = & 8000. \end{array}$$

■

ПРИМЕР 1.1.6. Која је вредност променљиве k након извршења следећег кода?

$A := 0$
for $j_1 := 1$ **to** x_1
  for $j_2 := 1$ **to** x_2
    ⋮
    for $j_m := 1$ **to** x_s
      $A := A + 1$
    end for
    ⋮
  end for
end for

Решење. Почетна вредност променљиве k је нула. У сваком кораку последње угњеждене петље, k се повећа за 1. Све петље су угњеждене једна у другу, па број пролаза кроз све петље добијамо по принципу производа да је $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_s$, што је и коначна вредност променљиве A. ■

Дирихлеов принцип

Претпоставимо да је јато голубова долетело у голубарник. *Дирихлеов принцип* тврди да ако има више голубова него кућица у голубарнику, тада ће се бар у једној кућици наћи бар два голуба. Због овога се на енглеском говорном подручју Дирихлеов принцип назива *The Pigeonhole Principle*. Наводимо 2 облика Дирихлеовог принципа: слабу и јаку форму.

ТЕОРЕМА 1.1.3. **Дирихлеов принцип – слаба форма.** Ако је m куглица смештено у n кутија и $m > n$, тада се бар у једној кутији налазе бар две куглице.

ТЕОРЕМА 1.1.4. **Дирихлеов принцип – јака форма.** Ако је m куглица смештено у n кутија и $m > nk$, тада се бар у једној кутији налази бар $k + 1$ куглица.

ПРИМЕР 1.1.7. Доказати да у групи од 400 људи постоје бар 2 човека који имају рођендан истог дана.

Решење. Применимо Дирихлеов принцип (слаба форма) – кутије су сада датуми у години, од 1.I до 31.XII и њих има $n = 366$ (због преступне године и 29.II), а куглице ће бити људи и њих има $m = 400$. Како је $m = 400 > 366 = n$, по Дирихлеовом принципу постојаће бар 2 човека који имају рођендан истог дана. ■

ПРИМЕР 1.1.8. Доказати да у реченици на српском језику која има 31 слово постоје 2 иста слова.

Решење. У српској ћирилици постоји $n = 30$ различитих слова, а у датој реченици има $m = 31$ слово, па по Дирихлеовом принципу (слаба форма) постојаће у тој реченици 2 иста слова. ■

ПРИМЕР 1.1.9. У одељењу има 30 ученика. На контролном задатку из математике правили су не више од 6 грешака (шест или мање од шест). Доказати да су бар 5 ученика направили једнак број грешака (може и 0 грешака).

Решење. Поделимо ученике тог одељења на $n = 7$ поскупова: X_0, X_1, X_2, ..., X_6 (у скупу X_i су ученици који су направили тачно i грешака).
По Дирихлеовом принципу (јака форма; за $k = 4$ важи неједнакост $m = 30 > 28 = 7 \cdot 4 = n \cdot k$) следи да међу $m = 30$ ученика (они су уместо куглица) постоји њих бар $k+1 = 5$ који су у истом подскупу X_k, тј. има бар 5 ученика направили једнак број грешака (може и 0 грешака). ■

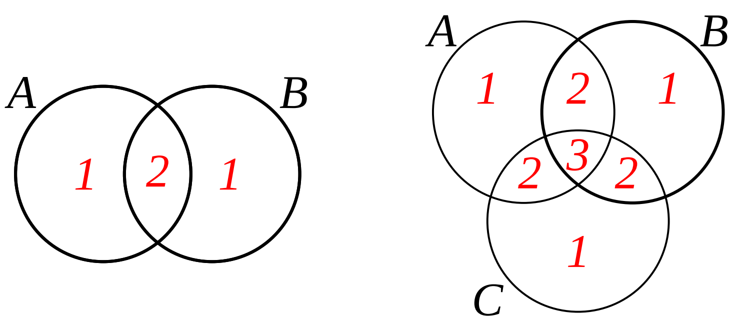
ПРИМЕР 1.1.10. Доказати да у произвољном скупу од $n+1$ природних бројева постоје два чија је разлика дељива са n.

Решење. Природан број при дељењу са n може да даје остатке $0, 1, \ldots, n-1$, па постоји укупно n могућих остатака (то су кутије). По Дирихлеовом принципу (слаба форма) следи да међу датих $n+1$ бројева (то су куглице) постоје два који при дељењу са n дају исти остатак, па је њихова разлика тада дељива са n. ■

Принцип укључења–искључења

Један од основних принципа пребројавања — Принцип збира (Теорема 1.1.1) тврди да је $|A \cup B| = |A| + |B|$ када су A и B дисјунктни скупови. Ако A и B нису дисјунктни, сабирањем $|A|$ и $|B|$ елементе пресека $|A \cap B|$ бројимо два пута (Слика 1.1 лево). Стога, да би добили праву вредност $|A \cup B|$ морамо одузети $|A \cap B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.1}$$



Слика 1.1: Пресеци два и три скупа.

Слично расуђивање примењујемо и у случају три скупа (Слика 1.1 десно). Када саберемо $|A|$, $|B|$ и $|C|$ елементе пресека $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ и $|C \cap A|$ бројимо два пута (уколико нису у пресеку сва три скупа). Да ово исправимо, одузимамо $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ и $|C \cap A|$. Али сада смо елементе $A \cap B \cap C$, које смо бројали три пута у $|A| + |B| + |C|$, одузели такође три пута. Стога, да би добили праву вредност $|A \cup B \cup C|$, морамо да додамо $|A \cap B \cap C|$:

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|. \tag{1.2}$$

ПРИМЕР 1.1.11. У разреду са 30 ученика, 12 од њих воли математику, 14 воли физику, 13 информатику, 5 ученика воли и математику и физику, 7 воли и физику и информатику, а 4 воли математику и информатику.
Три ученика воле сва три предмета. Колико ученика не воли ниједан од ових предмета?

Решење. Означимо са M скуп ученика који воле математику, F који воле физику и I који воле информатику.
Тада по Принципу укључења-искључења имамо:

$$|M \cup F \cup I| = |M| + |F| + |I| - |M \cap F| - |M \cap I| - |F \cap I| + |M \cap F \cap I|.$$
$$|M \cup F \cup I| = 12 + 14 + 13 - 5 - 4 - 7 + 3 = 26$$

$\Rightarrow$ ниједан предмет не воли $30 - 26 = 4$ ученика. ■

ПРИМЕР 1.1.12. Одредити колико има природних бројева $\leqslant 600$ који су дељиви бар једним од бројева 2, 3 или 5.

Решење. Означимо са D скуп природних бројева дељивих са 2 (парних) и $\leqslant 600$, са T скуп дељивих са 3 и $\leqslant 600$ и са P скуп дељивих са 5 и $\leqslant 600$.
Преко П-У-И тражимо $D \cup T \cup P$.
Како је сваки други дељив са 2: $|D| = \frac{600}{2} = 300$.
Како је сваки трећи дељив са 3: $|T| = \frac{600}{3} = 200$.
Како је сваки пети дељив са 5: $|P| = \frac{600}{5} = 120$.
$D \cap T$ дељиви са $2 \cdot 3 = 6$: $|D \cap T| = \frac{600}{6} = 100$.
$D \cap P$ дељиви са $2 \cdot 5 = 10$: $|D \cap P| = \frac{600}{10} = 60$.
$T \cap P$ дељиви са $3 \cdot 5 = 15$: $T \cap P| = \frac{600}{15} = 40$.
$D \cap T \cap P$ дељиви са $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$: $|D \cap T \cap P| = \frac{600}{30} = 20$.
$D \cup T \cup P = 300 + 200 + 120 - 100 - 60 - 40 + 20 = 440$. ■

1.2 Уређени избори – варијације

Понекад је поредак у којем се елементи налазе битан, а понекад није. На пример, реч *МИЛЕ* је различита од речи *ЛЕМИ*, без обзира што су обе речи дужине 4 и формиране од по једног слова из скупа {*Е, И, Л, М*}. Са друге стране, збир бројева $1+2+4$ је исти као збир $4+1+2$, без обзира што је редослед сабирака другачији. У овом поглављу ћемо се бавити изборима елемената код којих је поредак битан (зато за њих кажемо да су *уређени избори*), а у следећем ћемо проучавати изборе елемената код којих поредак није битан (а за њих кажемо да су *неуређени избори*). Такође ћемо научити да је важно да ли је дозвољено или није дозвољено понављање елемената.

ПРИМЕР 1.2.1. Посматрајмо скуп $\{1, 2, 3, 4\}$. На колико начина можемо да изаберемо два броја из овог скупа?

Решење. Постоје *четири* различита одговора на ово питање, у зависности од тога да ли је битан поредак бројева, као и да ли је дозвољено понављање бројева.

i) Ако је поредак битан и дозвољено је понављање бројева, тада постоји 16 избора:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

ii) Ако је поредак битан, а понављање није дозвољено, тада постоји 12 могућих избора:

	12	13	14
21		23	24
31	32		34
41	42	43	

iii) Ако поредак није битан, а дозвољено је понављање, тада постоји 10 могућности:

11			
21	22		
31	32	33	
41	42	43	44

iv) Ако поредак није битан, а није дозвољено понављање, тада има 6 избора:

21
31 32
41 42 43 ■

Овај пример показује четири основна типа комбинаторних проблема. У овом и следећем поглављу научићемо да генерално решавамо све ове типове проблема (што се каже „у општем случају“), тј. када се тражи одредити све могуће начине за избор m елемената из скупа са n елемената. У овом поглављу уопштићемо случајеве *i)* и *ii)* из претходног примера, док ћемо се у наредном поглављу бавити случајевима *iii)* и *iv)*.

Варијације са понављањем

У претходном примеру смо видели да је у случају *i)* број избора једнак $16 = 4^2$. Након још једног сличног примера даћемо формулу.

ПРИМЕР 1.2.2. Колико постоји различитих речи од 6 слова (користећи нашу азбуку са 30 слова и укључујући и бесмислене речи као нпр. *брњвару*)?

Решење. За прво слово можемо изабрати било које од 30 слова наше азбуке. За друго слово исто можемо изабрати било које од 30 слова наше азбуке... То краће кажемо да се свако од 6 слова тражене може независно изабрати на 30 начина. Коначно, по приниципу производа добијамо да тражених речи има $30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^6$, тј. 729 милиона. ■

Сваки уређени избор k елемената са понављањем из скупа X са n елемената у ствари одговара пресликавању скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$ у скуп X. За такве изборе кажемо да су *варијације k-те класе са n елемената* и означавају се у литератури са $\overline{V}\,^k_n$.

ТЕОРЕМА 1.2.1. Нека је X скуп са n елемената ($n \geqslant 1$) и нека је S скуп са k елемената, $k \geqslant 1$. Број свих варијације k-те класе са n елемената, тј. број свих могућих функција $f\colon S \mapsto X$, једнак је $\overline{V}\,^k_n = n^k$.

Доказ. Функција $f\colon S \mapsto X$ је одређена ако знамо вредности $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.
Одредити прво вредност $f(x_1) \in X$ (то можемо на m начина). Затим $f(x_2) \in X$ (исто можемо на m начина)... Последњу вредност $f(x_n) \in X$ (и њу можемо изабрати опет на m начина). По Принципу производа је укупан број могућности за f једнак $\overline{V}\,^k_n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$. □

ДЕФИНИЦИЈА 1.2.1. *Партитивни скуп* скупа A је скуп свих његових подскупова. Означавамо га са $\mathcal{P}(A)$.

ПРИМЕР 1.2.3. Нека су дати скупови: $A = \{a\}$, $B = \{crvena, bela\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Одредити партитивне скупове $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ и $\mathcal{P}(C)$.

Решење. Скуп $A = \{a\}$ има само 2 подскупа: празан скуп $\emptyset$ и цео тај скуп A, па је $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$.
Скуп $B = \{crvena, bela\}$ има 4 подскупа: празан скуп $\emptyset$, 2 једночлана подскупа $\{crvena\}$ и $\{bela\}$, као и цео тај скуп $B = \{crvena, bela\}$, па добијамо да је $\mathcal{P}(B) = \big\{\emptyset, \{crvena\}, \{bela\}, \{crvena, bela\}\big\}$.
Скуп $C = \{1, 2, 3\}$ има 8 подскупова: празан скуп $\emptyset$, 3 једночлана подскупа $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$, 3 двочлана подскупа $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$, као и цео тај скуп $C = \{1, 2, 3\}$, па добијамо да је

$$\mathcal{P}(C) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}.$$

■

У претходном примеру смо добили:

$$|A| = 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2 \qquad |B| = 2 \Rightarrow |\mathcal{P}(B)| = 4 \qquad |C| = 3 \Rightarrow |\mathcal{P}(C)| = 8$$

па можемо да „погодимо“ да $\quad |X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n, \quad$ али то **није математички доказ**!
Коректан математички доказ и формулацију овог тврђења имамо у наредној теореми.

ТЕОРЕМА 1.2.2. Сваки скуп X са n елемената има тачно 2^n подскупова, тј. $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Доказ. Када одређујемо подскуп S скупа X, за сваки елемент x скупа X имамо 2 могућности: да јесте у подскупу S, $x \in S$ (1) или да није у подскупу S, $x \notin S$ (0).
За скуп $C = \{1, 2, 3\}$ и његове подскупове имамо:

$\emptyset$ 000, $\{1\}$ 100, $\{2\}$ 010, $\{3\}$ 001,
$\{1,2\}$ 110, $\{1,3\}$ 101, $\{2,3\}$ 011, $\{1,2,3\}$ 111.

Слично имамо за скуп

$$X = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\} \qquad \text{и његове подскупове } S \subseteq X$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & & 1 \\
\text{или} & \text{или} & \text{или} & & \text{или} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
2 \cdot & 2 \cdot & 2 \cdot & \ldots \cdot & 2 & = 2^n
\end{array}$$

(овде смо користили принцип производа). □

Напомена. Истакнимо да поступак придруживања низа битова (0/1) подскупу налази примену у неким програмским језицима, нпр. у Паскалу, који има тип података скуп.

ПРИМЕР 1.2.4. Која је вредност променљиве A након извршења следећег кода?

```
A := 0
for x1 := 1 to n
  for x2 := 1 to n
    for x3 := 1 to n
      ⋮
      for xk := 1 to n
        A := A + 1
      end for
      ⋮
    end for
  end for
end for
```

Решење. Почетна вредност променљиве A једнака је 0 и A се увећава за 1 сваки пут када се прође кроз корак угњеждене петље са низом бројева x_1, x_2, ..., x_k таквим да сваки може да узме било коју вредност

$$1 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k \leqslant n.$$

Број оваквих низова бројева једнак је броју начина да се s бројева изабере са понављањем из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Сада из Теореме 1.2.1 видимо да ће вредност променљиве A након извршења кода бити једнака

$$\overline{V}_n^{\,k} = n^k. \qquad \blacksquare$$

Варијације без понављања

Нека је $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \mapsto M$ пресликавање које одговара уређеном избору елемената из скупа M. Када је понављање елемената дозвољено, могуће је изабрати исти елемент два пута, тако да важи $f(r) = f(s)$ за различите r и s из $\{1,2,\ldots,n\}$. Ако понављање није дозвољено, тада је $f(r) \neq f(s)$ за свако $r \neq s$, па видимо да уређеним изборима елемената без понављања одговарају *инјективна* пресликавања (инјективна пресликавања се називају још и *„1-1“ пресликавања*).

ТЕОРЕМА 1.2.3. Нека је N скуп са n елемената и нека је M скуп са m елемената, $n, m \geqslant 0$. Број варијација k-те класе од n елемената, тј. број свих инјективних пресликавања $f\colon N \mapsto M$, једнак је

$$V_m^n = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$

Доказ. Строго формалан доказ би користио Принцип математичке индукције по n (n је број елемената скупа $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$), али ћемо овде дати неформалнији доказ.

Функција $f\colon N \mapsto M$ је опет у потпуности одређена ако знамо вредности $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$.

За опис функције $f\colon N \mapsto M$ прво ћемо одредити вредност $f(x_1) \in M$. Она може да се изабере на m начина. Затим $f(x_2) \in M$ можемо изабрати на $m-1$ начина – то су сви бројеви из скупа M сем већ изабраног $f(x_1)$. Даље, $f(x_3) \in M$ можемо изабрати на $m-2$ начина – то су сви бројеви из скупа M сем већ изабраних $f(x_1)$ и $f(x_2)$... Последњу вредност $f(x_n) \in M$ можемо изабрати на $m-n+1$ начина. Коначно, по Принципу производа добијамо да је укупан број могућности за f једнак $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$. □

Може се видети да уређени избор n елемената без понављања из скупа M са m елемената у ствари одговара „1-1“ пресликавању скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ у скуп M. За такве изборе кажемо да су *варијације без понављања са m елемената n-те класе.*

У претходној теореми смо извели формулу за број варијација без понављања са m елемената n-те класе: $V_m^n = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$.

Касније, када уведемо појам факторијела, видећемо да је она једнака $V_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.

ПРИМЕР 1.2.5. *I колоквијум из Вероватноће и статистике, ВИШЕР 2018.*
Од 7 жена и 4 мушкарца треба изабрати делегацију. На колико се начина може изабрати делегација ако се она састоји од председника, секретара и благајника?

Решење. У осталим деловима овог задатка на колоквијуму био је битан пол људи. Овде разматрамо на колико начина можемо изабрати трочлану делагацију од 11 људи.

Председник клуба може да се изабере на 11 начина, између преосталих особа секретар може да се изабере на 10 начина, и, коначно, благајник на 9 начина, тако да је број различитих избора једнак броју уређених избора без понављања 3 особе из скупа са 11 особа, тј.

$$11\cdot 10\cdot 9 = 990. \qquad \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.6. У кампањи пред председничке изборе, кандидат AV треба да обиђе седам од петнаест градова у Србији. Да би постигао што бољи ефекат пред изборе, кандидат је изабрао да своју кампању заврши у Београду. На колико различитих начина се може реализовати кампања?

Решење. С обзиром да је последњи град у кампањи већ изабран, кандидат AV у ствари треба да изабере првих шест градова које ће обићи од преосталих четрнаест градова у Србији. Како је битан редослед обиласка градова, број ових избора једнак је

$$14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 2\,162\,160. \qquad \blacksquare$$

1.3 Пермутације

Иако су пермутације само специјални случај варијација, због свог великог значаја заслужују одвојено поглавље.

Пермутације су свакако један од најбитнијих комбинаторних појмова. Њихов значај се огледа и у томе што је Миклош Бона (мађ. Miklós Bóna) целу једну књигу посветио пермутацијама – то је „Комбинаторика пермутација“, [8]. Овде ћемо дати неке од основних комбинаторних својстава пермутација, која нису део уобичајене средњошколске или факултетске литературе.

Прво ћемо дати једну од две дефиниције појма пермутације.

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.1. *Пермутација* коначног скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је уређена n-торка $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, при чему је $p_i \in X_n$ за $i = 1, 2 \ldots, n$ и $p_i \neq p_j$ за $i \neq j$. Такву пермутацију ћемо скраћено приказивати[1] као $p_1\ p_2\ \ldots\ p_n$.

Без умањења општости, у остатку текста (сем ако не нагласимо другачије) узимаћемо да је скуп $X_n = \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а скуп свих пермутација над овим скупом означаваћемо са S_n.

ПРИМЕР 1.3.1. Нека је скуп $X_4 = \{a, b, c, d\}$. Тада је

$$(b, d, c, a)$$

једна пермутација тога скупа и њу ћемо још означавати и са $bdca$ (као низ слова).

(a, d, b, a) и (a, b, c) нису пермутације скупа X_4 јер морају да имају све елементе различите и да су уређене четворке. ■

Сада ћемо увести појам лексикографског поретка. То је начин на који се уређују разни спискови, телефонски именици, речи у речницима...

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.2. Нека је у скупу $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дато уређење (релација поретка) са $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и нека су сви a_i и b_j елементи скупа X_n.

Тада кажемо да су уређена n–торка $(a_1, \ldots, a_n)$ и уређена m–торка $(b_1, \ldots, b_m)$ у релацији мање, тј. $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_m)$ ако

- постоји неки број $k \in \mathbb{N}$ за који важи да је $a_k < b_k$ и $a_i = b_i\ (\forall i < k)$ или
- ако је $n < m$, а $a_i = b_i\ (\forall i \leqslant n)$.

Овако уведена релација поретка на скупу речи са словима из скупа X_n назива се *лексикографски поредак*.

ПРИМЕР 1.3.2. Одредити све пермутације у лексикографском поретку следећих скупова: $\mathbb{N}_1 = \{1\}$; $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$; $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ и $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Решење. У скупу $\mathbb{N}_1 = \{1\}$ постоји само једна пермутација: 1.

У скупу $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ постоје 2 пермутације: 12 и 21.

У скупу $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ постоји 6 пермутација: 123 132 213 231 312 321.

У скупу $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ постоје 24 пермутације:

1234	1243	1324	1342	1423	1432	2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421	4123	4132	4213	4231	4312	4321

■

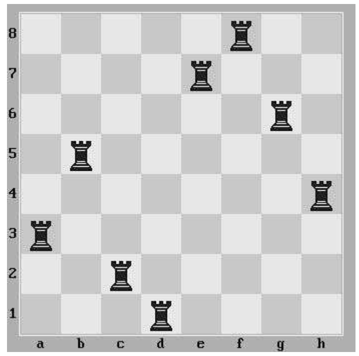
Илуструјмо појам пермутације и кроз један пример из свакодневног живота.

ПРИМЕР 1.3.3. *Проблем 8 топова.* На колико различитих начина 8 топова може да се постави на шаховску таблу, под условом да се никоја два топа међусобно не нападају?

---

[1] Један од разлога је да правимо разлику између саме пермутације и циклусног представљања пермутације што ћемо увести касније. До забуне би могло доћи када се пермутација састоји од само једног циклуса.

Решење. У сваку линију можемо ставити највише по једног топа (у ствари, тачно једног топа). У А линији имамо 8 могућности. Када смо изабрали једну, у Б линији имамо 7 могућности (јер не можемо да ставимо у исти ред где је топ у линији А), итд. На крају, за Х линију немамо избора, него осмог топа морамо да ставимо у једини слободан ред. Укупно, број могућности је $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8! = 40320$.



Слика 1.2. Проблем 8 топова који се не нападају.

Практично сваком распореду топова, придружујемо једну пермутацију: на Слици 1.2 је приказан распоред топова А3, Б5, Ц2, Д1, Е7, Ф8, Г6, Х4 у шаховској нотацији и том распореду одговара пермутација 35217864. ■

У овом примеру, смо и извели формулу да је број пермутација скупа X_n (што је у ствари број варијација n-те класе од n елемената) једнак

$$V_n^n = P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

ПРИМЕР 1.3.4. *Окружно такмичење 2021. за VII разред*

На полицу треба распоредити 9 различитих књига означених бројевима од 1 до 9. На колико начина је то могуће да се уради тако да:

а) књига 1 и књига 2 буду једна до друге; **б)** књига 1 и књига 2 не буду једна до друге?

Решење. **а)** Ако спојимо књиге 1 и 2 у једну нову, велику књигу, онда распоређујемо 8 објеката, што можемо да учинимо на 8! начина. Али ове 2 књиге можемо да спојимо или као 12 или као 21, што је 2 различита начина (ово се често заборавља!), па датих распореда има $2 \cdot 8! = 80\,640$.

б) Овде ћемо од укупног броја распореда књига (и где су 1 и 2 једна до друге и где нису), што је 9!, одузети оне који нам не одговарају, а то су они где СУ 1 и 2 једна до друге (то је оно што смо добили у делу под а): $9! - 2 \cdot 8! = 9 \cdot 8! - 2 \cdot 8! = (9-2) \cdot 8! = 7 \cdot 8! = 282240$. ■

Пермутација се може посматрати и као преуређење неког фиксног редоследа. Замена фиксног редоследа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ са $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ представља се са $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ чиме је дефинисано пресликавање $p(x_i) = p_i$ које мења x_i са p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тако смо дошли до алтернативне дефиниције пермутације:

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.3. *Пермутација* скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је било које бијективно пресликавање σ скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ на скуп X_n, тј. $\sigma : \mathbb{N}_n \to X_n$.

Када је $X_n = \mathbb{N}_n$, вредност x_i за коју је $p(x_i) = x_i$, назива се *фиксна тачка* ове пермутације. Пермутација која нема фиксних тачака, тј. код које је $p(x_i) \neq x_i$ за свако $x_i \in X_n$, назива се *деранжман* (енг. derangment).

Идентичка пермутација (или *полазна пермутација*), у означи ε, је пермутација код које је $\varepsilon(i) = i$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Код идентичке пермутације сви елементи представљају фиксне тачке.

ПРИМЕР 1.3.5. Пермутацију (b, d, c, a) из Примера 1.3.1 можемо посматрати и као следеће пресликавање $\sigma : \mathbb{N}_4 \to X_4$ дато са $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$, односно као пресликавање одређено помоћу $\sigma(1) = b,\ \sigma(2) = d,\ \sigma(3) = c,\ \sigma(4) = a$. ■

Циклуси

Сада смо спремни да уведемо појам циклуса, који је изузетно значајан.

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.4. Посматрајмо подскуп $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$ скупа X_n. Пермутација

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{d-1} & y_d \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_d & y_1 \end{pmatrix}$$

у којој замене $p(y_1) = y_2,\ p(y_2) = y_3,\ \dots,\ p(y_{d-1}) = y_d,\ p(y_d) = y_1$ формирају затворен круг се назива *циклус*. Претходно означавање циклуса уобичајено се скраћено приказује тако што између заграда стоје редом вредности које мењају места (последња мења место са првом):

$$(y_1, y_2, \dots, y_d).$$

Број d елемената који формирају циклус назива се *дужина циклуса*.
Транспозиција је циклус дужине $d = 2$.

Фиксне тачке пермутације су циклуси дужине 1.

Циклус од n објеката или n-циклус има облик $a_1a_2a_3 \dots a_n$ где се сматра да је a_n поред a_1, тако да је

$$a_1a_2a_3 \dots a_n = a_ja_{j+1} \dots a_na_1a_2 \dots a_{j-1}$$

(нпр. имамо $a_1a_2a_3 = a_2a_3a_1 = a_3a_1a_2$). Један n-циклус можемо замислити као n људи који седе за округлим столом. То ћемо илустровати следећим примером.

ПРИМЕР 1.3.6. На колико начина се из скупа од n људи њих k може распоредити за округли сто? (Распореди који се добијају ротирањем сматрају се исти, док се симетрични распореди сматрају различитим.)

Решење. Првог човека можемо одабрати на n начина. Другог бирамо од преосталих $n-1$ и стављамо га десно од првог. Следећег бирамо од преосталих $n-2$ и стављамо га десно од другог. Настављамо овај поступак, све док на изаберемо и последњег (k-тог) човека (што можемо учинити на $n-k+1$ начина). Стога оваквих избора има

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Али нису сви ови избори различити. Исти су они који се могу добити ротирањем стола (тј. имамо у свакој групи k истих избора, који представљају исти распоред за округлим столом. Стога долазимо до тога да датих распореда има $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1)}{k}$. ■

У претходном примеру смо показали да постоји $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1)}{k}$ различитих циклуса дужине k на скупу X_n.

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.5. Циклус дужине n, који садржи све елементе скупа X_n, се назива *циклична* (*циркуларна*) *пермутација*.

У складу са претходним, постоји $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{n} = (n-1)!$ цикличних пермутација скупа X_n.

Класу еквиваленције елемента a чине елементи циклуса који садржи a, тј.

$$C_a = \{a, p(a), p(p(a)), p(p(p(a))), \ldots, p^{d-1}(a)\}.$$

Број елемената класе еквиваленције d је дужина одговарајућег циклуса.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Свака пермутација скупа X_n је или циклус или се може представити као унија дисјунктних циклуса.

Доказ. Циклусни запис за произвољну пермутацију π може да се добије помоћу следећег поступка, који се понавља све док сви елементи не буду распоређени у циклусе.

> Изабрати произвољан елемент a који још није распоређен у неки циклус. Нови циклус чине елементи
> $$\Big(a,\quad \pi(a),\quad \pi(\pi(a)),\quad \pi(\pi(\pi(a))),\ \ldots\ ,\quad \pi^{d-1}(a)\Big)$$
> које ређамо све док не дођемо до најмањег природног броја d за који важи $\pi^d(a) = a$.

Како су различите класе еквиваленције релације ϱ дисјунктне, добијамо да је свака пермутација или циклус или се може представити као унија дисјунктних циклуса. □

Овако представљање се назива *циклусни запис* или *циклусна декомпозиција* пермутације.

ПРИМЕР 1.3.7. Одредити циклусни запис пермутације $\alpha = 24513$.

Решење. Приметимо да за пермутацију $\alpha = 24513$ важи

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 4, \quad \alpha(4) = 1.$$

Пермутација α шаље елемент 1 у 2, 2 у 4 и 4 назад у 1, и тада кажемо да ови елементи чине *циклус* $(1,2,4)$ дужине 3. Слично, елементи 3 и 5 чине циклус $(3,5)$ дужине 2, па је циклусни запис ове пермутације $\alpha = (1,2,4)(3,5)$. ■

ПРИМЕР 1.3.8. Написати циклусни запис за пермутацију $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Решење. $\pi = (1,3,7)(2,5,4,8)(6)(9)$. ■

Постоје два начина да променимо циклусни запис без утицаја на саму пермутацију. Сваки циклус може да почне било којим од својих елемената — на пример, $(7,8,2,1,3)$ и $(1,3,7,8,2)$ представљају исти циклус. Такође, поредак циклуса није важан — на пример, $(1,2,4)(3,5)$ и $(3,5)(1,2,4)$ представљају исту пермутацију. Битни су подела елемената скупа на циклусе, као и њихов поредак унутар циклуса, и они су јединствено одређени циклусним записом.

Тиме смо видели да циклусни запис није јединствен. Уобичајено је да се циклус записује тако што му је најмањи елемент на првој позицији и на тај начин долазимо до јединствене репрезентације циклуса. Такође, циклусе ћемо поређати тако да су им први елементи у растућем редоследу.

Уведимо појам реда пермутације, а затим ћемо дати тврђење које повезује овај појам са дужинама циклуса у пермутацији.

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.6. *Ред пермутације* p је најмањи природан број d за који важи

$$p^d = \underbrace{p(p(p...(p)...))}_{d} = \varepsilon.$$

Другим речима, ред пермутације је најмањи број колико пута треба да направимо композицију пермутације са самом собом да бисмо добили идентичку пермутацију.

Нагласимо да је у претходној дефиницији d природан број. „Степен“ пермутације се може увести и за произвољан цео број на следећи начин: $p^0 = \varepsilon$, а $p^{-k} = (p^{-1})^k$ (где је p^{-1} инверзна пермутација).

ТЕОРЕМА 1.3.2. Ред пермутације p једнак је најмањем заједничком садржаоцу дужина свих циклуса у p. □

Илуструјмо појам реда пермутације на неколико примера.

ПРИМЕР 1.3.9. Одредити ред пермутације $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

Решење. Циклусни запис ове пермутације је $(1,2,3)(4,5)(6,7,8,9)$, тј. циклуси имају дужине 3, 2 и 4. На основу тога добијамо да је ред ове пермутације $\text{НЗС}(3,2,4) = 12$. ■

ПРИМЕР 1.3.10. Преферанс шпил од 32 карте је подељен у два једнака дела и промешан *преплитањем*, тако да ако је почетни поредак карата био $1, 2, 3, 4, \ldots$, крајњи поредак је $1, 17, 2, 18, \ldots$ Колико пута треба применити овакво мешање да би се шпил вратио у оригинални поредак?

Решење. Пермутација која одговара мешању шпила је

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 1 & 17 & 2 & 18 & 3 & 19 & 4 & 20 & 5 & 21 & 6 & 22 & 7 & 23 & 8 & 24 & 9 & 25 & 10 & 26 & 11 & 27 & 12 & 28 & 13 & 29 & 14 & 30 & 15 & 31 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$

Циклусни запис ове пермутације је

$$(1)(2,17,9,5,3)(4,18,25,13,7)(6,19,10,21,11)(8,20,26,29,15)(12,22,27,14,23)(16,24,28,30,31)(32)$$

и он има 6 циклуса дужине 5 и 2 циклуса дужине 1, те ће се шпил карата вратити на почетни распоред (то ће се десити кад дођемо до идентичке пермутације, па је потребан број мешања једнак реду пермутације) већ након $\text{НЗС}(1,5,5,5,5,5,5,1) = 5$ мешања. ■

Транспозиције

Сада ћемо навести неколико својстава транспозиција. Њих смо увели у Дефиницији 1.3.4, али ћемо их додатно појаснити због њиховог значаја.

Транспозиција $\tau_{i,j}$ мења бројеве i и j $(i < j)$, а остале бројеве оставља на свом месту:

$$\tau(i) = j, \qquad \tau(j) = i, \qquad \text{и} \qquad \tau(k) = k \quad \text{за} \quad k \neq i, j.$$

Ако хоћемо ову пермутацију да представимо као низ бројева, она би имала следећи облик:

$$12 \ldots (i-1) j (i+1) \ldots (j-1) i (j+1) \ldots (n-1) n.$$

Број транспозиција скупа X_n износи $\dfrac{n(n-1)}{2}$, јер елементе i и j који мењају места можемо из скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ одабрати на $\binom{n}{2}$ начина.

ТЕОРЕМА 1.3.3. Свака пермутација се може представити као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција. □

Ово представљање као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција није јединствена, али наредне 2 теореме нам описују услове да би таква репрезентација била минимална. До Теореме 1.3.4 је дошао мађарски математичар Денеш (мађ. j. Dénes) 1959. године.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Нека су $t_2, t_3, \dots, t_n$ транспозиције из S_n. Тада је производ $t_n \cdot t_{n-1} \cdot \ldots \cdot t_2$ циклична пермутација ако и само ако граф $G(t_2, t_3, \dots, t_n)$ код кога су темена $1, 2, \dots, n$, док су гране $t_2, t_3, \dots, t_n$ (тачније ако траспозиција t мења места елемената i и j тада су чворови i и j повезани граном), представља једно стабло. □

Сада ћемо дати и једну генерализацију овог тврђења.

ТЕОРЕМА 1.3.5. Композиција транспозиција је минималне дужине ако и само ако мултиграф који се добија када граном спојимо елементе које мењамо у транспозицији не садржи контуру. □

Пермутацију можемо представити и оријентисаним графом. У њему постоји грана (x_i, x_j) ако и само ако је $x_j = p(x_i)$. Оријентисани графови представљају добру визуелну репрезентацију пермутације. Они налазе своје место у методи „Факторизација у слободним моноидима" која директно одговара графовској дефиницији перманента (генараторима у слободном моноиду одговарају фактори диграфа).

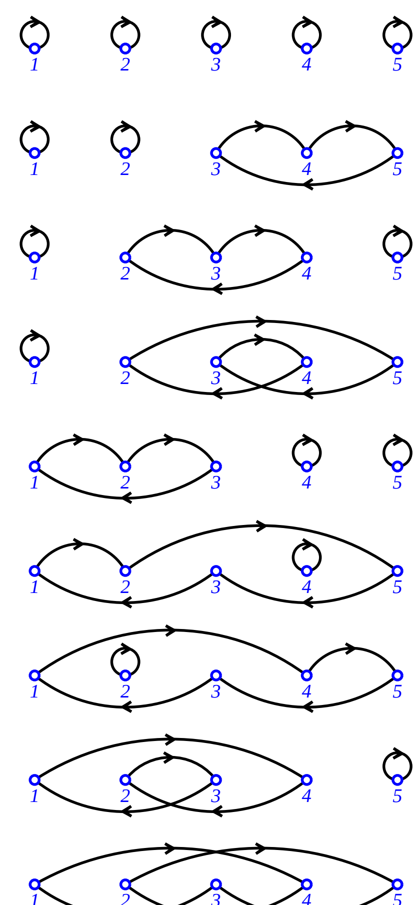
Сва ова представљања пермутација ћемо дати у следећем примеру.

ПРИМЕР 1.3.11. Одредити све пермутације скупа $\mathbb{N}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ које задовољавају услове

$$-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3 \qquad \text{и} \qquad p(i) - i \neq -1, \quad p(i) - i \neq 2.$$

Решење. Сваку пермутацију ћемо представити на Слици 1.3 као преуређење, преко декомпозиције у дисјунктне циклусе испод тога, као композицију транспозиција у средини и преко одговарајућег оријентисаног графа на десној страни. Има 9 таквих пермутација:

1.	1 2 3 4 5 (1)(2)(3)(4)(5)	ε
2.	1 2 4 5 3 $(1)(2)(3,4,5)$	$\tau_{3,4} \circ \tau_{4,5}$
3.	1 3 4 2 5 $(1)(2,3,4)(5)$	$\tau_{2,3} \circ \tau_{3,4}$
4.	1 5 4 2 3 $(1)(2,5,3,4)$	$\tau_{2,5} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{3,4}$
5.	2 3 1 4 5 $(1,2,3)(4)(5)$	$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3}$
6.	2 5 1 4 3 $(1,2,5,3)(4)$	$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{3,5}$
7.	4 2 1 5 3 $(1,4,5,3)(2)$	$\tau_{1,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{3,5}$
8.	4 3 1 2 5 $(1,4,2,3)(5)$	$\tau_{1,4} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{2,3}$
9.	4 5 1 2 3 $(1,4,2,5,3)$	$\tau_{1,4} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{3,5}$



Слика 1.3. Пермутације скупа $\mathbb{N}_5$ за које је $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \neq -1, 2$.

Генерализација овог примера је појам *пермутација са ограничењима.* ■

На основу претходног примера видимо и како произвољну пермутацију можемо представити као композицију транспозиција. Мењаћемо места (транспозицијама) узастопним елементима у сваком од циклуса дужине веће од 1.

ПРИМЕР 1.3.12. Представити пермутацију $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ као композицију транспозиција.

Решење. У Примеру 1.3.8 смо добили да је $\pi = (1,3,7)(2,5,4,8)(6)(9)$.

Први циклус $(1,3,7)$ можемо представити као $(1,3,7) = \tau_{1,3} \circ \tau_{3,7}$.

Други циклус $(2,5,4,8)$ можемо представити као $(2,5,4,8) = \tau_{2,5} \circ \tau_{5,4} \circ \tau_{4,8}$. Како је уобичајеније да транспозицију $\tau_{5,4}$ пишемо као $\tau_{4,5}$ долазимо до представљања овог циклуса: $(2,5,4,8) = \tau_{2,5} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{4,8}$.

Како се полазна пермутација π састоји од ова 2 нетривијална циклуса (остали циклуси су дужине 1 и представљању фиксне тачке пермутације), она се представља као композиција транспозиција на следећи начин: $\pi = \tau_{1,3} \circ \tau_{3,7} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{4,8}$. ■

Напомена. Ова пермутација се може представити као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција $\pi = \varepsilon \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{3,7} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{4,8}$, али то је еквивалентно представљаље оном што смо добили у претходном примеру (идентичка пермутација ε не мења места ниједном елементу, па је можемо изоставити из дате композиције).

ТЕОРЕМА 1.3.6. Свака пермутација $p \in S_n$ може се представити као композиција транспозиција $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$, $\tau_{3,4}$, ..., $\tau_{n-1,n}$.

Доказ. Прво ћемо показати да се произвољна транспозиција $\tau_{p,q}$ $(p < q)$ може представити као композиција датих транспозиција:

$$\tau_{p,q} = \tau_{p,p+1} \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \ldots \circ \tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-1,q} \circ \tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-3,q-2} \circ \ldots \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \tau_{p+1,p}.$$

Покажимо да горња формула стварно представља транспозицију $\tau_{p,q}$.

Помоћу $\tau_{p,p+1} \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \ldots \circ \tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-1,q}$ доводимо елемент p на позицију q, док све елементе $p+1, p+2, \ldots, q-1, q$ померамо за 1 место у лево. Даље са $\tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-3,q-2} \circ \ldots \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \tau_{p+1,p}$ доводимо елемент q (са позиције $q-1$) на позицију p, док све елементе $p+1, p+2, \ldots, q-1$ померамо за 1 место у десно (тако да су они на својој полазној позицији). Тиме смо показали да је горњом формулом баш представљена транспозиција $\tau_{p,q}$.

Теорема 1.3.3 каже да се свака пермутација $p \in S_n$ може се представити као композиција транспозиција, па на основу претходног следи да се свака пермутација $p \in S_n$ може се представити као композиција следећих транспозиција: $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$, $\tau_{3,4}$, ..., $\tau_{n-1,n}$. □

ПРИМЕР 1.3.13. Представити пермутацију π из Примера 1.3.12 преко транспозиција $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$, $\tau_{3,4}$, ..., $\tau_{8,9}$.

Решење. У Примеру 1.3.12 смо добили $\pi = \tau_{1,3} \circ \tau_{3,7} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{4,8}$. На основу доказа претходне Теореме добијамо:

$\pi = (\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2}) \circ (\tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{3,4}) \circ (\tau_{2,3} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{2,3}) \circ \tau_{4,5} \circ (\tau_{4,5} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{7,8} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{4,5})$. ■

Напомена. Како је $\tau_{4,5} \circ \tau_{4,5} = \varepsilon$ (што се јавља на крају првог реда претходне формуле), ову пермутацију можемо приказати и као:

$\pi = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{7,8} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{4,5}$.

Знак пермутације

Следећи битан основни појам везан за пермутације је појам инверзије, који је директно повезан са појмом знака пермутације, што игра битну улогу код дефиниције детерминанте у Линеарној алгебри, тј. у Инжењерској математици на Високој школи.

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.7. Ако у пермутацији σ елементи σ_i и σ_k задовољавају $\sigma_i > \sigma_k$, при чему је $i < k$, кажемо да елементи σ_i и σ_k образују *инверзију*. Значи, два елемента у пермутацији образују инверзију, ако нам прво иде већи, а затим мањи.

Пермутација σ је *парна* уколико је укупан број инверзија у њој паран, а *непарна* ако је укупан број инверзија непаран. *Знак* (*парност*) пермутације σ, у ознаци $sgn\ \sigma$, дефинишемо као

$$sgn\ \sigma = \begin{cases} 1 & \text{ако је } \sigma \text{ парна пермутација} \\ -1 & \text{ако је } \sigma \text{ непарна пермутација} \end{cases} = (-1)^{\text{ број инверзија }}.$$

Може се показати да за знак пермутације важи формула

$$sgn\ \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

ПРИМЕР 1.3.14. Колико инверзија образује број **а)** 1; **б)** n ако се налази на k–том месту у пермутацији бројева $1, 2, \ldots, n$?

Решење. **а)** $k - 1$ (са свим бројевима који су пре њега чини инверзију);
б) $n - k$ (са свим бројевима који су после њега чини инверзију). ■

ПРИМЕР 1.3.15. Пермутација $bdca$ скупа $\{a, b, c, d\}$ је парна, јер има 4 инверзије: b и a чине прву (на првом месту је "веће" слово b, него на четвртом месту где је "мање" слово a), d и c другу, d и a трећу, а c и a четврту. Сви остали елементи не чине инверзију. ■

ПРИМЕР 1.3.16. Идентична пермутација $\epsilon = 12\ldots n$ је парна, јер у њој нема инверзија, тј. укупан број инверзија је нула (никоја два елемента не чине инверзију, јер увек иде прво мањи број, па онда већи). ■

ПРИМЕР 1.3.17. Пермутација $n(n-1)\ldots 21$ има највише инверзија (свака два елемента у овој пермутацији образују инверзију): n на првом месту чини инверзију са свих осталих $n-1$ бројева, $n-1$ на другом месту чини инверзију са осталих $n-2$ бројева (сем n, јер смо ту већ бројали), итд. до 2 који чини једну инверзију са 1 који се налази иза њега - стога је укупан број инверзија у овој пермутацији једнак $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Знак ове пермутације зависи од остатка при дељењу броја n са 4 – ако је n дељиво са 4 или даје остатак 1 при дељењу са 4 пермутација је парна, а ако даје остатак 2 или 3 при дељењу са 4 пермутација је непарна. ■

ПРИМЕР 1.3.18. У свакој транспозицији има $2(j-i-1)+1$ парова бројева који чине инверзију: (j, i), (j, k), (k, i), где је k произвољан број између i и j, тј. $k \in \{i+1, i+2, \ldots, j-1\}$.

Стога је транспозиција непарна пермутација. ■

Знак пермутације може се одредити на 3 начина: помоћу инверзија (што смо имали у Дефиницији 1.3.7), на основу композиције транспозиција (Теорема 1.3.3) и преко циклусног записа (Теорема 1.3.1). Сада ћемо детаљније описати сваки од ових начина.

I Пермутација p је парна уколико је укупан број инверзија у p паран, а непарна ако је укупан број инверзија у p непаран. Може се рећи да се знак пермутације p добија по формули

$$sgn\ p = (-1)^{\text{ број инверзија }}.$$

II Уколико се пермутација може представити као композиција парног броја транспозиција она је парна, а ако се може представити као композиција непарног броја транспозиција она је непарна (тј. полазећи од полазне пермутације битно је колико је потребно замена места по два елемента да би добили дату пермутацију). Односно, имамо формулу

$$sgn\ p = (-1)^{\text{број транспозиција}}.$$

III Уколико је p пермутација скупа X_n (који има n елемената) представљена у циклусном запису и ако тај запис има c различитих циклуса, тада је

$$sgn\ p = (-1)^{n-c}.$$

ПРИМЕР 1.3.19. Одредити знак пермутације $\sigma = 2431$.

Решење. Већ смо видели у Примеру 1.3.15 (словној пермутацији *bdca* одговара бројевна 2431) да је ова пермутација парна - тамо смо избројали да има паран број инверзија (4).

Пермутација $\sigma = 2431$ може се добити од полазне пермутације $\epsilon = 1234$ ако прво заменимо места прва два елемента (тада добијамо пермутацију 2134), а затим ако заменимо места другог и четвртог елемента (то су 1 и 4). Стога имамо да је пермутација σ представљена преко композиције транспозиција као

$$\sigma = \varepsilon \circ \tau_{12} \circ \tau_{24}.$$

Ово представљање може бити и једноставније $\sigma = \tau_{12} \circ \tau_{24}$ (али и оно има исто 2 транспозиције). Стога је знак ове пермутације $(-1)^2 = 1$, тј. она је парна.

Циклусни запис ове пермутације је $\sigma = (1,2,4)(3)$ и он има $c = 2$ циклуса. На основу тога добијамо да је $sgn\ \sigma = (-1)^{4-2} = 1$, па смо опет нашли да је пермутација σ парна. ■

За крај овог дела о знаку пермутације, навешћемо строго-формалну (математичку) дефиницију појма детерминанте, са којим сте се срели у Инжењерској математици.

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.8. *Детерминанта* матрице A, у ознаци $\det(A)$, $|A|$ или $\det A$, је сума по свим пермутацијама σ из скупа $\mathbf{S}_n$:

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\ a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)},$$

где $\operatorname{sgn} \sigma$ означава знак пермутације.

1.4 Неуређени избори – комбинације

У овом поглављу ћемо се позабавити неуређеним изборима, тј. комбинацијама. Касније ћемо дати њихову везу са пермутацијама са понављањем. На крају ћемо дати особине биномних коефицијената и навести тврђење Биномне формуле.

Комбинације без понављања

У претходним поглављима смо дали строго-математичке дефиницију појма уређеног избора k елемената коначног скупа X користили пресликавање f из уређеног скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$ у скуп X. Тако смо $f(1)$ изабрали прво, затим $f(2)$, ..., а $f(k)$ на крају.

Код неуређеног избора елемената скупа X није важно који је елемент изабран први, а који последњи, тако да нема потребе уводити пресликавања. Како сада разматрамо неуређене изборе елемената без понављања видимо да они представљају k-точлане подскупове скупа X. Неуређени избори елемената у литератури се најчешће називају *комбинације*.

ДЕФИНИЦИЈА 1.4.1. Нека су $n \geqslant k$ ненегативни цели бројеви. *Биномни коефицијент* $\binom{n}{k}$ можемо израчунати на следећи начин:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\,.$$

Дакле, биномни коефицијент $\binom{n}{k}$, израчунавамо тако што у бројиоцу разломка (горе) напишемо k узастопних бројева почев од n, тј. $n, n-1, n-2, \ldots, n-k+2, n-k+1$, а у имениоцу разломка (доле) напишемо k узастопних бројева почев од k, тј. $k, k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.

Неке вредности биномних коефицијената су $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ и $\binom{n}{n} = 1$. Дефиниција 1.4.1 може да се прошири на све реалне вредности n, тако да пишемо

$$\binom{-0,5}{3} = \frac{(-0,5)\cdot(-1,5)\cdot(-2,5)\cdot(-3,5)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{35}{128} = 0,2734375.$$

Претходно, налази примену при одређивању готових формула за Маклоренове полиноме у предмету Инжењерска математика.
Ову дефиницију можемо да проширимо и на негативне вредности k и на вредности $n > k$ договором да је тако што уведемо да важи

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{за} \quad k < 0 \quad \text{и} \quad k > n.$$

ТЕОРЕМА 1.4.1. Број комбинација (неуређених избора) без понављања k-те класе од n елемената, тј. број k-точланих подскупова n-точланог скупа X, једнак је $C_n^k = \binom{n}{k}$. □

Дакле, кад год од n објеката треба да истовремено одаберемо k објеката, то можемо учинити на $C_n^k = \binom{n}{k}$ начина.

ПРИМЕР 1.4.1. *Писмени испит, јун2 2020.*
Колико има трочланих подскупова скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Решење 1. Могли би да набрајамо све трочлане подскупове, али би то потрајало:
$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,2,7\}$, $\{1,2,8\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,3,7\}$, $\{1,3,8\}$, ... , $\{3,6,8\}$, $\{3,7,8\}$, $\{4,5,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{4,5,8\}$, $\{4,6,7\}$, $\{4,6,8\}$, $\{4,7,8\}$, $\{5,6,7\}$, $\{5,6,8\}$, $\{5,7,8\}$, $\{6,7,8\}$.
1 најмањи, 2 средњи, највећи: 3, 4, 5, 6, 7, 8 (6 могућности)
1 најмањи, 3 средњи, највећи: 4, 5, 6, 7, 8 (5 могућности)
1 најмањи, 4 средњи, највећи: 5, 6, 7, 8 (4 могућности)
1 најмањи, 5 средњи, највећи: 6,7, 8 (3 могућности)
1 најмањи, 6 средњи, највећи: 7, 8 (2 могућности)
1 најмањи, 7 средњи, највећи: 8 (1 могућност)
Када је 1 најмањи имамо $6+5+4+3+2+1 = 21$ подскуп.
Слично, када је 2 најмањи имамо $5+4+3+2+1 = 15$ подскупова.
Када је 3 најмањи имамо $4+3+2+1 = 10$ подскупова.
Када је 4 најмањи имамо $3+2+1 = 6$ подскупова ($\{4,5,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{4,5,8\}$, $\{4,6,7\}$, $\{4,6,8\}$, $\{4,7,8\}$).
Када је 5 најмањи имамо $2+1 = 3$ подскупа ($\{5,6,7\}$, $\{5,6,8\}$, $\{5,7,8\}$).
Када је 6 најмањи имамо 1 подскуп ($\{6,7,8\}$).
Укупно имамо $21+15+10+6+3+1 = 56$ подскупова. ■

Решење 2. Према Теореми 1.4.1 трочлани подскупови представљају комбинације 3. класе од 8 елемената, C_3^8 и брже их пребројавамо преко биномног коефицијента: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$ ■

ПРИМЕР 1.4.2. *Школско такмичење 1990. за IV разред*
На правој p дате су редом тачке A, B, C, D, E.
Записати све различите дужи чији су крајеви дате тачке. Колико има таквих дужи?

Решење 1. Има их 10: 1. AB, 2. AC, 3. AD, 4. AE, 5. BC, 6. BD, 7. BE, 8. CD, 9. CE, 10. DE. ■

Решење 2. Оба краја дужи можемо истовремено одабрати из скупа $\{A, B, C, D, E\}$ на $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ начина, па има 10 дужи. ■

ПРИМЕР 1.4.3. Која је вредност променљиве A након извршења следећег кода?

```
A := 0
for x_1 := 1 to n
  for x_2 := x_1 + 1 to n
    for x_3 := x_2 + 1 to n
      ⋮
      for x_k := x_{k-1} + 1 to n
        A := A + 1
      end for
      ⋮
    end for
  end for
end for
```

Решење. Почетна вредност променљиве A једнака је 0 и A се увећава за 1 сваки пут када се прође кроз корак угњеждене петље са низом бројева x_1, x_2, ..., x_k таквим да је

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{s-1} < x_k \leqslant n.$$

Број оваквих низова бројева једнак је броју начина да се k бројева изабере без понављања из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Сада из Теореме 1.4.1 видимо да ће вредност променљиве A након извршења кода бити једнака

$$C_n^k = \binom{n}{k}. \quad ■$$

Комбинације са понављањем

Ако дозволимо понављање у неуређеном избору елемената скупа X, онда он више не представља обичан подскуп скупа X.

ПРИМЕР 1.4.4. Колико има начина да се изаберу три новчића из касе која садржи новчиће од 1, 2, 5 и 10 динара, уколико редослед бирања новчића није битан већ само број изабраних новчића сваке врсте и ако у каси постоји бар три новчића сваке врсте?

Решење. Постоји 20 начина, приказаних у следећој табели:

1д 1д 1д	1д 1д 2д	1д 1д 5д	1д 1д 10д
	1д 2д 2д	1д 2д 5д	1д 2д 10д
		1д 5д 5д	1д 5д 10д
			1д 10д 10д
	2д 2д 2д	2д 2д 5д	2д 2д 10д
		2д 5д 5д	2д 5д 10д
			2д 10д 10д
		5д 5д 5д	5д 5д 10д
			5д 10д 10д
			10д 10д 10д

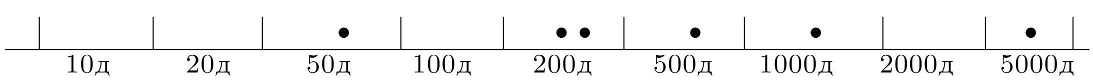
Табела 1.1: Избор 3 новчића из касе са новчићима од 1, 2, 5 и 10 динара.

ПРИМЕР 1.4.5. Колико има начина да се изаберу шест новчаница из касе која садржи новчанице од 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 динара? Као и у претходном питању, и у овом случају редослед бирања новчаница није битан, новчанице исте вредности се не разликују, а у каси постоји бар десет новчаница сваке врсте.

Решење. Овде је број решења веома велики, тако да би исписивање свих могућих решења веома дуго трајало. Због тога ћемо размотрити како можемо да одредимо један избор.

Овде редослед изабраних новчаница није битан (комбинације и са понављањем су неуређени избори) и имамо довољно од сваке врсте новчаница (у тексту је дато да има 10, а довољно је да има бар по 6 од сваке врсте). Треба да нађемо број комбинација са понављањем класе 6 од 8 елемената.

Претпоставимо да каса има девет преграда, по једну за сваку врсту новчаница. На Слици 1.4 је илустрован избор једне новчанице од 50 динара, две новчанице од 200 динара и по једне новчанице од 500 динара, 1000 динара и од 5000 динара:



Слика 1.4: Каса са маркираним изабраним новчаницама.

На сличан начин, сваки избор 6 новчаница можемо да представимо помоћу $6\times\bullet$ распоређених у преградама касе. Обришимо дно касе са ознакама вредности новчаница, леву ивицу прве преграде и десну ивицу последње преграде, па се сваки избор 6 новчаница може представити помоћу распореда 6 маркера ($\bullet$) и 8 ивица $|$ (укупно имамо $6+8=14$ позиција):

$$|\ \ |\bullet|\ \ |\bullet\bullet|\bullet|\bullet|\ \ |\bullet$$

Тражених распореда има као и избора 6 позиција за $\bullet$ од укупно 14 могућих позиција, што је број комбинација

$$\binom{14}{6}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=3003. \qquad \blacksquare$$

Уопштењем горњег приступа можемо доказати следећу теорему.

ТЕОРЕМА 1.4.2. Број комбинација са понављањем k те класе од n елемената једнак је

$$\overline{C}_n^{\,k}=\binom{n+k-1}{k}.$$

Доказ. Сваки неуређени избор k елемената са понављањем скупа X, који има n елемената, може да се представити помоћу низа од $k\times\bullet$ и $n-1\times|$.

На пример, неуређени избор *bbddd* од 5 елемената из скупа $X = \{a, b, c, d\}$ може да се представи помоћу низа од $5 \times *$ и $3 \times |$:

$$| \bullet \bullet | \quad | \bullet \bullet \bullet$$

Слично као и у претходном примеру, низ од $k \times \bullet$ и $n-1 \times |$ (то је укупно $k + (n-1) = n + k - 1$ позиција), те таквих низова има колико и комбинација $\binom{n+k-1}{k}$. □

ПРИМЕР 1.4.6. На колико начина се 7 истих лопти може распоредити у 6 различитих кутија?

Решење. Број могућих распореда лопти је једнак броју комбинација са понављањем класе 7 од 6 елемената, тј. $\binom{7+6-1}{8} = \binom{12}{7} = 792$. ■

ПРИМЕР 1.4.7. Која је вредност променљиве A након извршења следећег кода?

```
A := 0
for x_1 := 1 to n
  for x_2 := x_1 to n
    for x_3 := x_2 to n
      ⋮
      for x_k := x_{k-1} to n
        A := A + 1
      end for
      ⋮
    end for
  end for
end for
```

Решење. Почетна вредност променљиве A једнака је 0 и A се увећава за 1 сваки пут када се прође кроз корак угњеждене петље са низом бројева $x_1, x_2, \ldots, x_k$ таквим да је

$$1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{k-1} \leqslant x_k \leqslant n.$$

Број оваквих низова бројева једнак је броју начина да се изабере k бројева са понављањем из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Сада из Теореме 1.4.2 видимо да ће вредност променљиве A након извршења кода бити једнака

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}. \qquad ■$$

ПРИМЕР 1.4.8. Колико решења има једначина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n,$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ненегативни цели бројеви?

Решење. Нека је скуп $X = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ако претпоставимо да број x_i, за $1 \leqslant i \leqslant k$, означава колико је пута изабран елемент i из скупа X, онда видимо да свако решење горње једначине $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ означава тачно један неуређени избор n елемената са понављањем из скупа са k елемената:

$$(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3 \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_k).$$

Такође важи и обратно: сваки неуређени избор n елемената са понављањем из скупа са k елемената одређује тачно једно решење $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ горње једначине.

Стога решења једначине има колико и оваквих неуређених избора, а то је

$$\binom{k+n-1}{n}. \qquad \blacksquare$$

Напомена. Према Услову симетричности (Лема 1.6.2) из Поглавља 1.7. Биномни идентитети, имамо да је број решења једначине $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ једнак и $\binom{k+n-1}{k-1}$.

ПРИМЕР 1.4.9. На полици се налази n књига. На колико начина се може изабрати k књига са полице, тако да никоје две изабране књиге нису биле суседне на полици?

Решење. Нека x_1 означава број књига на полици испред прве изабране књиге, x_i, $2 \leqslant i \leqslant k$, број књига на полици које се налазе између $(i-1)$-ве и i-те изабране књиге, а x_{k+1} број књига на полици иза последње изабране књиге. С обзиром да бројеви x_i, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, пребројавају све неизабране књиге са полице, важи да је

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n - k.$$

С друге стране, из услова да изабране књиге нису биле суседне видимо да важи

$$x_2, x_3, \ldots, x_k \geqslant 1,$$

док је

$$x_1, x_{k+1} \geqslant 0.$$

Да бисмо избегли ове различитости, уводимо смене $y_i = x_i - 1$, за $1 \leqslant i \leqslant k+1$. Тада су $y_i \geqslant 0$ за које важи да је

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} = (n - k + 2) - (k + 1) = n - 2k + 1.$$

Из претходног примера знамо да је број решења ове једначине $\binom{n-k+1}{n-2k+1}$.
То је и број могућих избора k несуседних књига са полице. $\blacksquare$

1.5 Пермутације са понављањем

Посебну врсту избора чине пермутације фамилије елемената, у којој се неки од елемената садрже више пута. Тада се мора повести рачуна како би се избегло да се исти избор пребројава више пута. Размотримо следећи проблем:

ПРИМЕР 1.5.1. Колико различитих речи, укључујући бесмислене, може да се састави од слова речи МАТЕМАТИКА?

Решење 1. Иако имамо 10 слова, нека су иста, тако да одговор овде **није** 10!. Наиме, сада треба да пребројимо пермутације фамилије слова у којој се слово А појављује 3 пута, слова М и Т по два пута, а слова Е, И и К по једанпут. Оваква пермутација ће бити одређена уколико знамо на које 3 позиције у речи се налазе слова А, на које 2 позиције слова М, на које 2 слова Т... Три позиције за слова А се могу изабрати на $\binom{10}{3}$ начина, а затим се између преосталих 7 позиција 2 позиције за слова М могу изабрати на $\binom{7}{2}$ начина. Настављајући даље, од преосталих 5 позиција 2 позиције за слова Т се могу изабрати на $\binom{5}{2}$ начина, а на преостале 3 позиције треба да испремештамо слова Е, И и К, што се може урадити на 3! начина. Укупан број тражених пермутација једнак је $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 120 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 6 = 151\,200$. $\blacksquare$

Решење 2. Замислимо најпре да се сва слова у речи разликују, тако да имамо 3 различита слова А, 2 различита слова М и 2 различита слова Т. На пример, можемо да их учинимо различитим додајући им индексе: $М_1А_1Т_1Е_1М_2А_2Т_2И_1К_1А_3$. Сада имамо 10 различитих слова, која можемо да распоредимо на 10! различитих начина. Посматрајмо произвољну реч сачињену од „неиндексиране“ речи МАТЕМАТИКА, на пример АААЕИКМТ. Од колико различитих „индексираних“ речи можемо да добијемо ову реч брисањем индекса? Индекси 3 слова А могу да се распореде на 3! начина, индекси 2 слова М могу да се распореде (независно) на 2! начина, и индекси 2 слова Р могу да се распореде (независно) на 2! начина и коначно за по једно слово Е, И и К имамо по 1! могућности. Према томе, реч АААЕИКМТ, као и било коју другу реч добијену од речи МАТЕМАТИКА, можемо да индексирамо на $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!$ начина. Број неиндексираних речи, што је и решење проблема, једнак је $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$. ■

Уопштавањем Решења 1 представљањем 3! као $3! = \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}$, добијамо следећу теорему.

ТЕОРЕМА 1.5.1. Број пермутација фамилије са n елемената, у којој се први елемент садржи n_1 пута, други елемент n_2 пута, ..., а k-ти елемент n_k пута (при томе важи $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), једнак је

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-\ldots-n_{k-2}}{n_{k-1}} \cdot \binom{n_k}{n_k}.$$

Доказ. Приметимо да постоји $\binom{n}{n_1}$ начина да се n_1 копија првог елемента распореди између n позиција у пермутацији. Након тога преостаје $n - n_1$ слободних позиција, између којих n_2 копија другог елемента може да се распореди на $\binom{n-n_1}{n_2}$ начина, остављајући $n-n_1-n_2$ слободних позиција. Настављајући на овај начин распоређивање копија елемената, можемо да видимо да ће на крају копије k-тог елемента моћи да се распореде на $\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \binom{n_k}{n_k} = 1$ начина. По Принципу производа, број тражених пермутација је једнак

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-\ldots-n_{k-2}}{n_{k-1}} \cdot \binom{n_k}{n_k}. \qquad \square$$

Из 2 решења претходног примера успоставићемо везу између броја пермутација са понављањем које смо пребројали на 2 различита начина.

ТЕОРЕМА 1.5.2. За биномне коефицијенте важи следећа једнакост

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Доказ. Помоћу Факторијелне репрезентације биномних коефицијената (Лема 1.6.1 из поглавља 1.6. Особине биномних коефицијента) могуће је приказати полиномне коефицијенте на знатно једноставнији начин:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \\ &\quad \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_{k-1}-n_k)!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \qquad \square\end{aligned}$$

Како бисмо избегли стално понављање дугачког производа биномних коефицијената из претходне теореме, или разломка са факторијалима из претходне леме, увешћемо следећу дефиницију полиномних коефицијената (понегде се називају и мултиномијални коефицијенти).

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.1. Нека важи $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Тада се *полиномни коефицијент* $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ дефинише помоћу

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

ПРИМЕР 1.5.2. Ана, Бојана, Весна и Гордана играју таблић. На колико начина се њима може поделити по 6 карата и на талон избацити 4 карте из стандардног шпила од 52 карте?

Решење. На почетку дељења 4 карте иду на талон и њих можемо одабрати на $\binom{52}{4}$. Ани се 6 карата може поделити на $\binom{48}{6}$ начина (након избацивања 4 на талон у шпилу је остало $52 - 4 = 48$ карата). Бојани се тада пет карата може поделити на $\binom{42}{6}$ начина (након поделе карата Ани у шпилу је остало $48 - 6 = 42$ карата. Весни се 6 карата може поделити на $\binom{36}{6}$ начина. Гордани се 6 карата може поделити на $\binom{30}{6}$ начина. Преостале 24 карте остају на столу. По принципу производа, укупан број различитих дељења је једнак

$$\binom{52}{4,6,6,6,6,24} = \binom{52}{4}\cdot\binom{48}{6}\cdot\binom{42}{6}\cdot\binom{36}{6}\cdot\binom{30}{6}\cdot\binom{24}{24} = 270725\cdot 12271512\cdot 5245786\cdot 1947792\cdot 593775\cdot 1$$

$$= 20\,155\,867\,493\,649\,826\,939\,163\,523\,360\,000. \qquad \blacksquare$$

Претходни пример представља пример избора у коме различите објекте треба сместити у различите кутије: различити објекти су 52 карте из шпила, а 6 различитих кутија се користи за карте на талону, карте сваке од 4 девојке, као и за остатак шпила.

ТЕОРЕМА 1.5.3. Број начина да се n различитих објеката смести у k различитих кутија, тако да се у кутији i налази n_i објеката за $1 \leqslant i \leqslant k$, при чему је $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, једнак је

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \quad \square$$

1.6 Особине биномних коефицијената

Биномни коефицијенти $\dbinom{n}{k}$ имају велики број примена и један су од најважнијих комбинаторних појмова. У овом поглављу ћемо проучити неке од њихових основних особина, које углавном нећемо показивати. Кога занимају докази, могу их наћи у уџбенику [17].

ФАКТОРИЈЕЛНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА

Биномни коефицијенти се најједноставније представљају помоћу факторијела.

ТЕОРЕМА 1.6.1. Факторијелна репрезентација. За целе бројеве n и k, такве да је $n \geqslant k \geqslant 0$, важи

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \square \tag{1.3}$$

УСЛОВ СИМЕТРИЧНОСТИ

Помоћу (1.3) лако се доказује и следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 1.6.2. Услов симетричности. За сваки цео број $n \geqslant 0$ и сваки цео број k важи

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.4}$$

Доказ. Из једнакости (1.3) добијамо

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}. \qquad \square$$

Комбинаторно, једнакост (1.4) значи да је број k-точланих подскупова скупа X са n елемената једнак броју подскупова са $n-k$ елемената. Ово се може проверити и директно — довољно је сваком k-точланом подскупу доделити његов комплемент у X.

АДИЦИОНА ФОРМУЛА

Помоћу (1.3) је такође могуће доказати и следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 1.6.3. Адициона формула. За целе бројеве n и k важи

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad \square \tag{1.5}$$

Једнакост (1.5) се у страној литератури назива Паскалов идентитет (енг. *Pascal's identity*). Један од главних разлога за то је што је блиско повезана са тзв. *Паскаловим троуглом*, који је представљен у Табели 1.2.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&& \\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&& \\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&& \\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&& \\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1& \\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1 \\
&&&&&\vdots&&&&&&&&&&\vdots&&&&&
\end{array}$$

Табела 1.2: Паскалов троугао.

Паскалов троугао се добија тако што се почне са редом који садржи само број 1, а затим се сваки следећи ред добија тако што се испод сваког пара узастопних бројева у претходном реду напише њихов збир, и на крају се на оба краја новог реда стави број 1 (1 и ништа даје 1).

У Паскаловом троуглу $(n+1)$-ви ред садржи биномне коефицијенте $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Паскалов троугао омогућава и да се произвољан биномни коефицијент израчуна користећи само сабирање: за $\binom{n}{k}$ треба израчунати само оне вредности које се у Паскаловом троуглу налазе горе лево и горе десно од тог биномног коефицијента.

БИНОМНА ТЕОРЕМА

Најважније својство биномних коефицијената исказано је у следећој теореми. Она се често назива и *Биномни развој* или *Развој степена бинома*, док се сама формула (1.6) назива *Биномна формула*.

ТЕОРЕМА 1.6.4. Биномна теорема. За сваки ненегативни цео број n важи

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{1.6}$$

(ово је једнакост два полинома са промењивама x и y, па важи за произвољне x и y). $\square$

ПРИМЕР 1.6.1. Како гласи израз $(a+b)^4$ у развијеном облику?

Решење. Из Биномне теореме добијамо да је

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^k b^{4-k} = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3 b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Приметимо да се коефицијенти 1 4 6 4 1 у Биномном развоју јављају као 5-та врста у Паскаловом троуглу. Уопште, имамо да за развој $(a+b)^n$ користимо $(n+1)$-ву врсту (тј. ону врсту која почиње са 1 и n) у Паскаловом троуглу (при чему се степени уз a смањују, а уз b повећавају). ■

ПРИМЕР 1.6.2. Који је коефицијент уз $x^{10}y^{12}$ у развоју израза $(x+y)^{22}$?

Решење. Из Биномне теореме следи да је овај коефицијент једнак

$$\binom{22}{10} = \frac{22!}{10!12!} = 646\,646. \qquad ■$$

ПРИМЕР 1.6.3. Који је коефицијент уз $x^{10}y^{12}$ у развоју израза $(3x-2y)^{22}$?

Решење. Најпре, приметимо да је овај израз једнак $\big(3x+(-2y)\big)^{22}$. Сада из Биномне теореме следи да је

$$\big(3x+(-2y)\big)^{22} = \sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}(3x)^k(-2y)^{22-k}.$$

Сабирак $x^{10}y^{12}$ у овом изразу се добија за $k=10$, и његов коефицијент је једнак

$$\binom{22}{10}3^{10}(-2)^{12} = \frac{22!}{10!12!}3^{10}2^{12} = 156\,400\,843\,382\,784. \qquad ■$$

Ако у Биномној теореми ставимо $y=1$ тада добијамо важан специјални случај

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \tag{1.7}$$

Помоћу Биномне теореме можемо да докажемо многе идентитете са биномним коефицијентима. Овим послом ћемо се више бавити у следећем одељку, а овде ћемо навести само још два идентитета.

ПОСЛЕДИЦА. 1.6.5. За ненегативан цео број n важи

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Доказ. Користећи Биномну теорему са $x=1$ и $y=1$ добијамо

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Ова последица има и интересантан комбинаторни доказ. У ту сврху пребројаћемо све подскупове скупа X са n елемената на два начина. С једне стране, X има 2^n различитих подскупова (Теорема 1.2.2). С друге стране, за свако $k=0,1,\ldots,n$, скуп X има $\binom{n}{k}$ подскупова са тачно k елемената. Због тога, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ такође представља укупан број подскупова скупа X, па стога важи једнакост из тврђења. □

ПОСЛЕДИЦА. 1.6.6. За ненегативан цео број n важи

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

Доказ. Стављањем $x=1$ и $y=-1$ у Биномну теорему добијамо

$$0=0^n=\big(1+(-1)\big)^n=\sum_{k=0}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}(-1)^k\binom{n}{k}. \qquad \square$$

Сабирањем, односно одузимањем, идентитета из претходне две последице добијамо да важе и следеће једнакости:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots.$$

ПОЛИНОМНА ТЕОРЕМА

Подсетимо се да за полиномне коефицијенте важи Лема 1.5.2, тј.

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

С обзиром да полиномни коефицијенти уопштавају биномне коефицијенте, могуће је доказати и следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 1.6.7. Полиномна теорема. За произвољне реалне бројеве x_1, x_2, ..., x_m и за сваки природан број $n\geqslant 1$ важи

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\geqslant 0}}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{k_m}. \qquad \square$$

ПРИМЕР 1.6.4. Како гласи израз $(x+y+z)^3$ у развијеном облику?

Решење. По Полиномној теореми имамо да важи

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3&=\tbinom{3}{3,0,0}x^3+\tbinom{3}{0,3,0}y^3+\tbinom{3}{0,0,3}z^3+\tbinom{3}{2,1,0}x^2y+\tbinom{3}{2,0,1}x^2z+\\&\quad\tbinom{3}{1,2,0}xy^2+\tbinom{3}{0,2,1}y^2z+\tbinom{3}{1,0,2}xz^2+\tbinom{3}{0,1,2}yz^2+\tbinom{3}{1,1,1}xyz\\&=\frac{3!}{3!0!0!}x^3+\frac{3!}{0!3!0!}y^3+\frac{3!}{0!0!3!}z^3+\frac{3!}{2!1!0!}x^2y+\frac{3!}{2!0!1!}x^2z+\\&\quad\frac{3!}{1!2!0!}xy^2+\frac{3!}{0!2!1!}y^2z+\frac{3!}{1!0!2!}xz^2+\frac{3!}{0!1!2!}yz^2+\frac{3!}{1!1!1!}xyz\\&=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+3y^2z+3xz^2+3yz^2+6xyz.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.6.5. *Пријемни испит за ЕТФ 2021.*
Колико има сабирака у развијеном облику израза $(a+b+c)^{10}$?

Решење. Број чланова једнак је броју решења једначине $k_1+k_2+k_3=10$, $k_1,k_2,k_3\geqslant 0$, у Полиномној формули. То смо већ урадили у Примеру 1.4.8, па је то $\binom{3+10-1}{10}=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66$. $\blacksquare$

Десна страна Полиномне формуле обично има доста сабирака, с обзиром да се сабира по свим представљањима броја n помоћу m сабирака, али се ова теорема ионако најчешће користи како бисмо одредили коефицијент уз неки одређени члан.

ПРИМЕР 1.6.6. Који је коефицијент уз члан $x^2y^3z^5$ у развоју израза $(x+y-z)^{10}$?

Решење. Примењујући Полиномну теорему на израз $\big(x+y+(-z)\big)^{10}$ видимо да је тражени коефицијент једнак

$$\binom{10}{2,3,5}(-1)^5 = -2\,520,$$

где чинилац $(-1)^5$ долази из производа $x^2y^3(-z)^5$. ■

ИЗВЛАЧЕЊЕ ИЗ ЗАГРАДА

ТЕОРЕМА 1.6.8. За цео број $k \neq 0$ и произвољан број n, $n \neq k$, важи

(1.8)
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}. \quad \square$$

СУМАЦИОНА ФОРМУЛА

ТЕОРЕМА 1.6.9. За целе бројеве n и m, $n, m \geqslant 0$ важи

(1.9)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \ldots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n},$$

(1.10)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \quad \square$$

Једнакост (1.10) се често појављује у применама.

На пример, за $m = 1$ добијамо формулу за збир првих n природних бројева (који се може искористити и за одређивање збира аритметичке прогресије):

$$\binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \ldots + \binom{n}{1} = 0 + 1 + \ldots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Претпоставимо да желимо да нађемо збир $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Ако приметимо да је $k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$, тада добијамо да је

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right) = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Решење, које смо добили у биномним коефицијентима, можемо да вратимо у уобичајену нотацију:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 2\tfrac{(n+1)n(n-1)}{6} + \tfrac{(n+1)n}{2} = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Напомена. Збир $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ може да се добије на сличан начин, јер *сваки* полином $a_0 + a_1k + a_2k^2 + \ldots + a_mk^m$ може да се изрази у облику $b_0\binom{k}{0} + b_1\binom{k}{1} + \ldots + b_m\binom{k}{m}$ за погодно изабране коефицијенте b_0, b_1, $\ldots$, b_m.

НЕГАЦИЈА ГОРЊЕГ ИНДЕКСА

ТЕОРЕМА 1.6.10. За сваки цео број k и произвољан број n важи

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \quad \square \tag{1.11}$$

Негација горњег индекса је често корисна при разним сумирањима биномних коефицијената.

ПРИМЕР 1.6.7. Доказати сумациону формулу

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{r}{k} = \binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{r}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n}. \tag{1.12}$$

Решење. Користећи редом негацију горњег индекса (1.11) и прву сумациону формулу (1.9) добијамо

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{r}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-r+k-1}{k} = \binom{-r+n}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n}. \qquad \blacksquare$$

ПОЈЕДНОСТАВЉИВАЊЕ ПРОИЗВОДА

ТЕОРЕМА 1.6.11. За све целе бројеве m и k и произвољан број n важи

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}. \quad \square \tag{1.13}$$

СУМЕ ПРОИЗВОДА

Једнакости у следећем тврђењу се користе када треба сумирати производ два биномна коефицијента у којима се сумациони индекс k налази на доњем месту.

ТЕОРЕМА 1.6.12. За сваки цео број n и сваки цео број $r \geqslant 0$ важи

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \tag{1.14}$$

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}. \quad \square \tag{1.15}$$

Сада ћемо на неколико примера показати како се ова лема може искористити при раду са неким биномним идентитетима.

ПРИМЕР 1.6.8. Ако је r ненегативни цео број, која је вредност израза $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}k$?

Решење. Извлачењем из заграда (Лема 1.6.8) можемо да се ослободимо спољашњег k:

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}k = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}\frac{s}{k}k = s\sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}.$$

Сада може да се примени једнакост (1.15) са $n = -1$. Крајње решење је

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} k = s\binom{r+s-1}{r-1}. \qquad \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.6.9. Доказати да важи $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Решење. За доказ користимо Услов симетричности (Лема 1.6.2) и једнакост (1.14) са $r = n$, $s = n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}. \qquad \blacksquare$$

1.7 Један илустративан пример

За крај, као илустрацију свега што смо радили у претходна 3 поглавља урадићемо следећи пример.

ПРИМЕР 1.7.1. Колико има природних бројева мањих од милион у којима се јавља цифра 8?

Решење. Урадићемо уопштење за бројеве мање од 10^n и тражени број бројева ћемо означити са a_n. Скуп цифара је $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ је скуп цифара без осмице. Бројевима који имају $k < n$ цифара дописаћемо на почетку $n - k$ нула и тај начин смо све бројеве мање од 10^n (укључујући и 0) свели на уређене n–торке елемената из C (варијације са понављањем од n елемената скупа C).

Решење I: Бројева са тачно k осмица има $\binom{n}{k} \cdot 9^{n-k}$: на $\binom{n}{k}$ начина можемо одабрати тих k места на којима су осмице, а на осталих $n - k$ места може бити било која од осталих цифара, односно ту се налази цифра из скупа S и сваку од њих можемо одабрати на 9 различитих начина (по принципу производа све можемо одабрати на 9^{n-k} начина). Тражени бројеви могу имати $1, 2, \ldots, n$ осмица, те по принципу збира добијамо да их има $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^{n-k} - 9^n = (9+1)^n - 9^n = 10^n - 9^n$ (при одређивању ове суме смо користили Биномну формулу). За конкретно $n = 6$ добијамо да ових бројева има 468 559.

Решење II: Уколико је прва цифра 8 слева на првом месту, на осталим местима може бити било која цифра (из $|C| = 10$), па таквих бројева има 10^{n-1}. Уколико је прва цифра 8 слева на другом месту, на првом месту може бити било која цифра из S ($|S| = 9$), 8 је на другом, а на осталим местима може бити било која цифра, па таквих бројева има $9 \cdot 1 \cdot 10^{n-2}$. ... Уколико је прва цифра 8 слева на k–том месту, на првих $(k-1)$ места може бити било која цифра из S, 8 је на k–том, а на осталим местима може бити било која цифра, па таквих бројева има $9^k \cdot 1 \cdot 10^{n-k-1}$. ... Ако је 8 само на последњем месту онда таквих бројева има 9^{n-1}. Како су ови догађаји дисјунктни по принципу збира добијамо да тражених бројева има $a_n = 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9^{n-1} = (10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9^{n-1}) \cdot (10 - 9) = 10^n - 9^n$.

Решење III (Помоћу комплемента): Укупно природних бројева мањих од 10^n (укључујући и 0) има тачно 10^n - колико и варијација са понављањем скупа C од n елемената. Бројева мањих од 10^n који не садрже цифру 8 (укључујући и 0) има тачно 9^n - колико и варијација са понављањем скупа S од n елемената. Разлика $10^n - 9^n$ представља број природних бројева са највише n цифара, код којих се, када су написани у декадном систему, јавља цифра 8, тј. $a_n = 10^n - 9^n$.

Решење IV (Принцип укључења и искључења): Означимо са A_i скуп n–тоцифрених бројева који имају цифру 8 на i–том месту (за разлику од решења II, овде то није прво појављивање цифре 8, него било које, тако да скупови A_i нису дисјунктни). $|A_i| = 10^{n-1}$ јер на i–том месту имамо фиксирану цифру 8, а на сваком од осталих можемо узети произвољну цифру. За $i \neq j$ је $|A_i \cap A_j| = 10^{n-2}$ (слично на i–том и j–том месту имамо осмице, а на осталим су произвољне цифре). ... Како је $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{\underbrace{88\ldots8}_{n}\}$ имамо да је $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 1$. Када ово све уврстимо у формулу укључења и искључења и са обзиром на чињеницу да t скупова чији пресек тражимо можемо одабрати на $\binom{n}{t}$ начина добијамо:

$$\begin{aligned} a_n &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \\ &= \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} - \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot 10^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n} \cdot 1 \\ &= 10^n - (\binom{n}{0} \cdot 10^n - \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 1) = 10^n - (10-1)^n = 10^n - 9^n. \end{aligned}$$

Решење V (Помоћу рекурентних низова): Нађимо везу броја $(n+1)$–цифрених бројева који задовољавају услов задатка, a_{n+1}, и n–тоцифрених, a_n. Ако се у последњих n цифара налази цифра 8 (таквих бројева има a_n) онда за нову, $(n+1)$–ву, можемо узети било коју цифру из C, тј. таквих бројева има $10 \cdot a_n$. Ако се у последњих n цифара не налази цифра 8 (таквих бројева има 9^n – варијације скупа S) онда $(n+1)$–ва мора бити 8, тј. таквих бројева има $1 \cdot 9^n$. Тако смо дошли до нехомогене линеарне рекурентне везе

$$(*) \qquad a_{n+1} = 10a_n + 9^n, \quad \text{са почетним условом } a_1 = 1$$

(једноцифрених бројева који садрже цифру 8 има само један: 8). Ако у $(*)$ заменимо свако n са $n+1$ добијамо $a_{n+2} = 10a_{n+1} + 9^{n+1}$ и ако од ове једначине одузмемо $(*)$ помножену са 9, добијамо линеарну хомогену рекурентну везу

$$(**) \qquad a_{n+2} - 19a_{n+1} + 90a_n = 0, \quad \text{са почетним условима } a_1 = 1,\ a_2 = 19$$

(други почетни услов добијамо из $(*)$ за $n = 1$ или простим пребројавањем: 8,18,28,..., 78,80,81,82,..., 89,98 – има их 19). Карактеристична једначина за $(**)$ је $t^2 - 19t + 90 = 0$ и њене нуле су $t_1 = 10$ и $t_2 = 9$, па је опште решење једначине $(**)$, а самим тим и $(*)$, $a_n = C_1 \cdot 10^n + C_2 \cdot 9^n$, где константе C_1 и C_2 одређујемо из почетних услова: $a_1 = 1 = 10C_1 + 9C_2$ и $a_2 = 19 = 100C_1 + 81C_2$. Решавањем овог система добијамо $C_1 = 1$ и $C_2 = -1$, односно тражених бројева има $a_n = 10^n - 9^n$.

Решење VI (Компјутерски програм):

```
program brojanje;
var n,c: integer;
    m,b,s: longint;
    p: Boolean;
begin
    writeln('Program trazi koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n u kojima se javlja cifra 8.');
    write('Unesite broj n');
    readln(n);
    s:=0;
    for m:=1 to 10^n-1 do
        begin
        b:=m; p:=false;
        repeat
        c:=b mod 10;
        if c=8 then p:=true
                else b:=b div 10;
        until (b=0) or p;
        if p then s:=s+1;
        end;
    writeln('Trazenih brojeva ima ',s);
```

■

Напомена. Решење V (Помоћу рекурентних низова) излази ван овог курса Дискретне математике, али се рад са рекурентним једначинама често налази у основним курсевима Дискретне математике у свету. Због тога смо у овом примеру навели и ово решење, као илустрацију те материје.

1.8 Разбијања броја – партиције и композиције

Партиције природног броја, заједно са композицијама и партицијама скупа (које нећемо обрадити у овој књизи), представљају изузетно важне комбинаторне објекте, али који се не помињу у стандардној средњошколској математици. Постоје и целе књиге које се баве њима — амерички математичар Џорџ Ендриус аутор је 2 књиге које су посвећене партицијама: [2] и [3].

Партиције

Партиције у свом корену имају енглеску реч *part* (део), али се код нас овај појам не преводи. Такође у целом овом поглављу за делове партиције ми ћемо користити израз *сабирак* (код партиција и композиција природног броја), односно *подскуп* (код партиција скупа).

За укупан број партиција природног броја n користићемо ознаку $p\,(n)$, а са $p\,(n \mid \mathcal{P})$ означаваћемо број партиција природног броја n које имају неко својство $\mathcal{P}$. Самоконјуговане партиције ћемо означавати са с.к. а са н.с. ћемо означавати највећи сабирак у датој партицији. Изузетно, својства везана за информације о броју сабирака ћемо стављати у индекс, нпр. број партиција које имају тачно k сабирака ћемо означавати са $p_k(n)$, ако има највише k сабирака то ћемо означавати са $p_{\leqslant k}(n)$, а партиције које имају тачно m различитих сабирака ћемо означавати са $p_m(n \mid \neq)$. Исто, за композиције природног броја n ћемо користити ознаке које почињу са c, попут $c\,(n)$, $c\,(n \mid \mathcal{P})$, ...

ДЕФИНИЦИЈА 1.8.1. *Партиција* π броја n, $n \in \mathbb{N}$, на k сабирака, $k \geqslant 1$, је фамилија $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, таква да важи $a_i \in \mathbb{N}$ за свако $i = 1, 2, \ldots, k$ и

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Ако партиција $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ садржи α_i сабирака једнаких i, $i = 1, 2, \ldots, k$, тада партицију π записујемо на следећи начин

$$\pi = [1^{\alpha_1}\ 2^{\alpha_2}\ \ldots\ n^{\alpha_n}].$$

Несрећна околност је да за партиције у скраћеној нотацији користимо мултипликативне ознаке (али те ознаке су се усталиле у литератури свуда у свету), иако је партиција у ствари сума (тј. адитивна декомпозиција). Тако $[2^3]$ је партиција броја 6, која значи да смо 6 представили као суму три двојке. Такође, ради веће прегледности уместо k^1 писаћемо само k.

Основна разлика између партиција и композиција је што је код композиција битан редослед сабирака, док код партиција није.

Тако, нпр. партицији $1 + 2 + 2 + 5$, коју можемо записати и као $[1\ 2^2\ 5]$, одговара $\binom{4}{1,2,1} = 12$ композиција из Примера 1.8.4.

Нажалост, за партиције природних бројева не постоји експлицитна формула као за композиције, али зато можемо да одредимо бројеве партиција помоћу рекурентних веза.

ТЕОРЕМА 1.8.1. Нека је $p_k(n)$ број партиција n на k сабирака. Тада је

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k).$$ □

Ово тврђење можемо искористити да израчунамо укупан број партиција $p(n)$ броја n. Слично као у доказу Теореме 1.8.3, видимо да партиције броја n могу имати од $k=1$ до $k=n$ сабирака. Стога важи формула за број партиција

$$p(n)=\sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$

ПРИМЕР 1.8.1. Израчунајмо вредности $p(n)$, за $1 \leqslant n \leqslant 16$.

Решење. Првих 16 вредности функције броја партиција $p(n)$ је дато у Табели 1.3. Ови бројеви чине низ A000041 у *Енциклопедији целобројних низова* [15].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

Табела 1.3: Број партиција $p(n)$ природног броја n.

До ових вредности можемо доћи коришћењем претходно дате формуле или простим пребројавањем свих могућих партиција. Тако, за првих неколико вредности броја n имамо:

$$1, \qquad 2=1+1, \qquad 3=2+1=1+1+1,$$

$$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1.$$

Приметимо да је због овога $p_1(4)=1$, $p_2(4)=2$, $p_3(4)=1$ и $p_4(4)=1$.

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1,$$

$$\begin{aligned} 6 &= 5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=3+1+1+1 \\ &= 2+2+2=2+2+1+1=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Ове партиције можемо записати и као $[6],[5\ 1],[4\ 2],[4\ 1^2],[3^2],[3\ 2\ 1],[3\ 1^3],[2^3],[2^2\ 1^2],[2\ 1^4],[1^6]$.

$$\begin{aligned} 7 &= 6+1=5+2=5+1+1=4+3=4+2+1=4+1+1+1 \\ &= 3+3+1=3+2+2=3+2+1+1=3+1+1+1+1 \\ &= 2+2+2+1=2+2+1+1+1=2+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Одавде је $p_1(7)=1$, $p_2(7)=3$, $p_3(7)=4$, $p_4(7)=3$, $p_5(7)=2$, $p_6(7)=1$ и $p_7(7)=1$.

Проверимо резултат $p_3(7)=4$ преко Теореме 1.8.1:

$$p_3(7)=p_3(4)+p_2(4)+p_1(4)=1+2+1=4.$$

Овде смо користили претходно добијене резултате за $p_3(4)$, $p_2(4)$ и $p_1(4)$. ■

Графичко представљање партиција први је открио Ферер. Оно је веома битно јер осликава неке важне особине партиција, а може се искористити и за доказивање неких тврђења везаних за партиције (доста илустрација можете видети у одељку „Идентитети са партицијама“ у [17]).

ДЕФИНИЦИЈА 1.8.2. Партиција π броја n представља се помоћу *Фереровог дијаграма* тако што се делови партиције поређају по величини (тј. у нерастући низ, почевши од највећег), а затим се сваки део представља одговарајућим бројем симбола — ми ћемо користити тачке $\bullet$.

Партицију можемо представити и преко *табле Ферера*, која у свакој врсти уместо тачака има јединичне квадратиће.

Другим речима, дијаграм Ферера партиције $\pi=[1^{\alpha_1}\ 2^{\alpha_2}\ \ldots\ k^{\alpha_k}]$ састоји се од α_k врста са по k тачака, α_{n-1} врста са $(n-1)$-ом тачком, $\ldots$, α_2 врста са 2 тачке и α_1 врста са по једном тачком.

Укупан број тачака у дијаграму Ферера једнак је броју n, од кога смо и правили партицију.

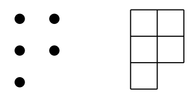
ПРИМЕР 1.8.2. Представити све партиције броја 5 на 3 сабирка преко дијаграма Ферера (односно преко табли Ферера).

Решење. Све партиције броја 5 на 3 сабирка су:

$$3+1+1 \qquad \text{и} \qquad 2+2+1.$$

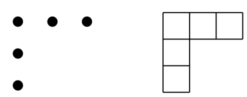
Приметимо да композиција броја 5 на 3 сабирка има укупно 6 и оне су дате у Примеру 1.8.3.

Представимо партицију $2+2+1$ преко дијаграма (табле) Ферера.



Слика 1.5: Дијаграм Ферера партиције $2+2+1$.

Али ако бисмо сада бројали колико тачака имамо по колонама, опет бисмо добили једну партицију броја 5 – то је $3+2$. Ова партиција је конјугована полазној партицији $2+2+1$.



Слика 1.6: Дијаграм Ферера самоконјуговане партиције $3+1+1$.

Овде је приказана самоконјугована партиција броја 5 – то је $3+1+1$. Ова партиција је самоконјугована јер и кад бројимо тачке по колонама опет добијамо $3+1+1$. ■

Више о партицијама можете погледати у [17], где им је посвећено цело једно поглавље.

Партицијама скупа нећемо се бавити, само ћемо их поменути код релација еквиваленције.

Композиције

ДЕФИНИЦИЈА 1.8.3. *Композиција* природног броја n на k сабирака представља било које решење $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ у скупу природних бројева једначине

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n. \tag{1.16}$$

Композиција се понекад назива и *уређена партиција* или *уређено разбијање* природног броја n. О броју композиција нам говоре и следећа два тврђења.

ТЕОРЕМА 1.8.2. Број решења једначине (1.16), тј. број композиција једнак је

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Доказ. Ова формула се најлакше показује комбинаторно.

Број n ћемо прво разбити на n јединица:

$$1\underline{\quad}1\underline{\quad}1\underline{\quad}\ldots\underline{\quad}1\underline{\quad}1\underline{\quad}1.$$

На сваку од $n-1$ цртица које се налазе између 1 можемо ставити знак $+$. Како треба да имамо k сабирака треба да ставимо $k-1$ знакова $+$, а то можемо учинити на $\binom{n-1}{k-1}$ начина. Када имамо m узастопних јединица оне ће представљати сабирак m. Такође, јединице које се налазе до првог знака $+$ представљаће први сабирак a_1; јединице које се налазе између првог и другог знака

+ представљаће сабирак a_2; ... ; јединице које се налазе после $(k-1)$-ог знака + представљаће последњи сабирак a_k. Стога и композиција има $\binom{n-1}{k-1}$. □

Директна последица овог тврђења је следеће којим одређујемо укупан број свих могућих композиција датог природног броја.

ТЕОРЕМА 1.8.3. Укупан број композиција броја n је једнак $c(n) = 2^{n-1}$.

Доказ. Природан број n можемо представити као 1 сабирак (то је само n), као 2 сабирка, ... , као n сабирака (то је само $1+1+\ldots+1$). Стога k у једначини (1.16) може узимати све вредности од 1 до n, па укупан број композиција представља суму $c(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$. □

ПРИМЕР 1.8.3. Одредити колико има композиција броја 5. Колико тих композиција има 1, 2, 3, 4, односно 5 сабирка?

Решење. Имамо $c(4) = 2^4 = 16$ композиција броја 5. Прикажимо их:

$$5;$$

$$1+4, \qquad 2+3, \qquad 3+2, \qquad 4+1;$$

$$1+1+3, \quad 1+2+2, \quad 1+3+1, \quad 2+1+2, \quad 2+2+1, \quad 3+1+1;$$

$$1+1+1+2, \quad 1+1+2+1, \quad 1+2+1+1, \quad 2+1+1+1;$$

$$1+1+1+1+1.$$

У првом реду је само 1 композиција броја 5 на 1 сабирак и то се слаже са резултатом Теореме 1.8.3: $\binom{5-1}{1-1} = \binom{4}{0} = 1$.

У другом реду претходног приказа имамо укупно $\binom{5-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$ композиције на 2 сабирка.

У трећем реду имамо $\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ композиција на 3 сабирка.

У четвртом реду су $\binom{5-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4$ композиције на 4 сабирка.

У петом реду је $\binom{5-1}{5-1} = \binom{4}{4} = 1$ композиција на 5 сабирака. ■

ТЕОРЕМА 1.8.4. Композиција броја n, код којих се сваки број $j \in \mathbb{N}_n$ јавља тачно α_j пута, при чему је $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \ldots + \alpha_n \cdot n = n$, има

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} = \binom{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}.$$

Доказ. Објекти које пребројавамо у овом тврђењу су пермутације са понављањем. На основу Леме 1.3.15 из [17] имамо да је њихов број једнак полиномном коефицијенту $\binom{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$. □

ПРИМЕР 1.8.4. Одредимо све композиције код којих су сабрици 1, 2, 2 и 5.

Решење. Све те композиције одговарају пермутацијама са понављањем бројева 1, 2, 2 и 5. Стога тих композиција укупно има $\binom{4}{1,2,1} = \dfrac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$:

$$\begin{array}{lll} 1+2+2+5, & 1+2+5+2, & 1+5+2+2 \\ 2+1+2+5, & 2+1+5+2, & 2+2+1+5 \\ 2+2+5+1, & 2+5+1+2, & 2+5+2+1 \\ 5+1+2+2, & 5+2+1+2, & 5+2+2+1. \end{array}$$

■

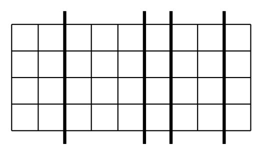
ТЕОРЕМА 1.8.5. Нека су $n_1, n_2, \ldots, n_k$ различити природни бројеви. Означимо број композиција природног броја n, код којих је сваки од сабирака једнак неком од бројева $n_1, n_2, \ldots, n_k$ са $c(n \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\})$. Тада важи једнакост

$$c(n \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}) = \sum_{j=1}^{k} c(n - n_j \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}),$$

где као почетне услове имамо $c(m \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } m < 0, \\ 1, & \text{ако је } m = 0. \end{cases}$ □

ПРИМЕР 1.8.5. Васпитачица је решила да подели чоколаду од 300 грама која има 9 редова од по 4 коцкице на следећи начин деци: ако дете није било добро не добија чоколаду, а ако је било добро добија 1, 2 или 3 реда (тј. комаде чоколаде димензија 1×4, 2×4 или 3×4). Прво дете добија $a_1 > 0$ редова, друго $a_2 > 0$ редова, итд. док не подели целу чоколаду. На колико начина то може учинити?

Решење. Једна деоба чоколаде је приказана на следећој слици.



Слика 1.7: Деоба чоколаде.

Овом приликом је васпитачица доделила првом детету 2 реда, другом 3 реда, трећем 1 ред, четвртом 2 реда, петом 1 ред, а остала нису добила чоколаду. Датој расподели одговара композиција

$$2+3+1+2+1.$$

Сада ћемо коришћењем претходне теореме одредити на колико начина васпитачица може поделити чоколаду. Композиције имају сабирке из скупа $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$, па имамо следећу рекурентну везу

$$c(n \mid \mathbb{N}_3) = c(n-1 \mid \mathbb{N}_3) + c(n-2 \mid \mathbb{N}_3) + c(n-3 \mid \mathbb{N}_3).$$

Сада ћемо одређивати $c(n \mid \mathbb{N}_3)$ за $n = 1, 2, \ldots, 9$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
c(1 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(0 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(-1 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(-2 \mid \mathbb{N}_3) &=& 1 &+& 0 &+& 0 &=& 1,\\
c(2 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(1 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(0 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(-1 \mid \mathbb{N}_3) &=& 1 &+& 1 &+& 0 &=& 2,\\
c(3 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(2 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(1 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(0 \mid \mathbb{N}_3) &=& 2 &+& 1 &+& 1 &=& 4,\\
c(4 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(3 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(2 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(1 \mid \mathbb{N}_3) &=& 4 &+& 2 &+& 1 &=& 7,\\
c(5 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(4 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(3 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(2 \mid \mathbb{N}_3) &=& 7 &+& 4 &+& 2 &=& 13,\\
c(6 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(5 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(4 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(3 \mid \mathbb{N}_3) &=& 13 &+& 7 &+& 4 &=& 24,\\
c(7 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(6 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(5 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(4 \mid \mathbb{N}_3) &=& 24 &+& 13 &+& 7 &=& 44,\\
c(8 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(7 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(6 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(5 \mid \mathbb{N}_3) &=& 44 &+& 24 &+& 13 &=& 81,\\
c(9 \mid \mathbb{N}_3) &=& c(8 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(7 \mid \mathbb{N}_3) &+& c(6 \mid \mathbb{N}_3) &=& 81 &+& 44 &+& 24 &=& 149.
\end{array}$$

Васпитачица деобу чоколаде може извршити на 149 различитих начина. ■

1.9 Резиме

У овој глави смо увели основне појмове из комбинаторике: принципе пребројавања и основне комбинаторне објекте.

У првом поглављу ове главе наводимо основне принципе пребројавања: Принцип једнакости, Принцип збира, Принцип производа, Дирихлеов принцип и Принцип укључења–искључења.

У другом поглављу смо се бавили уређеним изборима (варијацијама). Посебно смо разматрали варијације без понављања и варијације са понављањем.

У трећем поглављу детаљно изучили пермутације. Иако су оне посебан случај варијација, посветили смо им одвојено поглавље због изузетног значаја које имају. Посебну пажњу смо посветили циклусној декомпозицији пермутације, транспозицијама и знаку пермутације, који игра значајну улогу у строгој математичкој дефиницији појма детерминанте.

У четвртом поглављу смо се бавили неуређеним изборима (комбинацијама). Посебно смо разматрали комбинације без понављања и комбинације са понављањем.

У петом поглављу смо се бавили пермутацијама са понављањем. Дали смо везу пермутација са понављањем и комбинација.

У шестом поглављу смо навели велики број особина биномних коефицијената и подсетили се Паскаловог троугла и Биномне формуле. Научили смо и генерализацију, која се зове Полиномна формула и увели полиномне коефицијенте.

У седмом поглављу смо дали један илустративан пример који смо решили на 6 потпуно различитих начина.

У последњем, осмом поглављу разматрали смо композиције и партиције природног броја k на одређени број сабирака који су такође природни бројеви, тј. одредили смо број решења једначине

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

при чему су $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, као и неких сродних једначина.

Сва поглавља садрже велики број урађених примера, који могу значајно помоћи при спремању испита и из Дискретне математике, као и Вероватноће и статистике на другој години ВИШЕР-а.

1.10 Питања за проверу знања

1. Које основне комбинаторне принципе знаш?

2. Нацртај Веноове дијаграме (као на Слици 1.1) за 4 скупа.

3. У радњи постоји k различитих врста разгледница, које треба послати пријатељима, којих има n.
а) На колико начина је могуће сваком пријатељу послати тачно једну разгледницу?
б) Колико има начина ако сваком пријатељу треба послати различиту разгледницу?
в) Од сваке врсте разгледница је купљена тачно по једна. На колико начина је могуће послати разгледнице пријатељима (пријатељ може добити било који број разгледница, укључујући и 0)?

4. *I колоквијум из Вероватноће и статистике, ВИШЕР 2018.*
Дати су скупови $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

а) Колико се четвороцифрених бројева може добити од елемената скупа A?

б) Колико се парних петоцифрених бројева са различитим цифрама може добити од елемената скупа B?

5. Одредити број бинарних низова дужине n који садрже паран број нула (знакова 0).

6. Одредити број речи дужине n које се могу формирати од слова A, B, C, D и E, које садрже паран број слова A. (Речи не морају имати неко значење.)

7. Ако је $n \geqslant 2$, колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у којима су бројеви 1 и 2 суседни?

8. Колико пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ има само један циклус?

9. Написати циклусни запис за пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

10. Одредити ред пермутације $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

11. Напиши првих 8 редова Паскаловог троугла.

12. Која је разлика између варијација и комбинација? Чега има више?

13. Која је разлика између партиција и композиција? Чега има више?

14. На колико се начина може прочитати реченица

АНА ВОЛИ МИЛОВАНА

на приказаној шеми? (Реченица може да почне било којим словом А, а после сваког слова прелази се на њему суседно слово по хоризонтали или вертикали у било ком смеру у коме се реченица може наставити.)

А
АНА
АНАНА
АНАВАНА
АНАВОВАНА
АНАВОЛОВАНА
АНАВОЛИЛОВАНА
АНАВОЛИМИЛОВАНА
АНАВОЛИЛОВАНА
АНАВОЛОВАНА
АНАВОВАНА
АНАВАНА
АНАНА
АНА
А

15. Израчунати збир коефицијената полинома по x који представља развој израза $(3x-2)^{100}$.

16. Наћи коефицијент уз:

а) x^{10} у развоју израза $(1-x^2+x^3)^{11}$.

б) x^3 у развоју израза $(1-x+2x^2)^9$.

17. Распоредити следеће пермутације скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ у лексикографски редослед:

234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562,

432561, 654321, 654312, 435612.

18. Исписати све пермутације скупа $X_4 = \{A, E, M, T\}$ у лексикографском поретку (има их 24).

19. Одредити све варијације са понављањем од 2 елемента скупа $\{1, 2, 3, 4\}$ у лексикографском поретку.

20. Одредити број речи које се могу добити од слова

а) М, А, Т, Р, И, Ц, Е; **б)** Ј, Е, Д, Н, А, Ч, И, Н, А.

За сваку од те 2 речи одредити која је по реду међу свим речима од тих слова које су дате у лексикографском поретку.

21. Одредити **а)** 28-му; **б)** 75-ту; **в)** 100-ту пермутацију скупа $\{a, b, c, d, e\}$.

22. Одредити за сваку пермутацију која је по реду, као и која јој претходи и која следи након ње у лексикографском редоследу:

а) 1342; **б)** 45321; **в)** 13245; **г)** 654321; **д)** 23587416.

23. Одредити све варијације од 3 елемента скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

24. *Пријемни испит за ФОН 2023.*
По шаховској табли креће се топ. Он полази из доњег левог угла табле и креће се, једно по једно поље, по најкраћем путу до горњег десног угла табле. Колико постоји најкраћих путева?

25. Нека је $S = \{a, b, c, d, e\}$. Одредити за сваку комбинацију која јој претходи и која следи након ње у алгоритму који генерише све комбинације скупа S:

а) $\{a, c, d\}$; **б)** $\{a, c, d, e\}$; **в)** $\{a, d, e\}$; **г)** $\{a\}$; **д)** $\{b, e\}$.

26. Нека је $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пронаћи следеће 3 комбинације у алгоритму који генерише све комбинације скупа S након:

а) $\{1, 5, 6\}$; **б)** $\{1, 2, 4, 6\}$; **в)** $\{1, 3, 6\}$; **г)** $\{4\}$; **д)** $\{2, 3, 4, 6\}$.

27. Наћи следеће 4 комбинације у лексикографском редоследу од 4 елемента скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ након комбинације $\{1, 2, 5, 6\}$.

28. Генерисати све подскупове скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ са 3 елемента.

29. Генерисати све подскупове скупа $\{a, b, c, d, e, f\}$ са 5 елемената.

30. Одредити **а)** 28-му; **б)** 75-ту; **в)** 100-ту комбинацију са 4 елемента скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

31. Чему је једнака сума свих биномних коефицијената у биномном развоју $(a + b)^n$?

32. Чему је једнака сума свих полиномних коефицијената у полиномном развоју $(a + b + c)^n$?

33. Колико чланова има у полиномном развоју $(a + b + c + d)^{15}$?

34. Које су разлике између партиција и композиција броја n? Чега има више?

2. Математичка логика

2.1 Искази

Постоје две истинитосне вредности (константе):

тачно у ознаци 1 (или $\top$)
нетачно у ознаци 0 (или $\perp$)

(ознаке $\top$ и $\perp$, које се читају „те“ и „не–те“, односно тачно и нетачно, су се раније користиле уместо 1 и 0, али ознаке 1 и 0 су много примереније ери рачунара, а и визуелно се много боље разликују).

ДЕФИНИЦИЈА 2.1.1. *Исказ* је било која смислена категорична реченица за коју се може утврдити да ли је тачна или нетачна (истинита или неистинита).

Исказе означавамо малим латиничним словима: $p, q, r, s, \ldots, a, b, c, d\ldots$

Вредност исказа можемо обележавати на два начина:

Први начин: $\tau(p) = 1$ (када је исказ p тачан) или $\tau(p) = 0$ (када је исказ p нетачан)
τ је грчко слово и чита се „тау“.

Други начин: $p = 1$ или $p = 0$ (овде додељујемо вредност као код бројева)

ПРИМЕР 2.1.1. Утврдити које од следећих реченица су искази (и ако јесу искази њихову истинитосну вредност):

- „Река Ибар протиче кроз Краљево.“
- „Крушевац је највећи град у Европи.“
- „Фрушка гора је највиша планина у Војводини.“
- „Збир углова у троуглу је једнак $180°$.“
- „Ако су p и $11p - 7$ прости бројеви, онда је $2^p + 7$ сложен.“
- „Данас је леп дан.“
- „Коцка певајмо плаво нисам како.“
- „Колико је сати?“
- „Ова реченица није истинита.“

Решење. Првих 5 реченица су искази. Од тога су прва, четврта и пета тачне (за прву се можете уверити ако мало прошетате након наставе, четврта је познато тврђење из геометрије[2], а на пету ћемо се осврнути мало касније), док друга и трећа нису (Крушевац је мањи од Београда, те није највећи град у Србији, па самим тим ни у Европи; У Војводини постоје 2 планине од којих је Фрушка гора друга по висини – највиша је Вршачки брег).

Објаснимо зашто остале 4 реченице нису искази.

„Данас је леп дан.“ Не можемо утврдити истинитосну вредност ове реченице, јер је то субјективно осећање (ма колико много нас се сложило да је данас леп дан, можда неком није јер му не одговара повишенији атмосферски притисак, или је легао у 6 и устао у 8 па му ништа не одговара, или оно

[2] Напоменимо да је ово тврђење тачно само у Еуклидској геометрији (то је она геометрија на коју смо навикли!), док у неким другим геометријама попут Риманове геометрије и геометрије Лобачевског не важи!

што је нама леп топао дан није и неком из Сибира коме је тад претопло...).

„Коцка певајмо плаво нисам како." Ова реченица уопште није смислена.

„Колико је сати?" Ова реченица је упитна, па није категорична (тј. не тврди ништа).

„Ова реченица није истинита." Ако би ова реченица била истинита онда би то значило и да она није истинита, али немогуће је да је она истовремено и истинита и неистинита. Ако би ова реченица била неистинита онда би то значило да није тачно да она није истинита, тј. она би била истинита, али немогуће је да је она истовремено и неистинита и истинита. Како ова реченица не може бити ни истинита ни неистинита, она није исказ. ■

Осврнимо се у наредном примеру на неке математичке реченице.

ПРИМЕР 2.1.2. Утврдити које од следећих реченица су искази (и ако јесу искази њихову истинитосну вредност):

p: „8 је сложен број."

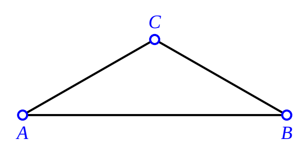
q: „144 је потпун квадрат."

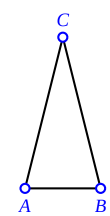
r: „Катета је већа од хипотенузе."

s: „$x + 2 > 0$."

t: „Основица једнакокраког троугла је већа од крака."

Решење. Прве 3 реченице су искази, а преостале 2 нису.
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $\tau(p) = 1$.
$144 = 12^2$ и $\tau(q) = 1$.
$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 < c^2 \Rightarrow a < c$, па је $\tau(r) = 0$.
Постоје реченице које немају тачно одређену истинитосну вредност – то су s и t:
$\tau(s)$ зависи од вредности x и без додатних претпоставки нема истинитосну вредност, па није исказ!





$\tau(t)$ зависи од тога какав је троугао (за онај са слике лево би било тачно, а за онај са слике десно би било нетачно), па опет није исказ. ■

2.2 Логичке операције

Логичке операције се дефинишу над скупом $V = \{0, 1\}$.

Унарне операције се дефинишу над једним операндом, док се *бинарне операције* дефинишу над два операнда.

ПРИМЕР 2.2.1. Да ли знате неку унарну операцију над бројевима?

Решење. *Промена знака* или *супротан број*: $-x$
Апсолутна вредност броја: $|x|$
Реципрочна вредност броја: $\dfrac{1}{x}$
Корен: $\sqrt{x}$
Факторијел: $n!$ ■

Од једноставнијих исказа можемо правити сложеније коришћењем *логичких операција* (*исказних операција*). Сада ћемо навести најважније од њих и то прво *њихово име*, затим ознаку и на крају како се може читати тако добијена реченица.

- *негација* $\neg p$ „није p“, „не p“;
- *конјункција* $p \wedge q$ „p и q“;
- *дисјункција* $p \vee q$ „p или q“;
- *ексклузивна дисјункција* $p \veebar q$ „или p или q“;
- *импликација* $p \Rightarrow q$ „из p следи q“, „ако p онда q“, „p је довољан услов за q“, „q је потребан услов за p“, „q је неопходан услов за p“, „p је претпоставка, а q је последица (закључак)“;
- *еквиваленција* $p \Leftrightarrow q$ „p је еквивалентно са q“, „ако и само ако p онда q“, „p је и потребан и довољан услов за q“.

Сада ћемо навести таблице истинитости за сваку од ових операција.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Напоменимо да је овде негација једина унарна операција, док су остале бинарне. Међу претходно наведеним бинарним операцијама, само импликација није симетрична операција (тј. за њу не важи $p * q = q * p$).

Сада ћемо одредити чему су једнаке основне бинарне операције када је неки од операнада једнаки 0 или 1 (то ћемо користити приликом попуњавања таблица при испитивању таутологија). За симетричне операције ћемо ставити симетричне изразе у заграде, док ћемо за импликацију навести све случајеве (ту имамо 4 различита случаја).

Ове формуле налазе примену у методи „дискусије по слову“ за испитивање да ли је формула таутологија, као и у предикатском рачуну.

ТЕОРЕМА 2.2.1.

- *конјункција*: $0 \wedge q = 0$, $1 \wedge q = q$, $(p \wedge 0 = 0$, $p \wedge 1 = p)$.
- *дисјункција*: $0 \vee q = q$, $1 \vee q = 1$, $(p \vee 0 = p$, $p \vee 1 = 1)$.
- *ексклузивна дисјункција*: $0 \veebar q = q$, $1 \veebar q = \neg q$, $(p \veebar 0 = p$, $p \veebar 1 = \neg p)$.
- *импликација*: $0 \Rightarrow q = 1$, $1 \Rightarrow q = q$, $p \Rightarrow 0 = \neg p$, $p \Rightarrow 1 = 1$.
- *еквиваленција*: $0 \Leftrightarrow q = \neg q$, $1 \Leftrightarrow q = q$, $(p \Leftrightarrow 0 = \neg p$, $p \Leftrightarrow 1 = p)$. □

Наведимо приорипитет ових операција у редоследу од већег приоритета ка мањем:

- (изрази унутар заграда)
- *негација* $\neg$
- *дисјункција* $\vee$ или *конјункција* $\wedge$
- *импликација* $\Rightarrow$, *еквиваленција* $\Leftrightarrow$ или *ексклузивна дисјункција* $\veebar$

уколико операције имају исти приоритет онда иду редом (према редоследу појављивања).

Осврнимо се на везу скупова решења једначина и/или неједначина са потребним и довољним условом код импликације.

> Код задатака са потребним и довољним условом, често имамо два скупа A и B који су решења одговарајућих једначина (или неједначина) a и b. Тада:
>
> - ако $A \subset B$ онда је a довољан услов за b;
> - ако $A \supset B$ (тј. $B \subset A$) онда је a потребан услов за b;
> - ако $A = B$ онда је a и потребан и довољан услов за b;
> - ако $A \not\subset B$ и $A \not\supset B$ онда a није ни потребан ни довољан услов за b.

ПРИМЕР 2.2.2. Услов $x = 3$ је за услов $x^2 - 8x + 15 = 0$:

А) (само) довољан; **Б)** потребан и довољан; **Ц)** (само) потребан; **Д)** ни потребан, ни довољан.

Решење. Како је $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5) = 0$, услови $x = 3$ и $x^2 - 8x + 15 = 0$ се своде на услове $x \in \{3\}$ и $x \in \{3, 5\}$. Како је $A = \{3\} \subset B = \{3, 5\}$, према горњој дискусији, добијамо да је услов $x = 3$ за услов $x^2 - 8x + 15 = 0$ (само) довољан. ■

2.3 Логичке формуле

Комбиновањем коначног броја исказних слова (исказних промењљивих), симбола 0 и 1, заграда и исказних операција добијамо *логичку формулу* (*исказну формулу*). Сада ћемо то формално дефинисати.

ДЕФИНИЦИЈА 2.3.1. (*Логичка формула*)
1. Логичке константе су логичке формуле.
2. Логички искази су логичке формуле.
3. Ако су A и B логичке формуле, онда су и (A), $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \Rightarrow B$ и $A \Leftrightarrow B$ логичке формуле.
4. Логичке формуле се добијају само коначном применом правила 1, 2 и 3.

Вратимо се сада на један исказ из Примера 2.1.1 за који нисмо одређивали истинитосну вредност.

ПРИМЕР 2.3.1. Одредити истинитосну вредност исказа „Ако су p и $11p - 7$ прости бројеви, онда је $2^p + 7$ сложен.“

Решење. Овај исказ је тачан.

Ова формула је облика $L \Rightarrow D$. Лева страна L никада није тачна (ако је $p = 2$, онда је $11p - 7 = 15 = 3 \cdot 5$ сложен; а ако је прост број $p \geqslant 3$, онда је p непаран, па је $11p$ непаран, односно $11p - 7$ је паран број већи од 2, те је он сложен), па имамо формулу облика $0 \Rightarrow D$ која је увек тачна. ■

Желимо нагласити да се логичке формуле добијају само задатом (дефинисаном) процедуром (алгоритмом), а не на неки други начин. Ако нисте сигурни да ли је нешто логичка формула, онда је потребно наћи „извођење“ које се заснива на примени правила 1, 2, 3.
У зависности какве вредности имају логички искази или константе у логичкој формули после израчунавања добиће се истинитосна вредност формуле. Она не мора бити увек иста, тако да логичка формула не мора бити исказ.

ПРИМЕР 2.3.2. Нека је F: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
а) Да ли је ово логичка формула?
б) Какве су истинитосне вредности формуле у зависности од исказа p, q и r?

Решење. **а)** Ако су p, q и r искази онда су и логичке формуле (правило 2)
На основу правила 3 следи да су $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow r$ и $p \Rightarrow q$ логичке формуле.
Поново користимо правило 3 на $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow r$ и добијамо да је $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ логичка формула.
На крају $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ је логичка формула применом правила 3.

б) За сваки од три исказа p, q, r имамо две могућности за истинитосну вредност 1 и 0. Укупно је $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ могућности.
Један од начина је да се направи таблица.

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Φ
1	1	1	$(1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 1) = 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$	1
1	1	0	$(1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 1 \wedge 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$	1
1	0	1	$(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 1) = 0 \wedge 1 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow 1 = 1$	1
1	0	0	$(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 0 \wedge 1 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$	1
0	1	1	$(0 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 1) = 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$	1
0	1	0	$(0 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow (0 \Rightarrow 0) = 1 \wedge 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow 1 = 1$	1
0	0	1	$(0 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 1) = 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$	1
0	0	0	$(0 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0) \Rightarrow (0 \Rightarrow 0) = 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$	1

Проблеми код оваквог записа су што се лако дешавају грешке. Грешке се тешко исправљају јер је непрегледан запис. Због непрегледног записа често се дешавају грешке у приоритету операција. Због тога је боље формулу поделити у таблици на мање целине.

					L	D	F
p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$L \Rightarrow D$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

У оваквом начину рада може да се ради или по хоризонталама или по вертикалама. Ако се ради по вертикалама онда сте сконцентрисани само на једну логичку формулу и само пазите на вредности које мења. Када се ради по хоризонталама практично ради се као и у претходном начину таблице само што има међурезултате.
Када се ради по вертикалама могу да се користе особине логичких операција (са стране 49) за брже рачунање. У конкретном случају можемо да искоритимо следеће особине.

ФОРМУЛА	ЗАМЕНА
$1 \Rightarrow q$	q
$0 \Rightarrow q$	1
$p \Rightarrow 1$	1
$p \Rightarrow 0$	$\neg p$

Тако да практично рачунамо по пола колоне одједанпут. ■

Ако погледамо крајње истинитосне вредности формуле F долазимо до закључка да је ова формула увек тачна. Такве формуле су изузетно важне и њима ћемо се бавити на наредним странама.

2.4 Таутологије

Логичке формуле које су увек тачне зову се таутологије.

ДЕФИНИЦИЈА 2.4.1. Исказна формула која је за све вредности исказних променљивих тачна назива се *таутологија*, а исказна формула која је увек нетачна назива се *контрадикција*.

Наведимо неке таутологије (заједно са њиховим називима) које се често користе.

назив	формула
закон искључења трећег	$p \vee \neg p$
закон двоструке негације	$\neg\neg p \;\Leftrightarrow\; p$
закон непротивречности	$\neg(p \wedge \neg p)$
закон рефлексивности за импликацију	$p \;\Rightarrow\; p$
закон уклањања импликације	$(p \;\Rightarrow\; q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$
закон контрапозиције	$(p \;\Rightarrow\; q) \;\Leftrightarrow\; (\neg q \;\Rightarrow\; \neg p)$
закон транзитивности за импликацију	$(p \;\Rightarrow\; q) \wedge (q \;\Rightarrow\; r) \;\Rightarrow\; (p \;\Rightarrow\; r)$
закон уклањања еквиваленције	$(p \;\Leftrightarrow\; q) \;\Leftrightarrow\; (p \;\Rightarrow\; q) \wedge (q \;\Rightarrow\; p)$
закон транзитивности за еквиваленцију	$(p \;\Leftrightarrow\; q) \wedge (q \;\Leftrightarrow\; r) \;\Rightarrow\; (p \;\Leftrightarrow\; r)$
закон свођења на апсурд	$\big(\neg p \;\Rightarrow\; (q \wedge \neg q)\big) \;\Rightarrow\; p$
закони идемпотентности	$p \wedge p \;\Leftrightarrow\; p, \qquad p \vee p \;\Leftrightarrow\; p$
закони комутативности	$p \wedge q \;\Leftrightarrow\; q \wedge p, \qquad p \vee q \;\Leftrightarrow\; q \vee p,$ $(p \;\Leftrightarrow\; q) \;\Leftrightarrow\; (q \;\Leftrightarrow\; p), \qquad (p \veebar q) \;\Leftrightarrow\; (q \veebar p)$
закони асоцијативности	$p \wedge (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \wedge r, \qquad p \vee (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \vee r$
закони апсорптивности	$p \wedge (p \vee q) \;\Leftrightarrow\; p, \qquad p \vee (p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; p$
закон дистрибутивности $\wedge$ према $\vee$	$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
закон дистрибутивности $\vee$ према $\wedge$	$p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Де Морганови закони	$\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q, \qquad \neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$
modus ponens	$\big(p \wedge (p \;\Rightarrow\; q)\big) \;\Rightarrow\; q$
modus tollens	$\big((p \;\Rightarrow\; q) \wedge \neg q\big) \;\Rightarrow\; \neg p$
закони сажимања	$p \wedge (\neg p \vee q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge q, \qquad p \vee (\neg p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; p \vee q,$ $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \;\Leftrightarrow\; 0, \qquad (p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; 1,$ $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q) \;\Leftrightarrow\; 1, \qquad (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; 0,$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; p, \qquad (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \;\Leftrightarrow\; p,$ $(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r),$ $(p \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \;\Leftrightarrow\; (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$

Да ли је нека формула таутологија (контрадикција) или није можемо испитати неким од следећих начина:

- помоћу таблице истинитости;
- коришћењем познатих таутологија;
- супротном претпоставком (свођењем на апсурд);
- дискусијом по слову.

Посветимо се помало сваком од ових метода.

При попуњавању *таблице истинитости* користимо правила која смо навели на страни 49. Уколико у последњој колони (тј. оној која одговара датој формули) добијемо све 1, онда је дата формула таутологија, а ако добијемо све 0, онда је контрадикција (у свим осталим случајевима није ни таутологија ни контрадикција). Таблице истинитости су погодне, не само зато што их ученици најбоље користе од свих метода, него зато што се лако могу искористити и за добијање нормалних форми (видети последње поглавље).

При *коришћењу познатих таутологија* можемо искористити неке од таутологија са претходних страна и неко од исказних слова (p, q, r) заменити сложенијим исказним изразима да би добили дату формулу. Тиме смо показали да је и дата формула таутологија. За показивање да је нека формула контрадикција, можемо користити опет исти списак таутологија, јер је негација сваке таутологије једна контрадикција.

Метода *супротном претпоставком (свођењем на апсурд)* се састоји од тога да претпоставимо да дата формула није увек тачна. Уколико полазећи од те претпоставке добијемо неку контрадикцију (тј. апсурд), онда полазна претпоставка да формула није увек тачна није добра, чиме смо показали да је дата формула таутологија. Уколико не добијемо контрадикцију, него расуђивањем дођемо до вредности основних исказних променљивих за које дата формула није тачна, тиме смо показали да она није таутологија. Малом модификацијом ове методе можемо испитати и да ли је нека формула контрадикција: само ћемо претпоставити да формула није увек нетачна и ако добијемо контрадикцију тиме смо показали да је она контрадикција, иначе она није контрадикција.

Метода *дискусије по слову* се састоји да редом идемо по случајевима када је нека исказна променљива једнака 0, односно 1. Најчешће се прво замењују вредности променљиве која се највише пута јавља у датој формули. Када заменимо да је нека исказна променљива једнака 0 (а после и да је 1) добијамо једноставније формуле у којима се та исказна променљива не јавља. Затим за новодобијену формулу можемо поново применити методу дискусије по слову (или неку другу методу) да би испитали да ли је она таутологија (или контрадикција) или није. Уколико смо у свим случајевима (са одговарајућим подслучајевима) добили да је формула увек тачна, онда је она таутологија, а уколико постоји случај у коме није тачна, онда она није таутологија. Слично, уколико смо у свим случајевима (са одговарајућим подслучајевима) добили да је формула увек нетачна, онда је она контрадикција, а уколико постоји случај у коме је тачна, онда она није контадикција.

ПРИМЕР 2.4.1. *Општинско такмичење 2014/15. за I разред Б категорије*

Испитати да ли је формула $\big(\neg r \Rightarrow p \vee q\big) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$ таутологија.

Решење 1 (помоћу таблице истинитости).

					L	D	
p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$\neg r \Rightarrow p \vee q$	$p \vee q \vee r$	$L \Leftrightarrow D$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

Како смо добили све 1 у последњој колони која одговара датој исказној формули, то је она таутологија.

■

Решење 2 (коришћењем познатих таутологија).

Ако применимо закон уклањања импликације, $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg(a \vee b)$, при чему смо ставили да је $a = \neg r$ и $b = p \vee q$ добијамо да је

$$(\neg r \Rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg\neg r \vee (p \vee q)).$$

На основу закона двојне негације имамо $\neg\neg r = r$, што даје $(\neg r \Rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow (r \vee (p \vee q))$. Даље на основу закона комутативности операције $\vee$, тј. $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ ако ставимо $a = r$ и $b = (p \vee q)$ добијамо $(\neg r \Rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$.

Сада заграде око $p \vee q$ можемо да изоставимо на левој страни еквиваленције због приоритета операција ($\Rightarrow$ има мањи приоритет од $\vee$), а на десној страни еквиваленције због асоцијативности операције $\vee$, тј. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$, те добијамо дату формулу: $\big(\neg r \Rightarrow p \vee q\big) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$.

Како смо у горњим разматрањима кренули од таутологије и користили таутологије, добијамо и да је дата формула таутологија. ■

Решење 3 (супротном претпоставком, тј. свођењем на апсурд).

Претпоставимо да дата формула није увек тачна. То је могуће само у једном од два случаја: 1° $v(L) = 1$ и $v(D) = 0$; 2° $v(L) = 0$ и $v(D) = 1$(L означава леву страну еквиваленције, а D десну). Размотримо сваки од ових случајева понаособ.

1° $\underline{v(L) = 1 \text{ и } v(D) = 0}$. Ако је $v(D) = 0$, то значи да је $v(p \vee q \vee r) = 0$, што је могуће само када је $v(p) = 0$, $v(q) = 0$ и $v(r) = 0$. Али тада је лева страна $v(\neg 0 \Rightarrow 0 \vee 0) = v(1 \Rightarrow 0) = 0$, што даје контрадикцију са $v(L) = 1$.

2° $\underline{v(L) = 0 \text{ и } v(D) = 1}$. Ако је $v(L) = 0$, то значи да је $v(\neg r \Rightarrow p \vee q) = 0$, што је могуће само када је $v(\neg r) = 1$ и $v(p \vee q) = 0$, тј. када је $v(r) = 0$ и $v(p \vee q) = 0$. Али тада је десна страна $v(0 \vee 0) == 0$, што даје контрадикцију са $v(D) = 1$.

Како смо у оба случаја дошли до апсурда, то је погрешна претпоставка да дата формула није увек тачна. Тиме смо показали да је она таутологија. ■

Решење 4 (дискусијом по слову).

Како се сва 3 слова (p, q и r) јављају по 2 пута можемо узети било које. Мало погодније је r (јер је у импликацији на левој страни еквиваленције оно само), тако да ћемо кренути од њега.

- $\underline{v(r) = 1}$ формула постаје $\big(\neg 1 \Rightarrow p \vee q\big) \Leftrightarrow (p \vee q \vee 1)$, тј. $\big(0 \Rightarrow p \vee q\big) \Leftrightarrow 1$, тј. $1 \Leftrightarrow 1$, што је увек тачно, па добијамо да је у овом слуцјају формула тачна.
- $\underline{v(r) = 0}$ формула постаје $\big(\neg 0 \Rightarrow p \vee q\big) \Leftrightarrow (p \vee q \vee 0)$, тј. $\big(1 \Rightarrow p \vee q\big) \Leftrightarrow (p \vee q)$, тј. $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$, што је увек тачно, па добијамо да је и у овом слуцјају формула тачна.

Како је формула тачна у оба случаја, добијамо да је она таутологија. ■

Решење 5 (званично решење на такмичењу; оно је мала модификација дискусије по слову).

Доказаћемо да обе стране посматране еквиваленције имају исту вредност за ма какве вредности исказних слова p, q и r. Уколико слово r има вредност 1, десна страна еквиваленције има вредност 1, а вредност леве стране је вредност импликације облика $0 \Rightarrow$ *нешто*, па је и вредност леве стране једнака 1. Даље, уколико неко од слова p или q има вредност 1, десна страна еквиваленције има вредност 1, а вредност леве стране је вредност импликације облика *нешто* $\Rightarrow 1$, па је и вредност леве стране једнака 1. Најзад, уколико сва три посматрана слова имају вредност 0, тада десна страна еквиваленције има вредност 0, а лева страна има вредност $\neg 0 \Rightarrow 0 \vee 0$, тј. $1 \Rightarrow 0$, што је 0. Овим је доказ да је дата формула таутологија завршен. ■

ПРИМЕР 2.4.2. Доказати: Ако број није дељив са 3 онда није дељив ни са 6.

Решење. Исказ p: Број није дељив са 3.
Исказ q: Број није дељив са 6.
Потребно је доказати импликацију $p \Rightarrow q$
Користићемо таутологију која се зове закон контрапозиције:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Ова таутологија каже да уместо доказивања имликације $p \Rightarrow q$ можемо доказати $\neg q \Rightarrow \neg p$ и та два доказа су еквивалентна.
Исказ $\neg p$: Број је дељив са 3.
Исказ $\neg q$: Број је дељив са 6.
Доказујемо $\neg q \Rightarrow \neg p$. Обележимо број са n. Број n је дељив са 6.
Дефиниција дељивости бројева: Цео број a дели цео број b ако постоји цео број c тако да важи да је $b = a \cdot c$.
На основу дефиниције дељивости два броја следи $n = 6 \cdot k = (3 \cdot 2) \cdot k = 3 \cdot (2 \cdot k)$.
Значи број n је дељив и са 3.
На овај начин смо доказали да важи импликација $\neg q \Rightarrow \neg p$.
Користећи закон контрапозиције следи да важи и $p \Rightarrow q$, односно: „Ако број није дељив са 3, онда није дељив ни са 6.“ ■

ПРИМЕР 2.4.3. Доказати да је логичка формула $F : (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (модус поненс) таутологија.

Решење 1 (помоћу таблице истинитости).

p	q	$p \Rightarrow q$	L $p \wedge (p \Rightarrow q)$	F $L \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Како смо у последњој колони добили све 1, дата формула је таутологија. ■

Решење 2 (Дискусија по слову).
Уобичајено је да се узме слово које се највише пута јавља у формули. Некада је добар избор да се узме слово које је са једне стране операције која се примењује. У овом примеру је то слово q. Определимо се да дискутујемо по вредности исказног слова q.
1° $\tau(q) = 1$:
Заменимо вредност $q = 1$ у логичку формулу и добијамо $(p \wedge (p \Rightarrow 1)) \Rightarrow 1$.
Последња операција која се израчуна је импликација која на десној страни има вредност 1.
Долазимо до закључка да је истинитосна вредност импликације 1.
Када је $\tau(q) = 1$ вредност формуле је 1.

2° $\tau(q) = 0$:
Заменимо вредност $q = 0$ у логичку формулу и добијамо $(p \wedge (p \Rightarrow 0)) \Rightarrow 0$.
Ако погледамо део формуле $p \Rightarrow 0$ можемо да закључимо да је вредност овог дела формуле $\neg p$.

Заменимо $p \Rightarrow 0$ са $\neg p$ у логичкој формули и добијамо $(p \wedge \neg p) \Rightarrow 0$. Њена вредност је 0.
Коначно формулу смо свели на формулу $0 \Rightarrow 0$. Њена вредност је 1.
Када је $\tau(q) = 0$ вредност формуле је 1.

Коначан закључак је да је формула таутологија. ■

Уместо да правимо таблицу и да рачунамо 4 случаја ми смо рачунали вредност 2 случаја.

Ако поново прегледамо поступак задатка схватићемо да је потребно знати како се ради са логичким операцијама када знамо истинитосну вредност једног од слова. То може убрзати рад.

У наставку ћемо поново навести правила са стране 49 којима смо придодали још нека правила која се често појављују у таблицама.

ФОРМУЛА	СИМЕТРИЧНА ФОРМУЛА	ЗАМЕНА
$p \wedge p$	$p \wedge p$	p
$p \wedge 0$	$0 \wedge p$	0
$p \wedge 1$	$1 \wedge p$	p
$p \vee p$	$p \vee p$	p
$p \vee 0$	$0 \vee p$	p
$p \vee 1$	$1 \vee p$	1
$p \veebar p$	$p \veebar p$	0
$p \veebar 0$	$0 \veebar p$	p
$p \veebar 1$	$1 \veebar p$	$\neg p$
$p \Rightarrow p$	$p \Rightarrow p$	1
$p \Rightarrow 0$		$\neg p$
$p \Rightarrow 1$		1
$0 \Rightarrow p$		1
$1 \Rightarrow p$		p
$p \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow p$	1
$p \Leftrightarrow 0$	$0 \Leftrightarrow p$	$\neg p$
$p \Leftrightarrow 1$	$1 \Leftrightarrow p$	p

Правила из таблице се могу применити и када уместо слова p стоје читаве формуле.

Решење 3 (свођење на противуречност).
Овај метод се заснива на томе да се претпостави да је формула нетачна и да се доведе до контрадикције и добар је када постоји један случај када је формула нетачна (импликација, дисјункција).
Претпоставимо да је $\tau((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q) = 0$.
Први исказ мора бити у импликацији тачан, а други исказ мора бити нетачан:
$\tau(p \wedge (p \Rightarrow q)) = 1 \quad \wedge \quad \tau(q) = 0$.
Имамо истинитосну вредност исказа q, $q = 0$, и заменимо га у формулу. Добијамо:
$\tau(p \wedge (p \Rightarrow 0)) = 1 \quad \wedge \quad \tau(q) = 0$.
Коњукција је тачна када су оба исказа тачна.
Добијамо: $\tau(p) = 1 \quad \wedge \quad \tau(p \Rightarrow 0) = 1 \quad \wedge \quad \tau(q) = 0$.
Коначном заменом вредности исказа p, $p = 1$, добијамо: $\tau(p) = 1 \ \wedge \ \tau(1 \Rightarrow 0) = 1 \qquad \tau(q) = 0$.
Ово доводи до контрадикције јер $\tau(1 \Rightarrow 0) = 1$ није тачно.
Значи полазна формула је тачна, тј. важи $\tau((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q) = 1$. ■

ПРИМЕР 2.4.4. Доказати да је логичка формула

$$F : (p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge ... \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_n)$$

таутологија.

Решење. Таблица би била велика, па нам остају преостале методе: супротна претпоставка или дискусија по слову. Пробајмо метод супротне претпоставке.
Претпоставимо супротно нека важи $\tau(F) = 1$.
На основу приоритета операција одредимо логичку операцијау која се последња израчунава. Ако погледамо формулу F прво се израчунавају импликације у заградама, затим конјункције и на крају импикација.

$$L : (p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge ... \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \qquad \text{и} \qquad D : p_1 \Rightarrow p_n$$

Импликација је нетачна ако $1 \Rightarrow 0$.
Потребно је да $\tau(L) = 1$ и $\tau(D) = 0$.
Из $\tau(D) = 0$ добијамо да је $\tau(p_1 \Rightarrow p_n) = 0$, односно важи $\tau(p_1) = 1$ и $\tau(p_n) = 0$.
Како је L по структури конјункција и $\tau(L) = 1$ следи да је сваки члан конјункције тачан:

$$\begin{gathered} \tau(p_1 \Rightarrow p_2) = 1 \\ \tau(p_2 \Rightarrow p_3) = 1 \\ \tau(p_3 \Rightarrow p_4) = 1 \\ \vdots \\ \tau(p_{n-1} \Rightarrow p_n) = 1 \end{gathered} .$$

Искористимо већ познате логичке вредности за p_1 и p_n, $p_1 = 1$ и $p_n = 0$. Заменом у прву импликацију добијамо:
$\tau(1 \Rightarrow p_2) = 1$. Одавде следи да је $\tau(p_2) = 1$.
Поновимо поступак у другој импликацији $\tau(p_2 \Rightarrow p_3) = 1$:
добијамо $\tau(1 \Rightarrow p_3) = 1$ и закључујемо да је $\tau(p_3) = 1$.
Понављањем поступка долазимо до последње импликације $\tau(p_{n-1} \Rightarrow p_n) = 1$.
Како смо претходним поступком добили $\tau(1 \Rightarrow p_{n-1}) = 1$, одакле је $\tau(p_{n-1}) = 1$, заменом добијамо:
$\tau(1 \Rightarrow 0) = 1$, што је контрадикција.
Стога је полазна формула F таутологија. ■

2.5 Булове функције и нормалне форме

Колико има унарних логичких операција? Колико има бинарних логичких операција?

Негација је једина унарна операција коју смо радили. Њена таблица истинитости је:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Унарна логичка операција има само једно логичко слово које може имати једну од две логичке вредности 0 или 1. Због тога у њеној таблици имамо два реда.

Резултат који је у десној колони може имати једну од две логичке вредности 0 или 1. Због тога сваки ред може да узме једну од две вредности.
Два реда пресликавамо у две вредности, односно $2 \cdot 2 = 4$ могућности – толико има унарних операција.

ДЕФИНИЦИЈА 2.5.1. *Булова функција* са n промељивих је пресликавање $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Уопштено, Булова функција $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ се може схватити као n-арна операција у скупу $\{0,1\}$. Број различитих Булових функција $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ једнак је 2^{2^n}.

Сада ћемо разматрати Булове функције са једном промењивом.

p	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

За сваку од унарних функција ћемо дати формулу, као и њено име:

$\varphi_0(p) = 0$ нула-функција
$\varphi_1(p) = p$ промењива p (као и идентична функција; директна функција)
$\varphi_2(p) = \neg p$ негација p (као и комплементарна функција; индиректна функција)
$\varphi_3(p) = \neg 0 = 1$ један-функција

Имамо 2 слова и свако слово има 2 могућности тако да има укупно $2 \cdot 2 = 4$ реда.
Резултат може имати једну од две логичке вредности (0 или 1). Због тога сваки ред може да узме једну од две вредности.
Добијамо да има $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ могућности, односно 16 бинарних логичких операција:

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Приметимо да функције симетричне у односу на средину обе таблице имају све супротне вредности, тј. једна од њих се добија негирањем друге, односно важе формула $\varphi_{3-k} = \neg \varphi_k$ (за прву таблицу) и $f_{15-k} = \neg f_k$ (за другу таблицу).
За сваку од бинарних функција ћемо дати формулу, као и њено име.

$f_0(p,q) = 0$ нула-функција (као и константна Булова функција 0)
$f_1(p,q) = p \wedge q$ конјункција (као и логички производ; И-функција)
$f_2(p,q) = \neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$ негација импликације од p ка q (као и забрана по q)
$f_3(p,q) = p$ промењива p
$f_4(p,q) = \neg(q \Rightarrow p) = \neg p \wedge q$ негација импликације од q ка p (као и забрана по p)
$f_5(p,q) = q$ промењива q
$f_6(p,q) = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) = p \veebar q$ ексклузивно ИЛИ (као и XOR; збир по модулу 2; логичка неједнакост; алтернативна функција)
$f_7(p,q) = p \vee q$ дисјункција (као и логички збир; ИЛИ-функција)
$f_8(p,q) = \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q = p \downarrow q$ НИЛИ-функција (као и Лукашијевичева функција; Пирсова функција)
$f_9(p,q) = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) = p \Leftrightarrow q$ еквиваленција (као и логичка једнакост; ексклузивно НИЛИ)
$f_{10}(p,q) = \neg q$ негација q
$f_{11}(p,q) = \neg(\neg(q \Rightarrow p)) = q \Rightarrow p = p \vee \neg q$ импликација од q ка p
$f_{12}(p,q) = \neg p$ негација p
$f_{13}(p,q) = \neg(\neg(p \Rightarrow q)) = p \Rightarrow q = \neg p \vee q$ импликација од p ка q
$f_{14}(p,q) = \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q = p \uparrow q$ НИ-функција (као и Шеферова функција)
$f_{15}(p,q) = \neg 0 = 1$ један-функција (као и константна Булова функција 1)

Напоменимо да се за неке од ових оперција користе и другачије ознаке:
$\varphi_2(p) = \overline{p}$, $f_1(p,q) = p \cdot q$, $f_2(p,q) = p \vartriangle q$, $f_4(p,q) = q \vartriangle p$ и $f_6(p,q) = p \oplus q$, $f_7(p,q) = p + q$.

У оригиналу се Лукашијевич и Шефер пишу Lukasiewicz и Sheffer.

У претходном разматрању видимо да смо свакој од функција $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15}$ придружили неку исказну формулу (у неким случајевима и више различитих исказних формула). Поставља се питање: Да ли је за сваку Булову функцију (која је дата помоћу таблице) могуће одредити одговарајућу исказну формулу?

Одговор је потврдан и свака Булова функција се може представити помоћу операција негације $\neg$, дисјункције $\vee$ и конјункције $\wedge$, а то ћемо показати коришћењем појмова СДНФ и СКНФ.

Ради једноставнијег записа увешћемо краћи запис $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, као и следеће ознаке:

$$x^1 = x \qquad \text{и} \qquad x^0 = \neg x.$$

Исказне променљиве (негде их зову и *просте формуле*, односно *атомске формуле*), као и њихове негације зваћемо *литерали*. Литерале, као и њихове коначне конјункције зваћемо *конјункти*. Конјункте, као и њихове коначне дисјункције зваћемо *формуле у дисјунктивној нормалној форми* (или краће *формуле у ДНФ*). ДНФ код које се у сваком конјукту јављају све исказне променљиве назива се *савршена дисјунктивна нормална форма* (или краће *СДНФ*).

Литерале, као и њихове коначне дисјункције зваћемо *дисјункти*. Дисјункте, као и њихове коначне конјункције зваћемо *формуле у конјунктивној нормалној форми* (или краће *формуле у КНФ*). КНФ код које се у сваком дисјукту јављају све исказне променљиве назива се *савршена конјунктивна нормална форма* (или краће *СКНФ*).

ПРИМЕР 2.5.1. Литерали су: $a,\ b,\ \ldots,\ p,\ q,\ r,\ s,\ \ldots,\ \neg a,\ \neg b,\ \ldots,\ \neg p,\ \neg q,\ \ldots$

Конјункти су, нпр.: $a,\quad b,\quad \neg p,\quad a \wedge \neg b,\quad \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s \wedge t,\quad \ldots$

ДНФ су, нпр.: $\neg c \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge d),\quad (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge s),\quad \ldots$

Од претходне 2 ДНФ прва није СДНФ (јер се у сваком конјукту не јављају све исказне променљиве a, b, c, d), док друга јесте СДНФ (сваки конјукт садржи и p и q и s). Формулу која је СДНФ можемо записати и као

$$(p^0 \wedge q^1 \wedge s^0) \vee (p^0 \wedge q^1 \wedge s^1) \vee (p^1 \wedge q^0 \wedge s^0) \vee (p^1 \wedge q^0 \wedge s^1).$$

Дисјункти су, нпр.: $a,\quad b,\quad \neg p,\quad a \vee \neg b,\quad \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s \vee t,\quad \ldots$

КНФ су, нпр.: $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b),\quad (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \wedge \neg q \wedge \neg s),\quad \ldots$

Од претходне 2 КНФ, прва је СКНФ (јер се у сваком дисјукту јављају све исказне променљиве a, b, c), док друга није СДНФ (сваки дисјукт не садржи и p и q и r и s). Формулу која је СДНФ можемо записати и као

$$(a^1 \vee b^0) \wedge (a^0 \vee b^0) \wedge (a^0 \vee b^1).$$

Сада ћемо навести тврђења која нам говоре да (скоро) сваку Булову функцију са n-променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можемо записати и у СДНФ и у СКНФ. Ради краћег записивања ставићемо да је α означава произвољну n-торку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и дусјункције (односно конјункције) на десној страни ће ићи по свим могућим n-торкама α. У последњој формули важи ${x_1}^{1-\alpha_1} = \neg({x_1}^{\alpha_1})$.

ТЕОРЕМА 2.5.1. За произвољну Булову функцију $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, различиту од нула-функције, постоји СДНФ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\alpha \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge {x_1}^{\alpha_1} \wedge {x_2}^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge {x_n}^{\alpha_n}. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 2.5.2. За произвољну Булову функцију $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, различиту од један-функције, постоји СКНФ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\alpha \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee {x_1}^{1-\alpha_1} \vee {x_2}^{1-\alpha_2} \vee \ldots \wedge {x_n}^{1-\alpha_n}. \quad \square$$

Напомена. На основу претходних теорема следи да за нула-функцију не постоји СДНФ, али за њу постоји ДНФ, нпр. $x \wedge \neg x$; такође, за један-функцију не постоји СКНФ, али за њу постоји КНФ, нпр. $x \vee \neg x$.

На електротехничком факултету, често се тражи да се одреди минимална ДНФ (или минимална КНФ). То је њима значаја да одређено електрично коло реализују са што мање употребљених основних логичких кола. За те потребе су развијени разни поступци минимизације, попут Карноових карти и стабала одлучивања.

Из претходних тврђења следи да се свака Булова функција $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ може изразити преко операција $\neg$, $\vee$ и $\wedge$. Сада ћемо разматрати преко којих још (унарних и бинарних) операција из скупа претходно уведених Булових функција

$$M = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}$$

можемо приказати све Булове функције. У ту сврху ћемо увести 2 појма: генератор-скупа и базе Булових функција.

ДЕФИНИЦИЈА 2.5.2. Скуп $G \subseteq M$ назива се *генератор-скуп* скупа M ако се помоћу операција из G могу изразити све Булове функције.

ДЕФИНИЦИЈА 2.5.3. Скуп $B \subseteq M$ назива се *база* Булових функција ако се помоћу операција из B могу изразити све Булове функције и ниједан прави подскуп $A \subset B$ није генератор-скуп.

На основу претходних тврђења имамо да је скуп $G = \{\neg, \vee, \wedge\}$ генератор-скуп. Он није база јер на основу Де Морганових правила можемо $\wedge$ изразити преко $\neg$ и $\vee$ (а и $\vee$ можемо изразити преко $\neg$ и $\wedge$). Зато су скупови $B_1 = \{\neg, \vee\}$ и $B_2 = \{\neg, \wedge\}$ две базе Булових функција. У наредним примерима показаћемо да су и $B_3 = \{\neg, \Rightarrow\}$ и $B_4 = \{\downarrow\}$ базе, а аналогно последњем се показује да је и $B_5 = \{\uparrow\}$ база.

У претходној дискусији смо видели да постоје 2 једночлане базе (и то су једине једночлане базе): $B_4 = \{\downarrow\}$ и $B_5 = \{\uparrow\}$.

Може се показати да двочланих база има укупно 34 (10 у којима је једна операција унарна, а друга бинарна и 24 код којих су обе операције бинарне).

Може се показати да трочланих база има укупно 10 (4 у којима је једна операција унарна, а друге две бинарне и 6 код којих су све три операције бинарне).

Доказано је да не постоје базе са 4 и више операција.

ПРИМЕР 2.5.2. Еквиваленцију изразити помоћу негације и импликације.

Решење 1. Како је

$$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

довољно је да конјункцију $\wedge$ изразимо преко $\neg$ и $\Rightarrow$.

Како за импликацију имамо $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$ и из Де Морганових правила и закона двојне негације добијамо $\neg p \vee q = \neg(p \wedge \neg q)$, тј.

$$p \Rightarrow q = \neg(p \wedge \neg q).$$

Тиме смо импликацију представили помоћу негације и конјункције (а нама треба обратно!). Ако овде негирамо обе стране добијамо

$$\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q.$$

Како нама не треба $p \wedge \neg q$ него $p \wedge q$, то ћемо сва појављивања променљиве q заменити са њеном негацијом $\neg q$:

$$\neg(p \Rightarrow \neg q) = p \wedge q.$$

Сада још остаје да се вратимо на тражено представљање еквиваленције:

$$p \Leftrightarrow q = \neg\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)\big). \qquad \blacksquare$$

Решење 2. Овде ћемо само другачије да изведемо представљање $\wedge$ преко $\neg$ и $\Rightarrow$.

Ако направимо таблицу за конјункцију $\wedge$ имамо:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	$\neg q$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Она, за разлику од импликације, има једну 1 и три 0. Али зато ако је негирамо, $\neg(p \wedge q)$, добијамо једну 0 и три 1 (што је и ситуација са импликацијом). Али импликација је нетачна само кад $1 \Rightarrow 0$, па ту ситуацију треба да имамо код 0. То можемо постићи ако би p оставили непромењено, а уместо q узели $\neg q$ (што је представљено уз десну страну претходне таблице). Тиме смо показали да је $\neg(p \wedge q) = p \Rightarrow \neg q$, одакле добијамо $p \wedge q = \neg(p \Rightarrow \neg q)$.

Крај задатка иде аналогно. ■

Напомена. На основу једнакости $p \wedge q = \neg(p \Rightarrow \neg q)$ коју смо овде показали и чињенице да је $B_2 = \{\neg, \wedge\}$ база Булових функција следи да је и $B_3 = \{\neg, \Rightarrow\}$ генератор-скуп.

Може се показати да је ово и база (тј. да ни $\{\neg\}$ ни $\{\Rightarrow\}$ не чине генератор-скуп).

ПРИМЕР 2.5.3. Показати да је $B_4 = \{\downarrow\}$ база Булових функција.

Решење. Како је $p \downarrow p = \neg p$ и како из $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$ добијамо да је $p \vee q = \neg\neg(p \vee q) = \neg(p \downarrow q) = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$, успели смо да представимо обе функције из базе $B_1 = \{\neg, \vee\}$ представимо преко Лукашијевичеве функције $\downarrow$. Тиме смо показали да је $B_4 = \{\downarrow\}$ база. ■

Напомена. И операцију $\wedge$ можемо да представимо преко $\downarrow$:
$p \downarrow q = \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$, па је $p \wedge q = \neg p \downarrow \neg q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

ПРИМЕР 2.5.4. Одредити ДНФ и СДНФ, као и КНФ и СКНФ[3], за логичку функцију

$$f = \Big(p \downarrow \big(q \Rightarrow (r \downarrow p)\big)\Big) \Leftrightarrow s \wedge \neg q.$$

Решење. Ако одредимо СДНФ она је истовремено и ДНФ (слично је СКНФ и КНФ).

При одређивању СДНФ у (задњој колони у) таблици функције тражимо 1. За сваку ту 1 одређујемо конјункт по следећем правилу: ако је $f(a,b,c,d) = 1$ онда имамо конјункт $p^a \wedge q^b \wedge r^c \wedge s^d$ (тј. ако за неку 1 на крају код променљиве p имамо 0 онда у конјункт иде $\neg p$, а ако имамо 1 онда у конјункт иде p итд.).

При одређивању СКНФ у (задњој колони у) таблици функције тражимо 0. За сваку ту 0 одређујемо дисјункт по следећем правилу: ако је $f(a,b,c,d) = 0$ онда имамо дисјункт $p^{1-a} \vee q^{1-b} \vee r^{1-c} \vee s^{1-d}$ (тј. ако за неку 0 на крају код променљиве p имамо 0 онда у дисјункт иде p, а ако имамо 1 онда у дисјункт иде $\neg p$ итд.).

На основу таблице Лукашијевичеве функције

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

имамо да важе следеће особине

$$x \downarrow 0 = 0 \downarrow x = \neg x, \qquad x \downarrow 1 = 1 \downarrow x = 0.$$

Њих ћемо користити при попуњавању таблице за $f = \Big(p \downarrow \big(q \Rightarrow (r \downarrow p)\big)\Big) \Leftrightarrow s \wedge \neg q$:

[3] У том домаћем се тражила само ДНФ и СДНФ, а пошто већ имамо одређену таблицу за ову функцију одредићемо њену и КНФ и СКНФ.

					φ	L		D	f	
p	q	r	s	$r \downarrow p$	$q \Rightarrow (r \downarrow p)$	$p \downarrow \varphi$	$\neg q$	$s \wedge \neg q$	$L \Leftrightarrow D$	конјункт
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	$p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	$p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	$p \wedge q \wedge r \wedge s$

Тражена СДНФ (а самим тим и ДНФ) је $f = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s)$.

Напомена. Ову СДНФ можемо „скратити", тј. неке од чланова можемо спојити и добити минималну ДНФ. Последња 4 члана (имају заједничко $p \wedge q$, а за r и s се јављају све 4 варијанте: $\neg r \wedge \neg s$, $\neg r \wedge s$, $r \wedge \neg s$ и $r \wedge s$). Сада ћемо то и строго формално истерати (користимо више пута дистрибутивност $\wedge$ у односу на $\vee$):

$$\begin{aligned}
(p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s) &= ((p \wedge q \wedge \neg r) \wedge (\neg s \vee s)) \vee ((p \wedge q \wedge r) \wedge (\neg s \vee s)) \\
&= ((p \wedge q \wedge \neg r) \wedge 1) \vee ((p \wedge q \wedge r) \wedge 1) \\
&= (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
&= (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
&= (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r) \\
&= (p \wedge q) \wedge 1 \\
&= p \wedge q
\end{aligned}$$

Даље, први, други, пети и шести члан можемо спојити:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) = \neg q \wedge \neg s.$$

Коначно, трећи, четврти, седми и осми члан можемо спојити:

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) = q \wedge \neg r.$$

Сада сва ова три спајања можемо искористити да добијемо минималну ДНФ:

$$f = (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r).$$

Овај израз можемо још више поједноставити (али то више није ни ДНФ, ни КНФ) коришћењем дистрибутивности и комутативности:

$$f = (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r) = (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg s) = (p \vee \neg r) \wedge q \vee (\neg q \wedge \neg s).$$

Овде је често питање: Како неки члан x (у овом случају седми и осми) можемо 2 (или више) пута користити при спајању? Одговор нам дају закони идемпотентности и комутативности, тј. $x = x \vee x$ и $x \vee y = y \vee x$. Закон идемпотентности нам служи да тај члан x заменимо са $x \vee x$ (па ћемо прво x користити у првом спајању, а друго x у другом), док закон комутативности користимо само да испремештамо елементе у дисјункцији.

Даље, претходно добијену таблицу за f можемо искористити и за добијање СКНФ.

p	q	r	s	f $L \Leftrightarrow D$	дисјункт
0	0	0	0	1	
0	0	0	1	0	$p \vee q \vee r \vee \neg s$
0	0	1	0	1	
0	0	1	1	0	$p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$
0	1	0	0	1	
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	0	$p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$
0	1	1	1	0	$p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$
1	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	$\neg p \vee q \vee r \vee \neg s$
1	0	1	0	1	
1	0	1	1	0	$\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$
1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	

Тражена СКНФ (а самим тим и КНФ) је
$f = (p \vee q \vee r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s)$. ■

Напомена. Опет можемо спајати чланове да би добили минималну КНФ: први, други, пети и шести нам дају:

$$(p \vee q \vee r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s) = q \vee \neg s,$$

а трећи и четврти:

$$(p \vee \neg q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s) = p \vee \neg q \vee \neg r.$$

Стога је минимална КНФ:

$$f = (q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r).$$

Од студената не очекујемо да обаве поступак минимизације. При минимизацији користе се и Карноове (Karnaugh) карте (или мапе). Постоје и онлајн солвери за цео тај поступак:

`http://www.32x8.com/index.html`

2.6 Предикатски рачун

Од исказа (предиката) могу се формирати нове реченице употребом *квантификатора*.

Постоје 2 квантификатора:

- $\forall$ је *универзални квантификатор*, који се чита „сваки“ (или „за сваки“ или „било који“ или „произвољни“);
- $\exists$ је *егзистенцијални квантификатор*, који се чита „постоји“ (или „неки“ или „за неки“ или „бар један“).

Приметимо да је симбол $\forall$ у ствари наопако слово A и то је директно повезано са почетним словом немачке речи "Alle", односно енглеске "All" (сви).

Симбол $\exists$ у ствари наопако слово E и то је директно повезано са почетним словом немачког израза "Es gibt", односно енглеске речи "Exist" (постоји).

Сада ћемо дати неколико примера реченица које садрже квантификаторе, као и њихове формуле.

ПРИМЕР 2.6.1. Написати одговарајућу формулу и одредити истинитосну вредност за сваку од следећих реченица:

- „Постоји објекат једнак самом себи.“
- „Сваки природан број је и реалан.“
- „Неки цели бројеви су већи од 8.“
- „Квадрат произвољног реалног броја је негативан.“
- „Једначина $x^2 = 1$ има решење у скупу природних бројева.“
- „Разлика било која два природна броја је природан број.“
- „Не постоји највећи природан број.“
- „За сваки рационалан број x постоји рационалан број y такав да је $x + y = 0$.“

Решење.
„Постоји објекат једнак самом себи“ преводимо као $(\exists x)\ x = x$. Ова формула је тачна.

„Сваки природан број је и реалан“ преводимо као $(\forall x)\ (x \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ x \in \mathbb{R})$. Скраћени запис ове формуле је $(\forall x \in \mathbb{N})\ x \in \mathbb{R}$. И ова формула је тачна јер је $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

„Неки цели бројеви су већи од 8“ преводимо као $(\exists x)\ (x \in \mathbb{Z}\ \wedge\ x > 8)$. Скраћени запис ове формуле је $(\exists x \in \mathbb{Z})\ x > 8$. Како постоји, нпр. цео број $x = 9 > 8$, ова формула је тачна.

„Квадрат произвољног реалног броја је негативан“ преводимо као $(\forall x)\ (x \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ x^2 < 0)$. Скраћени запис ове формуле је $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 < 0$. Ова формула није тачна јер за, нпр. $x = 1$ не важи $x^2 = 1 < 0$.

„Једначина $x^2 = 1$ има решење у скупу природних бројева“ преводимо као $(\exists x)\ (x \in \mathbb{N}\ \wedge\ x^2 = 1)$. Скраћени запис ове формуле је $(\exists x \in \mathbb{N})\ x^2 = 1$. Ова формула је тачна, јер постоји решење $x = 1 \in \mathbb{N}$ (без обзира што друго решење ове једначине, $x = -1$, није природан број, јер се тражи да једначина има бар једно решење у скупу природних бројева).

„Разлика било која два природна броја је природан број“ преводимо као $(\forall x)(\forall y)\ (x \in \mathbb{N}\ \wedge\ y \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ x - y \in \mathbb{N})$. Скраћени запис ове формуле је $(\forall x)\,(\forall y \in \mathbb{N})\ x - y \in \mathbb{N}$, а и то можемо скратити: $(\forall x, y \in \mathbb{N})\ x - y \in \mathbb{N}$. Ова формула није тачна јер за, нпр. $x = 1$ и $y = 2$ не важи $x - y = -1 \in \mathbb{N}$.

„Не постоји највећи природан број“ преводимо као $\neg\Big((\exists x)\ \big(x \in \mathbb{N}\ \wedge\ (\forall y)(y \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ y \leqslant x)\big)\Big)$.
Скраћени запис ове формуле је $\neg\Big((\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\ y \leqslant x\Big)$. Како за ма колико велико x узели, постоји већи природан број, нпр. $y = x + 1 \in \mathbb{N}$, то не постоји највећи природан број, па је ова реченица тачна.

„За сваки рационалан број x постоји рационалан број y такав да је $x + y = 0$“ преводимо на следећи начин $(\forall x)\big(x \in \mathbb{Q}\ \Rightarrow\ (\exists y)\ (y \in \mathbb{Q}\ \wedge\ x + y = 0)\big)$. Скраћени запис ове формуле је $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q})\ x + y = 0$. Ова формула је тачна јер за сваки рационалан број x постоји супротан број $y = -x \in \mathbb{Q}$ за који важи $x + y = x + (-x) = 0$. ■

Негација реченица са квантификаторима се врши на следећи начин:

$$\neg(\forall x)\ P(x)\ \Leftrightarrow\ (\exists x)\ \neg P(x) \qquad \text{и} \qquad \neg(\exists x)\ P(x)\ \Leftrightarrow\ (\forall x)\ \neg P(x).$$

ПРИМЕР 2.6.2. „Прођимо“ негацијом кроз формулу за реченицу „Не постоји највећи природан број“ из претходног примера.

Решење. Користићемо горње формуле и Де Моргановe законе, као и да је $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$. Следеће формуле су еквивалентне:

$$\neg(\exists x)\ \big(x \in \mathbb{N}\ \wedge\ (\forall y)(y \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ y \leqslant x)\big)$$

$$(\forall x)\ \neg\big(x \in \mathbb{N}\ \wedge\ (\forall y)(y \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ y \leqslant x)\big)$$

$$(\forall x)\ \Big(\neg(x \in \mathbb{N}) \vee \neg\big((\forall y)(y \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ y \leqslant x)\big)\Big)$$

$$(\forall x)\ \Big(\neg(x \in \mathbb{N}) \vee (\exists y)\,\neg(y \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ y \leqslant x)\Big)$$

$$(\forall x)\ \Big(\neg(x\in\mathbb{N})\vee\ (\exists y)\,\neg\big(\neg(y\in\mathbb{N})\ \vee\ y\leqslant x\big)\Big)$$

$$(\forall x)\ \big(\neg(x\in\mathbb{N})\vee\ (\exists y)\ (y\in\mathbb{N}\ \wedge\ y>x)\big)$$

$$(\forall x)\ \big(x\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ (\exists y)\ (y\in\mathbb{N}\ \wedge\ y>x)\big).$$

Овде смо формално показали да је формула $\neg(\exists x\in\mathbb{N})(\forall y\in\mathbb{N})\ y\leqslant x$ једнака $(\forall x\in\mathbb{N})(\exists y\in\mathbb{N})\ y>x$, тј. да се и у скраћеном облику приликом негирања квантификатори мењају. ■

Од сада ћемо формуле са квантификаторима углавном писати у скраћеном облику (сем кад имамо уопштену предикатску формулу и треба испитати њену иситинитосну вредност).

ПРИМЕР 2.6.3. Одредити истинитосну вредност предикатских формула:
а) $\exists x(x\in\mathbb{Z}\ \wedge\ 3x=8)$; **б)** $\exists x(x\in\mathbb{Q}\ \wedge\ 3x=8)$; **в)** $(\forall x\in\mathbb{N})(\exists y\in\mathbb{N})(x\leqslant y)$; **г)** $(\exists y\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{N})(x\leqslant y)$;
д) $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})(x=y\ \Rightarrow\ xz=yz)$; **ђ)** $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})(xz=yz\ \Rightarrow\ x=y)$.

Решење. **а)** Формула $\exists x(x\in\mathbb{Z}\ \wedge\ 3x=8)$ није тачна, јер не постоји вредност $x\in\mathbb{Z}$ за коју је $3x=8$ (решење ове једначине је $x=\frac{8}{3}\notin\mathbb{Z}$).

б) Формула $\exists x(x\in\mathbb{Q}\ \wedge\ 3x=8)$ је тачна, јер постоји вредност $x=\frac{8}{3}\in\mathbb{Q}$ за коју је $3x=8$.

в) Формула $(\forall x\in\mathbb{N})(\exists y\in\mathbb{N})(x\leqslant y)$ је тачна, јер за сваки природан број x можемо одабрати већи (или једнак) природан број, нпр. $y=x+1$.

г) Формула $(\exists y\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{N})(x\leqslant y)$ није тачна, јер не постоји највећи природан број. Ако би претпоставили је формула тачна, онда би постојао број y_0, такав да за сваки природан број x важи $x\leqslant y_0$ (што није тачно, нпр. за $x=2\cdot y_0$).

д) Формула $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})(x=y\ \Rightarrow\ xz=yz)$ је тачна, јер ако једнакост $x=y$ помножимо истим реалним бројем z добијамо једнакост $xz=yz$.

ђ) Формула $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})(xz=yz\ \Rightarrow\ x=y)$ није тачна, јер не важи за све реалне бројеве. Контрапример је $x=3$, $y=5$ и $z=0$; тада имамо да је $xz=yz=0$, тј. $v(xz=yz)=1$, док је $x\neq y$, па важи $v(x=y)=0$, па се формула своди на $1\Rightarrow 0$, што није тачно. ■

Напомена. Из делова под а) и б) видимо да је битно на ком скупу се дешава формула (иста формула, а различит скуп у ова 2 дела задатка даје различите истинитосне вредности).
Из делова под в) и г) видимо да је веома битан редослед квантификатора! Детаљније ћемо разматрати редослед квантификатора након ове напомене и увођења још неких појмова.
Из дела под ђ) видимо да не смемо скратити израз са z јер то z може бити једнако 0.

Приметимо да ако важи тврђење $(\forall x)\ P(x)$, да онда важи и тврђење $(\exists x)\ P(x)$ (ако важи за све вредности x онда важи и за бар једну вредност x!).

Сличан резон можемо применити када разматрамо међусобне односе предикатских формула које имају 2 квантификатора.

Редослед навођења истородних квантификатора није битан. Тако, на пример, формула $(\forall x)(\forall y)\ \varphi(x,y)$ представља исто што и формула $(\forall y)(\forall x)\ \varphi(x,y)$, јер и у једном и у другом случају морамо да проверимо формулу $\varphi(x,y)$ по свим паровима (x,y). Стога је формула $(\forall x)(\forall y)\ \varphi(x,y)\ \Leftrightarrow\ (\forall y)(\forall x)\ \varphi(x,y)$ ваљана.

Потпуно аналогно, имамо и да је формула $(\exists x)(\exists y)\ \varphi(x,y)\ \Leftrightarrow\ (\exists y)(\exists x)\ \varphi(x,y)$ ваљана.

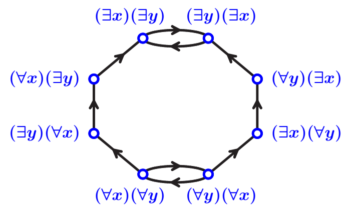
У Примеру 2.6.3 смо добили да је формула под в) тачна, а под г) није (ту су два квантификатора само променила место!). Сада ћемо овај случај и све остале објединити у наредно разматрање.

ДЕФИНИЦИЈА 2.6.1. Формула F је *тачна при интерпретацији* $\mathcal{I}$ ако при тој интерпретацији има увек вредност 1 (независно од параметара одговарајућег предиката).

Међутим, постоје и формуле које су тачне при свим интерпретацијама. Тако, нпр. ако у једној таутологији свако исказно слово заменимо неком формулом квантификаторског рачуна и новодобијена формула ће бити увек тачна.

ДЕФИНИЦИЈА 2.6.2. Формула која је тачна при свим интерпретацијама назива се *ваљана формула*.

Посматрајмо формуле облика $F = K_1 K_2\ \varphi(x,y)$, где су K_1 и K_2 квантификатори (универзални и/или егзистенцијални) спрегнутих са x или y. Ових формула има укупно 8 и на наредној слици представљају чворове графа[4]. За 2 формуле F_1 и F_2 које су овог типа имамо да важи: формула $F_1 \Rightarrow F_2$ је ваљана акко у следећем графу постоји пут из чвора F_1 у чвор F_2.



Сада ћемо дати чему су једнаки неки једноставнији изрази који садрже један квантификатор и једнакост са основним скуповним, односно бројевним, операцијама. У таблици подразумевамо да је $A \neq \emptyset$. Тако например, други израз $(\forall x \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cap z = 0$, у случају $A = \emptyset$ постаје $(\forall x \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cap z = 1$!

$(\exists x \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cap z$	1
$(\exists y \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cap z$	$x \subseteq z$
$(\exists x \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cup z$	1
$(\exists y \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cup z$	$z \subseteq x$

$(\forall x \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cap z$	0
$(\forall y \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cap z$	$\begin{cases} 1, & x = z = \emptyset \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = (x = \emptyset)\ \wedge\ (z = \emptyset)$
$(\forall x \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cup z$	0
$(\forall y \in \mathcal{P}(A))\ x = y \cup z$	$\begin{cases} 1, & x = z = A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = (x = A)\ \wedge\ (z = A)$

$(\exists x \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y + z$	1
$(\exists y \in \mathbb{N})\ x = y + z$	$x > z$
$(\exists y \in \mathbb{N}_0)\ x = y + z$	$x \geqslant z$
$(\exists y \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y + z$	1
$(\exists x \in \mathbb{N})\ x = y - z$	$y > z$
$(\exists x \in \mathbb{N}_0)\ x = y - z$	$y \geqslant z$
$(\exists x \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y - z$	1
$(\exists y \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y - z$	1
$(\exists z \in \mathbb{N})\ x = y - z$	$y > x$
$(\exists z \in \mathbb{N}_0)\ x = y - z$	$y \geqslant x$
$(\exists z \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y - z$	1
$(\exists x \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y \cdot z$	1
$(\exists y \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z})\ x = y \cdot z$	$z \mid x$
$(\exists y \in \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y \cdot z$	$x = 0\ \vee\ z \neq 0$
$(\exists x \in \mathbb{N})\ x = y : z$	$z \mid y$
$(\exists x \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z})\ x = y : z$	$z \mid y\ \wedge\ z \neq 0$
$(\exists x \in \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y : z$	$z \neq 0$
$(\exists y \in \mathbb{N})\ x = y : z$	1
$(\exists y \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y : z$	$z \neq 0$
$(\exists z \in \mathbb{N})\ x = y : z$	$x \mid y$
$(\exists z \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z})\ x = y : z$	$x \mid y\ \wedge \neg(x \neq 0\ \wedge\ y = 0)$
$(\exists z \in \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y : z$	$x = 0\ \Leftrightarrow\ y = 0$

$(\forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y + z$	0
$(\forall y \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y + z$	0
$(\forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y - z$	0
$(\forall y \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y - z$	0
$(\forall z \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y - z$	0
$(\forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y \cdot z$	0
$(\forall y \in \mathbb{N})\ x = y \cdot z$	0
$(\forall y \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y \cdot z$	$(x = 0)\ \wedge\ (z = 0)$
$(\forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y : z$	0
$(\forall y \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y : z$	0
$(\forall z \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})\ x = y : z$	0

Овде је релација дељивости $a \mid b$ уведена као

$$a \mid b \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\ b = a \cdot k.$$

[4]Појмове Теорије графова попут чвора и гране уводимо у глави 4. Теорија графова.

Са тако уведеном релацијом дељивости имамо да и нула дели нулу, тј. $0 \mid 0$.

То ће нам бити битно касније код релација, за рефлексивност.

Када користите претходне једнакости (еквиваленције) на колоквијуму или испиту **ТРЕБА ДАТИ КРАЋЕ ОБРАЗЛОЖЕЊЕ**!

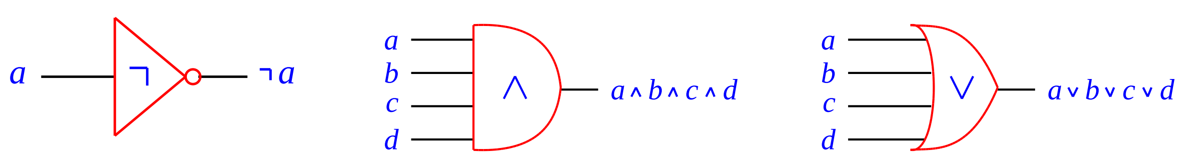
Нпр. покажимо прве три једнакости са бројевним операцијама.

- $(\exists x \in \mathbb{N})\ x = y + z \ \Leftrightarrow\ 1$
  како за свака 2 природна броја y и z, постоји и њихов збир (и он је такође природан број), то ће увек постојати природан број $x = y + z$.
- $(\forall x \in \mathbb{N})\ x = y + z \ \Leftrightarrow\ 0$
  израз $y + z$ има једну фиксирану вредност, за унапред одређене природне бројеве y и z, док на левој страни једнакости x узима вредност сваког природног броја, па стога дата једнакост не може бити тачна за свако x.
- $(\exists y \in \mathbb{N})\ x = y + z \ \Leftrightarrow\ x > z$
  како је $y = x - z$, то за унапред одређене природне бројеве x и z увек можемо одредити y тако да важи једнакост $x = y + z$, али то y још мора бити и природан број, тј. $y = x - z \in \mathbb{N}$. То је испуњено ако и само ако је $x > z$.

2.7 Примене исказног рачуна на прекидачке мреже и скупове

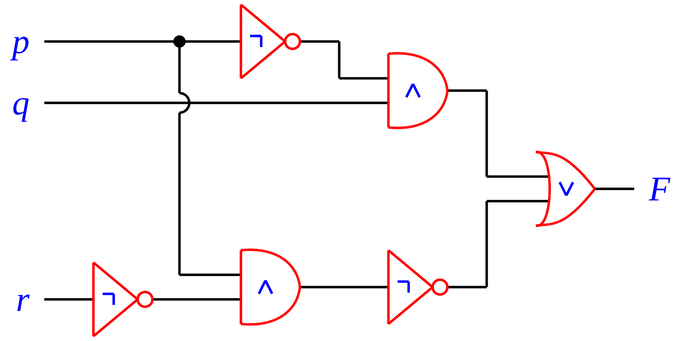
Примене исказног рачуна на прекидачке мреже

У логичким колима следећи елементи (у њима је уписано којој логичкој операцији одговарају) представљају негацију, конјункцију и дисјункцију $(\neg, \wedge, \vee)$:



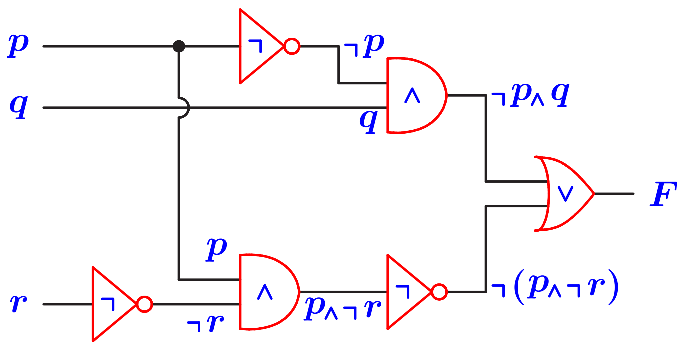
Рад са њима биће илустрован у наредним примерима.

ПРИМЕР 2.7.1. Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија.
Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

Решење. Ако на сваком логичком колу пратимо шта му је на улазу, а шта на излазу добићемо:



$F = (\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)$

СКНФ и СДНФ није, јер би сваки дисјункт/конјункт требало да има све 3 промењиве (и p и q и r).

КНФ није, јер су чланови спојени са $\vee$, а не са $\wedge$.

ДНФ није, јер $\neg(p \wedge \neg r)$ није конјункт.

				L		a	D				
p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$\neg a$	$L \vee D$	дисјункт	конјункт	конјункт
0	0	0	1	0	1	0	1	1		$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$\neg p$
0	0	1	1	0	0	0	1	1		$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg p$ r
0	1	0	1	1	1	0	1	1		$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg p$
0	1	1	1	1	0	0	1	1		$\neg p \wedge q \wedge r$	$\neg p$ r
1	0	0	0	0	1	1	0	0	$\neg p \vee r$		
1	0	1	0	0	0	0	1	1		$p \wedge \neg q \wedge r$	r
1	1	0	0	0	1	1	0	0	$\neg p \vee r$		
1	1	1	0	0	0	0	1	1		$p \wedge q \wedge r$	r

0 $\Rightarrow$ није таутологија!

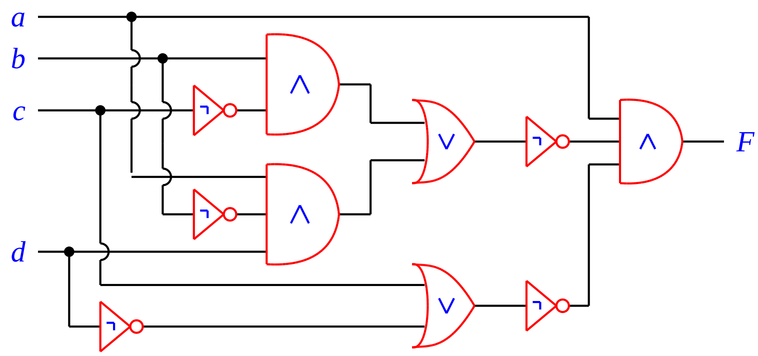
СКНФ (а то је и КНФ): $F = (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

СДНФ: $F = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

ДНФ (а то је и КНФ): $F = \neg p \vee r$. ■

ПРИМЕР 2.7.2. *Колоквијум 2014.*

Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

Решење. Исказна формула F која одговара датом колу је $F = a \wedge \neg\big((b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge d)\big) \wedge \neg(c \vee \neg d)$.

				p	q		r		s	F
a	b	c	d	$b \wedge \neg c$	$a \wedge \neg b \wedge d$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$c \vee \neg d$	$\neg(c \vee \neg d)$	$a \wedge r \wedge s$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0

Како су у колони F све 0 то је контрадикција. Како се у колони F јављају 0 није таутологија.

Како су чланови у заградама спојени са $\wedge$ то дата формула не може бити ни СДНФ ни ДНФ.

Како чланови спојени са $\wedge$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: a, b, c, d).

Дата формула није ни КНФ, јер сви чланови спојени са $\wedge$ не представљају дисјункте (негација дисјункта, нпр. $\neg(c \vee \neg d)$, није дисјункт!).

СДНФ не постоји јер су све 0, али ДНФ постоји: $F = \neg a \wedge a$

горња формула представља и КНФ, јер литерали ($\neg a$ и a) представљају и дисјункте!

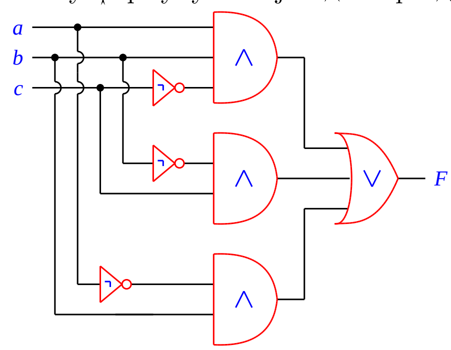
могла је за КНФ да се узме и СКНФ, али онда треба исписати све чланове:

$$\begin{aligned} F = {} & (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge \\ & (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge \\ & (\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \end{aligned}$$

ДНФ смо могли да добијемо и тако што би прошли негацијом кроз формулу F:

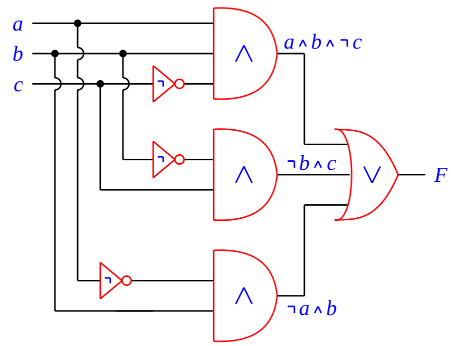
$F = a \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d) \wedge \neg c \wedge d.$ ■

ПРИМЕР 2.7.3. Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија.
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

Решење. Ако на сваком логичком колу пратимо шта му је на улазу, а шта на излазу добићемо:



$F = (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b)$, ово је и једна ДНФ.
Ова формула није таутологија, јер је за $a = b = c = 0$ и $F = 0$.
СКНФ (и КНФ): $F = (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$. ∎

Примене исказног рачуна на скупове

Прво ћемо дати кратко обнављање основних појмова Теорије скупова.

Скуп и *елемент скупа* су основни математички појмови и не дефинишу се[5]. Стога ћемо се задржати на интуитивној представи скупа, као обједињене количине елемената. Писаћемо $p \in A$ ако је p елемент скупа A.

Код скупова није битан редослед елемената, као ни колико се пута неки елемент јавља у скупу – тако нпр. имамо да важи $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b, a, b\}$. Скуп који нема ниједан елемент називамо *празан скуп* и означавамо са $\emptyset$. Понекад се користи и ознака $\{\,\}$.

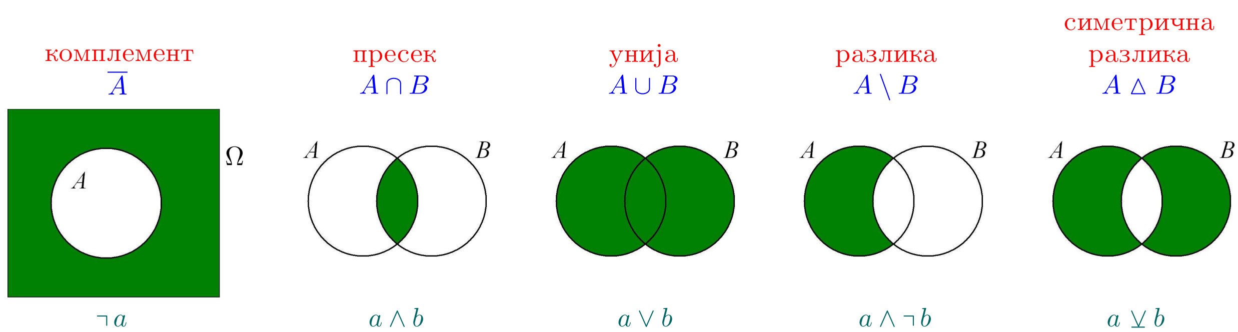
ДЕФИНИЦИЈА 2.7.1. Ако сваки елемент скупа A припада и скупу B, тј. $x \in A \Rightarrow x \in B$, тада за скуп A кажемо да је *подскуп* од B или кажемо да је скуп A *садржан* у скупу B и то означавамо са $A \subseteq B$. У том случају кажемо и да је скуп B *надскуп* од A или кажемо да скуп B *садржи* скуп A и то означавамо са $B \supseteq A$. За два скупа кажемо да су *једнака*, $A = B$, ако и само ако садрже исте елементе, тј. ако је истовремено $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Уколико A није подскуп од B, то означавамо са $A \nsubseteq B$. За скуп A кажемо да је *прави подскуп* скупа B, ако је A подскуп скупа B и $A \neq B$; и користићемо ознаку $A \subset B$ (и слично за *прави надскуп* $B \supset A$).

Сада ћемо навести основне операције на скуповима.

[5] Слично, не дефинишу се и појмови броја, тачке, праве...

ДЕФИНИЦИЈА 2.7.2. Уколико знамо шта је „универзални“ скуп Ω, онда можемо да уведемо *комплемент* скупа A, као скуп чији су елементи сви елементи из Ω који нису у скупу A. Комплемент скупа A означавамо са $\overline{A}$. За два дата скупа A и B *пресек* је скуп чији су елементи сви елементи који су и у скупу A и у скупу B и означавамо га са $A \cap B$. За скупове A и B кажемо да су *дисјунктни* ако је $A \cap B = \emptyset$. *Унија* је скуп чији су елементи сви елементи који су или у A или у B (тј. бар у једном од скупова A и B) и означавамо је са $A \cup B$. *Разлика* скупова A и B је скуп чији су елементи сви елементи који су у A, а нису и у B (тј. они који су само у A) и означавамо је са $A \setminus B$. Операцију *симетричне разлике* скупова A и B дефинишемо као $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, тј. то је скуп чији су елементи сви елементи који су или само у A или само у B.

Ако уведемо исказе $a =$„$x \in A$“ и $b =$„$x \in B$“, онда свакој од ових операција одговара следећа исказна формула која је представљена испод слике на којој су Венови дијаграми који одговарају тој операцији.



ПРИМЕР 2.7.4. Нека је скуп A дат набрајањем својих елемената $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Тај исти скуп можемо описно задати као „скуп непарних једноцифрених бројева“ или као $A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}, k \leqslant 5\}$. За скуп $M = \{1, 5\}$ важи $M \subset A$ јер су сви елементи скупа M и елементи скупа A (и још је $M \neq A$).
Нека је $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Тада је $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{5, 7, 9\}$, а $A \vartriangle B = \{2, 4, 5, 7, 9\}$. ■

Сада ћемо навести још неке скуповне појмове који ће нам требати касније, код увођења појма релације.

ДЕФИНИЦИЈА 2.7.3. *Партитивни скуп* скупа A, у ознаци $\mathcal{P}(A)$, је скуп свих подскупова скупа A, тј. важи да је $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

ПРИМЕР 2.7.5. Одредити партитивни скуп скупа $A = \{a, b\}$.

Решење. Партитититивни скуп је $\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\Big\}$. ■

Напомена. Када одређујемо $B \subseteq A$, за сваки елемент из A имамо 2 могућности: или да је у подскупу B или да није. Стога је број елемената партитивног скупа коначног скупа A, $|A| = n$, дат са $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. То смо већ показали у Теореми 1.2.2 у глави 1. Комбинаторика.

ДЕФИНИЦИЈА 2.7.4. *Декартов производ* скупова A и B, у ознаци $A \times B$, је скуп који садржи све могуће парове елемената, код којих је прва координата из скупа A а друга из B, тј. важи да је $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Ако одређујемо Декартов производ два иста скупа, користимо ознаку A^2, тј. важи $A^2 = A \times A$. Ови појмови се могу пренети и на Декартов приозвод n скупова: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, односно када имамо да су свих n скупова једнаки A, тј. $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, имамо ознаку A^n.

ПРИМЕР 2.7.6. Одредити Декартов производ скупова $A = \{1, 2\}$ и $B = \{\text{црвена}, \text{плава}, \text{бела}\}$.

Решење. $A \times B = \Big\{(1, \text{црвена}), (1, \text{плава}), (1, \text{бела}), (2, \text{црвена}), (2, \text{плава}), (2, \text{бела})\Big\}$. ∎

Напомена. Нека су A и B коначни скупови такви да је $|A| = n$ и $|B| = m$. Када одређујемо $A \times B$, за прву координату бирамо произвољан елемент из A, што можемо учинити на n начина, а за другу координату бирамо произвољан елемент из B, што можемо учинити на m начина. Стога је број елемената њиховог Декартовог производа дат са $|A \times B| = m \cdot n$.

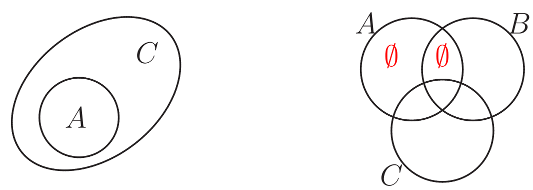
За крај овог поглавља даћемо неколико задатака са писмених испита и колоквијума.

ПРИМЕР 2.7.7. *Колоквијум 2008.*
Дата је скуповна формула $A \subseteq C \;\Rightarrow\; (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$. **а)** Представити $A \subseteq C$, $(A \cup B) \cap C$ и $(A \cup C) \cap (A \cup B)$ преко Венових дијаграма

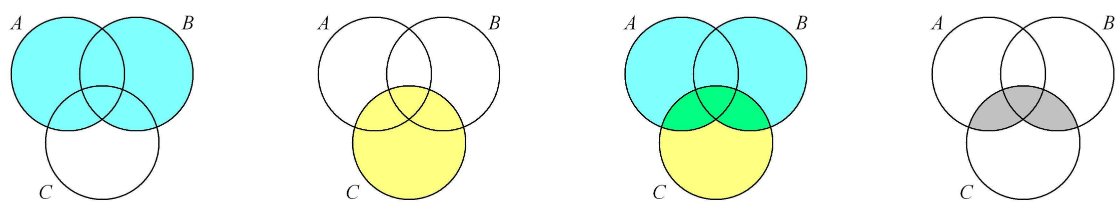
б) Представити ову формулу преко исказних формула.

в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).

Решење. **а)** Да је $A \subseteq C$ можемо представити на следећа 2 начина (у другом смо ставили и скуп B да би нам помогло у даљем резоновању, а са $\emptyset$ смо означили оне делове ових скупова у којима нема елемената!).

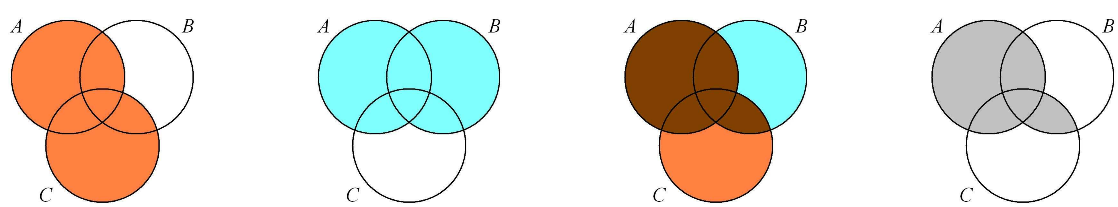


За леву страну једнакости (она је представљена сивом бојом на последњој слици у реду) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



$A \cup B$ $\quad$ C $\quad$ $(A \cup B) \cap C$ $\quad$ лева страна

За десну страну једнакости (она је представљена сивом бојом на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



$A \cup C$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $(A \cup C) \cap (A \cup B)$ $\quad$ десна страна

Напомена. Са ових слика видимо да формула $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$ важи само ако не постоји део скупа A који се не налази у C, тј. кад је $A \subseteq C$.

б) Означимо са $a = x \in A$, $b = x \in B$ и $c = x \in C$ (онда је $\neg a = x \notin A$, $\neg b = x \notin B$ и $\neg c = x \notin C$). Тада скуповна формула $A \subseteq C \;\Rightarrow\; (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$ прелази у исказну формулу

$$(a \;\Rightarrow\; c) \;\Rightarrow\; \Big(\big((a \vee b) \wedge c\big) \;\Leftrightarrow\; \big((a \vee c) \wedge (a \vee b)\big)\Big).$$

в) (Преко таблице истинитости)

			L		p		q	D	
a	b	c	$a \Rightarrow c$	$a \vee b$	$(a \vee b) \wedge c$	$a \vee c$	$(a \vee c) \wedge (a \vee b)$	$p \Leftrightarrow q$	$L \Rightarrow D$
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Како смо добили све 1 у последњој колони која одговара датом исказу, то је он таутологија, па добијамо да и полазна скуповна формула важи.

Напомена. Како су колоне L и D исте добијамо да важи строжија исказна (а на основу ње и скуповна) формула

$$(a \Rightarrow c) \Leftrightarrow \Big(\big((a \vee b) \wedge c\big) \Leftrightarrow \big((a \vee c) \wedge (a \vee b)\big)\Big),$$

тј. $A \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$.

Како је $v(q) = 1$ и $v(p) = 0$ само за $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ и $(a, b, c) = (1, 1, 0)$. Њима одговарају скупови $A\overline{B}\,\overline{C}$ и $AB\overline{C}$. Значи, скупови које смо представљали Веновим дијаграмима су једнаки само уколико не може бити $x \in A\overline{B}\,\overline{C} \cup AB\overline{C}$, тј. уколико тих делова уопште нема, што је случај ако и само ако је $A \subseteq C$.

II начин (дискусијом по слову):

в) У исказној формули $(a \Rightarrow c) \Rightarrow \Big(\big((a \vee b) \wedge c\big) \Leftrightarrow \big((a \vee c) \wedge (a \vee b)\big)\Big)$ слово a се јавља највише пута (4, док се b јавља 2 пута, а c 3 пута), па ћемо у дискусију кренути од њега.

1° ако је $v(a) = 0$ формула постаје $(0 \Rightarrow c) \Rightarrow \Big(\big((0 \vee b) \wedge c\big) \Leftrightarrow \big((0 \vee c) \wedge (0 \vee b)\big)\Big)$, тј. $1 \Rightarrow \Big(b \wedge c \Leftrightarrow c \wedge b\Big)$, што је еквивалентно са $b \wedge c \Leftrightarrow c \wedge b$, која је тачна (јер је $\wedge$ симетрична функција);

2° ако је $v(a) = 1$ формула постаје $(1 \Rightarrow c) \Rightarrow \Big(\big((1 \vee b) \wedge c\big) \Leftrightarrow \big((1 \vee c) \wedge (1 \vee b)\big)\Big)$, која се своди на формулу $c \Rightarrow \Big(\big((1 \vee b) \wedge c\big) \Leftrightarrow \big((1 \vee c) \wedge (1 \vee b)\big)\Big)$, тј. $c \Rightarrow \big(1 \wedge c \Leftrightarrow 1 \wedge 1\big)$, тј. $c \Rightarrow (c \Leftrightarrow 1)$, што је еквивалентно са $c \Rightarrow c$, што је тачно.

Како смо у свим случајевима добили да је исказна формула тачна, показали смо да је она таутологија, тј. да полазна скуповна формула увек важи. ■

ПРИМЕР 2.7.8. *Писмени испит, јануар 2009.*

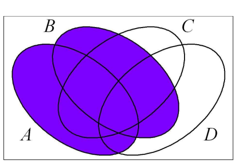
Дата је скуповна формула $(A \cup B) \setminus (C \cap D) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cap D$.

а) Представити леву и десну страну формуле преко Венових дијаграма.

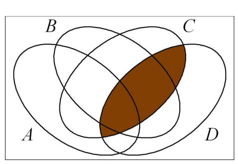
б) Представити ову формулу преко исказних формула.

в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).

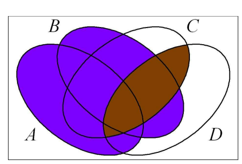
Решење. **а)**



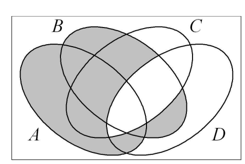
$A \cup B$



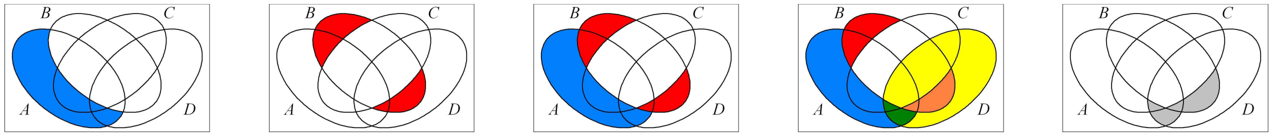
$C \cap D$



$(A \cup B) \setminus (C \cap D)$



лева страна



$\boldsymbol{A \setminus B}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B \setminus C}$ $\qquad$ $(\boldsymbol{A \setminus B}) \cup (\boldsymbol{B \setminus C})$ $\qquad$ $-|| - \cap D$ $\qquad$ десна страна

б) Означимо са $a = x \in A$ (онда је $\neg a = x \notin A$), $b = x \in B$, $c = x \in C$ и $d = x \in D$. Тада скуповна формула $(A \cup B) \setminus (C \cap D) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cap D$ прелази у исказну формулу

$$\big((a \vee b) \wedge \neg(c \wedge d)\big) \;\Rightarrow\; \big((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \wedge d\big).$$

в) Означимо са $L = \big((a \vee b) \wedge \neg(c \wedge d)\big)$ и $D = \big((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \wedge d\big)$. Тада имамо таблицу:

									p		q			
a	b	c	d	$a \vee b$	$c \wedge d$	$\neg(c \wedge d)$	L	$\neg b$	$a \wedge \neg b$	$\neg c$	$b \wedge \neg c$	$p \vee q$	D	$L \Rightarrow D$
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Како нисмо добили све 1 у последњој колони која одговара датом исказу, тај исказ није таутологија, па добијамо да полазна скуповна формула не важи.

II начин (супротном претпоставком):

в) Претпоставимо да исказна формула $L \Rightarrow D$ није тачна. То је могуће само уколико је $v(L) = 1$ и $v(D) = 0$.

Из $v(L) = 1$ имамо да мора да важи $v(a \vee b) = 1$ и $v\big(\neg(c \wedge d)\big) = 1$. За прву од ове две формуле имамо 2 могућности $v(a) = 1$ или $v(b) = 1$. За другу искористимо Де Морганове формуле, па имамо да је $v(\neg c \vee \neg d) = 1$, што опет има 2 могућности $v(c) = 0$ или $v(d) = 0$ $\big($ово су фактички 4 случаја када је десна страна тачна:

1° $v(a) = 1, v(c) = 0$; 2° $v(a) = 1, v(d) = 0$; 3° $v(b) = 1, v(c) = 0$; 4° $v(b) = 1, v(d) = 0\big)$.

Како можемо најлакше да направимо да десна страна буде неистинита? Па тако што ћемо ставити да је $v(d) = 0$ (јер је *нешто*$\wedge 0 = 0$).

Тиме смо добили да је, нпр. за $v(a) = 1$ и $v(d) = 0$, уз произвољне вредности за b и c дата исказна формула нетачна па самим тим она није таутологија, што повлачи да ни полазна скуповна формула није тачна.

Напомена. Овај метод са супротном претпоставком, када је дата формула таутологија је метод свођења на апсурд! Тј. ако полазећи од супротне претпоставке добијемо нешто што није тачно (контрадикцију), онда та полазна супротна претпоставка није добра, тј. дата формула је таутологија. Ако полазећи од супротне претпоставке добијемо неки случај за који важи $v(F) = 0$, онда формула F није таутологија. ■

2.8 Резиме

У овој глави смо се прво упознали са појмом исказа. Затим смо увели основне логичке операције и помоћу њих смо могли да направимо сложеније исказе. За сваку од основних логичких операција (негација, конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција, екслузивна дисјункција) смо навели таблицу, као и како можемо убрзано да попуњавамо таблице. Затим смо се упознали са појмом таутологије и њих смо испитивали на више начина – свођењем на познате таутологије, преко таблица истинитости, методом дискусије по слову и методом свођења на апсурд (супротне претпоставке). Навели смо и мноштво познатих таутологија.

Следећи део чине мало напредније теме, а то су Булове функције, као уопштења основних логичких функција. Помоћу савршене дисјунктивне нормалне форме, као и савршене конјунктивне нормалне форме смо показали да се било која Булова функција може представити само помоћу негације и дисјункције (или негације и конјункције). Уопштење тога је и појам базе Булових функција. Након тога смо се бавили предикацким рачуном. Ту смо увели квантификаторе за сваки $\forall$ и постоји $\exists$. На крају тог поглавља смо дали две таблице разних формула са квантификаторима које су везане са подскуповима и скуповима бројева.

Последњи део ове главе чине примене исказног рачуна на прекидачке мреже (ипак сте ви Електротехничари!), као и на доказивање скуповних једнакости. Ту смо дали и детаљан увод у скупове, од чега ће нам неки појмови, попут Декартовог производа, требати касније када уводимо појам релације.

2.9 Питања за проверу знања

35. Шта је исказ?

36. Које основне исказне операције знаш?

37. Која од основних исказних операција није симетрична?

38. Представи импликацију преко дисјункције и негације.

39. Шта је таутологија, а шта контрадикција?

40. Да ли је негација контрадикције увек таутологија?

41. У чему се састоји метода дискусије по слову?

42. У чему се састоји метода супротне претпоставке?

43. Наведи 5 таутологија.

44. Наведи 5 контрадикција.

45. Како гласи де Моргановo правило?

46. Да ли постоје једночлане базе Булових функција?

47. Да ли $\{\neg, \vee, \wedge\}$ чине једну базу Булових функција?

48. Које квантификаторе знаш?

49. Како се дефинише симетрична разлика 2 скупа? Која логичка операција одговара скуповној операцији симетричне разлике?

50. Која логичка операција одговара скуповној релацији подскуп?

3. Релације

3.1 Основне особине бинарних релација

Подсетимо се неких операција са скуповима које су нам потребне за увођење појма релације. Декартов производ два скупа дефинишемо на следећи начин: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. За Декартов производ скупа са самим собом имамо $X^2 = X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$.

ПРИМЕР 3.1.1. Нека је $A = \{1, 2, 3\}$. Одредити A^2.

Решење.
$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. ■

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.1. *Бинарна релација* ϱ на непразном скупу S је било који подскуп Декартовог производа S^2, тј.

$$\varrho \subseteq S^2.$$

Релација $\varrho = \emptyset$ назива се *празна* релација, док је релација $\varrho = S^2$ *универзална* (или *потпуна*) *релација*.

Ако је $(a, b) \in \varrho$ то ћемо краће писати $a\,\varrho\,b$, а ако $(a, b) \notin \varrho$ то ћемо писати $a \not\varrho\ b$.

ПРИМЕР 3.1.2. Скуп $\varrho = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ је једна релација (јер је $\varrho \subseteq A^2$) на скупу A уведеном у претходном примеру. ■

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.2. Релација ϱ на скупу A је:

- *рефлексивна*, **Р**, ако $(\forall x \in A) \quad x\,\varrho\,x$;
- *симетрична*, **С**, ако $(\forall x, y \in A) \quad x\,\varrho\,y \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x$;
- *антисиметрична*, **АС**, ако $(\forall x, y \in A) \quad x\,\varrho\,y \;\wedge\; y\,\varrho\,x \;\Rightarrow\; x = y$;
- *транзитивна*, **Т**, ако $(\forall x, y, z \in A) \quad x\,\varrho\,y \;\wedge\; y\,\varrho\,z \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z$.

Напоменимо да се антисиметричност може задати и као:

$$(\forall x, y \in A) \quad x \neq y \;\wedge x\,\varrho\,y \;\Rightarrow\; y \not\varrho\ x.$$

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.3.
Релација ϱ на скупу A је *релација еквиваленције* ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна (**Р**, **С**, **Т**).
Релација ϱ на скупу A је *релација поретка* (или *уређење* скупа A) ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна (**Р**, **АС**, **Т**).

Напомена. Када не важи нека од ових особина довољно је наћи један контрапример, а ако важи, онда морамо да покажемо да важи за све елементе из S назначене у њеној дефиницији.

Ове појмове ћемо илустровати на неколико примера.

ПРИМЕР 3.1.3. Испитати које од ових особина има релација $\varrho = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ из Примера 3.1.2.

Решење. **Р** Ова релација није рефлексивна, јер $1 \not\varrho 1$.

С Ова релација није симетрична, јер $1 \varrho 3 \Rightarrow 3 \varrho 1$, али ми имамо $3 \not\varrho 1$.

АС Ова релација није ни антисиметрична, јер $2 \varrho 3 \wedge 3 \varrho 2 \Rightarrow 2 = 3$, што није тачно, јер су 2 и 3 различити бројеви.

Т Ова релација није ни транзитивна, јер $1 \varrho 3 \wedge 3 \varrho 2 \Rightarrow 1 \varrho 2$, а ми имамо да $1 \not\varrho 2$, као и $3 \varrho 2 \wedge 2 \varrho 3 \Rightarrow 3 \varrho 3$, а ми имамо $3 \not\varrho 3$.

Дакле, дата релација нема ниједну од особина релација из Дефиниције 3.1.2. ■

Напомена. Видимо да у овим особинама неки од x, y, z могу бити међусобно једнаки!!!

ПРИМЕР 3.1.4. Дефинишимо релацију на скупу природних бројева, тако да су два природна броја у релацији ако и само ако су једнаки. Показати да је ово и релација еквиваленције и релација поретка.

Решење. Ова релација је рефлексивна, јер је сваки број једнак самом себи. Симетрична је, јер из $x = y$ следи да је и $y = x$. Антисиметрична је, јер из $x = y$ и $y = x$ следи да је и $x = y$. Транзитивна је, јер из $x = y$ и $y = z$ следи да је $x = y = z$, односно $x = z$.

Како је ова релација рефлексивна, симетрична и транзитивна то је релација еквиваленције, а како је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна то је и релација поретка. ■

Напомена. Релација једнакости је истовремено и релација еквиваленције и релација поретка! Иако звучи да је антисиметричност нешто супротно од симетричности, ова релација је пример да релација може имати истовремено оба ова својства!

ПРИМЕР 3.1.5. Нека су за било који коначан непразан скуп A и непразан подскуп S партитивног скупа $\mathcal{P}(A)$, релације ϱ_1 и ϱ_2, дефинисане на скупу S тако да за било које $X, Y \in S$ важи

$$X \ \varrho_1 \ Y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad |X| \leqslant |Y|, \quad X \ \varrho_2 \ Y \ \Leftrightarrow \ |X| \geqslant |Y|,$$

где $|A|$ означава број елемената скупа A. Ове релације су рефлексивне и транзитивне релације на скупу S, али нису ни симетричне, ни антисиметричне. ■

ПРИМЕР 3.1.6. На скупу $\mathbb{R}$ дата је релација

$$x \varrho y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x < y.$$

Релација $<$ на скупу реалних бројева је само транзитивна (остале особине нема – покажите!). ■

ПРИМЕР 3.1.7. На партитивном скупу $\mathcal{P}(A)$ непразног скупа A дата је релација

$$X \varrho Y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

Ова релација је само симетрична. ■

3.2 Представљање релација

Бинарну релацију ϱ на коначном скупу A са n елемената можемо представити на следеће начине:

- скуповно – као скуп уређених парова елемената из скупа A (у дефиницији бинарне релације ϱ на коначном скупу A имамо да је она подскуп Декартовог производа $A^2 = A \times A$);

- таблично - тако што се нацрта таблица чије врсте и колоне представљају елементе A, а затим се у пресеку врсте x и колоне y ставља 1 уколико је $x \varrho y$, а 0 уколико није $x \varrho y$, тј. $x \not\varrho y$ (често се уместо симбола 1 и 0 користе $\top$ и $\perp$, али таква таблица је непрегледнија, а и у ери рачунара користићемо рачунарске ознаке!);

- графовски – помоћу оријентисаног графа[6], тако што се сваки елемент скупа A представи чвором, а затим се чворови x и y повежу граном од x ка y ако је $x\,\varrho\, y$.

Овде ћемо поред представљања релација на ове начине, дати и како можемо утврдити основне особине релација из графа и таблице.

ПРИМЕР 3.2.1. На скупу $\{1,2,3,4,5,6\}$ можемо да дефинишемо бинарну релацију ϱ тако што ћемо рећи да је $x\,\varrho\, y$ ако и само ако је x мање од y и x дели y, тј.

$$x\,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x<y \ \wedge\ x \mid y.$$

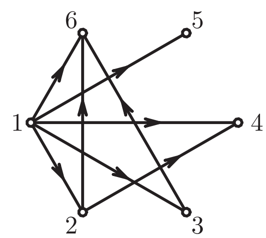
Представити ову релацију на све набројане начине.

Решење. Релацију ϱ чине следећи парови елемената:

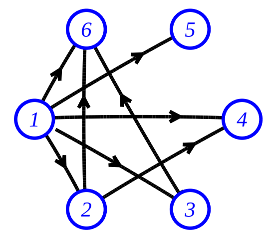
$$\varrho=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}.$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Табела 3.1.



Слика 3.1.



Слика 3.2.

У Табели 3.1 је дат таблични приказ релације ϱ. На Слици 3.1 је представљена ова релација одговарајућим оријентисаним графом. Ознаку чвора можемо ставити и унутар чвора, што је приказано на Слици 3.2. ■

Сада ћемо дати тврђења која нам помажу да установимо које од основних особина (рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност) има релација на основу њене таблице или графа.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Нека је релација ϱ на коначном скупу A дата таблично.

- Релација је рефлексивна ако и само ако се на свим позицијама на главној дијагонали[7] налази 1.
- Релација је симетрична ако и само ако за сваки пар елемената који су симетрични у односу на главну дијагоналу важи да су једнаки (или оба 0 или оба 1).
- Релација је антисиметрична ако и само ако за сваки пар елемената који су симетрични у односу на главну дијагоналу важи да нису оба 1 (може бити или да су оба 0 или да је један 0, а други 1). □

Видимо да из таблице не можемо да установимо да ли је релација транзитивна. То можемо на основу графа релације.

Сада ћемо научити како можемо да установимо које од основних особина релација има на основу њеног графа. Након тога ћемо дати и визуелну представу тих особина на основу графа релације.

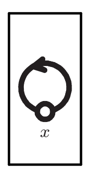
[6] Формална дефиниција оријентисаног графа је дата у наредној глави.
[7] Главна дијагонала је дијагонала која иде од горњег левог угла до доњег десног угла квадратне таблице (слично као код матрица!).

ТЕОРЕМА 3.2.2. Нека је релација ϱ на коначном скупу A дата преко одговарајућег оријентисаног графа.

- Релација је рефлексивна ако и само ако се код сваког чвора x налази петља (петља је грана која полази из и завршава се у том чвору).
- Релација је симетрична ако и само ако за свака два различита чвора x и y важи да или нису спојени ниједном граном или су спојени са две гране супротних оријентација.
- Релација је антисиметрична ако и само ако за свака два различита чвора x и y важи да нису спојени са две гране супротних оријентација (тј. да или нису спојени ниједном граном или су спојени са тачно једном граном).
- Релација је транзитивна ако и само ако за сваке две гране које се надовезују, постоји грана (тзв. „пречица“) која води од полазног чвора прве гране до завршног чвора друге гране, тј. ако постоје гране (x, y) и (y, z), онда постоји и грана (x, z). □

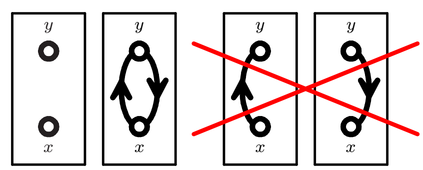
За својство транзитивности можемо користити и следећу особину. Релација је транзитивна ако и само ако за сваки пут у оријентисаном графу постоји „пречица“ дужине 1, тј. постоји грана која спаја почетну и крајњу тачку тог пута.

Представимо све случајеве из Тврђења 3.2.2 и графички (на Слици 3.3 је приказана рефлексивност, на Слици 3.4 је симетричност, на Слици 3.5 је антисиметричност, на Слици 3.6 је транзитивност):



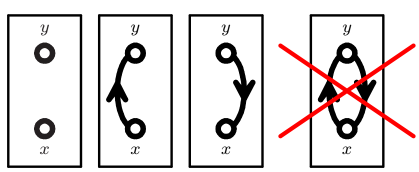
Р

Слика 3.3.



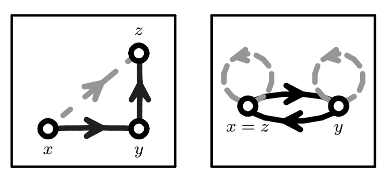
С

Слика 3.4.



АС

Слика 3.5.



Т

Слика 3.6.

При провери услова транзитивности за гране (x, y) и (y, z), ако је једна од њих петља, услов је задовољен. У супротном постоје два случаја: ако су чворови x, y и z различити и ако је $x = z \neq y$.

Када су x, y и z различити, тада треба да постоји грана (x, z) (приказана на Слици 3.6 лево испрекиданом линијом сиве боје).

Када је $x = z \neq y$, онда треба да постоји петља (x, x). Али у овом случају можемо узети и обрнути редослед грана:

$$(y, x) \ \wedge \ (x, y) \quad \Rightarrow \quad (y, y),$$

па следи да треба да постоји још једна петља (y, y). Стога у овом случају транзитивност повлачи да морамо имати две петље (приказане на Слици 3.6 десно испрекиданим сивим линијама).

Напомена. Из таблице се не може директно одредити да ли је релација транзитивна. Ту је графовски приступ у предности, где ћемо редом пратити по две гране које се надовезују и испитивати да ли постоји и трећа грана која се јавља у транзитивности. Уколико релација није транзитивна, довољно је наћи један контрапример, али ако јесте, потребно је проверити свих n^3 могућих избора $x, y, z \in A$, где је $|A| = n$.

ПРИМЕР 3.2.2. Дата је релација $\varrho = \{(1,3),(2,2),(2,3),(3,2)\}$ (из примера 3.1.2 и 3.1.3) на скупу $A = \{1,2,3\}$. Представити је на описане начине, а затим испитати (на основу таблице и графа) које од основних особина има.

Решење. Представићемо ову релацију на следеће начине: тако што набројимо све елементе који су у релацији и који нису, преко таблице и преко оријентисаног графа.

- Можемо набројати све елементе који су у релацији:
  $1\,\varrho\,3$, $2\,\varrho\,2$, $2\,\varrho\,3$ и $3\,\varrho\,2$.
  Такође можемо набројати и све елементе који нису у релацији:
  $1 \not\varrho\; 1$, $1 \not\varrho\; 2$, $2 \not\varrho\; 1$, $3 \not\varrho\; 1$ и $3 \not\varrho\; 3$.

- Таблично:

ϱ	1	2	3
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	0

Табела 3.2.

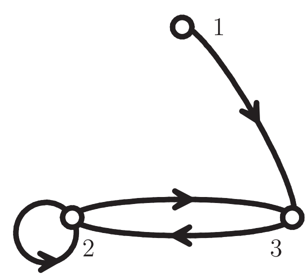
(или

ϱ	1	2	3
1	$\perp$	$\perp$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\top$
3	$\perp$	$\top$	$\perp$

)

Табела 3.3.

- Преко одговарајућег оријентисаног графа:



Слика 3.7.

Сада ћемо испитати основне особине ове релације.
Р Ова релација није рефлесивна, јер $1 \not\varrho\; 1$.
Ово можемо видети и из Табеле 3.2 (на главној дијагонали би морали да имамо све 1) и из оријентисаног графа са Слике 3.7 (код сваког елемента би морали да имамо петљу, а не само код 2).

С Ова релација није симетрична, јер $1\,\varrho\,3 \;\Rightarrow\; 3\,\varrho\,1$, али ми имамо $3 \not\varrho\; 1$.
Ово можемо видети и из Табеле 3.2 (елементи симетрични у односу на главну дијагоналу морају бити међусобно једнаки) и из графа са Слике 3.7 (између свака два различита чвора би морали да имамо или 0 или 2 гране).

АС Ова релација није ни антисиметрична, јер $2\,\varrho\,3$ и $3\,\varrho\,2 \;\Rightarrow\; 2 = 3$, што није тачно, зато што су 2 и 3 различити бројеви.
Ово можемо видети и из Табеле 3.2 (елементи симетрични у односу на главну дијагоналу не могу оба бити 1) и из графа са Слике 3.7 (између свака два различита чвора мора бити или 0 или 1 грана).

Т Није ни транзитивна, јер $1\,\varrho\,3$ и $3\,\varrho\,2 \;\Rightarrow\; 1\,\varrho\,2$, а ми имамо $1 \not\varrho\; 2$.
Даћемо још један контрапример (који није тако очигледан): $3\,\varrho\,2$ и $2\,\varrho\,3 \;\Rightarrow\; 3\,\varrho\,3$, а за релацију ϱ важи $3 \not\varrho\; 3$.
Ово можемо видети и из графа са Слике 3.7 (због грана $(1,3)$ и $(3,2)$ имамо пут $1-3-2$, па морамо имати и грану $(1,2)$ коју немамо!), док из Табеле 3.2 то не можемо уочити.

У овим особинама неки од x, y, z могу бити међусобно једнаки! ∎

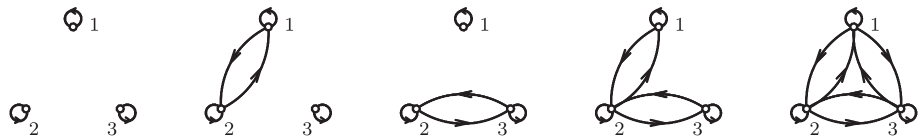
ПРИМЕР 3.2.3. Нека је релација ϱ на скупу $\{1,2,\ldots,n\}$ рефлексивна, симетрична и ако је $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ и $i\,\varrho\,k$, тада је $i\,\varrho\,j$ и $j\,\varrho\,k$. Одредити све такве релације за $n = 3$.

Решење. Ове релације прво ћемо задати преко скупа уређених парова.

$$\varrho_1 = \{11, 22, 33\} \quad \varrho_2 = \{11, 12, 21, 22, 33\} \quad \varrho_3 = \{11, 22, 23, 32, 33\}$$

$$\varrho_4 = \{11, 12, 21, 22, 23, 32, 33\} \quad \varrho_5 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

Ради веће прегледности смо писали ij уместо уређеног пара (i,j).



Слика 3.8.

Ове релације су редом представљене преко одговарајућих оријентисаних графова на Слици 3.8. ∎

Напомена. Може се показати да је број оваквих релација на скупу $\{1, 2, \dots, n\}$ једнак Каталановом броју $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ који се јавља у доста примена у рачунарству (број коректних низова заграда, као и број уређених бинарних стабала је исто C_n). Више о Каталановим бројевима може се наћи у [17].

3.3 Релације еквиваленције

Подсетимо се да је релација еквиваленције, релација која је рефлексивна, симетрична и транзитивна. У наредном примеру сусрећемо се са једном таквом релацијом.

ПРИМЕР 3.3.1. Нека су дати скуп $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и његови узајамно дисјунктни подскупови $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{4, 5\}$ и $B_3 = \{6, 7\}$. На скупу A можемо да дефинишемо релацију ϱ на следећи начин:

$$x \,\varrho\, y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ и } y \text{ припадају истом подскупу } B_i.$$

Показати да је релација ϱ релација еквиваленције на скупу A.

Решење. Ова релација је очигледно рефлексивна и симетрична. Транзитивност следи из чињенице да, ако је $x \,\varrho\, y$ и $y \,\varrho\, z$, тада x и z припадају истом подскупу коме припада и y. Како y припада тачно једном подскупу B_i, јер су они узајамно дисјунктни, то и x и z припадају овом истом подскупу B_i, па закључујемо да је $x \,\varrho\, z$. ∎

Претходни пример уједно илуструје и следећу дефиницију.

ДЕФИНИЦИЈА 3.3.1. Нека је ϱ релација еквиваленције на скупу A и нека је $x \in A$. Скуп

$$C_x = \{y \in A \mid x \,\varrho\, y\}$$

назива се *класа еквиваленције* елемента x. Понекад се користе и ознаке $[x]$, $[x]_\varrho$ и $x_{\backslash\varrho}$ за класу еквиваленције елемента x.

Напомена. Класа еквиваленције (због особине симетричности релације еквиваленције) може се дефинисати и као $C_x = \{y \in A \mid y \,\varrho\, x\}$.

ПРИМЕР 3.3.2. На скупу $\{11, 22, 34, 36, 56\}$ је дата релација ϱ: $x \,\varrho\, y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}$ разлика збира цифара броја x и збира цифара броја y је дељива са 3.

а) Набројати све елементе који јесу и који нису у релацији ϱ.

б) Представити дату релацију таблично и преко графа.

в) Показати да је то релација еквиваленције и одредити све класе еквиваленције.

Решење. Поједноставимо релацију ϱ. Број је дељив са 3 ако и само ако је његов збир цифара дељив са 3, па се релација своди на:

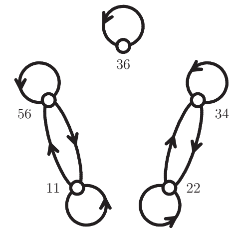
$$x \,\varrho\, y \text{ ако и само ако је разлика } x - y \text{ дељива са } 3$$

(тј. да бројеви x и y дају исти остатак при дељењу са 3).

а) У релацији су: $11\,\varrho\,11$, $11\,\varrho\,56$, $22\,\varrho\,22$, $22\,\varrho\,34$, $34\,\varrho\,22$, $34\,\varrho\,34$, $36\,\varrho\,36$, $56\,\varrho\,11$, $56\,\varrho\,56$.
У релацији нису: $11 \not\varrho\ 22$, $11 \not\varrho\ 34$, $11 \not\varrho\ 36$, $22 \not\varrho\ 11$, $22 \not\varrho\ 36$, $22 \not\varrho\ 56$, $34 \not\varrho\ 11$, $34 \not\varrho\ 36$, $34 \not\varrho\ 56$, $36 \not\varrho\ 11$, $36 \not\varrho\ 22$, $36 \not\varrho\ 34$, $36 \not\varrho\ 56$, $56 \not\varrho\ 22$, $56 \not\varrho\ 34$, $56 \not\varrho\ 36$.
б) Дату релацију можемо представити таблично (Табела 3.1) и преко оријентисаног графа (Слика 3.1):

ϱ	11	22	34	36	56
11	1	0	0	0	1
22	0	1	1	0	0
34	0	1	1	0	0
36	0	0	0	1	0
56	1	0	0	0	1

Табела 3.1.



Слика 3.1.

в) Ова је релација **P** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да код сваког чвора имамо петљу).

Ова је релација **C** (у таблици су елементи, који су симетрични у односу на главну дијагоналу, међусобно једнаки; у графу видимо да између два различита чвора имамо или 0 или две гране).

Ова релација није **AC** (не важи $11\,\varrho\,56$ и $56\,\varrho\,11 \ \Rightarrow\ 11 = 56$).

Ова је релација **T** (видимо са графа, јер за све путеве постоје и „пречице“ дужине 1).

Ова релација је **P**, **C** и **T**, па је релација еквиваленције (како није **AC** она није релација поретка!).

Класе еквиваленције су:

$[11] = [56] = \{11, 56\}, \qquad [22] = [34] = \{22, 34\}, \qquad [36] = \{36\}.$ ■

Напомена. Може се показати да је овако задата релација ϱ (тј. $x\,\varrho\,y$ ако и само ако је $x - y$ дељиво са 3) и на скупу целих бројева једна релација еквиваленције. Ова релација се назива *конгруенција по модулу* 3 и означава се са $x \equiv y \pmod 3$. Користи се и ознака $x \equiv_3 y$. Конгруенције по модулу имају значајну улогу у Теорији бројева.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Нека је ϱ релација еквиваленције на скупу A. Класе еквиваленције имају следећа својства.

а) Свака класа је непразна - класа C_x садржи бар елемент x.

б) Уколико су два елемента x и y у релацији ϱ, тада су њихове класе једнаке, тј. $C_x = C_y$.

в) Уколико x и y нису у релацији ϱ, тада су њихове класе дисјунктне, тј. $C_x \cap C_y = \emptyset$.

г) Унија свих класа еквиваленције је једнака целом скупу A, тј. важи $A = \bigcup\limits_{x\in A} C_x$.

Доказ. **а)** За сваки $x \in A$, због рефлексивности је $x\,\varrho\,x$, па је $x \in C_x$.

б) Нека је $x\,\varrho\,y$ (услед симетричности је и $y\,\varrho\,x$). Сада из $w \in C_x$ следи да је $w\,\varrho\,x$ и $x\,\varrho\,y$, па из транзитивности имамо $w\,\varrho\,y$, тј. $w \in C_y$. Тиме смо показали да је $C_x \subseteq C_y$. Такође важи и обрнуто, тј. из $w \in C_y$ следи да је $w\,\varrho\,y$ и $y\,\varrho\,x$, па имамо и $w\,\varrho\,x$, тј. $w \in C_x$. Тиме смо показали да је $C_y \subseteq C_x$. Из $C_x \subseteq C_y$ и $C_y \subseteq C_x$ следи да је $C_x = C_y$.

в) Нека је $x \not\varrho\ y$. Претпоставимо да постоји $a \in C_x \cap C_y$. Тада је $x\,\varrho\,a$ и $a\,\varrho\,y$, па, на основу транзитивности, добијамо да је $x\varrho y$, што је у супротности са полазном претпоставком. Из добијене контрадикције закључујемо да класе C_x и C_y морају бити дисјунктне, тј. да важи $C_x \cap C_y = \emptyset$.

г) Из дефиниције класе еквиваленције добијамо да за свако $x \in A$ важи да је $C_x \subseteq A$, одакле следи и да је $\bigcup\limits_{x\in A} C_x \subseteq A$. Са друге стране, за свако $y \in A$ важи да је $y \in C_y \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} C_x$, па закључујемо да је $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} C_x$. Из $\bigcup\limits_{x\in A} C_x \subseteq A$ и $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} C_x$ добијамо $A = \bigcup\limits_{x\in A} C_x$. □

На основу Тврђења 3.3.1 под б) и в) следи да, ако две класе $[x]_\varrho$ и $[y]_\varrho$ нису дисјунктне, тј. ако имају непразан пресек, онда морају да буду једнаке.

ПРИМЕР 3.3.3. Нека је релација ϱ дата на следећи начин:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2y - x = y^2x - y.$$

Показати да је ϱ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{R}$.
Одредити класе еквиваленције елемената 0, 1, -3, 2 и $\frac{1}{2}$.

Решење. Услов којим је дефинисана релација можемо трансформисати:

$$x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow\; x^2y - x = y^2x - y \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y),$$

где је $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Може се показати (решавањем квадратне једначине $yx^2 - (y^2+1)x + y = 0$ по x) да је

$$x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow\; (x = y) \vee (x = \frac{1}{y}).$$

Испитајмо основне особине релације ϱ на скупу $\mathbb{R}$:

P $f(x) = f(x) \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,x;$ ✓

C $x\,\varrho\,y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; f(y) = f(x) \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x;$ ✓

AC $x\,\varrho\,y$ и $y\,\varrho\,x \;\Rightarrow\; x = y$ не важи, јер је $2\,\varrho\,\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\,\varrho\,2$, а $2 \neq \frac{1}{2}$; ↯

T $x\,\varrho\,y$ и $y\,\varrho\,z \;\Rightarrow\; f(x) = f(y)$ и $f(y) = f(z) \;\Rightarrow\; f(x) = f(z) \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z.$ ✓

Како је релација ϱ рефлексивна, симетрична и транзитивна (P,C,T), она је релација еквиваленције. Како није AC, то није релација поретка.

Класе еквиваленције су:

$[0] = \{0\}$, $[1] = \{1\}$, $[-3] = \{-3, -\frac{1}{3}\}$, $[2] = [\frac{1}{2}] = \{2, \frac{1}{2}\}$. ■

ПРИМЕР 3.3.4. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције $[0]$, $[1]$ и $[2]$.

Решење. Прво ћемо утврдити када су два елемента у релацији.
$x\,\varrho\,y \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$ или $x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow x = y$ или $x = -y$ или $x = \frac{1}{y}$ или $x = \frac{-1}{y}$.
Дакле,

$$x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = y \\ x = -y \\ x = \frac{1}{y} \\ x = \frac{-1}{y}\,. \end{cases}$$

P $x = x$, па је $x\,\varrho\,x$. ✓

C Ако је $x\,\varrho\,y$, онда имамо 4 случаја:

$$1^\circ\ x = y, \qquad 2^\circ\ x = -y, \qquad 3^\circ\ x = \tfrac{1}{y} \quad \text{и} \quad 4^\circ\ x = \tfrac{-1}{y}.$$

Размотримо сваки од њих понаособ.
$1^\circ\ x = y \;\Rightarrow\; y = x \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x;$ $2^\circ\ x = -y \;\Rightarrow\; y = -x \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x;$
$3^\circ\ x = \frac{1}{y} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x;$ $4^\circ\ x = \frac{-1}{y} \;\Rightarrow\; y = \frac{-1}{x} \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x.$
Како смо у сва 4 случаја добили $x\,\varrho\,y \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x$, показали смо да је релација ϱ симетрична. ✓

T Ако је $x\varrho y$, онда имамо 4 случаја и, ако је $y\varrho z$, онда имамо 4 случаја, што даје укупно $4 \cdot 4 = 16$ случаја (што би изискивало доста времена и простора), те ћемо прибећи редукцији случајева.

Ако је $x\,\varrho\,y$, онда имамо 2 случаја $1^\circ\ x^2 = y^2$ и $2^\circ\ x^2 = \frac{1}{y^2}$.

Ако је $y\,\varrho\,z$, онда имамо 2 случаја a) $y^2=z^2$ и b) $y^2=\frac{1}{z^2}$.
То даје укупно $2\cdot 2=4$ случаја:
$1^\circ a)$ $x^2=y^2$, $y^2=z^2$, $1^\circ b)$ $x^2=y^2$, $y^2=\frac{1}{z^2}$, $2^\circ a)$ $x^2=\frac{1}{y^2}$, $y^2=z^2$ и $2^\circ b)$ $x^2=\frac{1}{y^2}$, $y^2=\frac{1}{z^2}$ и у сва 4 случаја се добија $x\,\varrho\,y\ \wedge\ y\,\varrho\,z\ \Rightarrow\ x\,\varrho\,z$, па је релација ϱ транзитивна. ✓

Како је Р,С,Т, релација ϱ је релација еквиваленције на скупу реалних бројева.

Одредимо тражене класе еквиваленције: $[0]=\{y\in\mathbb{R}\mid 0\,\varrho\,y\}=\{0\}$,
$[1]=\{y\in\mathbb{R}\mid 1\,\varrho\,y\}=\{1,-1\}$, $[2]=\{y\in\mathbb{R}\mid 2\,\varrho\,y\}=\{2,-2,\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\}$. ■

ДЕФИНИЦИЈА 3.3.2. *Партиција скупа* S (где је $S\neq\emptyset$) на k непразних подскупова, $k\geqslant 1$, је скуп подскупова $\{S_1,S_2,\ldots,S_k\}$ таквих да важи:

- $S_i\cap S_j=\emptyset$ за свако $i\neq j$ и
- $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_k$.

За партицију скупа се понекад користи и назив *разбијање скупа*.

Из Тврђења 3.3.1 видимо да су различите класе еквиваленције неке релације еквиваленције ϱ на скупу A узајамно дисјунктне, а да унија свих класа еквиваленције даје цео скуп A. Зато све класе еквиваленције ове релације образују једну партицију скупа A. Међутим, важи и обратно: свакој партицији скупа одговара релација еквиваленције на том скупу, чије су класе еквиваленције управо елементи партиције. То смо видели у Примеру 3.3.1, а сада ћемо дати и одговарајуће тврђење.

ТЕОРЕМА 3.3.2. Нека је $\mathcal{C}$ партиција скупа A и ϱ релација на скупу A дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad\Leftrightarrow\quad x \text{ и } y \text{ припадају истом елементу партиције } \mathcal{C}.$$

Тада је ϱ релација еквиваленције чије су класе еквиваленције управо елементи партиције $\mathcal{C}$.

Доказ. Релација ϱ је рефлексивна и симетрична по својој дефиницији. Нека је сада $x\,\varrho\,y$ и $y\,\varrho\,z$. Пошто је $\mathcal{C}$ партиција скупа A, постоји тачно један подскуп $C\in\mathcal{C}$ тако да $y\in C$ (у супротном, ако би постојала два различита подскупа који садрже y, онда би они имали непразан пресек, што је немогуће). Сада из $x\,\varrho\,y$ следи да $x\in C$ и из $y\,\varrho\,z$ следи да и $z\in C$, тако да закључујемо да важи $x\,\varrho\,z$, јер припадају истом елементу C партиције $\mathcal{C}$. Према томе, ϱ је транзитивна релација, па је и релација еквиваленције.

С друге стране, као што смо већ видели, за свако $x\in A$ постоји тачно један подскуп $C\in\mathcal{C}$ такав да $x\in C$. Класу еквиваленције C_x елемента x по дефиницији чине сви они елементи $y\in A$ који такође припадају C, одакле видимо да је $C_x=C$, тј. класе еквиваленције су управо елементи партиције $\mathcal{C}$. □

Број партиција скупа од n елемената назива се *Белов број* $B(n)$, а, према претходном тврђењу, имамо да $B(n)$ представља и број различитих релација еквиваленције на скупу са n елемената.

ПРИМЕР 3.3.5. Одредимо све могуће релације еквиваленције на скупу S, ако је:
а) $S=\{1\}$; **б)** $S=\{1,2\}$; **в)** $S=\{1,2,3\}$.

Решење. **а)** Овде имамо само једну релацију еквиваленције $\varrho=\{(1,1)\}$.

б) Овде имамо две релације еквиваленције

$$\varrho_1=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\quad\text{и}\quad\varrho_2=\{(1,1);(2,2)\}.$$

Релација ϱ_1 одговара самом скупу $\{1,2\}$ (и сам скуп је своја сопствена партиција), док ϱ_2 одговара разбијању скупа S на подскупове $\{1\}$ и $\{2\}$.

в) Скуп $\{1,2,3\}$ можемо разбити на подскупове на следеће начине (сваки од њих одређује по једну релацију еквиваленције):

$$
\begin{array}{cl}
\{1,2,3\} & \varrho_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \\
\{1,2\} \cup \{3\} & \varrho_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2);(3,3)\} \\
\{1,3\} \cup \{2\} & \varrho_3 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3);(2,2)\} \\
\{2,3\} \cup \{1\} & \varrho_4 = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3);(1,1)\} \\
\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} & \varrho_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}
\end{array}
$$

Дакле, укупно има 5 релација еквиваленције на скупу $\{1,2,3\}$. ■

Сада ћемо дати једно тврђење без доказа (доказ можете наћи у [17]), које можемо да искористимо за израчунавање Белових бројева.

ТЕОРЕМА 3.3.3. Белови бројеви задовољавају рекурентну везу

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k), \quad \text{где је} \quad B(0) = 1. \quad \square$$

ПРИМЕР 3.3.6. Израчунајмо Белове бројеве $B(n)$, за $1 \leqslant n \leqslant 11$:

Решење. Помоћу претходне рекурентне формуле добијамо Табелу 3.2. То је низ A000110 у *Енциклопедији целобројних низова* [15].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B(n)$	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147	115 975	678 570

Табела 3.2.

■

3.4 Релације поретка

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.1. Релација која је **Р**,**АС**,**Т** назива се *релација поретка* или *уређење* (а за скуп X кажемо да је *уређен скуп*).

За релацију поретка кажемо да је *релација тоталног поретка* уколико за свака 2 елемента x и y важи да је $x\,\varrho\,y$ или $y\,\varrho\,x$ (тада кажемо да су свака 2 елемента упоредива). Скуп снабдевен са релацијом тоталног поретка називамо и *ланац*. Релација поретка која није релација тоталног поретка назива се *релација парцијалног поретка*.

За релацију поретка ћемо увести још неколико појмова и дати тврђења везана за њих.

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.2. Нека је ϱ релација поретка на скупу X.

Елемент $a \in X$ је *најмањи елемент* скупа X ако важи

$$(\forall x \in X) \quad a\,\varrho\,x.$$

Елемент $a \in X$ је *највећи елемент* скупа X ако важи

$$(\forall x \in X) \quad x\,\varrho\,a.$$

Елемент $a \in X$ је *минималан елемент* скупа X ако важи

$$\neg(\exists x \in X) \quad \big(x \neq a \ \wedge\ x\,\varrho\,a\big).$$

Елемент $a \in X$ је *максималан елемент* скупа X ако важи

$$\neg(\exists x \in X) \quad \big(x \neq a \ \wedge\ a\,\varrho\,x\big).$$

Значи, елемент a је најмањи уколико је мањи од свих осталих, тј. важи $a\,\varrho\,x$ за све $x \in X$. Елемент a је минимални елемент уколико не постоји елемент који је мањи од њега.

Слично, елемент a је највећи уколико је већи од свих осталих, тј. важи $x\,\varrho\,a$ за све $x \in X$. Елемент a је максимални елемент уколико не постоји елемент који је већи од њега.

Код релација на коначном скупу које су представљене графом, из чвора који одговара најмањем елементу води грана ка свим осталим човоровима, док за минимални елемент из њему одговарајућег чвора само излазе гране (и ниједна не улази у њега).

Слично, у чвор који одговара највећем елементу воде гране из свих осталих човорова, док за максимални елемент у њему одговарајући чвор само улазе гране (и ниједна не излази у њега).

ТЕОРЕМА 3.4.1. Ако постоји најмањи елемент скупа X (у односу на релацију ϱ), он је јединствен. Тада је то и једини минималан елемент.

Ако постоји највећи елемент скупа X (у односу на релацију ϱ), он је јединствен. Тада је то и једини максималан елемент. □

Обрнуто не мора да важи (у случају бесконачних скупова), док код коначних скупова важи да ако скуп има један минималан (максималан) елемент тада је он и најмањи (највећи) елемент.

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.3. Нека је ϱ релација поретка на скупу X и нека је $A \subseteq X$.

Елемент $a \in X$ је *доња међа* (или *доња граница* или *миноранта*) скупа A ако важи

$$(\forall x \in A) \quad a\,\varrho\,x.$$

Највећа доња међа назива се *инфимум* скупа A и означава се са $\inf A$.

Елемент $a \in X$ је *горња међа* (или *горња граница* или *мајоранта*) скупа A ако важи

$$(\forall x \in A) \quad x\,\varrho\,a.$$

Најмања горња међа назива се *супремум* скупа A и означава се са $\sup A$.

Уређен скуп у коме свака два елемента имају супремум и инфимум назива се *решетка* (или *мрежа*).

ТЕОРЕМА 3.4.2. Сваки ланац је и решетка. □

Обрнуто тврђење не важи.

За графичко представљање уређених коначних скупова, осим уобичајеног графовског приказа, користе се и *Хасеови дијаграми*.

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.4. Нека је (X, ϱ) уређен скуп. Елемент $x \in X$ је *непосредни претходник* елемента $y \in X$ ако је $x \neq y$, $x\,\varrho\,y$, и не постоји $z \in S$, различит од x и y, такав да је $x\,\varrho\,z$ и $z\,\varrho\,y$. Другим речима, x је непосредни претходник од y ако ниједан други елемент скупа A не може да се „смести“ између x и y.

Преко непосредног претходника у уређеном скупу (X, ϱ) можемо за сваки елемент скупа X да одредимо његов *ниво* у односу на релацију ϱ.

Елемент $x \in X$ је на нивоу 0 ако нема непосредних претходника (елементи на нивоу 0 се називају *атоми*). У супротном, елемент x је на нивоу k, $k > 0$, ако има бар једног непосредног претходника на нивоу $k-1$, док сви остали његови непосредни претходници имају ниво не већи од $k-1$.

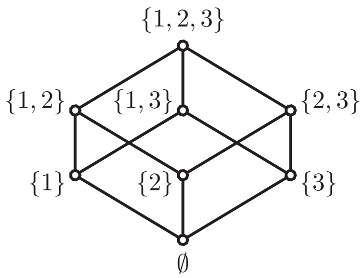
Сада се *Хасеов дијаграм* скупа (X, ϱ) добија на следећи начин.

Сваком елементу из X придружује се један чвор дијаграма. Сви ови чворови се поређају према њиховим нивоима, почевши од нивоа 0 на дну до највећег нивоа на врху, и сваки чвор се спаја линијама са свим својим непосредним претходницима.

Ове линије могу бити неоријентисане или се оне оријентишу, од чвора мањег нивоа ка чвору већег нивоа, да би се нагласило који је елемент са којим у релацији. Чешће се користи оријентисан Хасеов дијаграм.

ПРИМЕР 3.4.1. Одредити (неоријентисан) Хасеов дијаграм за парцијално уређен скуп $\big(\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\subseteq\big)$.

Решење.

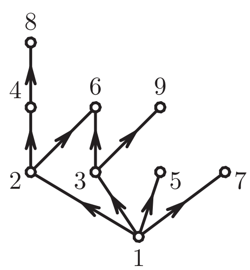


У овом Хасеовом дијаграму је празан скуп $\emptyset$ на нивоу 0, на нивоу 1 су $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$, на нивоу 2 су $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$, док је на нивоу 3 цео скуп $\{1,2,3\}$.

■

ПРИМЕР 3.4.2. Одредити (оријентисан) Хасеов дијаграм за парцијално уређен скуп $\big(\{1,2,\ldots,9\},\mid\big)$. Подсетимо се да је $\mid$ релација дељивости, која се дефинише: $a \mid b \Leftrightarrow (\exists q\in\mathbb{Z})\ b = a\cdot q$.

Решење.

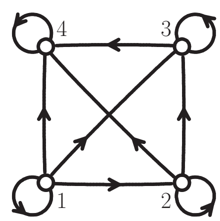


Како број 1 дели све остале, он је на нивоу 0, на нивоу 1 су прости бројеви 2, 3, 5 и 7, на нивоу 2 су 4, 6 и 9, док је на нивоу 3 само 8.

■

ПРИМЕР 3.4.3. Оријентисани Хасеов дијаграм тотално уређеног скупа $\big(\{1,2,3,4\},\leqslant\big)$.

Решење.



На слици лево је дат Хасеов дијаграм тотално уређеног скупа (из његовог изгледа је јасније зашто се назива ланац!).

У њему је број 1 на нивоу 0, 2 је на нивоу 1, 3 на нивоу 2, док је 4 на нивоу 3. ■

Из начина конструкције Хасеовог дијаграма можемо да видимо да су елементи на истом нивоу неупоредиви. Из овога закључујемо да код тотално уређеног скупа (или ланца), код кога су свака два елемента упоредива, на сваком нивоу постоји тачно један елемент. Стога је Хасеов дијаграм ланца $\big(\{1,2,3,4\},\leqslant\big)$, приказан на претходној слици лево, много једноставнији и прегледнији него одговарајући графовски приказ истог овог скупа $\big(\{1,2,3,4\},\leqslant\big)$ који је дат на слици десно.

ПРИМЕР 3.4.4. *Писмени испит, фебруар 2009.*

Нека је ρ бинарна релација дефинисана на $S\subseteq\mathbb{R}^+$ тако да за све $x,y\in S$ важи

$$x\ \varrho\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \frac{x+5y}{3y}\geqslant 2.$$

а) Доказати да је (S,ϱ) парцијално уређен скуп.

б) Представити релацију графом и таблично, ако је $S=\left\{\frac{1}{2},1,\sqrt{3},\pi,5\right\}$.

в) Наћи супремум и инфимум подскупа $T=\{1,\sqrt{3},5\}$.

г) Да ли је (S,ϱ) решетка, где је $S=\left\{\frac{1}{2},1,\sqrt{3},\pi,5\right\}$?

Решење. На основу чињенице да је $S \subseteq \mathbb{R}^+$ следи да су сви $x, y > 0$, па неједнакост којом је задата релација можемо да помножимо са $3y > 0$ (и неће се мењати знак!). Одатле добијамо да је $x \,\varrho\, y \overset{\text{деф}}{\iff} x + 5y \geqslant 6y$, тј.

$$x \,\varrho\, y \overset{\text{деф}}{\iff} x \geqslant y.$$

а) За релацију $\geqslant$ знамо да је релација поретка (а то можемо и показати – аналогно као и за релацију $\leqslant$ из Задатка 3.4.6.), па је и релација ϱ релација поретка, тј. (S, ϱ) је парцијално уређен скуп.

Иако је претходно довољно да кажемо, сада ћемо строго формално и показати да је ϱ релација поретка.

Р Како је $x \geqslant x$ за свако $x \in \mathbb{R}^+$, то је ова релација рефлексивна.

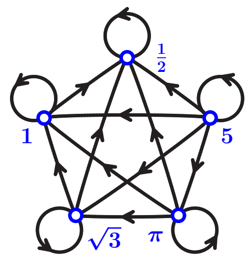
АС Ако је $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$ онда је $x \geqslant y \geqslant x$, па како је $x = x$, то и у претходним неједнакостима мора да важи знак једнакости, тј. добијамо да је $x = y$, односно релација ϱ је антисиметрична.

Т Ако је $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$ онда је $x \geqslant y \geqslant z$, тј. $x \geqslant z$, односно релација ϱ је транзитивна.

Како је ова релација Р,АС,Т она је релација поретка.

б)

ϱ	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	π	5
$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
$\sqrt{3}$	1	1	1	0	0
π	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	1



в) Горње међе скупа T су сви бројеви a, такви да је $x \,\varrho\, a$ (тј. $x \geqslant a$) за све $x \in T$. Супремум је најмања (у односу на ϱ) горња међа, тј. $\sup T = 1$.

Доње међе скупа T су сви бројеви a, такви да је $a \,\varrho\, x$ (тј. $a \geqslant x$) за све $x \in T$. Инфимум је највећа (у односу на ϱ) доња међа, тј. $\inf T = 5$.

г) Како је релација $\geqslant$ релација тоталног поретка (ланац) на сваком скупу S, то је она и решетка.

■

ПРИМЕР 3.4.5. *Колоквијум 2011.*
Дата је релација

$$\varrho: \; x \,\varrho\, y \overset{\text{деф}}{\iff} x = y \text{ или ако је } y < x \text{ и збир цифара броја } y \text{ дели збир цифара броја } x$$

на скупу $X = \{11, 20, 22, 32, 50\}$.

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.

б) Представити дату релацију таблично и преко графа.

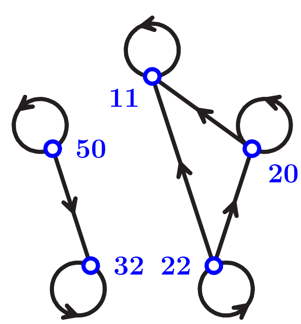
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Решење. **б)**

	11	20	22	32	50
11	1	0	0	0	0
20	1	1	0	0	0
22	1	1	1	0	0
32	0	0	0	1	0
50	0	0	0	1	1



в) Ова је релација **P** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

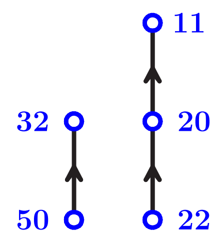
Ова релација није **C** (нпр. $20\,\varrho\,11$, а $11\,\not\varrho\,20$).

Ова је релација **AC** (у таблици међу паровима елемената који су симетрични у односу на главну дијагоналу нема 1 и 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 1 грану).

Ова је релација **T** (видимо са графа јер кад год имамо 2 гране које се надовезују имамо и „пречицу“: практично ту ситацију само имамо код $22\,\varrho\,20,\ 20\,\varrho\,11 \Rightarrow 22\,\varrho\,11$).

г) Ова релација није **C**, па није релација еквиваленције.
Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је релација поретка.

д) Ово је релација парцијалног поретка (није тоталног поретка јер нису свака 2 елемента упоредива, нпр. $11\,\not\varrho\,50$ и $50\,\not\varrho\,11$; а ни Хасеов дијаграм јој није ланац). Хасеов дијаграм ове релације је:



Елементи 50 и 22 су минимални, па не постоји најмањи елемент.
Елементи 32 и 11 су максимални, па не постоји највећи елемент. ■

ПРИМЕР 3.4.6. *Писмени испит, јануар 2009.*
Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \Leftrightarrow \quad xy \leqslant y^2$$

релација поретка на скупу: **а)** $\mathbb{N}$ природних бројева; **б)** $\mathbb{Z}$ целих бројева.

Решење. **а)** Релација ϱ је дефинисана на скупу $\mathbb{N}$, па су сви бројеви позитивни. Стога услов када су два елемента у релацији, $x\,\varrho\,y \overset{\text{деф}}{\iff} xy \leqslant y^2$, можемо да поделимо са $y > 0$ (због $y > 0$ неће се мењати знак!), па добијамо да је

$$x\,\varrho\,y \overset{\text{деф}}{\iff} x \leqslant y,$$

а за релацију $\leqslant$ познато је да је релација поретка, али ћемо то овде и показати.

Како је $x \leqslant x \Rightarrow x\,\varrho\,x$, тј. ова је релација **P**.

Ова је релација **AC**: $x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x \leqslant y \leqslant x$, а како важи $x = x$ то у претходној неједнакости свуда мора да важи знак једнакости, па је $x = y$.

Ова је релација **T**: $x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.

Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је и релација поретка.

б) Важи $1\,\varrho\,{-1}$ јер је $1 \cdot (-1) = -1 \leqslant 1 = (-1)^2$ и $-1\,\varrho\,1$ јер је $-1 \cdot 1 = -1 \leqslant 1 = 1^2$. Ако би важила антисиметричност, тада би имали да је $1 = -1$, што није тачно. Тиме смо показали да релација ϱ на скупу $\mathbb{Z}$ није **AC**, па она није релација поретка. ■

Напомена. Ова релација није **C** (нпр. $1 \leqslant 2 \ \Rightarrow\ 2 \leqslant 1$ ↯), па није релација еквиваленције.

ПРИМЕР 3.4.7. Показати да је релација $\mid$ („дели“) релација поретка на скупу $S \subseteq \mathbb{N}$, а да није релација поретка на $\mathbb{Z}$. Да ли је ово релација тоталног или парцијалног поретка?
Да ли је структура $(\mathbb{N}, \mid)$ решетка?

Решење. Како $x \mid x$ (јер постоји $k \in \mathbb{Z}$ такво да је $x = k \cdot x$ – то је $k = 1$), ова је релација **P**.

Ова је релација **AC** у $x \in \mathbb{N}$: $x \mid y,\ y \mid x \Rightarrow y = k \cdot x,\ x = \ell \cdot y \Rightarrow x = \ell \cdot k \cdot x$ (ова једнакост важи за свако $x \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \ell \cdot k = 1 \Rightarrow k = 1,\ \ell = 1$ (јер су $k, \ell \in \mathbb{N}$) и коначно, из $\ell = 1 \Rightarrow x = y$.

У скупу $\mathbb{Z}$ једначина $\ell \cdot k = 1$ има и решење $k = \ell = -1$, на основу које конструишемо контрапример за **АС**: $2 \mid -2,\ -2 \mid 2 \Rightarrow 2 = -2$ ↯. Овим смо показали да релација дељивости није релација поретка на скупу $\mathbb{Z}$.

Ова је релација **Т**: $x \mid y,\ y \mid z \Rightarrow y = k \cdot x,\ z = m \cdot y \Rightarrow z = m \cdot k \cdot x$ (а $k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \cdot k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x \mid z$.

Особине **Р**, **АС** и **Т** важе у $\mathbb{N}$, па и у сваком његовом подскупу, $S \subseteq \mathbb{N}$, те смо показали да је $\mid$ релација поретка у $S \subseteq \mathbb{N}$.

Да ли је ово релација тоталног или парцијалног поретка је трик питање! Зависи од тога шта је скуп S!

Нпр. ако S има само 1 елемент или 2 елемента од којих један дели други онда је то релација тоталног поретка. S може бити и бесконачан: за $S = \{2^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ то је такође релација тоталног поретка.

У наредном задатку дајемо примере скупа S код којих је ово релација парцијалног поретка.

У скупу $\mathbb{N}$ постоји инфимум за било која 2 броја (то је НЗД – највећи заједнички делилац), а супремум за било која 2 броја је НЗС (најмањи заједнички садржалац). Стога је структура $(\mathbb{N}, |)$ решетка. ■

Напомена. Честа грешка је да је „k једино слово које знате“! Ако $x \mid y$ онда ставимо да је $y = k \cdot x$, а за $y \mid x$ у испитивању **АС** треба узети неко ново слово, нпр. ℓ и онда имамо да је $x = \ell \cdot y$. Слично уместо 2 пута k, узели смо k и m при испитивању **Т**.

ПРИМЕР 3.4.8. Нека је релација „дели“, $|$, (из претходног задатка) задата на скупу

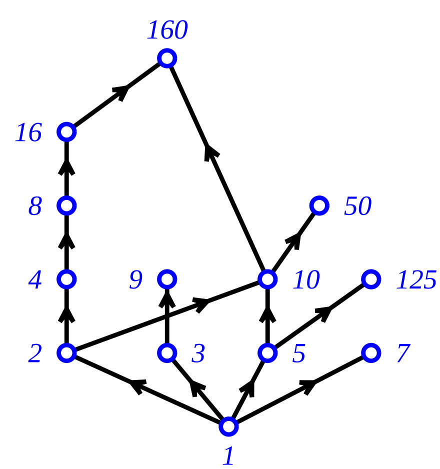
а) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 50, 125, 160\}$; **б)** $S = \mathbb{N}$; **в)** $S = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; **г)** $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Уколико је S коначан нацртати Хасеов дијаграм ове релације.

Шта су највећи, најмањи, максимални и минимални елементи (уколико постоје)?

Да ли је ова релацијска структура решетка?

Решење. **а)** Хасеов дијаграм за релацију дељивости на скупу $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 50, 125, 160\}$ (то је једини коначан скуп) је приказан на следећој слици:



Одавде видимо да је 1 најмањи елемент, а самим тим то је и једини минимални елемент.

Ова структура има више максималних елемената: 7, 9, 25, 160. Како има више максималних елемената она нема највећи елемент.

Инфимум за било која 2 броја, a и b постоји (али то није НЗД – нпр. $\inf\{50, 125\} = 5$, а НЗД$(50, 125) = 25$!!!) јер се по Хасеовом дијаграму можемо спуштати полазећи од a до највећег заједничког делиоца бројева a и b који се налази у скупу S (он сигурно постоји јер је $1 \in S$).

Супремум не постоји увек! Нпр. $\sup\{7, 9\}$ не постоји! Стога ова структура није решетка.

б),в),г) Шта су највећи, најмањи, максимални и минимални елементи (уколико постоје), као и да ли је та релацијска структура решетка даћемо у следећој таблици:

S	најмањи ел.	највећи ел.	минимални ел.	максимални ел.	решетка
б) $\mathbb{N}$	1	нема	1	нема	јесте
в) $\mathbb{N}_0$	1	0	1	0	јесте
г) $\mathbb{N}\setminus\{1\}$	нема	нема	прости бројеви	нема	није

Из ове таблице видимо колико мала промена скупа S утиче на промену основних особина релацијске структуре.

Покажимо неке од ових особина из претходне таблице.

Како 1 дели све природне бројеве (и 0), имамо да $1 \mid n$, тј. $1\,\varrho\,n$, па је 1 најмањи елемент, што повлачи да је 1 и једини минималан елемент (ово важи и у $\mathbb{N}$ и у $\mathbb{N}_0$).

И у $\mathbb{N}$ и у $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ не постоји ниједан максимални елемент (претпоставимо супротно да постоји – нека је то M, али тада $M \mid 2M$, па самим тим M није максималан!), што повлачи да не постоји ни највећи елемент.

У $\mathbb{N}_0$ је 0 највећи елемент јер 0 деле сви природни бројеви[8]: $n \mid 0$, тј. $n\,\varrho\,0$, тј. 0 највећи елемент, што повлачи да је 0 и једини максималан елемент.

И у $\mathbb{N}$ и у $\mathbb{N}_0$ ова структура је решетка (иако је то релација парцијалног поретка), јер постоје и инфимум и супремум за било која 2 елемента (посебно наводимо ако је ту 0 и ако није):

$$\inf\{a,b\} = \text{НЗД}(a,b), \qquad \sup\{a,b\} = \text{НЗС}(a,b); \qquad \inf\{a,0\} = a, \qquad \sup\{a,0\} = 0.$$

Докажимо да у $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ не постоји најмањи елемент.

Претпоставимо да постоји – нека је то m, тада $m \mid n$ за свако $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, па и за $n = 2$ важи да $m \mid 2 \Rightarrow m = 2$ (јер је то једини број у $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ који дели 2). Али тада би морало да важи $2 \mid n$ за свако $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, што није тачно (нпр. $2 \nmid 3$), па смо добили контрадикцију. Стога не постоји најмањи елемент у $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Из канонске факторизације природних бројева следи да су прости бројеви (то су бројеви који већи од 1, који су дељиви само са 1 и са самим собом: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...) минимални елементи у $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

У $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ постоји супремум било која 2 броја (то је НЗС), али не постоји инфимум за свака 2 броја: нпр. $\inf\{2,3\}$ не постоји (јер $\text{НЗД}(2,3) = 1 \notin \mathbb{N}\setminus\{1\}$), па самим тим ова структура није решетка. ■

3.5 Резиме

У овој глави смо прво увели појам релације. Затим смо дефинисали основне особине: рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност. Затим сво увели две битне класе релација: релације еквиваленције и релације поретка, којима се детаљно бавимо у каснијим поглављима. Релације смо представљали на разне начине: скуповно, преко таблице и преко графа. Из сваког од тих представљања смо извлачили закључке које особине има релација.

У наредном поглављу смо детаљно испитивали релације еквиваленције. Најважнији појам везан за релације еквиваленције је појам класе еквиваленције (ту смо дали неке особине класа), који је директно повезан са партицијама (тј. разбијањима) скупова. На крају овог поглавља смо објанили како може да се израчуна Белов број $B(n)$, који представља колико има релација еквиваленције на скупу од n елемената.

У последњем поглављу смо детаљно изучавали релације поретка (оне се још називају и уређења). Увели смо појмове најмањег, највећег, минималног, максималног елемента, доње и горње међе, супремума и инфимума, као и решетке и Хасеовог дијаграма.

[8] Чак и 0 дели 0! Зато смо релацију дељивости уводили са оним да постоји $k \in \mathbb{Z}$ – овде за k можемо узети било који број.

3.6 Питања за проверу знања

51. Које основне особине релација знаш?

52. Да ли релација која је антисиметрична није симетрична?

53. Да ли релација која је симетрична, а није рефлексивна може бити транзитивна?

54. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3\}$.

а) Колико има различитих симетричних релација на скупу A?

б) Колико има различитих рефлексивних и симетричних релација на скупу A?

в) Колико има различитих антисиметричних релација на скупу A?

55. *Општинско такмичење 2011. за I разред Б категорије*
Дат је скуп $M = \{25, 53, 71, 74\}$ и релација ϱ:
$x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow$ цифра десетица броја x је мања од цифре јединица броја y.
Представити релацију ϱ у скупу M преко таблице и графа и испитати која од својстава **P**, **C**, **AC**, **T** има релација ϱ у скупу M.

56. Дата је релација $\varrho:\ x\,\varrho\,y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} 2 \mid x \cdot y$ на скупу $\{1, -1, 2, 6\}$.

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.

б) Представити дату релацију таблично и преко графа.

в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

57. Које особине има релација еквиваленције?

58. Које особине има релација поретка?

59. На скупу од n елемената чега има више: релација поретка или релација еквиваленције?

60. Навести пример 3 релације поретка, од којих су 2 парцијалног поретка, а 1 тоталног поретка.

61. Да ли је ланац и парцијално уређен скуп исти појам?

62. Да ли најмањи елемент мора бити и минимални?

63. Ако релација има тачно један максимални елемент, да ли он мора бити и највећи елемент?

64. Како из Хасеовог дијаграма уочавамо основне особине релација?

65. Како из Хасеовог дијаграма уочавамо минималан елемент?

66. Како из таблице уочавамо највећи елемент?

67. Како из графа уочавамо најмањи елемент?

4. Теорија графова

Комбинаторика (са Теоријом графова) је једна од најстаријих области математике, која је и данас веома актуелна. Неки њени проблеми су заокупљали математичаре вековима (попут Проблема четири боје), док су неке области постале врло атрактивне са вртоглавим развојем рачунара и њиховом све већом применом при решавању реалних проблема.

4.1 Увод

Графови су математички објекти које често срећемо у свакодневном животу. Мноштво градова на некој географској карти, заједно са путевима који их повезују, представља један граф. У скупу људи на предавању неки се међусобно познају, а неки не. Ако све људе представимо тачкама, а само оне који се познају спојимо линијама добићемо један граф, који нам даје прегледну геометријску представу познанстава међу људима на том предавању. Структурна формула неког хемијског једињења или шема електричног кола такође представља један граф. Са графовском интерпретацијом релација смо се срели у Глави 4, док ћемо у овој глави дефинисати у општем случају појам графа и то помоћу појма релације!

Графови налазе примену и у решавању тзв. проблема за разбибригу. Сада ћемо навести неке од њих:

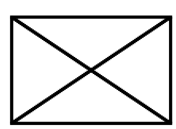
- На Слици 4.1 су приказани положаји 3 куће и 3 бунара. Повезати путем сваку кућу (К) са сваким бунаром (Б), тако да се сви ови путеви међусобно не секу.

К К К

Б Б Б

Слика 4.1.

- Обићи скакачем шаховску таблу $m \times n$, тако да скакач прође сва поља и да ни на једном не борави више од један пут.
- Може ли се једним потезом (без дизања оловке са папира и без преласка преко већ нацртаних линија) нацртати фигура са Слике 4.2?



Слика 4.2.

Навешћемо овде и неке од чувених комбинаторних проблема који су вековима заокупљали математичаре, а решени су коришћењем апарата Теорије графова.

Проблем 8 дама је један од проблема настао у оквиру тзв. „рекреативне математике“. Иако је био познат и много раније, Проблем 8 дама је први пут објављен 1848. године. Он гласи:

> На колико начина је могуће поставити 8 дама на шаховску таблу тако да се међусобно не нападају?

Свакој шаховској фигури може се придружити један граф[9] на следећи начин. Поља шаховске табле представљају чворове графа. Из чвора x иде грана ка чвору y ако са поља x дата фигура (овде дама) може да пређе на поље y. Ово је једна веза Теорије графова и шаха.

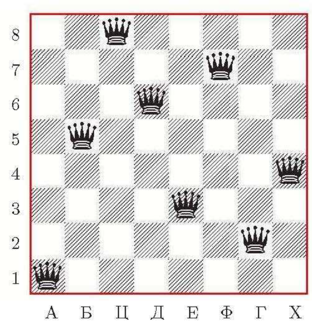
[9] Овај појам формално уводимо у следећем поглављу.

На оваквом графу који одговара дами и шаховској табли 8×8 може се формулисати одговарајући графовски проблем који је еквивалентан Проблему 8 дама и он је решен сложеним математичким апаратом уз примену рачунара.

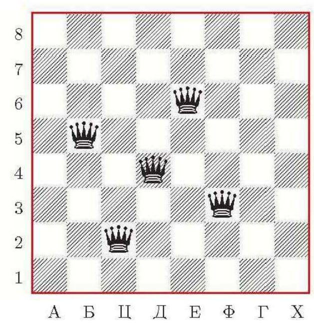
Интересантно је да је 1850. године (далеко пре ере рачунара), Наук (нем. *F. Nauck*) пронашао сва 92 решења Проблема 8 дама (занимљиво је да чувени математичар Гаус није нашао сва та решења, него само 72). Ова решења се могу добити од наредних 12 основних решења ротирањем (ротацијом) и огледањем (симетријом) шаховске табле:

1°	А1, Б5, Ц8, Д6, Е3, Ф7, Г2, Х4
2°	А1, Б6, Ц8, Д3, Е7, Ф4, Г2, Х5
3°	А2, Б4, Ц6, Д8, Е3, Ф1, Г7, Х5
4°	А2, Б5, Ц7, Д1, Е3, Ф8, Г6, Х4
5°	А2, Б5, Ц7, Д4, Е1, Ф8, Г6, Х3
6°	А2, Б6, Ц1, Д7, Е4, Ф8, Г3, Х5
7°	А2, Б6, Ц8, Д3, Е1, Ф4, Г7, Х5
8°	А2, Б7, Ц3, Д6, Е8, Ф5, Г1, Х4
9°	А2, Б7, Ц5, Д8, Е1, Ф4, Г6, Х3
10°	А3, Б5, Ц2, Д8, Е1, Ф7, Г4, Х6
11°	А3, Б5, Ц8, Д4, Е1, Ф7, Г2, Х6
12°	А3, Б6, Ц2, Д5, Е8, Ф1, Г7, Х4

На Слици 4.3 је приказано прво од горе наведених решења.



Слика 4.3.



Слика 4.4.

У шаховској литератури познат је и *Проблем 5 дама*. Он гласи:

> Колико је најмање дама потребно поставити на шаховску таблу да би сва поља била нападнута?
>
> (Подразумева се да дама напада и поље на којем се налази!)

Потребно је поставити најмање 5 дама! Поставља се питање на колико начина је могуће поставити тих 5 дама. Укупно постоји 4860 решења, која је мукотрпним пребројавањем нашао Сили (мађ. *K. Szily*) 1902. године. Једно решење је дато на Слици 4.4.

Један од најпознатијих комбинаторних проблема је *Проблем 4 боје*:

> Да ли се произвољна географска карта може обојити са 4 боје тако да свака држава буде обојена једном од боја и да суседне државе не буду обојене истом бојом?
>
> Под суседним државама се подразумевају државе које имају заједничку граничну линију (а не оне које имају једну или више изолованих заједничких граничних тачака). Такође, сматра се да је целокупна територија једне државе из једног дела (тј. није дозвољено да се једна држава састоји из више одвојених делова, што је случај код неких стварних држава).

Географској карти се може придружити један граф, тако што свака држава представља један чвор графа, а чворови су везани граном ако су њима одговарајуће државе суседне. Сада је проблем 4 боје еквивалентан следећем графовском проблему: да ли се чворови придруженог графа могу обојити са 4 боје, тако да чворови који одговарају двема суседним државама не буду обојени истом бојом?

Ово је дуго био један од најпознатијих нерешених проблема Теорије графова. Франсис Гутри (енг. *Francis Guthrie*) је овај проблем први уочио негде око 1850. године, да би проблем био решен тек 1976. године. Проблем 4 боје су решили Кенет Апел и Волфганг Хекен (енг. Kenneth Appel, Wolfgang Haken) уз значајну подршку рачунара. За то је утрошено око 1200 часова (50 дана!) рачунарског времена. Није познато да ли би се Проблем 4 боје могао доказати без употребе рачунара.

Илустроваћемо сада примену графова и на једном проблему из рачунарске праксе.

У рачунарству се може разматрати проблем одређивања минималног броја регистара потребних за меморисање података које користи један компјутерски програм. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подаци који се јављају у том програму. За памћење сваког од ових података машина може да резервише по један регистар у својој меморији. Међутим, може се десити да, на пример, подаци x_i и x_j (за $i \neq j$) никада у току рада програма нису истовремено потребни, тј. да није потребно памтити податак x_i истовремено када се памти податак x_j, као и обрнуто. У таквој ситуацији могуће је за податке x_i и x_j резервисати један исти регистар.

Зато се за задати низ података $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дефинише проблем одређивања најмањег броја регистара које је потребно резервисати за њихов смештај, тако да у сваком тренутку програм може приступити свим подацима који су му у том тренутку потребни.

Овом проблему се може придружити један граф у коме сваком податку x_i одговара један чвор. Два чвора су везана граном ако и само ако је бар у једном тренутку рада програма потребно истовремено знати оба податка који одговарају тим чворовима.

Сада се проблем одређивања минималног броја регистара своди на следећи графовски проблем: обојити све чворове придруженог графа тако да свака два суседна чвора не буду обојена истом бојом, а да укупан број боја буде минималан. Овај број боја је једнак минималном броју регистара које треба резервисати. За све податке који одговарају чворовима исте боје резервише се један исти регистар (јер се они не користе у истом тренутку).

4.2 Основни појмови

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.1. *Граф* Γ је уређен пар (V, ϱ), где је V непразан скуп и ϱ бинарна релација на V. Елементи скупа V се зову *чворови*, а елементи скупа ϱ *гране* графа G.

На основу дефиниције бинарне релације важи да је $\varrho \subseteq V^2 = V \times V$, па свака грана графа представља један уређени пар чворова графа.

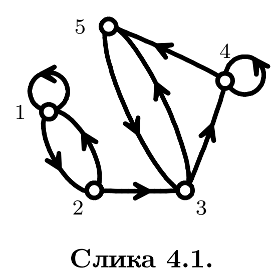
Сваки граф са коначним скупом чворова може се геометријски представити на следећи начин. Чворове графа $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ представљамо međусобно различитим тачкама у равни или простору. Уколико постоји грана $(v_i, v_j) \in \varrho$ тада су тачке које одговарају чворовима v_i и v_j спојене непрекидном линијом оријентисаном од чвора v_i ка чвору v_j. При томе грана која спаја чвор са самим собом назива се *петља*.

ПРИМЕР 4.2.1. Нека је дат граф $G = (V, \varrho)$ релацијом

$$\varrho = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,3)\}$$

на скупу $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Тај граф је представљен на Слици 4.1.



Слика 4.1.

Овај граф има $|V| = 5$ чворова и $|\varrho| = 9$ грана (гране су сви они уређени парови којима је задата релација). ■

У Теорији графова су од посебног интереса графови (V, ϱ) код којих је релација ϱ симетрична. Ови графови се називају *неоријентисани графови*. Код оваквих графова за сваку грану $(u, v) \in \varrho$, такву да је $u \neq v$, постоји и грана $(v, u) \in \varrho$ обрнуте оријентације. Стога се гране (u, v) и (v, u) могу заменити скупом $\{u, v\}$. У случају петље, када је $u = v$, њу можемо представити као $\{u\}$. Зато се врло често појам неоријентисаног графа може дефинисати и на алтернативан начин.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.2. *Неоријентисани граф* G је уређен пар (V, E), где је V непразан скуп, а $E \subseteq \big\{\{u, v\} \mid u, v \in V\big\}$. Елементи скупа V се зову *чворови*, а елементи скупа E *гране* неоријентисаног графа G.

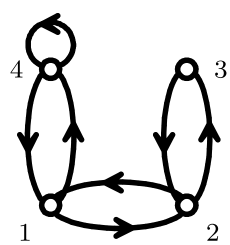
На основу претходне дефиниције свака грана $\{u, v\} \in E$ неоријентисаног графа јесте један скуп (у случају $u \neq v$ то је један неуређени пар чворова графа, јер није битно који чвор је први, а који други). Ова грана $\{u, v\}$ се у геометријској интерпретацији неоријентисаног графа може приказати као непрекидна неоријентисана линија која спаја тачке које одговарају чворовима u и v.

Грана $e = \{u, v\}$ се често скраћено обележава $e = uv$.

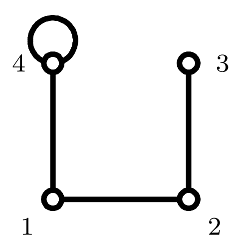
ПРИМЕР 4.2.2. Нека је дат граф (V, ϱ) релацијом

$$\varrho = \big\{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (4,1), (4,4)\big\}$$

на скупу $V = \{1, 2, 3, 4\}$ (Слика 4.2).



Слика 4.2.



Слика 4.3.

Пошто је релација ϱ симетрична релација, овај граф је неоријентисан, па се може, у складу са Дефиницијом 4.2.2, приказати као (V, E), где је

$$E = \big\{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{4,4\}\big\}.$$

Неоријентисана грана $\{1, 2\}$ је заменила оријентисане гране $(1, 2)$ и $(2, 1)$, а неоријентисана петља $\{4\}$ је заменила оријентисану петљу $(4, 4)$ (приметимо да је $\{4, 4\} = \{4\}$!). Геометријска интерпретација графа (V, E) приказана је на Слици 4.3. ■

Графове уведене Дефиницијом 4.2.1 надаље ћемо називати *оријентисаним графовима*, а под *неоријентисаним графовима* ћемо подразумевати графове окарактерисане Дефиницијом 4.2.2. Заједнички термин *граф* ћемо користити само у тврђењима и дефиницијама који важе и за оријентисане и за неоријентисане графове. Надаље ћемо све графове обележавати са (V, E).

У овој књизи ћемо се бавити само оријентисаним и неоријентисаним графовима. Поред њих постоје и различита уопштења ових појмова, као што су хипер графови, тежински графови, мултиграфови, итд. На пример, *мултиграфови* су оријентисани или неоријентисани графови код којих се између два чвора може налазити и више од једне гране. Са мултиграфовима се срећемо касније у овој и следећој глави. На пример, мултиграф везан за чувени Проблем Кенигсбершких мостова је приказан на Слици 5.5.4 (Поглавље 5.5. Ојлерови графови).

О осталим уопштењима можете више сазнати у [17], [9] и [14].

Сада ћемо увести неколико основних графовских термина везаних за чворове и гране, и то прво у случају неоријентисаних графова, а затим за оријентисане графове.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.3. Два чвора u и v неоријентисаног графа (V, E), су *суседна* ако постоји грана $e = \{u, v\} \in E$. За чворове u и v кажемо да су *крајње тачке* гране e. За чвор u и грану e (односно чвор v и грану e) кажемо да су *инцидентни* и да се грана *e стиче* у чвору u (односно v). Две гране су *суседне* ако се стичу у истом чвору.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.4. Нека је G неоријентисан граф. Број грана које се стичу у чвору v зове се *степен чвора* v и означава се са $d(v)$. Чвор v који нема суседних чворова, тј. $d(v) = 0$, називамо *изолован чвор*. Граф Γ је *регуларан* ако су степени свих његових чворова једнаки.

Степен чвора може се дефинисати и као број чворова суседних том чвору.

ПРИМЕР 4.2.3. Одредити степене свих чворова графа Γ са Слике 5.2.3 из Примера 4.2.2. Испитати који су чворови суседни и које су гране суседне. Да ли је граф Γ регуларан?

Решење. Степени чворова у Γ су: $d(1) = 2$, $d(2) = 2$, $d(3) = 1$ и $d(4) = 2$. Како немају сви чворови исти степен, граф Γ није регуларан.

Чвор 1 је суседан са чворовима 2 и 4, чвор 2 са 1 и 3, чвор 3 само са 2, док је чвор 4 суседан са 1 и са самим собом.

Грана 12 је суседна са гранама 14 и 23, грана 14 са гранама 12 и 44, грана 23 само са 12 и петља 44 само са граном 14. ■

Пошто код оријентисаних графова гране представљају уређене двојке чворова (тј. битан је редослед чворова), код оваквих графова се одговарајући појмови дефинишу на другачији начин.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.5. За грану $e = (u, v)$ оријентисаног графа (V, E) кажемо да *води* из чвора u у чвор v (тј. да грана *e излази* из чвора u, а *улази* у чвор v).

Улазни степен $d^-(v)$ *чвора* v је број грана које улазе у чвор v.

Излазни степен $d^+(v)$ *чвора* v је број грана које излазе из чвора v.

Улазни скуп $I(v)$ *чвора* v је скуп свих чворова из којих води грана у чвор v, тј. $I(v) = \{x \mid (x, v) \in E\}$.

Излазни скуп $O(v)$ *чвора* v је скуп свих чворова у које води грана из чвора v, тј. $O(v) = \{x \mid (v, x) \in E\}$.

Петља се сматра граном која и улази и излази из одговарајућег чвора.

Напомена. Видимо да је $d^-(v) = |I(v)|$ и $d^+(v) = |O(v)|$.

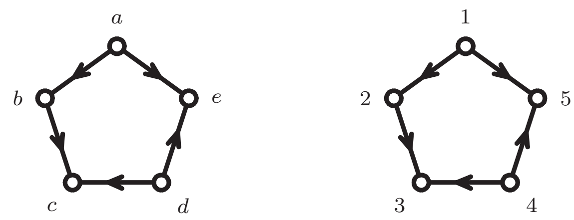
ПРИМЕР 4.2.4. Илуструјмо претходно дефинисане појмове на оријентисаном графу G из Примера 4.2.1.

Решење. Грана $(2, 3)$ води из чвора 2 у чвор 3, тј. излази из чвора 2, а улази у чвор 3.

Сада ћемо навести за сваки чвор његов улазни и излазни скуп, тј. одговарајући улазни и излазни степен:

$$
\begin{array}{llll}
I(1) = \{1,2\} \;\Rightarrow\; d^-(1) = 2, & & O(1) = \{1,2\} \;\Rightarrow\; d^+(1) = 2, \\
I(2) = \{1\} \;\Rightarrow\; d^-(2) = 1, & & O(2) = \{1,3\} \;\Rightarrow\; d^+(2) = 2, \\
I(3) = \{2,5\} \;\Rightarrow\; d^-(3) = 2, & & O(3) = \{4,5\} \;\Rightarrow\; d^+(3) = 2, \\
I(4) = \{3,4\} \;\Rightarrow\; d^-(4) = 2, & & O(4) = \{4,5\} \;\Rightarrow\; d^+(4) = 2, \\
I(5) = \{3,4\} \;\Rightarrow\; d^-(5) = 2, & & O(5) = \{3\} \;\Rightarrow\; d^+(5) = 1.
\end{array}
$$
■

Ако посматрамо оријентисане графове на Слици 4.4, видећемо да они нису идентични, с обзиром да су њихови скупови чворова различити, тј. $\{a, b, c, d, e\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Слика 4.4.

Међутим, међу њима ипак постоји сличност у начину како су њихови чворови повезани гранама. Оваква врста сличности се може јавити и код неоријентисаних графова. Она се може формално дефинисати на следећи начин.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.6. Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ су *изоморфна* ако постоји бијекција $f\colon V_1 \to V_2$ за коју важи да је

- $(u, v) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \big(f(u), f(v)\big) \in E_2$ (код оријентисаних графова);
- $\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \big\{f(u), f(v)\big\} \in E_2$ (код неоријентисаних графова).

Функција f се назива *изоморфизам* графова, а чињеницу да су графови G_1 и G_2 изоморфни означавамо са $G_1 \cong G_2$

ПРИМЕР 4.2.5. Изоморфизам f оријентисаних графова са Слике 4.4 задат је бијекцијом

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

■

Напомена. На основу претходног видимо да помоћу појма изоморфизма можемо препознати све оне графове који имају исту „структуру“, без обзира како су им означени чворови. Зато изоморфне графове можемо сматрати истоветним.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.7. Граф $\Gamma' = (V', E')$ је *подграф* графа $\Gamma = (V, E)$ ако важи $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Граф Γ је *надграф* графа Γ' ако је Γ' подграф графа Γ.

За подграф Γ' графа Γ каже се да је *подграф индукован скупом* V', $V' \subseteq V$, ако Γ' добијамо од Γ тако што из Γ избацимо све чворове који нису у скупу V' заједно са свим гранама које су им инцидентне (тј. остају само гране које повезују чворове из V').

Ако је $e \in E$, онда се са $\Gamma - e$ означава подграф $(V, E \setminus \{e\})$ графа Γ, тј. граф који се добија од графа Γ избацивањем гране e. Ако је $e \notin E$, онда се са $\Gamma + e$ означава надграф $(V, E \cup \{e\})$ графа Γ, тј. граф који се добија од графа Γ додавањем гране e. Ако је $u \in V$, тада се са $\Gamma - u$ означава подграф графа Γ индукован скупом чворова $V \setminus \{u\}$.

ПРИМЕР 4.2.6. Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ је подграф графа $G_2 = (V_2, E_2)$ (оба су на Слици 4.5), јер је $V_1 = \{a, b, d, e, f\} \subseteq V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $E_1 = \{ab, de, df, ef\} \subseteq E_2 = \{ab, ac, bc, cf, de, df, ef\}$.

Слика 4.5.

Видимо да је граф G_1 добијен од графа G_2 избацивањем чвора c и свих њему инцидентних грана, тј. граф G_1 је подграф графа G_2 индуковани скупом чворова $\{a, b, d, e, f\}$. Стога је $G_1 = G_2 - c$. ■

Скуп свих графова (или оријентисаних или неоријентисаних) у односу на бинарну релацију „бити подграф“ представља један уређен скуп (тј. та релација је релација поретка). Међутим овај скуп није тотално уређен скуп!

Један од врло важних појмова у Теорији графова, за кога су везани многи интересантни проблеми, је појам пута у графу.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.8. *Пут дужине* k, $k \geqslant 1$, у графу (V, E) је низ грана из E облика

- $(v_0, v_1),\ (v_1, v_2),\ \dots\ ,\ (v_{k-1}, v_k)$ (код оријентисаних графова);
- $\{v_0, v_1\},\ \{v_1, v_2\},\ \dots\ ,\ \{v_{k-1}, v_k\}$ (код неоријентисаних графова).

За овај пут кажемо да *почиње* у чвору v_0, а да се *завршава* у чвору v_k. Чворови v_0 и v_k се зову *крајњи чворови пута.*

Видимо да се у путу гране практично надовезују једна на другу, тако да у ствари ми идемо из чвора v_0 у чвор v_1, затим из њега у чвор v_2 итд. до коначног чвора v_k. Стога се пут у графу може задати и као низ узастопних чворова спојених гранама:

$$v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_{k-1} - v_k.$$

За пут кажемо да *пролази* кроз чворове $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$.

Пут може више пута да пролази истом граном или кроз исти чвор, као и кроз петље. Неке специјалне врсте путева дате су у наредној дефиницији.

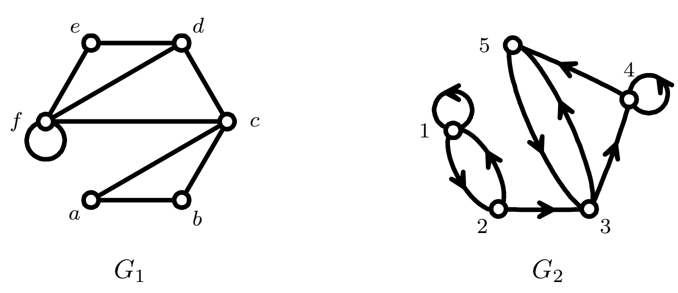
ДЕФИНИЦИЈА 4.2.9. *Елементарни (прост) пут* је пут који кроз сваки свој чвор $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ пролази тачно једанпут.

Кружни (затворен) пут је пут који се завршава у истом чвору у којем и почиње, тј. $v_0 = v_k$.

Контура (циклус) је елементарни кружни пут.

Петља се може сматрати контуром дужине 1.

ПРИМЕР 4.2.7. Илуструјмо ове појмове на графовима G_1 и G_2 са Слике 4.6 (са графом G_2 смо се већ срели у Примеру 4.2.1).



Слика 4.6.

У неоријентисаном графу G_1 имамо пут дужине $k = 9$:

$$\{c, a\},\ \{a, b\},\ \{b, c\},\ \{c, f\},\ \{f, f\},\ \{f, d\},\ \{d, e\},\ \{e, f\}, \{f, c\}.$$

Овај пут није елементаран, јер више пута пролази кроз чворове c и f, као и кроз грану $\{c, f\} = \{f, c\}$ (кроз ову грану једном пролази у једном смеру, а други пут у другом). Он је затворен јер почиње и завршава се у чвору c. Овај пут можемо записати и као

$$c - a - b - c - f - f - d - e - f - c.$$

Пример елементарног пута је $\{a, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$. Једна контура је $\{c, d\}$, $\{d, e\}$, $\{e, f\}, \{f, c\}$.
У оријентисаном графу G_2 један пут дужине $k = 6$ је:

$$(2, 1),\ (1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 5),\ (5, 3),$$

другачије записан као

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2 & - & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 3. \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & \uparrow \\ v_0 & & & & v_2 & & v_3 & & & & & & v_6 \end{array}$$

Овај пут није елементаран јер више пута пролази кроз чворове $v_2 = 2$ и $v_3 = 3$. Овај пут није ни кружан, јер су му крајњи чворови (v_0 и v_6) различити $2 \neq 3$. Пример елементарног пута који пролази кроз све чворове је $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$. Контура дужине 1 је $(1, 1)$, дужине 2 је $(3, 5)$, $(5, 3)$ и дужине 3 је $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 3)$. ■

До краја поглавља ћемо се бавити само неоријентисаним графовима.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.10. Нека је $G = (V, E)$ неоријентисан граф. Чворови $u, v \in V$ су *повезани* ако у графу Γ постоји пут чији су крајњи чворови u и v. Сматраћемо да је сваки чвор повезан сам са собом путем дужине 0. Граф Γ је *повезан* ако су свака два његова чвора повезана, а у супротном кажемо да је *неповезан*.

Компонента повезаности графа Γ је неки његов максимални повезани подграф[10]. *Број компоненти повезаности* графа G означавамо са $c(\Gamma)$.

У графу Γ чвор v је *везивни* (*артикулациони*) *чвор* уколико се његовим уклањањем (са свим гранама које су инцидентне са њим) повећава број компоненти повезаности овога графа, тј. ако важи $c(\Gamma) < c(\Gamma - v)$.

Грана e је *мост* у графу Γ ако се њеним уклањањем повећава број компоненти повезаности овог графа, тј. ако важи $c(\Gamma) < c(\Gamma - e)$.

Другим речима, компонента повезаности графа Γ, која садржи неки чвор $v \in V$, представља подграф индукован свим чворовима повезаним са v. Специјално, ако је чвор v изолован ова компонента повезаности се своди само на чвор v (јер је он повезан сам са собом).

ПРИМЕР 4.2.8. Граф G_1 из Примера 4.2.6 није повезан, јер на пример не постоји пут који повезује чворове a и d. Тај граф има две компоненте повезаности — једна је индукована скупом чворова $\{a, b\}$, а друга скупом чворова $\{d, e, f\}$, па је $c(G_1) = 2$.

Граф G_2 из Примера 4.2.6 јесте повезан, јер су свака два његова чвора повезана неким путем. Зато тај граф има једну компоненту повезаности која је сам тај граф, па је $c(G_2) = 1$.

У графу G_2 имамо два везивна чвора: c и f. За чвор c смо у Примеру 4.2.6 видели да је везивни јер се његовим избацивањем добија граф G_1 који има више компоненти повезаности. Избацивањем чвора f добијамо неповезан граф који има две компоненте повезаности индуковане скуповима $\{a, b, c\}$ и $\{d, e\}$.

Грана cf представља једини мост графа G_2, јер се њеним уклањањем добијају две компоненте повезаности које су индуковане скуповима $\{a, b, c\}$ и $\{d, e, f\}$. ■

Сада ћемо навести неке од основних типова неоријентисаних графова.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.11. *Празан граф* N_n са n чворова је граф који нема ниједну грану.

Комплетан (*потпун*) *граф* K_n са n чворова је граф код кога је сваки чвор суседан са свим осталим.

Комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ је граф код кога је скуп чворова разбијен на два подскупа (тзв. *класе*), један са m, а други са n чворова, тако да ниједан пар чворова из исте класе није спојен граном, док је сваки пар чворова из различитих класа спојен граном.

Бипартитан граф је било који подграф комплетног бипартитног графа.

Пут P_n, $n \geqslant 2$, је повезан граф са n чворова коме су сви чворови степена 2, сем два крајња који су

[10] Подграф H графа Γ је *максималан у односу на неку особину* ако он има ту особину, а њу нема ниједан од подграфова графа Γ који је надграф од H и различит од H. У овом случају та особина је повезаност графова.

степена 1.

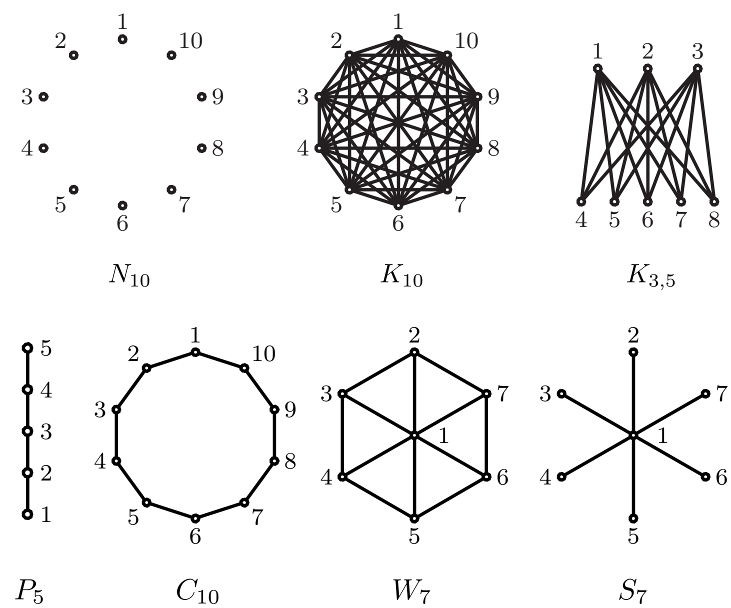
Контура C_n, $n \geqslant 3$, је повезан граф са n чворова који има све чворове степена 2.

Точак W_n, $n \geqslant 4$, је граф који се састоји од контуре C_{n-1} и једног чвора који је повезан са свим чворовима контуре.

Звезда S_n је комплетни бипартитни граф, где се једна класа састоји само од једног чвора, а друга од свих осталих, тј. $S_n = K_{1,n-1}$.

Ознаке N_n, P_n, C_n, W_n и S_n, су прва слова енглеских назива одговарајућих типова графова: *null*, *path*, *cycle*, *wheel*, *star*.

Ови графови су приказани на Слици 4.7.



Слика 4.7.

Напомена. Изразе *пут* и *контура* користимо у два различита контекста.

У неком графу, свака контура (елементарни кружни пут) дужине k, задата Дефиницијом 4.2.9, чини његов подграф који је изоморфан са графом C_k, датим Дефиницијом 4.2.11. Слично, сваки елементарни пут (који није контура) дужине k, задат Дефиницијом 4.2.8, чини подграф датог графа који је изоморфан са графом P_k, датим Дефиницијом 4.2.11.

Уведимо још један битан појам – то је *комплемент* графа.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.12. Неоријентисани граф $\overline{\Gamma} = (V', E')$ је *комплемент* неоријентисаног графа $\Gamma = (V, E)$ ако важи да је $V' = V$ и да су два чвора суседна у $\overline{\Gamma}$ ако и само ако нису суседна у Γ. Граф је *самокомплементаран* ако је изоморфан са својим комплементом.

Претходна дефиниција се може схватити и као унарна операција на скупу свих неоријентисаних графова, која сваком графу додељује његов комплемент.

Напомена. Како графови Γ и $\overline{\Gamma}$ имају исти скуп чворова V, $|V| = n$, можемо посматрати потпун граф $K_n = (V, \mathcal{E})$ на истом том скупу чворова. Тада важи

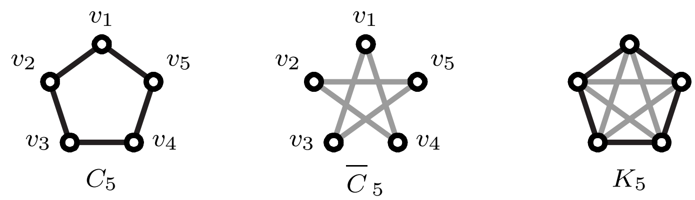
$$E \cup E' = \mathcal{E}, \qquad E \cap E' = \emptyset.$$

Због тога комплемент графа уствари представља „допуну“ датог графа до комплетног графа.

ПРИМЕР 4.2.9. На основу Дефиниције 4.2.11 следи да сваки празан граф N_n представља комплемент потпуног графа K_n, тј. важи $N_n = \overline{K_n}$. То се може видети и на Слици 4.7 за графове N_{10} и K_{10}. ■

ПРИМЕР 4.2.10. Дати пример једног самокомплементарног графа.

Решење. На Слици 4.8 су представљени графови C_5 и $\overline{C}_5$. Један изоморфизам између ова два графа је дат са $f : V(C_5) \to V(\overline{C}_5)$, где је $f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & v_3 & v_5 & v_2 & v_4 \end{pmatrix}$. Због тога контура C_5 јесте један самокомплементаран граф.



Слика 4.8.

Ако на истом скупу чворова посматрамо све гране графа C_5 (представљене црном бојом), и све гране графа $\overline{C}_5$ (представљене сивом бојом) добијамо потпун граф K_5 — види Слику 4.8. Другим речима, унија скупа грана C_5 и скупа грана $\overline{C}_5$ је скуп грана комплетног графа K_5. ■

4.3 Тврђења о степенима чворова

Нека је $\Gamma = (V, E)$ неоријентисан граф код кога је $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а број грана једнак m, тј. $|E| = m$.

Сада ћемо навести неколико теорема које важе за степене чворова графа G.

ТЕОРЕМА 4.3.1. У неоријентисаном графу $\Gamma = (V, E)$ без петљи, који има $n \geqslant 2$ чворова, постоје бар два чвора истог степена.

Доказ. Претпоставимо супротно да не постоје два чвора истог степена.

Пошто граф Γ има n чворова, нема петљи, и сваки његов чвор може бити суседан са неким од преосталих $n-1$ чворова, тада за свако $v \in V$ важи да је $d(v) \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Како не постоје два чвора истог степена и како укупно има n чворова, то ће они за степене имати све бројеве из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Али тада имамо чвор чији је степен 0 (то је чвор који није суседан ни са једним од преосталих), као и чвор чији је степен $n-1$ (то је чвор који је суседан са свим осталим чворовима), што је немогуће.

Како смо добили контрадикцију, полазна претпоставка да не постоје бар два чвора истог степена није тачна, чиме је тврђење доказано. □

ТЕОРЕМА 4.3.2. У неоријентисаном графу $\Gamma = (V, E)$ без петљи збир степена свих чворова једнак је двоструком броју грана, тј. важи $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2m$.

Доказ. Степен чвора представља број грана које су инцидентне са датим чвором. Стога, ако саберемо степене свих чворова, у овом збиру ћемо узети у обзир све гране и то сваку 2 пута (по једном за сваку њену крајњу тачку — како граф Γ нема петљи ови крајеви су међусобно различити!). Тиме је тврђење доказано. □

ТЕОРЕМА 4.3.3. У неоријентисаном графу $\Gamma = (V, E)$ без петљи број чворова непарног степена је паран.

Доказ. Према Тврђењу 4.3.2 збир степена свих чворова графа Γ мора бити паран (једнак је $2m$), што је могуће само уколико је број чворова непарног степена у овом графу паран. □

Често се у Теорији графова разматра проблем утврђивања да ли постоји неоријентисани граф без петљи са задатим степенима чворова. Због тога се уводи појам *графичког низа бројева* и дају неопходни и довољни услови да неки низ буде графички.

ДЕФИНИЦИЈА 4.3.1. Низ целих бројева $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ је *графички* ако постоји неоријентисани граф $G = (V, E)$ без петљи са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ тако да је $d(v_i) = d_i$.

Пошто је граф $G = (V, E)$ без петљи, за све чланове графичког низа $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ треба да важи $d_i \leqslant n - 1$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 4.3.4. Низ $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ је графички низ ако и само ако је свака његова пермутација $(d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n})$ графички низ.

Доказ. Тврђење директно следи из чињенице да свакој пермутацији $(d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n})$ (не)графичког низа $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ одговара „истоветна“ пермутација $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$ чворова $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ графа Г:

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, \dots, d_n) &\to (d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n})\\ (v_1, v_2, \dots, v_n) &\to (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}).\end{aligned}$$

□

На основу претходног тврђења следи да је услове које један низ треба да задовољава да би био графички, довољно формулисати за случај нерастућег низа.

ТЕОРЕМА 4.3.5. Нека је задат нерастући низ целих бројева $g = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, где је $n - 1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n \geqslant 0$. Тада је низ g графички ако и само ако је низ

$$g' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$$

графички. □

Опишимо речима процедуру како се од низа g добија низ g'. Први члан d_1 ћемо елиминисати из низа, наредних d_1 чланова ћемо умањити за 1, а преосталих $n - 1 - d_1$ чланова низа (ако их има) остављамо непромењеним.

Теореме 4.3.4 и 4.3.5 можемо искористити да формирамо алгоритам који утврђује да ли је дати низ графички. Полазећи од овог низа алгоритам у свакој итерацији прво сортира тренутни низ g у нерастући поредак, а затим примењује претходну процедуру и добија низ g'. Алгоритам стаје у два случаја:

- када је добијен низ $g' = (0, 0, \dots, 0)$ и тада је полазни низ графички;
- када је добијен низ g' који садржи неки негативан број и тада полазни низ није графички.

ПРИМЕР 4.3.1. Утврдити да ли је низ $(3, 4, 2, 3, 5, 2)$ графички.

Решење 1. Проблем ћемо решити применом претходног алгоритма и описаћемо сваку од његових итерација.

1° Прво ћемо сортирати дати низ $(3, 4, 2, 3, 5, 2)$ према нерастућем редоследу у низ $g = (5, 4, 3, 3, 2, 2)$. Од овог низа добијамо низ

$$g' = (\cancel{5}, \underbrace{4 - 1, 3 - 1, 3 - 1, 2 - 1, 2 - 1}_{d_1 = 5}) = (3, 2, 2, 1, 1).$$

2° Од новог низа $g = (3, 2, 2, 1, 1)$ добијамо

$$g' = (\cancel{3}, \underbrace{2 - 1, 2 - 1, 1 - 1}_{d_1 = 3}, 1) = (1, 1, 0, 1).$$

3° Низ $(1, 1, 0, 1)$ сортирамо у $g = (1, 1, 1, 0)$ и одатле је $g' = (0, 1, 0)$.

4° Коначно, низ $(0,1,0)$ сортирамо у $g=(1,0,0)$ и одатле је $g'=(-1,0)$.
Полазни низ $(3,4,2,3,5,2)$ није графички, јер низ $g'=(-1,0)$ садржи негативан број. ■

Решење 2. Како је збир свих степена чворова $5+4+3+3+2+2=19$ непаран, а у Теореми 4.3.2 смо показали да збир степена чворова у графу мора бити паран, онда дати низ није графички. ■

ПРИМЕР 4.3.2. Утврдити да ли је низ $(4,3,2,1,0)$ графички.

Решење 1. Низ $g=(4,3,2,1,0)$ није графички јер низ $g'=(2,1,0,-1)$ који се добија описаним алгоритмом садржи негативан број. ■

Решење 2. Дати граф има 5 чворова. Како у графу постоји чвор степена 4, тај чвор је спојен граном са свим осталим чворовима. Међутим, у графу постоји чвор степена 0, који не би требало да буде спојен ни са једним од осталих чворова, што је контрадикција. Стога дати низ није графички. ■

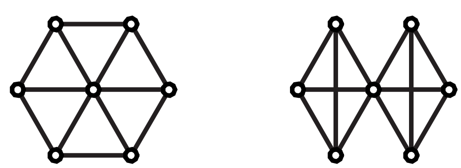
ПРИМЕР 4.3.3. Утврдити да ли је низ $(6,3,3,3,3,3,3)$ графички.

Решење. Применом алгоритма од датог низа добијамо следеће низове:

$$(6,3,3,3,3,3,3)\to(2,2,2,2,2,2)\to(2,2,2,1,1)\to(1,1,1,1)\to(1,1,0)\to(0,0),$$

одакле следи да је полазни низ графички. ■

Напомена. Једном графичком низу могу одговарати и графови који нису изоморфни. Тако, нпр. низу $(6,3,3,3,3,3,3)$ из Примера 4.3.3 одговарају неизоморфни графови са Слике 4.1. Зашто ова два графа нису изоморфни?



Слика 4.1.

Сада ћемо навести и једно тврђење везано за степене чворова у оријентисаном графу $\Gamma=(V,E)$, где је $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ и $|E|=m$.

ТЕОРЕМА 4.3.6. У оријентисаном графу $\Gamma=(V,E)$ важи

$$d^-(v_1)+d^-(v_2)+\ldots+d^-(v_n)=m=d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n).$$

Доказ. Пошто свака грана (укључујући и петљу) улази у неки чвор важи

$$d^-(v_1)+d^-(v_2)+\ldots+d^-(v_n)=m.$$

Пошто свака гране и излази из чвора тада је $d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n)=m$. □

4.4 Представљање графова

При решавању многих графовских проблема (нарочито оних који моделују проблеме из праксе) рачунари имају изузетно значајну улогу. Зато се поставља питање како граф можемо представити у рачунару. У овом поглављу ћемо изложити неколико могућих представљања графа и дискутовати везе између њих.

Матрица суседства графа

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.1. Нека је $G = (V, E)$ граф са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Матрица суседства графа* G је квадратна матрица $A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ реда n код које су

- $a_{ij} = 1$ ако је $(v_i, v_j) \in E$ и $a_{ij} = 0$ ако $(v_i, v_j) \notin E$
  (за оријентисане графове);
- $a_{ij} = 1$ ако је $\{v_i, v_j\} \in E$ и $a_{ij} = 0$ ако $\{v_i, v_j\} \notin E$
  (за неоријентисане графове).

Матрица суседства A неоријентисаног графа G је симетрична матрица, тј. за њу важи $A = A^T$.

На основу Дефиниције 4.4.1 из матрице суседства графа могу се извести закључци о неким особинама графа.

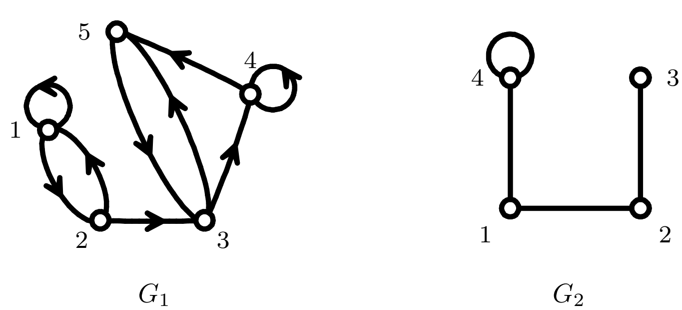
За сваки чвор v_i графа G код кога постоји петља, елемент a_{ii} његове матрице суседства A је једнак 1. Зато траг $\operatorname{tr} A$ матрице A, који је збир елемената са њене главне дијагонале ($\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$), представља број петљи у графу G. Граф G нема петљи ако и само ако је $\operatorname{tr} A = 0$.

Из матрице суседства оријентисаног графа можемо одредити улазне и излазне степене чворова. Број појављивања елемента 1 у i-тој врсти ове матрице једнак је излазном степену $d^+(v_i)$ чвора v_i. Број појављивања 1 у j-тој колони матрице једнак је улазном степену $d^-(v_j)$ чвора v_j.

Слично из матрице суседства неоријентисаног графа можемо одредити степене чворова. Број појављивања 1 у i-тој врсти (или i-тој колони, јер је та матрица симетрична) једнак је степену $d(v_i)$ чвора v_i.

ПРИМЕР 4.4.1. Одредити матрицу суседства A_1 оријентисаног графа G_1 из Примера 4.2.1 и матрицу суседства A_2 неоријентисаног графа G_2 из Примера 4.2.2. Затим, у оба случаја испитати претходно наведене особине.

Решење. На Слици 4.1 поново су представљена ова два графа.



Слика 4.1.

За оријентисан граф G_1 матрица суседства, формирана у односу на поредак чворова 1,2,3,4,5, има следећи облик:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Видимо да матрица A_1 није симетрична (одатле се може закључити да граф G_1 није неоријентисан). Њен траг је једнак $\operatorname{tr} A_1 = 2$, што одговара чињеници да граф G_1 има две петље (код чворова 1 и 4).

Збир елемената друге врсте (тј. број јединица у њој) је једнак 2 и стога је излазни степен чвора 2 једнак $d^+(2) = 2$. Збир елемената друге колоне је једнак 1 и зато је улазни степен чвора 2 једнак $d^-(2) = 1$.

Матрица A_2 неоријентисаног графа G_2, за поредак чворова 1,2,3,4, једнака је:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Граф G_2 је неоријентисан па је матрица A_2 симетрична. Њен траг је једнак $\operatorname{tr} A_2 = 1$, јер граф G_2 има једну петљу код чвора 4. Збир елемената друге врсте, као и збир елемената друге колоне је једнак 2 и то одговара чињеници да је степен чвора 2 једнак $d(2) = 2$. ■

Матрица суседства A графа G зависи од поретка његових чворова. Наиме, код једног истог графа за два различита поретка чворова одговарајуће матрице суседства могу бити различите. Међутим, може се показати да су све матрице суседства једног графа међусобно пермутационо сличне.

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.2. Матрица X је *пермутациона матрица* уколико у свакој врсти и свакој колони има тачно један елемент 1, а сви остали елементи су 0.

Матрица A је *пермутационо слична* са матрицом B ако постоји пермутациона матрица X таква да је $A = X^{-1}BX$.

ПРИМЕР 4.4.2. У Примеру 4.4.1 одређена је матрица суседства $A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ графа G_2 за поредак чворова $1, 2, 3, 4$.

Матрица суседства истог овог графа за поредак чворова $2, 4, 1, 3$ једнака је $A_2' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Матрице $A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $A_2' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ су пермутационо сличне, јер постоји матрица $X = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, таква да је $A_2 = X^{-1}A_2'X$. ■

Наведимо једну веома важну особину матрице суседства графа (оријентисаног или неоријентисаног), која даје њену везу са бројем путева одређене дужине између два чвора.

ТЕОРЕМА 4.4.1. Нека је A матрица суседства графа $\Gamma = (V, E)$ са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. За свака два чвора v_i и v_j важи да је број путева у графу Γ дужине k, $k \geqslant 0$, који повезују ова два чвора једнак елементу $a_{ij}^{(k)}$ на позицији (i, j) у матрици A^k. □

Напоменимо да A^k означава k-ти степен матрице A, тј. $A^0 = I$, где је I јединична матрица реда n, а $A^\ell = A^{\ell-1} \cdot A$ за $\ell = 1, 2, \ldots, k$.

У претходном тврђењу се посматрају сви могући путеви између два чвора (без обзира да ли су елементарни или не). Сматрамо да је сваки чвор повезан сам са собом путем дужине 0.

ПРИМЕР 4.4.3. У оријентисаном графу G_1 на Слици 4.1 постоје три пута дужине 4 од чвора 2 до чвора 5:

$$2-1-2-3-5, \qquad 2-3-4-4-5, \qquad 2-3-5-3-5.$$

Уоквирени елемент матрице

$$A_1{}^4 = \begin{Vmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

на позицији $(2,5)$ једнак је 3, што одговара броју претходно уочених путева. ■

Примену Тврђења 4.4.1 илустроваћемо касније када будемо увели и појам матрице растојања графа (видети Пример 4.4.9).

Листе суседства чворова графа

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.3. *Листа суседства* l_u чвора u графа $\Gamma = (V, E)$ представља скуп

- $l_u = \{v \in V \colon (u,v) \in E\}$ (за оријентисане графове);
- $l_u = \{v \in V \colon \{u,v\} \in E\}$ (за неоријентисане графове).

Уколико код чвора u постоји петља, онда ће и чвор u припадати својој листи суседства, тј. $u \in l_u$.

Листе суседства налазе примену при представљању графова који имају велики број чворова и у односу на њега релативно мали број грана. Тада би одговарајућа матрица суседства заузимала много више меморијског простора, а углавном би била попуњена елементима 0. Листа суседства заузима знатно мање меморијског простора, али су зато алгоритми који раде са њом сложенији.

Видимо да је листа суседства неког чвора једнака излазном скупу тог чвора у случају оријентисаног графа, док код неоријентисаног графа представља скуп свих њему суседних чворова.

Зато је у случају оријентисаног графа излазни степен $d^+(u)$ чвора u једнак броју елемената листе суседства l_u, тј. важи $d^+(u) = |l_u|$.

Слично, код неоријентисаног графа степен $d(u)$ чвора u једнак је броју елемената листе суседства l_u, тј. важи $d(u) = |l_u|$.

ПРИМЕР 4.4.4. Одредити листе суседства свих чворова за графове G_1 и G_2 из Примера 4.4.1.

Решење. Листе суседства чворова оријентисаног графа G_1 су дате у Табели 5.4.1, а неоријентисаног графа G_2 у Табели 5.4.2.

u	l_u
1	$\{1,2\}$
2	$\{1,3\}$
3	$\{4,5\}$
4	$\{4,5\}$
5	$\{3\}$

Табела 5.4.1

u	l_u
1	$\{2,4\}$
2	$\{1,3\}$
3	$\{2\}$
4	$\{1,4\}$

Табела 5.4.2

Из листи суседства оријентисаног графа G_1 види се да су излазни степени чворова: $d^+(1) = 2$, $d^+(2) = 2$, $d^+(3) = 2$, $d^+(4) = 2$ и $d^+(5) = 1$.

Из листи суседства неоријентисаног графа G_2 налазимо степене чворова: $d(1) = 2$, $d(2) = 2$, $d(3) = 1$ и $d(4) = 2$. ■

Матрица инциденције чворова и грана

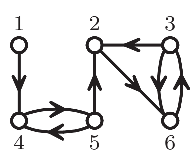
У случају оријентисаних и неоријентисаних графова имамо различите матрице инциденције.

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.4. Нека је $\Gamma = (V, E)$ оријентисан граф без петљи код кога је скуп чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и скуп грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Тада је *матрица инциденције чворова и грана*, $S = ||s_{ij}||_{n\times m}$, дефинисана са

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако грана } e_j \text{ излази из чвора } v_i \\ -1 & \text{ако грана } e_j \text{ улази у чвор } v_i \\ \pm 1 & \text{ако је грана } e_j \text{ петља око чвора } v_i \\ 0 & \text{ако грана } e_j \text{ и чвор } v_i \text{ нису инцидентни.} \end{cases}$$

Матрица S је матрица облика $n \times m$. Број појављивања -1 у i-тој врсти матрице S једнак је броју грана које улазе у чвор v_i, тј. улазном степену $d^-(v_i)$ чвора v_i. Број појављивања 1 у i-тој врсти матрице S једнак је броју грана које излазе из чвора v_i, тј. излазном степену $d^+(v_i)$ чвора v_i. У свакој колони се налазе по један елемент -1 и 1, што одговара чињеници да свака грана улази у тачно један чвор и излази из тачно једног чвора.

ПРИМЕР 4.4.5. Одредити матрицу инциденције чворова и грана S оријентисаног графа $G = (V, E)$ представљеног на Слици 4.2. Извести одговарајуће закључке.



Слика 4.2.

Решење. Скуп чворова је $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а скуп грана је $E = \Big\{(1,4), (4,5), (5,4), (5,2), (2,6), (3,2), (3,6), (6,3)\Big\}$. Матрица инциденције чворова и грана S има следећи облик (грана (u, v) је ту представљена краће као uv!):

$$S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 14 & 45 & 54 & 52 & 26 & 63 & 36 & 32 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Како друга врста матрице S има два елемента -1, улазни степен чвора 2 је једнак $d^-(2) = 2$. Пошто ова врста садржи само један елемент 1, излазни степен чвора 2 је једнак $d^+(2) = 1$.

Видимо да се у свакој колони матрице S налази само по један елемент -1 и 1. На пример, првој колони одговара грана 14, која излази из чвора 1, због чега је елемент ове колоне у првој врсти (која одговара чвору 1) једнак 1. Грана 14 улази у чвор 4, па је елемент ове колоне у четвртој врсти (која одговара чвору 4) једнак -1. ■

Код неоријентисаних графова матрица инциденције се дефинише на следећи начин.

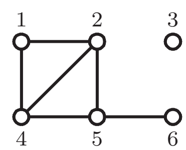
ДЕФИНИЦИЈА 4.4.5. Нека је $\Gamma = (V, E)$ неоријентисан граф код кога је скуп чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и скуп грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Тада је *матрица инциденције чворова и грана*, $R = ||r_{ij}||_{n\times m}$, дефинисана са

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{чвор } v_i \text{ је инцидентан са граном } e_j \\ 0 & \text{чвор } v_i \text{ није инцидентан са граном } e_j. \end{cases}$$

Матрица R је матрица облика $n \times m$. Број јединица у i-тој врсти матрице R једнак је степену $d(v_i)$ чвора v_i.

У случају када граф нема петљи у свакој његовој колони се налазе по две јединице, што одговара чињеници да је свака грана (која није петља) инцидентна са два различита чвора. Уколико колона има само једну јединицу, одговарајући чвор је инцидентан петљи.

ПРИМЕР 4.4.6. Одредити матрицу инциденције чворова и грана R неоријентисаног графа $G = (V, E)$ представљеног на Слици 4.3.



Слика 4.3.

Решење. Скуп чворова је $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а скуп грана је $E = \Big\{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{2,5\},\{4,5\},\{5,6\}\Big\}$, што ћемо краће означавати $E = \{12, 14, 24, 25, 45, 56\}$. Матрица инциденције чворова и грана R је:

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 14 & 24 & 25 & 45 & 56 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

У другој врсти матрице R (која одговара чвору 2) налазе се 3 елемента 1, па је степен чвора 2 једнак $d(2) = 3$. Видимо да се у свакој колони матрице R налазе тачно два елемента 1, јер граф нема петље. Пошто је чвор 3 изолован, у трећој колони матрице R налазе се само нуле. ■

Матрица растојања графа

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.6. Нека је $G = (V, E)$ граф са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ако су чворови v_i и v_j графа Γ повезани, тада је *растојање* $d(v_i, v_j)$ од чвора v_i до чвора v_j једнако дужини најкраћег пута од чвора v_i до чвора v_j.

Матрица растојања графа G је квадратна матрица $D = ||d_{ij}||_{n\times n}$ реда n код које је

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & \text{ако су чворови } v_i \text{ и } v_j \text{ повезани;} \\ \infty & \text{ако чворови } v_i \text{ и } v_j \text{ нису повезани.} \end{cases}$$

Пошто сматрамо да је сваки чвор v_i повезан са самим собом путем дужине 0, онда је $d_{ii} = 0$. Симбол ∞ представља само ознаку да два чвора нису повезана.

Са појмом растојања су повезани и следеће дефиниције.

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.7. *Дијаметар графа* $\Gamma = (V, E)$ је дат са $D(\Gamma) = \max\limits_{u,v \in V} d_\Gamma(u, v)$.

Ексцентрицитет чвора u је $\epsilon_\Gamma(u) = \max\limits_{v \in V} d_\Gamma(u, v)$.

Радијус графа Γ је $r(\Gamma) = \min\limits_{v \in V} \epsilon_\Gamma(v)$.

Сви чворови графа чији је ексцентрицитет једнак радијусу образују *центар графа.*

Матрица растојања неоријентисаног графа је (као и његова матрица суседства) симетрична матрица, јер најкраћи пут од v_i до v_j одређује најкраћи пут од v_j до v_i (када идемо истим гранама само супротним смером).

ПРИМЕР 4.4.7. На Слици 4.4 су представљени оријентисани граф $G_1 = (V_1, E_1)$ из Примера 4.4.5 и неоријентисани граф $G_2 = (V_2, E_2)$ из Примера 4.4.6.

Слика 4.4.

Одредити матрице растојања D_1 и D_2 ових графова у односу на поредак чворова 1,2,3,4,5,6.

Решење. Скуп чворова графа G_1 је $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Матрица растојања D_1 овог графа је:

$$D_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & \boxed{5} & 1 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \boxed{\infty} & 1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Елемент d_{13} матрице D_1 једнак је 5, јер је најкраћи пут од чвора 1 до чвора 3

$$1 - 4 - 5 - 2 - 6 - 3$$

дужине 5. Елемент $d_{25} = \infty$ зато што не постоји ниједан пут у графу G_1 од чвора 2 до чвора 5.

Скуп чворова графа G_2 је $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Матрица растојања D_2 овог графа је:

$$D_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \infty & 1 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & \infty & 2 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

У матрици D_2 је $d_{15} = 2$, јер је дужина најкраћег пута од чвора 1 до чвора 5 једнака 2. Постоје два најкраћа пута између ових чворова:

$$1 - 2 - 5 \qquad \text{и} \qquad 1 - 4 - 5.$$

Напоменимо да од чвора 1 до чвора 5 постоје и два елементарна пута дужине 3:

$$1 - 2 - 4 - 5 \qquad \text{и} \qquad 1 - 4 - 2 - 5.$$

Пошто је чвор 3 изолован, тј. није повезан ни са једним другим чвором графа G_2, у трећој врсти и трећој колони матрице D_2 (сем на главној дијагонали) налази се ознака ∞.

Видимо да је матрица D_2 симетрична (јер је граф G_2 неоријентисан), а D_1 није. ■

Матрица растојања неког графа поседује следећу особину.

ТЕОРЕМА 4.4.2. Елементи матрице растојања D графа са n чворова су или бројеви из скупа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ или су симбол ∞.

Доказ. Најкраћи пут који повезује два чвора (ако постоји) је један елементаран пут. Због тога његова дужина у графу са n чворова не може бити већа од $n-1$. Ако не постоји такав пут онда је на одговарајућој позицији у матрици растојања симбол ∞. □

Између матрице растојања чворова D и матрице суседства A графа G постоји обострана веза.

Ако нам је позната матрица растојања чворова D, онда матрицу суседства A добијамо тако што све елементе матрице D који нису 1 заменимо са 0.

ПРИМЕР 4.4.8. На основу матрица растојања D_1 и D_2 из Примера 4.4.7 одредити одговарајуће матрице суседства A_1 и A_2.

Решење.

$$D_1 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0&3&5&1&2&4\\ \infty&0&2&\infty&\infty&1\\ \infty&1&0&\infty&\infty&1\\ \infty&2&4&0&1&3\\ \infty&1&3&1&0&2\\ \infty&2&1&\infty&\infty&0 \end{array} \right\| \end{array} \Rightarrow A_1 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{array} \right\| \end{array}$$

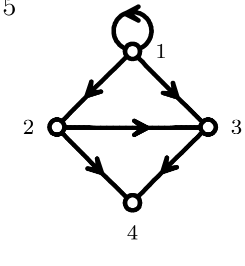
$$D_2 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0&1&\infty&1&2&3\\ 1&0&\infty&1&1&2\\ \infty&\infty&0&\infty&\infty&\infty\\ 1&1&\infty&0&1&2\\ 2&1&\infty&1&0&1\\ 3&2&\infty&2&1&0 \end{array} \right\| \end{array} \Rightarrow A_2 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array} \right\| \end{array}$$ ■

За обрнути поступак постоји неколико алгоритама.

Матрицу растојања D можемо добити од матрице суседства A графа Γ са n чворова коришћењем тврђења 4.4.1 и 4.4.2 на следећи начин:

- Одредити низ матрица $A^0 = I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}$.
- Елемент d_{ij} матрице растојања D једнак је најмањем броју k ($k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$) за који важи да се на позицији (i, j) матрице A^k налази елемент различит (већи) од 0. Ако такво k не постоји онда је $d_{ij} = \infty$.

ПРИМЕР 4.4.9. За граф са Слике 4.5



Слика 4.5.

низ матрица A^k, $k = 0, 1, 2, 3$ $(3 = n-1)$ и одговарајућа матрица растојања D имају следећи облик:

$$A^0 = I = \begin{Vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{Vmatrix} \quad A^1 = A = \begin{Vmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad D = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{Vmatrix}$$

Сваки уоквирени елемент означава прву појаву ненултог елемента на одговарајућој позицији у низу степена матрице A. Степен матрице k у којој се тај уоквирени елемент налази једнак је елементу матрице D на тој позицији.

Наиме, у матрици A^0 уоквирени елементи су први који су већи од 0, па у матрици D на главној дијагонали имамо 0. У матрици A^1 уоквирени елементи одговарају гранама које нису петље и у матрици D на њиховим позицијама имамо 1 (свака грана је пут дужине 1). У A^2 уоквирен елемент се налази на позицији $(1,4)$, а у A^0 и A^1 је ту 0, па је у D на тој позицији 2.

На осталим позицијама налази се симбол ∞, јер је у свим матрицама у низу A^0, A^1, A^2, A^3 на тим позицијама елемент 0 (тј. за одговарајуће чворове не постоји пут који их повезује). ■

Матрица растојања D се може добити од матрице суседства A и на ефикаснији начин – применом неког од познатих алгоритама за налажење најкраћег пута између два чвора у графу. Постоје две основне врсте таквих алгоритама:

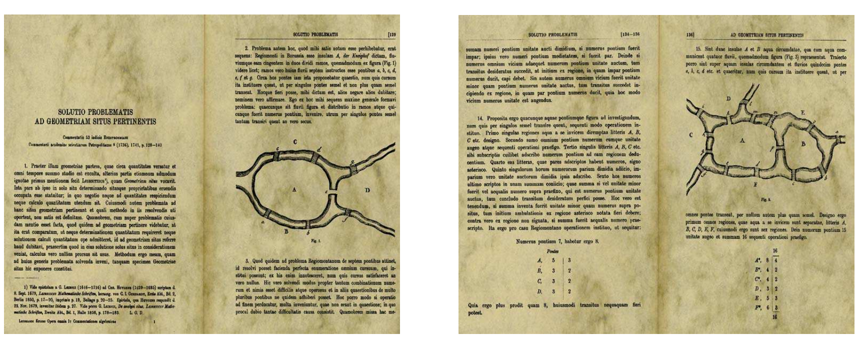
- алгоритми за одређивање растојања између два фиксирана чвора у графу, на пример Дајкстрин алгоритам (енг. *Dijkstra's algorithm*) – један такав алгоритам можемо примењивати редом на све парове чворова у графу;

- алгоритми за симултано одређивање растојања између свака два чвора у графу, на пример Флојд-Воршалов алгоритам (енг. *Floyd-Warshall algorithm*).

4.5 Ојлерови графови

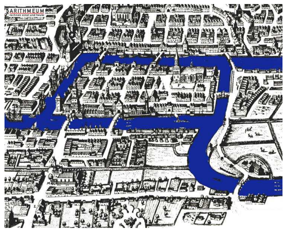
Швајцарском математичару Леонарду Ојлеру су током боравка у Кенигсбергу (нем. *Königsberg*; данашњи Калињинград) мештани поставили проблем да утврди да ли се може прећи преко свих 7 мостова овога града (који спајају обале реке Прегел са два острва, као и острва međусобно) тако да се преко сваког од њих пређе тачно једанпут и врати на место одакле се пошло. Ојлер је дао одречан одговор.

На Слици 4.1 су приказани делови оригиналног Ојлеровог рада који је он презентовао 1735. године Санкт Петерсбуршкој академији наука доказујући да је такав обилазак мостова немогућ уз напомену да се његов метод може проширити на произвољан распоред острва и мостова.

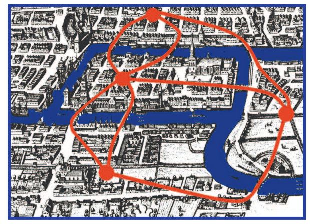


Слика 4.1.

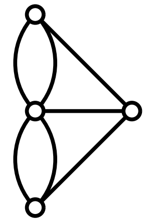
На Слици 4.2 је представљена мапа Кенигсберга (из времена Ојлера) са његовим мостовима. Ојлер је свакој обали и острву придружио по један чвор графа, а сваком мосту по једну грану – видети Слику 4.3. Тако је он добио један мултиграф (јер између неких парова чворова постоје по две гране, видети страну 95), који је представљен на Слици 4.4.



Слика 4.2.



Слика 4.3.



Слика 4.4.

Да би решио Проблем Кенигсбершких мостова Ојлер је користио општи појам Ојлеровог пута и контуре у неоријентисаном мултиграфу, који се може применити и у случају неоријентисаног графа задатог Дефиницијом 4.2.2.

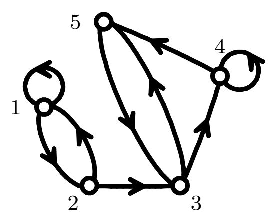
ДЕФИНИЦИЈА 4.5.1. *Ојлеров пут* у (мулти)графу Γ је пут који садржи све гране из Γ тачно једанпут. (Мулти)граф који има Ојлеров пут назива се *полуојлеров (мулти)граф*.

Ојлеров пут који је затворен назива се *Ојлерова контура*, а (мулти)граф који има Ојлерову контуру назива се *Ојлеров (мулти)граф*.

Ојлеров пут и Ојлерова контура могу се посматрати и у оријентисаном и у неоријентисаном графу. Ови путеви не морају бити елементарни, јер могу кроз неке чворове пролазити више пута.

ПРИМЕР 4.5.1. Испитати да ли постоји Ојлеров пут (односно Ојлерова контура) оријентисаног графа G_1 из Примера 4.2.1.

Решење. На Слици 4.5 поново је представљен граф G_1.



Слика 4.5.

У овом графу постоји Ојлеров пут

$$2-1-1-2-3-4-4-5-3-5.$$

Стога је G_1 полуојлеров граф. Приметимо да овај Ојлеров пут пролази кроз сваки чвор графа два пута (зато није елементаран пут).

У G_1 не постоји Ојлерова контура, јер кад једном прођемо граном $(2,3)$ више се не можемо вратити до чворова 1 и 2. ■

Сада ћемо навести без доказа тврђење које у потпуности карактерише неоријентисане Ојлерове графове.

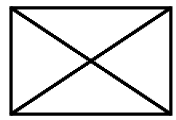
ТЕОРЕМА 4.5.1. **Ојлерова теорема.** Повезан неоријентисан (мулти)граф без петљи је Ојлеров ако и само ако су сви његови чворови парног степена. □

Последица претходне теореме је и следеће тврђење.

ПОСЛЕДИЦА. 4.5.2. Повезан неоријентисан (мулти)граф без петљи је полуојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена. □

ПРИМЕР 4.5.2. На основу Тврђења 4.5.2 видимо да обилазак мостова у Кенигсбергу није могућ, јер одговарајући граф са Слике 4.4 има сва 4 чвора непарног степена (5,3,3,3), те он није ни полуојлеров, а самим тим није ни Ојлеров. ■

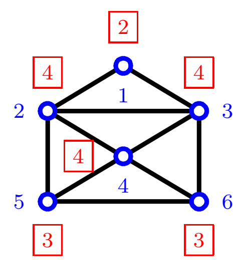
ПРИМЕР 4.5.3. Размотримо сада проблем из Поглавља 5.1. Може ли се једним потезом (без дизања оловке са папира и без преласка преко већ нацртаних линија) нацртати фигура са Слике 4.6?



Слика 4.6.

Решење. У одговарајућем графу имамо 5 чворова који имају степене 3,3,3,3,4, од чега су 4 непарног степена, па на основу Тврђења 4.5.2 у том графу не постоји Ојлеров пут. Зато је слику немогуће нацртати једним потезом без преласка преко већ нацртаних линија. ■

ПРИМЕР 4.5.4. Испитати да ли постоји Ојлеров пут (односно Ојлерова контура) неоријентисаног графа приказаног на Слици 4.7.



Слика 4.7.

Решење. На Слици 4.7 поред сваког чвора је уоквирен његов степен. Овај граф има 2 чвора непарног степена ($d(5) = 3$ и $d(6) = 3$), па, према Тврђењу 4.5.2, у њему постоји Ојлеров пут:

$$5 - 6 - 4 - 5 - 2 - 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 6.$$

Према Ојлеровој теореми (Тврђење 4.5.1) у њему не постоји Ојлерова контура. ■

Тражење Ојлеровог пута налази примену у многим проблемима Комбинаторне оптимизације. На пример, организатори великих изложби морају (ако хоће да посетиоци виде све експонате и да прелазе што мањи пут) да одреде један Ојлеров пут (ако постоји) у графу одређеном изложбеним простором и стазама кроз њега.

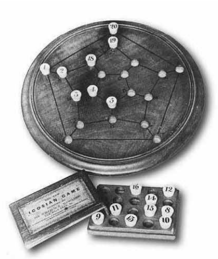
Најпознатији проблем оваквог типа је *Проблем кинеског поштара* (добио је такво име, јер га је први разматрао кинески математичар М. Куан 1962. године).

> Поштар треба да обиђе свој реон и разнесе сва писма. Он полази из поште, кроз сваку улицу свог реона теба да прође бар једанпут и да се на крају врати у пошту. Циљ је одредити такав пут поштара који је минималне дужине.

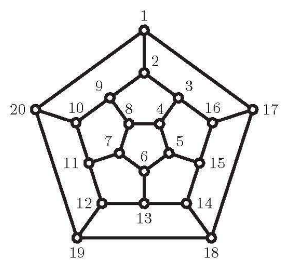
Том проблему се може придружити граф у коме чворови одговарају раскрсницама, а гране деловима улица који повезују суседне раскрснице. Ако је тај граф Ојлеров, тада је решење Проблема кинеског поштара једна Ојлерова контура, а у осталим случајевима оптимално решење овог проблема ће пролазити више пута кроз неке гране.

4.6 Хамилтонови графови

Енглески математичар сер Вилијам Хамилтон је 1859. године саставио занимљиву слагалицу, која је користила ивице регуларног додекаедра (тачније граф у равни који репрезентује додекаедар) – видети Слику 4.1. Игра се сводила на налажење пута који пролази кроз сва темена додекаедра тачно једанпут. Зато се контура (пут) која пролази кроз све чворове графа тачно једном назива *Хамилтонова контура* (*Хамилтонов пут*). На Слици 4.2 је приказан граф додекаедра са одговарајућом Хамилтоновом контуром $1-2-3-\ldots-19-20-1$.



Слика 4.1.



Слика 4.2.

30	21	50	9	32	19	52	7
49	10	31	20	51	8	33	18
22	29	48	61	42	27	6	53
11	60	41	28	45	62	17	34
40	23	64	47	26	43	54	5
59	12	25	44	63	46	35	16
24	39	2	57	14	37	4	55
1	58	13	38	3	56	15	36

Слика 4.3.

И пре Хамилтона су се сличним проблемима, који су дошли из рекреативне математике, бавили многи математичари. Најпознатији такав проблем је *Проблем коњичког скока*:

> Да ли је могуће скакачем обићи сва поља шаховске табле, тако да се свако поље обиђе тачно једанпут?

Овом проблему може се придружити граф који одговара скакачу као шаховској фигури (видети страну 92). Сада графовска формулација Проблема коњичког скока гласи:

> Да ли граф придружен скакачу има Хамилтонов пут?

На Слици 4.3 је приказано једно решење на класичној шаховској табли 8×8.

ДЕФИНИЦИЈА 4.6.1. *Хамилтонов пут* у графу Γ је елементаран пут који садржи све чворове из Γ. Граф који има Хамилтонов пут назива се *полухамилтонов граф*.

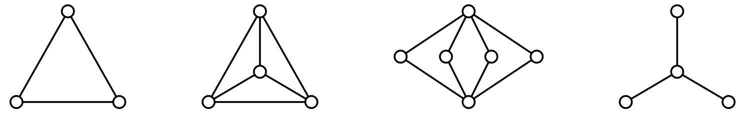
Хамилтонов пут који је затворен назива се *Хамилтонова контура*, а граф који има Хамилтонову контуру назива се *Хамилтонов граф*.

Хамилтонов пут и Хамилтонова контура могу се посматрати и у оријентисаном и у неоријентисаном графу.

Међу дефиницијама Ојлерових и Хамилтонових графова постоји велика сличност, али има и доста разлика. Код Хамилтонових путева и контура кроз сваки чвор пролазимо тачно једном, док код Ојлерових путева и контура кроз неке чворове можемо проћи и више пута. Такође, имамо и потпуно другачију ситуацију када је у питању карактеризација Ојлерових и Хамилтонових графова. Ојлерови графови су у потпуности одређени Ојлеровом теоремом, док за Хамилтонове графове таква карактеризација није позната. Један од највећих нерешених проблема Теорије графова је одредити потребан и довољан услов да је граф Хамилтонов. Ојлерови и Хамилтонови графови немају директну међусобну везу. То следи из следећег примера.

ПРИМЕР 4.6.1. Дати примере графова који су истовремено Ојлерови и Хамилтонови; нису Ојлерови, а јесу Хамилтонови; јесу Ојлерови, а нису Хамилтонови; нису ни Ојлерови ни Хамилтонови.

Решење. Свака контура C_n је и Ојлеров и Хамилтонов граф – овде C_3. Потпун граф K_4 није Ојлеров, а јесте Хамилтонов. Потпун бипартитан граф $K_{2,4}$ јесте Ојлеров, а није Хамилтонов. Звезда $S_4 = K_{1,3}$ није ни Ојлеров ни Хамилтонов граф. Ови графови су приказани на Слици 4.4.



C_3 K_4 $K_{2,4}$ S_4

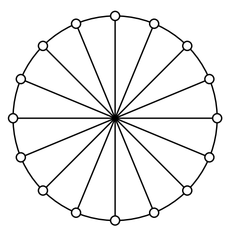
Слика 4.4.

■

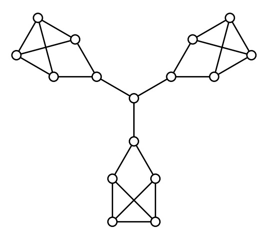
Још општије, имамо да, за разлику од Ојлерових графова, егзистенција Хамилтоновог пута не зависи искључиво од степена чворова, што показује следећи пример.

ПРИМЕР 4.6.2. Дати пример графова са истим низом степена чворова, од којих један има Хамилтонов пут, а други нема.

Решење. Граф са Слике 4.5 (који се састоји од контуре C_{16} код које су спојени наспрамни чворови) има не само Хамилтонов пут, него и Хамилтонову контуру. Граф са Слике 4.6 не поседује Хамилтонов пут, јер код њега постоји централни артикулациони чвор кроз кога би морали бар два пута да прођемо да би обишли све чворове графа.



Слика 4.5.



Слика 4.6.

Код оба графа сви чворови имају степен 3 (они су 3-регуларни). Стога не постоје критеријуми који се базирају искључиво на низу степена чворова графа, а одређују да ли је граф Хамилтонов или није. ■

Још један битан проблем Комбинаторне оптимизације, везан за налажење Хамилтонове контуре у графу, је чувени *Проблем трговачког путника*.

> Трговачки путник треба да обиђе n градова и врати се у град из кога је пошао, тако да сваки град обиђе тачно једанпут и да укупни трошкови његовог пута буду минимални.

Овом проблему се придружује граф у коме је сваком граду додељен један чвор, а два чвора су повезана граном ако се из једног одговарајућег града може директно доћи у други. Свакој грани овог графа је додељена *тежина* једнака цени транспорта трговачког путника између одговарајућих градова. Сада графовска формулација Проблема трговачког путника гласи:

> У придруженом тежинском графу одредити Хамилтонову контуру најмање тежине.

За овај класичан проблем Комбинаторне оптимизације не постоје ефикасни егзактни алгоритми који га решавају, већ се користи читав низ хеуристика које налазе задовољавајућа решења (та решења не морају бити оптимална).

Генерализације проблема трговачког путника нашле су примене у раду роботских машина које обрађују матичне плоче рачунара, али и у свемирским истраживањима. Сателит Росат је у периоду од 1990. до 1998. године обилазио око планете Земље и носио телескоп који је мерио количину X-зрачења које долази са звезда. Да би се уштедело време рада телескопа и енергија коју он троши, примењене су неке од метода Комбинаторне оптимизације за тражење оптималне Хамилтонове контуре кроз неколико милиона звезда. Тим поступком је постигнута велика уштеда у времену рада телескопа (тј. боравка сателита у свемиру).

4.7 Резиме

У првом поглављу ове главе дајемо неке примере из свакодневног живота и рекреативне математике који су повезани са Теоријом графова.

У другом поглављу ове главе се смо се упознали са основним појмовима теорије графова. Прво смо увели појмове оријентисаног и неоријентисаног графа, а затим смо за неоријентисане графове увели појмове степена чвора и регуларног графа, док смо за оријентисане графове увели улазни степен, излазни степен, улазни скуп и излазни скуп. Након тога смо увели појмове изоморфизма графова, као и подграфа и надграфа. Следећи битан појам је пут у графу (и елементарни пут, кружни пут и контура), који је повезан са појмовима повезаног графа и компонентама повезаности (и касније растојањем између 2 чвора). Затим смо увели неколико основних типова неоријентисаних графова, а поглавље завршавамо са појмовима комплемента графа и самокомплементарног графа.

У трећем поглављу смо дали неколико основних тврђења везаних за степене чворове и описали ефективан алгоритам за испитивање да ли постоји граф (без петљи) са задатим низом степена чворова.

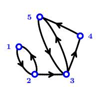
У четвртом поглављу смо навели разне начине помоћу којих може бити задат граф у рачунарству. То су матрица суседства графа, листа суседства (за сваки чвор), матрица инциденције чворова и грана и матрица растојања.

У петом поглављу бавимо се Ојлеровим контурама и путевима у графу. Навели смо Ојлерову теорему која у потпуности карактерише повезане графове без петљи који имају Ојлерову контуру.

У шестом поглављу бавимо се Хамилтоновим контурама и путевима у графу. Ове појмове смо илустровали на неколико примера, а и показали смо да (не)поседовање Ојлерове котуре није повезано са (не)поседовањем Хамилтонове контуре.

На крају овог поглавља даћемо међусобне везе свих појмова који су уведени у овој глави. То разматрање налази посебно примену при решавању задатака на колоквијуму, односно писменом делу испита.

Граф $G = (V, E)$ може бити задат на један од 6 начина (осталих 5 онда треба одредити!). Може бити дато:

- слика графа : 

- скупови чворова и грана : V и E
- листа суседства (за сваки чвор $v \in V$): ℓ_v
- матрица суседства : A
- матрица растојања : D
- матрица инциденције чворова и грана : R (код неоријентисаних графова),
  S (код оријентисаних графова).

У колоквијумском (и најчешће испитном) задатку, потребно је одредити, поред свих горњих ставки (како може бити задат граф), још и:

- степене чворова (за сваки чвор $v \in V$): $d(v)$ (код неоријентисаних графова), $d^+(v)$ и $d^-(v)$ (код оријентисаних графова; $d^+(v)$ означава излазни степен, а $d^-(v)$ улазни степен чвора v)
  степене можемо одредити са слике, из листи суседства ℓ_v и из матрица A и R (или S)

- да ли је граф бипартитан :
  ако ЈЕСТЕ обојити чворове црвено–бело, тако да свака грана има и црвени и бели крај;
  ако НИЈЕ наћи (и навести) контуру непарне дужине (нпр. троугао или петља, јер је она контура дужине 1).

- да ли је граф повезан (ово се испитује само код неоријентисаних графова):
  повезан је ако се из сваког чвора може доћи неким путем у било који други чвор
  повезан је ако се не јавља ∞ у матрици растојања D
  - број компоненти повезаности $c(G)$,
  - које су компоненте повезаности.

Ако је граф G повезан, онда је $c(G) = 1$ и ту једину компоненту чине сви чворови из V.

- да ли граф има Ојлеров пут/контуру;

  Ојлеров пут је пут који пролази кроз све гране тачно једанпут (кроз неке чворове може и више пута). Контура је пут код које су полазни и завршни чвор једнаки. Ако има Ојлерову контуру онда има и Ојлеров пут (то је Ојлерова контура). Ако нема Ојлеров пут онда нема ни Ојлерову контуру.

  Ојлерова теорема. Неоријентисан повезан граф без петљи има Ојлерову контуру акко су му сви степени чворова парни (има Ојлеров пут акко су му 0 или 2 степена чвора непарни).

  Ако има петље њих уклонимо и за новодобијене степене (они су за 1 мањи где су биле петље, а код осталих чворова су исти) применимо Ојлерову Т. Неповезан граф може имати Ојлерову контуру (пут) ако су све гране у истој компоненти повезаности и онда за ту компоненту применимо претходна разматрања.

  Ако оријентисан граф има Ојлерову контуру, онда за сваки чвор v важи $d^+(v) = d^-(v)$. Ако се само у 2 чвора улазни и излазни степени разликују за 1 онда може имати Ојлеров пут (са крајевима у тим чворовима). Ако је $|d^+(v) - d^-(v)| \geqslant 2$, онда оријентисан граф нема ни Ојлеров пут ни Ојлерову контуру.

- да ли граф има Хамилтонов пут/контуру;

  Хамилтонов пут је пут који пролази кроз све чворове тачно једанпут (кроз неке гране може и да не пролази). Контура је пут код које су полазни и завршни чвор једнаки. Ако има Хамилтонову контуру онда има и Хамилтонов пут (кад из Хамилтонове контуре избацимо једну произвољну грану). Ако нема Хамилтонов пут онда нема ни Хамилтонову контуру. Доказ да има је само да се наведе пут (контура), а да нема се своди на сналажење... Ако је неоријентисан граф неповезан, онда нема ни Хамилтонов пут ни Хамилтонову контуру. Ако у оријентисаном графу има чвор улазног или излазног степена 0 или ако се јавља ∞ у матрици D, онда нема Хамилтонову контуру (може имати Хамилтонов пут).

  Ако неоријентисани граф има чвор степена 1 или се у матрици D јави број већи од $\frac{n}{2}$, онда у њему не постоји Хамилтонова контура. Ако се у матрици D јави број $n-1$ (n је број чворова у G) на позицији (i, j), онда постоји Хамилтонов пут са почетком у чвору i и крајем у чвору j.

- степене матрице суседства :

  A^2 и A^3, и на основу тога број путева дужина 2 или 3 између чворова v_1 и v_2, као и између чворова v_3 и v_4. Потребно је и навести све те путеве.

  На позицији (i, j) у матрици A^k налази се број путева дужине k од чвора i до чвора j.

  Код неоријентисаних графова су матрице A, D, A^2 и A^3 симетричне.

4.8 Питања за проверу знања

68. Ако један граф поседује неку особину, а други не, да ли они могу бити изоморфни?

69. Која је разлика између матрице инциденције чворова и грана код оријентисаног и код неоријентисаног графа?

70. Да ли на основу само матрице растојања D можемо у потпуности реконструисати матицу суседства A?

71. Како одређујемо степене чворова из матрице суседства, листе суседства, матрице инциденције чворова и грана?

72. Како одређујемо улазне (излазне) степене чворова из матрице суседства, листе суседства, матрице инциденције чворова и грана?

73. У графу $G=(V,E)$ са m грана чему је једнако $2m-\sum\limits_{v\in V} d(v)$?

74. Да ли неповезан граф може имати: **а)** Ојлерову контуру; **б)** Хамилктонову контуру?

75. Ако су степени чворова у неоријентисаном графу G, редом, 5,2,3,3,3,1 да ли G може бити Ојлеров и/или полуојлеров?

76. Ако су степени чворова у неоријентисаном графу G, редом, 3,2,5,2,4,1 да ли G може бити Хамилтонов и/или полухамилтонов?

77. Ако повезан граф G има n чворова колико може највише, а колико најмање имати грана m?

78. Нацртати граф W_5 (точак са 5 чворова). Написати његову матрицу растојања D. Да ли је бипартитан? Регуларан? Да ли има Ојлерову контуру? А Хамилтонов пут? (Дати кратка образложења!)

79. Нацртати комплетан граф K_6. Шта је пресек свих његових листа суседства $\bigcap\limits_{v\in V}\ell_v$? Да ли је регуларан? Да ли има Ојлерову контуру? А Хамилтонов пут? (Дати кратка образложења!)

80. *Колоквијум 2013.*

Неоријентисан граф без петљи $G=(V,E)$ је задат својим скупом чворова и скупом грана:

$$V=\{1,8,10,29,36,50\},\qquad\qquad E=\Big\{\{u,v\}\mid u,v\in V,\ u\neq v,\ (u-v)\,\vdots\,7\Big\}.$$

($x\,\vdots\,y$ се чита „x је дељиво са y“, а математичка дефиниција дељивости је $(\exists k\in\mathbb{Z})\ x=k\cdot y$).

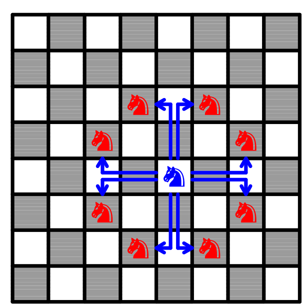
а) Нацртати дати граф и одредити степене $d(v)$ свих чворова.

б) Написати листе суседства ℓ_v, матрице суседства A, растојања D и инциденције чворова и грана R. Да ли је G бипартитан, регуларан, повезан? Колико има компоненти повезаности и које су?

в) Да ли дати граф има Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут? Уколико је одговор потврдан навести тај пут, односно контуру.

г) Одредити матрице A^2 и A^3. Колико има путева дужине 2, односно 3 од чвора 8 до чвора 36, тј. од чвора 29 до чвора 10? Навести све те путеве.

81. Скакачу на шаховској табли 8×8 придружујемо неоријентисани граф G на следећи начин. Поља шаховске табле представљају чворове графа. Из чвора x иде грана ка чвору y ако и само ако са поља x скакач може да одигра на поље y.



а) Одредити број чворова у овом графу n, број грана m, као и степене $d(v)$ свих чворова.

б) Да ли је граф G повезан? Уколико није колико има компоненти повезаности? Да ли је граф бипартитан?

в) Да ли граф G садржи Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут?

г) Колико се највише скакача може поставити на шаховску плочу 8×8, тако да не постоје два која се међусобно нападају?

82. n-димензионална коцка, Q_n, је граф чији је скуп чворова скуп свих уређених n-торки $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где су $a_i\in\{0,1\}$, а два чвора су суседна ако и само ако се одговарајуће n-торке разликују у тачно једној координати. Нацртати графове Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4.

Доказати да за сваку n-димензионалну коцку Q_n важе следећа тврђења:

а) Q_n има 2^n чворова и $n\cdot2^{n-1}$ грана.

б) Q_n је n-регуларан граф.

в) Q_n је повезан граф.

г) Q_n је бипартитан граф.

д) У зависности од броја n, $n\geqslant2$, испитати да ли граф n-димензионалне коцке Q_n садржи Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут.

5. Стабла

Појам *стабла* (неки на српском користе и израз *дрво*, мада је овај уобичајенији; енг. *tree*) представља један од најважнијих појмова у теорији графова. Стабло се може посматрати у два контекста: као посебан граф (који поседује нека својства), или као подграф неког (повезаног) графа. Слична ситуација се јавља и са контурама.

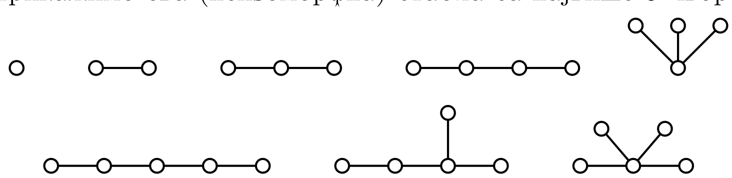
У првом делу ове главе увешћемо појам стабла и дати неке од основних особина стабала. Затим ћемо увести појам коренског стабла. Она налазе изузетно велику примену у рачунарским наукама и неке од тих примена ћемо илустровати у последњем поглављу ове главе.

5.1 Стабла

Појам *стабла* (некад се назива и *дрво*) представља један од најважнијих појмова Теорије графова због свог изузетног теоријског значаја, као и великих примена у електротехници, рачунарству, хемији... Први значајнији резултати у Теорији графова су везани за изучавање стабала.

ДЕФИНИЦИЈА 5.1.1. Стабло је повезан неоријентисан граф који не садржи ниједну контуру.

ПРИМЕР 5.1.1. Прикажимо сва (неизоморфна) стабла са највише 5 чворова.



Слика 5.1.

Сва ова стабла су дата на Слици 5.1. ■

Наредно тврђење омогућава да се појам стабла дефинише и на неке друге еквивалентне начине.

ТЕОРЕМА 5.1.1. Нека је граф Γ неоријентисан граф са n чворова. Тада су следећи искази еквивалентни.

1° Граф Γ је повезан граф који не садржи ниједну контуру.

2° Граф Γ је повезан граф са $m = n - 1$ грана.

3° Граф Γ је граф без контура који има $m = n - 1$ грана.

4° Граф Γ је минималан повезан граф[11].

5° Граф Γ је максималан граф који не садржи контуре[12].

6° Свака два чвора графа Γ су повезана тачно једним елементарним путем и G не садржи петље.

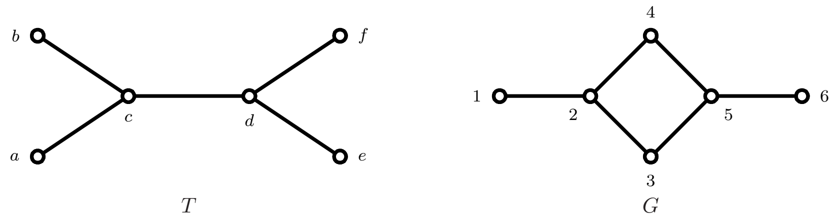
□

Напомена. На основу Тврђења 5.1.1 видимо да за дефиницију стабла можемо узети сваки од еквивалентних исказа 1°–6°. У том случају преостали искази представљају тврђења која треба доказати.

[11] Граф Γ је повезан, али удаљавањем било које гране постаје неповезан.

[12] Граф Γ не садржи контуре, али се додавањем нове гране између било која два чвора формира тачно једна контура у Γ.

ПРИМЕР 5.1.2. Све особине, изложене у Тврђењу 5.1.1, илустроваћемо на примеру стабла T и графа G који није стабло (видети Слику 5.2).



Слика 5.2.

$1°,2°,3°$ Граф T је повезан граф који не садржи ниједну контуру. Он има $n = 6$ чворова и $m = n-1 = 5$ грана. Стога T задовољава све особине из исказа $1°,2°,3°$ Тврђења 5.1.1.
Граф Γ је повезан граф са $n = 6$ чворова, али има $m = 6 \neq 5 = n-1$ грана и садржи контуру $2-3-5-4-2$. Стога за Γ ниједан исказ $1°,2°,3°$ Тврђења 5.1.1 није тачан.

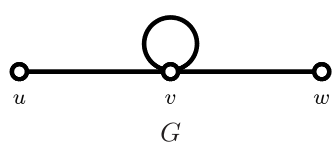
$4°$ Граф T је минималан повезан граф јер, ако избацимо било коју његову грану, он постаје неповезан (тачније свака његова грана је мост).
Граф Γ није минималан повезан граф јер, ако на пример избацимо његову грану $\{4,5\}$, он остаје повезан (избацивањем те гране смо добили једно стабло).

$5°$ Граф T је максималан граф који не садржи контуре, јер убацивањем нове гране добијамо тачно једну контуру у T. На пример, ако бисмо графу T додали грану $\{a,e\}$, добили бисмо контуру $a-c-d-e-a$.
Граф Γ није максималан граф који не садржи контуре јер има контуру $2-3-4-5-2$.

$6°$ Граф T нема петље и свака два његова чвора су повезана тачно једним елементарним путем (да ово није тачно у стаблу T би имали контуру!). На пример, чворове a и d повезује само један елементаран пут $a-c-d$.
Међутим, код графа Γ постоје два чвора 1 и 6 који су повезани са два различита елементарна пута $1-2-3-5-6$ и $1-2-4-5-6$.

■

ПРИМЕР 5.1.3. Испитати да ли је граф G са Слике 5.3 стабло.



Слика 5.3.

Решење. Граф Γ је повезан граф са $n = 3$ чвора, али овај граф има $m = 3 \neq 2 = n-1$ грана и петља $\{v\}$ је контура $v-v$ у G. Стога за Γ ниједан исказ $1°,2°,3°,5°,6°$ Тврђења 5.1.1 није тачан, те G није стабло. Граф Γ није ни минималан повезан граф, тј. није тачан исказ $4°$, јер, ако избацимо петљу $\{v\}$, граф остаје повезан (избацивањем те гране смо добили пут P_3). ■

Сада ћемо навести једну од основих особина стабла.

ТЕОРЕМА 5.1.2. Свако стабло T са $n \geqslant 2$ чворова има бар два чвора степена 1.

Доказ. Према тврђењима 4.3.2 и 5.1.1, збир степена свих чворова стабла T је једнак двоструком броју његових грана $m = n-1$, тј.

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m = 2\cdot(n-1) = 2n-2.$$

Како је стабло T повезан граф и како је $n \geqslant 2$, за сваки његов чвор v важи да је $d(v) \geqslant 1$. Пошто у горњој суми сабирамо n степена чворова који су сви већи или једнаки 1, а њихов збир је $2n-2$, следи да постоје бар два чвора степена једнаког 1. □

Напомена. Стабло са n чворова које има тачно два чвора степена 1 представља пут P_n. Стабло са n чворова које има $n-1$ чворова степена 1 представља звезду S_n (видети неке од графова са Слике 5.7.1).

Појам стабла се може уопштити увођењем појма шуме.

ДЕФИНИЦИЈА 5.1.2. Шума је неоријентисани граф чија је свака компонента повезаности стабло.

Директна последица дефиниција 5.1.1 и 5.1.2 и Тврђења 5.1.1 су следеће теореме.

ТЕОРЕМА 5.1.3. Сваки неоријентисани граф који не садржи контуру је шума. □

ПРИМЕР 5.1.4. Ако све графове са Слике 5.1 сматрамо једним графом са 29 чворова, тада овај граф представља шуму са 8 компонената повезаности од којих је свака стабло. ■

ТЕОРЕМА 5.1.4. Сваки подграф неког стабла је шума. Ако је овај подграф повезан он представља стабло. □

Ово тврђење је значајно јер омогућава дефинисање појма подстабла у наредном поглављу.

Следеће тврђење описује центар стабла (да подсетимо центар графа чине чворови са најмањим ексцентрицитетом — видети Дефиницију 4.4.7 са стране 109).

ТЕОРЕМА 5.1.5. Центар стабла се састоји или од једног чвора, или од два суседна чвора. □

Центар стабла T можемо добити веома једноставним алгоритмом. Ако у сваком кораку избацимо све листове, све док не останемо са једним или два чвора (јер према претходној теореми центар има или 1 или 2 чвора), на крају ће нам остати чворови који чине центар стабла T.

Без доказа наводимо следећу теорему (јер је последица претходне и одговарајућих дефиниција) која даје везу дијаметра и радијуса стабла.

ТЕОРЕМА 5.1.6. Центар стабла T се састоји од једног чвора ако и само ако је $D(T) = 2r(T)$. У противном је $D(T) = 2r(T) - 1$ и тада се центар састоји од 2 чвора. □

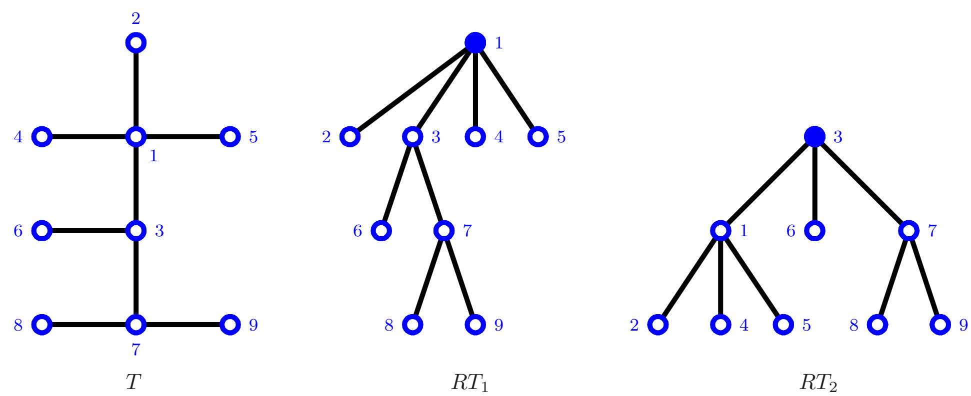
5.2 Коренска стабла

Коренска стабла налазе врло важне примене у рачунарским наукама, на пример, у организацији база података, у кодирању и декодирању низова карактера, у теоријском рачунарству за приказивање математичких формула... Коренска стабла налазе примену и у ботаници, као и у генеалогији (на пример за приказ родбинских односа у виду породичних стабала).

ДЕФИНИЦИЈА 5.2.1. *Коренско стабло* је уређен пар $RT = (T, r)$, где је T стабло, а r један његов чвор, који се назива *корен* стабла.

У Примеру 5.2.1 ћемо приказати како од једног истог стабла можемо добити више различитих коренских стабала.

ПРИМЕР 5.2.1. На Слици 5.1 показано је једно стабло T и два коренска стабла RT_1 и RT_2 која се добијају када се у T два различита чвора прогласе за корен (корен је означен црним чвором).



Слика 5.1.

У коренском стаблу RT_1 за корен је изабран чвор 1, а у коренском стаблу RT_2 чвор 3. Зато можемо писати $RT_1 = (T, 1)$ и $RT_2 = (T, 3)$. ■

Чворови неког коренског стабла могу се класификовати у односу на њихово растојање од корена увођењем појма *нивоа чвора*.

ДЕФИНИЦИЈА 5.2.2. *Ниво чвора* v коренског стабла $RT = (T, r)$ је једнак дужини елементарног пута у стаблу T од корена r до чвора v.
Највећи ниво чвора у RT се назива *висина коренског стабла* RT.

Ниво чвора v се уобичајено означава са $n(v)$, а висина коренског стабла са h. Ако посебно хоћемо да нагласимо да је у питању коренско стабло RT користићемо ознаке $n_{RT}(v)$, односно h_{RT}.

Напомена. Како је, према Тврђењу 5.1.1, елементаран пут од корена до сваког чвора коренског стабла јединствен, то је ниво сваког чвора једнозначно одређен. Ниво корена је једнак 0 јер је, према Дефиницији 4.2.10, сваки чвор повезан са самим собом путем дужине 0. Нивои суседних чворова се разликују за 1. Приметимо, да смо ниво чвора v могли да дефинишемо и као растојање од корена r до чвора v.

ПРИМЕР 5.2.2. Одредити за стабла RT_1 и RT_2 из Примера 5.2.1 нивое свих њихових чворова, као и висине тих стабала.

Решење. Нивои чворова коренског стабла RT_1 су

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n_{RT_1}(v)$	0	1	1	1	1	2	2	3	3

,

па је висина овог стабла једнака највећем нивоу 3, тј. $h_{RT_1} = 3$.
Нивои чворова коренског стабла RT_2 су

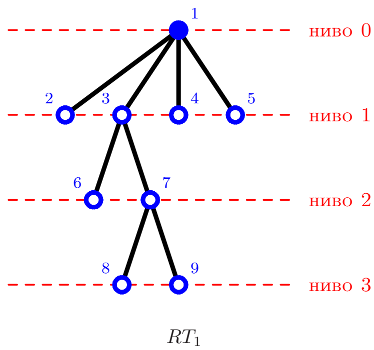
v	3	1	6	7	2	4	5	8	9
$n_{RT_2}(v)$	0	1	1	1	2	2	2	2	2

.

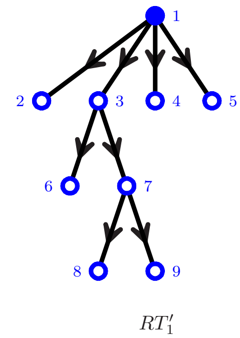
Стога је висина овог стабла једнака $h_{RT_2} = 2$. ■

У уобичајеној геометријској интерпретацији неког коренског стабла сви његови чорови који имају исти ниво налазе се на истој висини, при чему се чворови различитих нивоа представљају одозго надоле, према свом растућем нивоу.

На пример, стабло RT_1 са Слике 5.1 већ је геометријски представљено на претходни начин. Оно се може, у складу са нивоима својих чворова одређеним у Примеру 5.2.2, прецизније протумачити као на Слици 5.2.



Слика 5.2.



Слика 5.3.

Напомена. Понекад се у коренским стаблима њихове гране оријентишу од чворова нижег нивоа ка чворовима вишег нивоа (на пример, при представљању стабала у рачунару – видети Пример 5.2.8). Тако би стаблу RT_1 са Слике 5.2 одговарало стабло RT_1' са оријентисаним гранама на Слици 5.3. Међутим, у општем случају ова оријентација није неопходна, јер је она задата вредностима нивоа чворова. Због тога у овом и следећем поглављу разматрамо само неоријентисана коренска стабла.

Како коренска стабла налазе примену и у генеалогији (бави се породичним стаблима), то се терминологија коренских стабала ослања на називе одговарајућих родбинских односа.

ДЕФИНИЦИЈА 5.2.3.

Нека је $RT = (T, r)$ коренско стабло са скупом чворова V.

Ако су чворови $u, v \in V$ суседни и чвор u има мањи ниво од чвора v, тј. $n(u) = n(v) - 1$, тада је чвор u *родитељ* чвора v, а за чвор v кажемо да је *дете* чвора u.

Сваки чвор из V који нема децу назива се *лист* (или *терминални*, односно *завршни чвор*) стабла RT. Сваки чвор из V, који није лист, зове се *унутрашњи* (или *интерни*) *чвор* стабла RT.

Преци чвора $u \in V$, који није корен, су сви чворови различити од u који припадају путу у T од корена r до чвора u. *Потомци* чвора $u \in V$, који није лист, су сви чворови из V који имају чвор u као претка.

Подстабло са кореном v коренског стабла RT је подграф стабла T индукован чвором $v \in V$ као кореном и свим његовим потомцима.

Из особине стабла (Тврђење 5.1.1) следи да у коренском стаблу сваки чвор, осим корена r, има тачно једног родитеља (ако то не би важило, стабло би садржало контуру!).

Појам подстабла у једном коренском стаблу је веома битан, не само за увођење још неких важних појмова, већ и због значајне улоге у применама коренских стабала које ћемо илустровати у наредном поглављу.

ПРИМЕР 5.2.3. Илуструјмо појмове из Дефиниције 5.2.3 на примеру стабла RT_1 са Слике 5.2.

Чвор 3 је родитељ чворова 6 и 7, а чворови 6 и 7 су деца чвора 3.

Листови стабла RT_1 су чворови 2, 4, 5, 6, 8 и 9.

Унутрашњи чворови стабла RT_1 су чворови 1, 3 и 7.

Преци чвора 8 су чворови 1, 3 и 7.

Потомци чвора 3 су чворови 6, 7, 8 и 9.

Подстабло са кореном 3 индуковано је чворовима 3, 6, 7, 8 и 9. ■

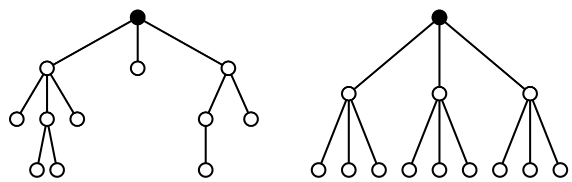
У зависности од тога колико деце може да има сваки чвор коренска стабла се могу класификовати на следећи начин.

ДЕФИНИЦИЈА 5.2.4. Коренско стабло се назива *t–арно стабло* ако сваки његов унутрашњи чвор има највише t деце. За $t = 2$ се t–арно стабло назива *бинарно стабло*.

Стриктно t-арно стабло је t-арно стабло чији сваки унутрашњи чвор има тачно t деце.

Потпуно t–арно стабло је стриктно t-арно стабло код кога сви листови имају исти ниво.

На Слици 5.4 дата су три t–арна стабла. Прво од њих је 3-арно стабло (понекад се назива *тринарно* или *тернарно*) које није стриктно. Друго стабло је потпуно 3-арно, а треће стабло је потпуно бинарно.



Слика 5.4.

ДЕФИНИЦИЈА 5.2.5. *Балансирано коренско стабло* је коренско стабло у коме се нивои било која два његова листа разликују највише за 1.

Пошто је висина h неког коренског стабла једнака највећем нивоу његовог листа, тада је, према Дефиницији 5.2.5, код балансираног коренског стабла ниво сваког листа једнак h или $h-1$.

Свако потпуно t-стабло је балансирано коренско стабло јер сви његови листови имају ниво h.

ПРИМЕР 5.2.4. Прво стабло са Слике 5.4 није балансирано, јер има висину 3, а у њему постоји лист нивоа 1. Остала стабла са Слике 5.4 су балансирана, јер су потпуна.

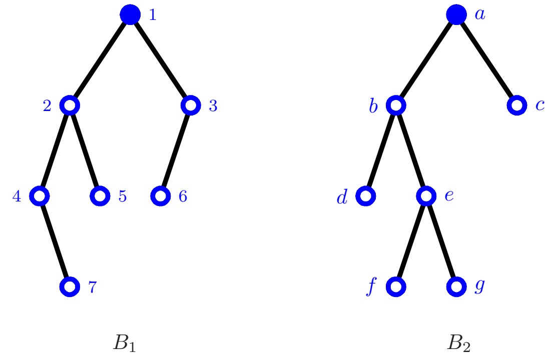
Надаље ћемо у овом и наредном поглављу, разматрати само бинарна стабла и њихове примене.

Илуструјмо на примеру бинарног стабла да стриктно t-арно стабло не мора бити баласирано, као ни да балансирано не мора бити стриктно.

ПРИМЕР 5.2.5. Дати пример бинарног стабла које није стриктно, а јесте балансирано и бинарног стабла које јесте стриктно, али није балансирано.

Решење. Бинарно стабло B_1 са Слике 5.5 није стриктно, јер има унутрашње чворове 3 и 4 који имају само по једно дете. Оно је балансирано, јер за нивое листова 5, 6 и 7 важи:
$n(5) = n(6) = 2 = h - 1$ и $n(7) = 3 = h$.

Бинарно стабло B_2 са Слике 5.5 је стриктно, јер сви унутрашњи чворови a, b и e имају два детета. Међутим, оно није балансирано јер се нивои листова c и f $\big(n(c) = 1,\ n(f) = 3\big)$ разликују за више од 1.



Слика 5.5.

Приметимо да бинарно стабло B_2 није потпуно, јер има листове различитих нивоа: $n(c) = 1$, $n(d) = 2$ и $n(f) = n(g) = 3$. ■

Код бинарних стабала понекад имамо потребу да разликујемо децу сваког његовог унутрашњег чвора, и у складу са тим уводимо наредну дефиницију.

ДЕФИНИЦИЈА 5.2.6. *Уређено бинарно стабло* B је бинарно стабло у коме се код сваког унутрашњег чвора једно његово дете сматра за *лево*, а друго за *десно*. У случају да чвор има само једно дете и оно је или лево или десно дете.

Лево подстабло унутрашњег чвора v уређеног бинарног стабла B је подстабло стабла B са кореном у левом детету чвора v.

Десно подстабло унутрашњег чвора v уређеног бинарног стабла B је подстабло стабла B са кореном у десном детету чвора v.

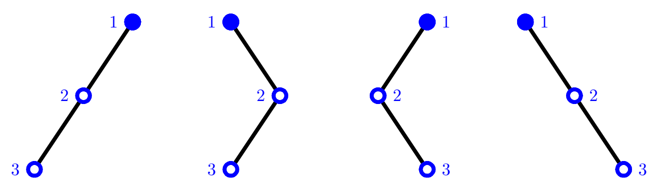
ПРИМЕР 5.2.6. Илуструјмо претходне појмове на примеру бинарног стабла B_1 са Слике 5.5, које је приказано као уређено стабло.

Чвор 4 је лево дете, а чвор 5 десно дете унутрашњег чвора 2 овог стабла. Чвор 4 има само десно дете, а то је чвор 7.

Лево подстабло чвора 1 је подстабло са кореном 2 индуковано чворовима 2, 4, 5 и 7. Десно подстабло чвора 1 је подстабло са кореном 3 индуковано чворовима 3 и 6. ■

ПРИМЕР 5.2.7. Одредити колико има уређених бинарних стабала са три чвора (означена са 1, 2 и 3) код којих је чвор 1 корен, чвор 2 његово дете, а чвор 3 дете чвора 2.

Решење. Пошто у једном таквом стаблу сваки од чворова 2 и 3 може бити лево или десно дете, оваквих бинарних стабала има укупно 4 и сва су она приказана на Слици 5.6.

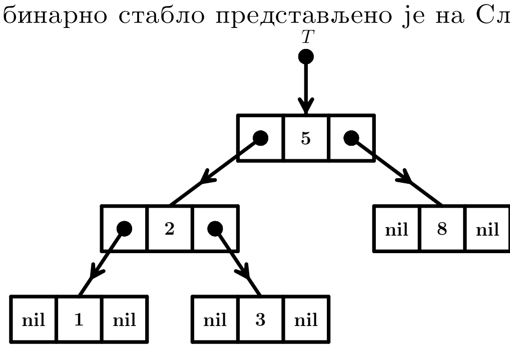


Слика 5.6.

Иако су нивои чворова у свим овим стаблима идентични $\big($ти нивои су $n(1) = 0$, $n(2) = 1$, $n(3) = 2\big)$, она се ипак међусобно разликују по врсти деце чворова 1 и 2. ■

ПРИМЕР 5.2.8. Често се у рачунарима подаци организују у виду структуре уређеног бинарног стабла (видети примене из Поглавља 5.9). Сваки чвор оваквог стабла се најчешће представља помоћу слога који се састоји од 3 елемента: вредности податка који је смештен у тај чвор, као и два показивача (или поинтера) на меморијске локације корена левог подстабла и корена десног подстабла тог чвора. Ако лево или десно подстабло чвора не постоји, тада слог садржи одговарајући показивач у празно (нулпоинтер или **nil**).

Једно такво оријентисано бинарно стабло представљено је на Слици 5.7.



Слика 5.7.

Ово стабло садржи бројчане податке 1, 2, 3, 5 и 8 и на његов корен указује показивач T. ■

5.3 Примене бинарних стабала

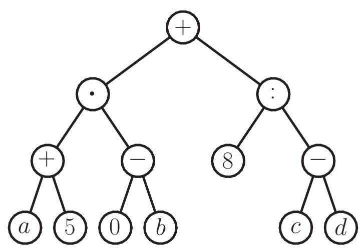
Уређена бинарна стабла имају велику примену у рачунарству. Овде ћемо размотрити три овакве примене: у приказивању алгебарских формула, у организацији скупа уређених података у рачунару и у кодирању података.

Приказивање алгебарских формула

Често се у рачунарству једна алгебарска формула представља у облику стриктног уређеног бинарног стабла, које се формира по следећим принципима. Бинарне операције формуле се приказују као унутрашњи чворови овог стабла, док његовим листовима одговарају променљиве и константе формуле. За сваки унутрашњи чвор важи да његово лево подстабло приказује леву алгебарску подформулу (први операнд), а његово десно подстабло приказује десну алгебарску подформулу (други операнд) над којима се врши операција додељена овом чвору. Због тога чворови операција мањег приоритета имају мањи ниво, а већег већи ниво. Тако ће операција најмањег приоритета (тј. она која се последња примењује приликом израчунавања формуле) одговарати корену бинарног стабла.

ПРИМЕР 5.3.1. Представити алгебарску формулу $(a+5)\cdot(-b)+8:(c-d)$ у облику стриктног уређеног бинарног стабла.

Решење. Да би стабло које се додељује овој формули било стриктно, потребно је да она садржи само бинарне операције. Зато унарну операцију $-b$ треба заменити разликом $0-b$. Тако се полазна формула своди на формулу $(a+5)\cdot(0-b)+8:(c-d)$ којој одговара стриктно уређено бинарно стабло дато на Слици 5.2.



$(a+5)\cdot(0-b)+8:(c-d)$

Слика 5.2.

Листовима стабла одговарају променљиве и константе алгебарске формуле: a, 5, 0, b, 8, c и d, док су унутрашњим чворовима додељени знаци операција формуле.

Сваки чвор v стабла одређује подстабло са кореном v које одговара некој подформули формуле.

$(a+5)\cdot(0-b)$ $8:(c-d)$

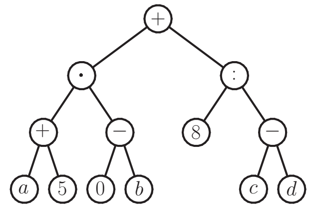
Слика 5.3.

На пример, лево подстабло корена одговара подформули $(a+5)\cdot(0-b)$, а десно подстабло корена одговара подформули $8:(c-d)$ (видети Слику 5.3). Сам корен одговара целој формули $(a+5)\cdot(0-b)+8:(c-d)$. ■

Постоје три стандардна начина обиласка:

КЛД, **ЛКД** и **ЛДК**. Слова **К**, **Л**, **Д** су скраћенице од речи **корен**, **лево** и **десно подстабло**, па називи ових обилазака означавају редоследе по којима се они врше. На пример, код КЛД обиласка прво обилазимо корен, а затим цело његово лево подстабло и на крају цело његово десно подстабло, при чему за оба ова подстабла користимо КЛД принцип.

ПРИМЕР 5.3.2. Посматрајмо бинарно стабло из Примера 5.3.1 (поново приказано на Слици 5.4).



Слика 5.4.

- при **КЛД** обиласку стабла, где се прво обилази корен, затим лево, па десно подстабло, редослед обилазака чворова је следећи:

$$+ \quad \cdot \quad + \quad a \quad 5 \quad - \quad 0 \quad b \quad : \quad 8 \quad - \quad c \quad d.$$

- при **ЛКД** обиласку, где се прво обилази лево подстабло, затим корен, па десно подстабло, редослед обилазака чворова је следећи:

$$a \quad + \quad 5 \quad \cdot \quad 0 \quad - \quad b \quad + \quad 8 \quad : \quad c \quad - \quad d.$$

- при **ЛДК** обиласку, где се прво обилази лево, затим десно подстабло, па корен, редослед обилазака чворова је следећи:

$$a \quad 5 \quad + \quad 0 \quad b \quad - \quad \cdot \quad 8 \quad c \quad d \quad - \quad : \quad +.$$

Редослед чворова добијен КЛД обиласком представља алгебарску формулу написану у тзв. *префиксној нотацији*, названој понегде и *пољска нотација* (име добила по пољском математичару Лукашијевичу). У њој се свака операција пише пре својих операнада (на пример $+a5$). Редослед чворова добијен ЛДК обиласком представља *постфиксну* (или *инверзну пољску*) *нотацију* алгебарске формуле у којој се свака операција пише после својих операнада (на пример $a5+$). Приметимо да редослед чворова $a \ + \ 5 \ \cdot \ 0 \ - \ b \ + \ 8 \ : \ c \ - \ d$, добијен ЛКД обиласком, одговара уобичајеном читању (у тзв. *инфиксној нотацији*) формуле $(a+5)\cdot(0-b)+8:(c-d)$, дефинисане стаблом са Слике 5.4, али без њених заграда. Због тога овај обилазак не одређује формулу једнозначно. ■

Из Примера 5.3.1 следи да КЛД и ЛДК обиласци чворова стабла једне алгебарске формуле дефинишу ову формулу (у префиксној и постфиксној нотацији) на једнозначан начин, док ЛДК обилазак захтева додатак заграда да би алгебарска формула била тачно одређена. Стога КЛД и ЛДК обиласци налазе већу примену у рачунарству.

Бинарно стабло претраживања

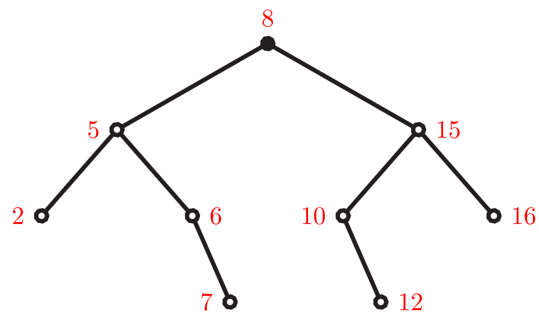
Бинарно стабло се у рачунарству често користи за приказивање односа међу подацима који припадају неком тотално уређеном скупу података (тј. скупу у који је уведена једна релација поретка тако да су било која два податка у овој релацији). На пример, ако овај скуп садржи бројеве, он може бити тотално уређен релацијом $\leqslant$ или $\geqslant$. Ако скуп садржи речи он је обично уређен према лексикографском поретку (тј. поретку речи у речнику). Оваквом скупу података може се придружити тзв. *бинарно стабло претраживања*, које се дефинише на следећи начин.

ДЕФИНИЦИЈА 5.3.1. Нека је дат скуп података $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ који је тотално уређен у односу на неку релацију поретка ϱ. За податак a_i кажемо да је *мањи* од податка a_j, тј. податак a_j је *већи* од податка a_i, ако је $a_i \, \varrho \, a_j$.

Бинарно стабло претраживања је уређено бинарно стабло од n чворова у коме је сваком податку из A додељен један чвор, при чему за сваки унутрашњи чвор v важи:

- сви подаци у левом подстаблу чвора v су мањи од податка коме је додељен чвор v;
- сви подаци у десном подстаблу чвора v су већи од податка коме је додељен чвор v.

ПРИМЕР 5.3.3. На Слици 5.5 је приказано бинарно стабло претраживања за скуп података $A = \{2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 16\}$ тотално уређен релацијом $\leqslant$.



Слика 5.5.

У корену стабла се налази број 8. У његовом левом подстаблу су бројеви мањи од 8, а у његовом десном подстаблу су бројеви већи од 8. То својство имају и сви остали унутрашњи чворови овог стабла. ■

Бинарна стабла претраживања играју врло важну улогу при организацији и чувању података у рачунарству. Чување скупа података у виду стабла омогућава његово ефикасно претраживање. На пример, проналажење неког податка a у оваквом стаблу захтевало би да кренемо од корена и да у сваком унутрашњем чвору v испитујемо да ли је податак у чвору v једнак a (тада стајемо), мањи од a (тада идемо у лево подстабло) или већи од a (тада идемо у десно подстабло).

Приметимо да ЛКД обилазак бинарног стабла претраживања даје редослед чворова од мањег ка већем податку. На пример ЛКД обиласком чворова стабла са Слике 5.5 добија се низ бројева: 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 16.

Често се захтева да стабло претраживања неког скупа података буде балансирано, јер се тада повећава ефикасност његовог претраживања. На пример, стабло са Слике 5.5 је балансирано.

Стабла кодирања

Осврнимо се сада на кодирање. Сва слова, као и други симболи, у рачунару се чувају у виду низа битова (тј. низа 0 и 1) који представљају њихове бинарне кодове. Најчешћи начин је преко *ASCII* кода (скраћеница од енг. American Standard Code for Information Interchange), тј. кодирања где за сваки симбол користимо низ од 7 битова, плус додатни бит (јер бајт има 8 битова!) који служи за проверу парности да би се при преносу података елиминисале грешке.

Ако је количина података са којом радимо велика, пожељно је извршити сажимање њихових кодова, тј. да за кодирање неких симбола користимо низове са што мање битова. Оптимално би било када бисмо за симболе који се чешће јављају користили краће низове битова, а за оне који се јављају ређе да користимо дуже низове битова. На тај начин вршимо уштеду меморијског простора за складиштење података, а и бржи пренос података при њиховом трансферу са једног медија на други.

Међутим приликом чувања података у облику низова битова који имају различите дужине, долазимо до проблема како да утврдимо где се један низ битова завршава, а други почиње. То ћемо илустровати следећим примером.

ПРИМЕР 5.3.4. Нека је слово a кодирано са 10, b са 101, e са 11, m са 1011 и n са 110. Декодирати низ битова 1011110.

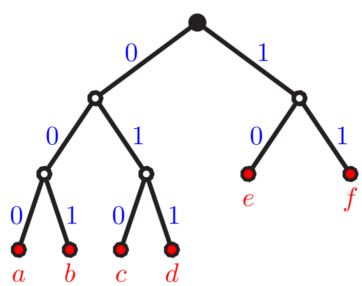
Решење. Да ли ће низ битова 1011110 представљати реч aen (10|11|110) или bea (101|11|10) или mn (1011|110)? Не можемо одредити! ■

Да би се обезбедило једнозначно декодирање при кодирању симбола бинарним кодовима различитих дужина, довољно је да се сваки од ових кодова не садржи ни у једном другом коду као његов почетни подниз. Скуп кодова који задовољава овај услов зове се *префиксни кôд*. Декодирање бинарних низова оваквим кодом врши се читањем његових битова с лева на десно и директним препознавањем кодова узастопних симбола.

Посматрајмо произвољно бинарно стабло. Ако нека његова грана води од родитеља до левог детета њој ће одговарати бит 0, а ако води од родитеља до десног детета њој ће одговарати бит 1. Како сваком листу одговара јединствен пут од корена стабла до листа, то сваком листу можемо да придружимо низ битова који одговарају гранама на путу од корена до тог листа. Тај низ битова се назива *кôд путање до листа*. Сада се сваком листу може доделити неки симбол који се може кодирати помоћу кода путање до тог листа. Такво једно стабло се назива *стабло кодирања*.

Скуп свих кодова путање до листа у произвољном бинарном дрвету представља префиксни кôд, јер се пут од корена до једног листа не може садржати у путу од корена до неког другог листа.

ПРИМЕР 5.3.5. У коренском стаблу на Слици 5.6 листовима су придружени симболи a, b, c, d, e, f. За сваки од тих симбола одредити његов кôд путање до листа, а затим декодирати низ битова 01110010000.



Слика 5.6.

Решење. Кад год у путу од корена до листа идемо улево тој грани одговара бит 0, а кад идемо удесно одговара бит 1. Тако, на пример, да бисмо од корена дошли до листа c морамо да идемо лево (0), па десно (1) и лево (0), те ће симболу c одговарати низ 010. На сличан начин долазимо до тога да сваком од симбола a, b, c, d, e, f одговара следеће кодирање:

$$a \leftrightarrow 000 \qquad b \leftrightarrow 001 \qquad c \leftrightarrow 010 \qquad d \leftrightarrow 011 \qquad e \leftrightarrow 10 \qquad f \leftrightarrow 11.$$

Дати кôд је префиксни кôд, па приликом декодирања датог низа битова можемо извршити поделу на 011|10|010|000, што нам даје реч $deca$. ■

Вратимо се на раније поменуту идеју да за симболе који се чешће јављају користимо краће низове битова, а за ређе дуже низове битова. У ту сврху уводимо тежину кода и слично тежину коренског стабла.

ДЕФИНИЦИЈА 5.3.2. Нека су задати симболи $s_1, s_2, \ldots, s_n$, где се симбол s_i јавља са фреквенцијом f_i, и нека дужина бинарног низа који га кодира износи l_i. Тада се *тежина кôда* дефинише као

$$w = l_1 \cdot f_1 + l_2 \cdot f_2 + \ldots + l_n \cdot f_n.$$

Иста формула важи и за *тежину бинарног стабла* код кога је листу који одговара симболу s_i додељена фреквенција f_i, а растојање од корена до тог листа је једнако l_i.

На Слици 5.7 представљен је Хафманов алгоритам, који је развио Хафман (енг. *D.A. Huffman*) 1952. године. Тај алгоритам одређује *Хафманово стабло* за симболе $s_1, s_2, \ldots, s_n$, којима одговарају фреквенције $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Хафманово стабло представља стабло са минималном тежином (доказ за то може се наћи у [1]). Због тога и одговарајући кôд, тзв. *Хафманов кôд* има минималну тежину.

Хафманов алгоритам у свакој итерацији ради са скупом подстабала $\mathcal{S}$, полазећи од скупа стабала са само једним чвором додељених симболима $s_1, s_2, \ldots, s_n$. У свакој итерацији спајају се она два подстабла из $\mathcal{S}$ чијим коренима су придружене две најмање фреквенције. Стабло које остане последње у скупу $\mathcal{S}$ је тражено Хафманово стабло чијим листовима су додељени симболи $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

procedure *Hafmanov algoritam*

1. Конструисати скуп стабала $\mathcal{S}$ од којих се свако састоји од јединог чвора s_i придружена

2. Одредити стабла $T_1, T_2 \in \mathcal{S}$ чијим коренима су придружене две најмање фреквенције f_1 и f_2 ($f_1 \leqslant f_2$).

3. Образовати бинарно стабло T коме је лево подстабло T_1, десно подстабло T_2 и корену је придружена фреквенција $f_1 + f_2$.

4. У скупу $\mathcal{S}$ заменити стабла T_1 и T_2 новим стаблом T.

5. Понављати кораке 2–4 све док у $\mathcal{S}$ не остане само једно стабло.

end procedure

Слика 5.7.

ПРИМЕР 5.3.6. Нека су дата слова a, b, c, d, e, f са одговарајућим фреквенцијама појављивања:

симбол	a	b	c	d	e	f
фреквенција	30	13	10	15	25	5

Одредити Хафманово стабло и на основу њега Хафманов кôд. Кодирати реч *deca* помоћу тог Хафмановог кода.

Решење. Даћемо приказ рада Хафмановог алгоритма по итерацијама (кораци 2–4). Стабла ћемо звати према чвору у корену. Листови су названи према одговарајућим симболима.

1° **2.** Фреквенције у неопадајућем редоследу:

5	10	13	15	25	30
f	c	b	d	e	a

3. Две најмање фреквенције су 5 и 10 и њима одговарају стабла f и c које мењамо стаблом T_1 чијем корену је придружен $5 + 10 = 15$.

4. Нове фреквенције су:

15	13	15	25	30
T_1	b	d	e	a

2° **2.** Фреквенције у неопадајућем редоследу:

13	15	15	25	30
b	T_1	d	e	a

3. Две најмање фреквенције су 13 и 15 и њима одговарају стабла b и T_1 које замењујемо стаблом T_2 у чијем корену је $13 + 15 = 28$.

4. Нове фреквенције су:

28	15	25	30
T_2	d	e	a

3° **2.** Фреквенције у неопадајућем редоследу:

15	25	28	30
d	e	T_2	a

3. Две најмање фреквенције су 15 и 25 и њима одговарају стабла d и e које ћемо заменити стаблом T_3 у чијем корену је $15 + 25 = 40$.

4. Нове фреквенције су:

40	28	30
T_3	T_2	a

4° **2.** Фреквенције у неопадајућем редоследу:

28	30	40
T_2	a	T_3

3. Две најмање фреквенције су 28 и 30 и њима одговарају стабла T_2 и a које ћемо заменити стаблом T_4 у чијем корену је $28 + 30 = 58$.

4. Нове фреквенције су:

58	40
T_4	T_3

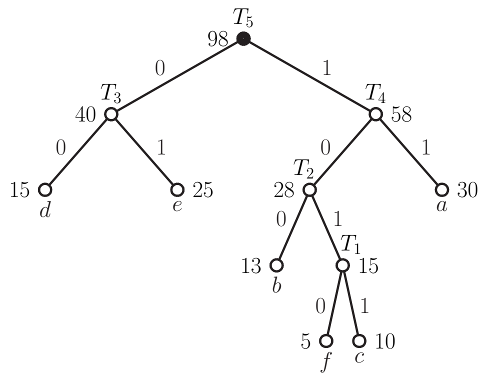
5° **2.** Фреквенције у неопадајућем редоследу:

40	58
T_3	T_4

3. Две најмање фреквенције су 40 и 58 и њима одговарају стабла T_3 и T_4 које ћемо заменити стаблом T_5 у чијем корену је $40 + 58 = 98$.

4. Нова фреквенција је: $\dfrac{98}{T_5}$

Стабло T_5 је Хафманово стабло, представљено на Слици 5.8 (у њему су садржана и сва стабла T која се одређују у кораку 3. сваке итерације).



Слика 5.8.

За сваки симбол можемо одредити његов Хафманов кôд тако што пратимо битове који су придружени свакој грани у путу од корена Хафмановог стабла до листа у коме се налази тај симбол. Тиме долазимо до тога да је Хафманов кôд за ове симболе:

a	b	c	d	e	f
11	100	1011	00	01	1010

Кодирајмо реч *deca* – то је 00|01|1011|11, односно 0001101111. ■

5.4 Резиме

У првом поглављу ове главе смо увели појам стабла и дали 6 еквивалентних дефиниција стабла (Теорема 5.1.1). Затим је уведен појам шуме и дате су још неке особине стабала и шума.

У другом поглављу ове главе се смо дефинисали коренска стабла и упознали смо се са основним појмовима везаним за коренска стабла: корен стабла, ниво чвора, висина стабла, лист, унутрашњи чвор, подстабло, бинарно, стриктно бинарно, потпуно бинарно, балансирано стабло, уређено бинарно стабло (којима се бавимо више у наредном поглављу).

У трећем поглављу смо дали три примене уређених бинарних стабала: за приказивање алгебарских формула, бинарно стабло претраживања и Хафманово стабло (на основу кога се одређује Хафманов код). Такође у свим тим применама смо разматрали разне обиласке стабла: КЛД, ЛКД и ЛДК обилазак.

5.5 Питања за проверу знања

82. Колико контура има у стаблу?

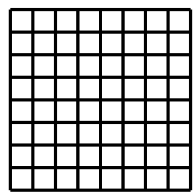
83. Колико има најмање листова у стаблу са n чворова? Како се зове то стабло?

84. Колико има највише листова у стаблу са n чворова? Како се зове то стабло?

85. У стаблу са n чворова колико има грана, а колико контура непарне дужине?
(Дати кратка образложења!)

86. Шта је центар стабла?

87. *Савезно такмичење 1976. за IV разред.*
Град има квадратну мрежу са a „хоризонталних“ и b „вертикалних“ улица (видети наредну слику), при чему су најближе паралелне улице на растојању $100m$. Колика је најмања дужина дела мреже који треба асфалтирати тако да се од сваке раскрснице до било које друге може доћи асфалтом?



88. *Писмени испит, децембар 2008.*
а) Одредити колико има неизоморфних стабала са 7 чворова. Нацртати сва та стабла.

б) Одредити која од тих стабала имају Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут?

в) Наћи два неизоморфна стабла са истим низом степена чворова.

г) Одредити дијаметар и центар за свако стабло одређено у делу под в).

д) Одредити матрицу суседства A за свако стабло одређено у делу под в).

89. Краљ Шонгабонга је имао 4 сина, 10 од његових мушких потомака су имали по 3 сина сваки, 15 од његових мушких потомака су имали по 2 сина сваки, док су сви остали умрли без деце. Ако је познато да краљ Шонгабонга није имао женских потомака, колико је укупно мушких потомака имао овај краљ?

90. Ако је висина коренског стабла RT једнака H колико може највише, а колико најмање бити растојање између два листа стабла RT?

91. Ако се у бинарном стаблу претраживања са n чворова најмањи број a налази на нивоу $n(a)$, на којој ће позицији бити a при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку?

92. Ако се у бинарном стаблу претраживања са n чворова највећи број b налази на нивоу $n(b)$, на којој ће позицији бити b при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку?

93. Низ степена чворова стабла T је $(5, 4, 3, 2, 1, \dots, 1)$.

а) Колико има листова у стаблу T (тј. јединица у низу степена чворова)? Одредити број чворова n и број грана m стабла T.

б) Нацртати једно такво стабло T'. Да ли је оно повезан граф? Да ли је оно бипартитан граф?

в) Одредити дијаметар и центар стабла T'.

г) Одредити матрицу суседства A стабла T'. Да ли се јавља ∞ у матрици растојања D?

6. Коначни аутомати и регуларне граматике

Код многих уређаја, укључујући и електронске компоненте рачунара, резултат активности тог уређаја („излаз“) у одређеном тренутку не зависи само од одговарајућег спољашњег утицаја („улаза“) који тада на њега делује, већ и од тренутног унутрашњег „стања“ у коме се он налази. Нпр. лифт ради у, тако што се у неким (дискретним) тренуцима делује на лифт притиском на нека од његових дугмета (улазна спољашња акција). При томе, лифт са спрата на коме се налазио (претходно стање) прелази на жељени спрат (следеће стање), крећући се одређени број спратова навише или наниже, или остајући у месту (излазна активност). Такође, лифт се може зауставити притиском на дугме стоп или отворити/затворити врата када стоји на неком спрату. Све ове акције се могу и математички моделовати.

У овој глави се дефинишу основни појмови једне класе оваквих „машина“ (нећемо се бавити *коначним машинама*, што је уопштенији концепт, него ћемо се бавити *коначним аутоматима* – специјалној врсти коначних машина која има врло важну примену у области формалних језика и граматика, чиме завршавамо ову главу.

6.1 Основни појмови коначних аутомата

ДЕФИНИЦИЈА 6.1.1. *Коначан аутомат* A представља уређену петорку (S, U, f, P, s^*), где је

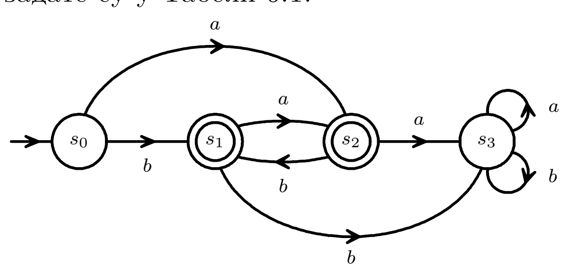
- S коначан скуп *стања*;
- U коначан скуп *улазних симбола*;
- f *функција прелаза*, где $f : S \times U \to S$;
- P скуп *прихватајућих стања*, где је $P \subseteq S$;
- s^* *почетно стање*, где $s^* \in S$.

Коначан аутомат $A = (S, U, f, P, s^*)$ се може задати коришћењем скуповно-табличне репрезентације, у којој се табеларно приказују вредности функције f, као и помоћу дијаграма прелаза (то је у суштини један оријентисани граф, где имамо ознаке грана, које чине само одговарајући улазни симболи). Прихватајућа стања се графички означавају двоструким кружићем.

ПРИМЕР 6.1.1. Нека је дат коначан аутомат са $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $U = \{a, b\}$, $P = \{s_1, s_2\}$, s_0 почетно стање, а вредности функције прелаза задате су у Табели 6.1:

стање \ улаз	f: a	b
s_0	s_2	s_1
s_1	s_2	s_3
s_2	s_3	s_1
s_3	s_3	s_3

Табела 6.1.



Слика 6.1.

Одговарајући дијаграм прелаза овог аутомата дат је на Слици 6.1. ■

Главна улога коначног аутомата није да, услед деловања неког улазног низа симбола, генерише одговарајући излазни низ, већ да испита да ли га тај улазни низ преводи из почетног стања у неко од прихватајућих стања или не. Ако улазни низ преводи аутомат у прихватајуће стање сматра се да аутомат „препознаје“ („прихвата“) овај низ. Појам „препознавања“ улазног низа од стране неког аутомата може се формално дефинисати следећом дефиницијом.

ДЕФИНИЦИЈА 6.1.2. Нека је $A = (S, U, f, P, s^*)$ коначан аутомат и $x_1x_2\ldots x_n$ неки непразни низ симбола из скупа U. Аутомат A *препознаје* (*прихвата*) улазни низ $x_1x_2\ldots x_n$ ако постоји низ стања $s_0, s_1, \ldots, s_n$ из S такав да је

$$\begin{aligned} &s_0 = s^*, \\ &s_k = f(s_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n \\ &s_n \in P. \end{aligned}$$

Сваком непразном улазном низу $x_1x_2\ldots x_n$ одговара у дијаграму прелаза аутомата један оријентисани пут који полази од почетног чвора и кога чини n надовезаних грана са ознакама једнаким редом $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Чворови овог пута представљају низ стања кроз која аутомат пролази деловањем улазног низа. На основу претходне дефиниције јасно је да је неки улазни низ прихваћен од стране аутомата ако и само ако се њему одговарајући пут у дијаграму прелаза завршава у чвору који одговара прихватајућем стању.

Напоменимо да ћемо даље сматрати да на аутомат може „деловати“ и празни улазни низ ε, не изазивајући при томе никакву реакцију аутомата. Овај низ се прихвата ако и само ако је почетно стање s^* аутомата прихватајуће.

ПРИМЕР 6.1.2. Ако на аутомат, дефинисан у Примеру 6.1.1, делује улазни низ $babab$, под његовим дејством аутомат пролази редом кроз стања $s_0, s_1, s_2, s_1, s_2, s_1$ која одређују један оријентисани пут у дијаграму на слици горе десно. Пошто је последњи чвор тога пута стање s_1 које је прихватајуће, аутомат прихвата улазни низ $babab$.

При деловању улазног низа $abaa$ на овај аутомат, одговарајући оријентисани пут у дијаграму аутомата пролази кроз низ стања s_0, s_2, s_1, s_2, s_3. Пошто се пут завршава у чвору који одговара неприхватајућем стању s_3, аутомат не прихвата улазни низ $abaa$. ■

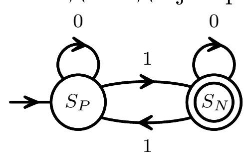
ДЕФИНИЦИЈА 6.1.3. Скуп свих улазних низова које један аутомат A прихвата често се назива *језиком кога аутомат A прихвата* (*препознаје*) и означава се са $L(A)$. При томе се може сматрати да низови из $L(A)$ представљају *речи* овог језика над скупом улазних симбола U као *азбуком*.

ПРИМЕР 6.1.3. Посматрајмо аутомат из Примера 6.1.1. Он има два неприхватајућа стања s_0 и s_3. У стању s_0 аутомат се налази само у почетном тренутку када се може сматрати да му се на улазу налази празни низ улазних симбола. Аутомат први пут прелази у неприхватајуће стање s_3 ако и само ако су у реализованом делу улазног низа два последња симбола aa или bb. Ово стање представља тзв. „замка“ („поонор“) стање јер, када аутомат једном пређе у њега, у њему трајно и остаје, без обзира на улазне симболе који после тога делују. Зато аутомат не прихвата ни један улазни низ који садржи два узастопна идентична симбола. Другим речима, језик кога овај аутомат препознаје садржи једночлане низове a и b, као и све остале низове над $\{a, b\}$ у којима се a и b наизменично смењују. ■

Коначан аутомат има главну улогу да препозна да ли неки улазни низ припада унапред задатом језику или не. При томе се језик обично унапред задаје, тј. задаје се које особине мора да има сваки низ из тог језика. Рад аутомата се стога своди на утврђивање да ли неки улазни низ задовољава унапред одређене особине или не (ако задовољава кажемо да аутомат прихвата тај улазни низ).

ПРИМЕР 6.1.4. **Провера парности.** Често се, при преносу бинарно кодираних података од једног до другог електронског уређаја, врши провера парности броја појављивања бита 1 у низу битова који је примљен. При томе се сматра коректним само онај примљени низ код кога је овај број непаран. У супротном сматра се да постоји нека грешка у преносу овог низа.

Сада се препознавање коректно примљених бинарних низова може моделирати налажењем оног коначног аутомата који прихвата неки улазни низ над $\{0,1\}$ ако и само ако тај низ садржи непаран број битова 1. Један такав аутомат представљен је на Слици 6.2. Аутомат има два стања: када реализовани део улазног низа садржи паран број битова 1 (S_P) и када он садржи непаран број битова 1 (S_N). Ако сматрамо да празан низ, који се налази на улазу аутомата у почетном тренутку, садржи паран број битова 1 (јер је овај број једнак 0), тада стање S_P представља почетно стање. Пошто је S_N жељено стање које одговара детектованој коректности примљеног низа, ово стање дефинишемо као прихватајуће. Стање аутомата се мења ако и само ако на њега делује улаз 1, па се зато он налази у стању S_N тада и само тада када је број битова 1 у низу непаран.



Слика 6.2. Аутомат са непарним бројем битова 1.

Понашање овог аутомата је у потпуности са алгоритмом, приказаним псеудокодом иза овог примера. Улаз у алгоритам представља бинарни низ $x = x_1x_2\dots x_n$, а излаз је вредност логичке променљиве *neparan*. Када низ x садржи непаран број битова 1, вредност ове променљиве је *true*, а у супротном је једнака *false*. Тиме се илуструје чињеница да сваки коначан аутомат у суштини представља један алгоритам који даје одговор „да“ или „не“ на питање да ли неки улазни низ поседује задате карактеристике. ■

```
procedure Parnost(x, neparan)
neparan := false
for i := 1 to n
    if x_i = 1 then
        neparan := not(neparan)
    end if
end for
end procedure
```

6.2 Комплементирање коначних аутомата

Често се у задацима тражи да се наче аутомат који не препознаје неке речи. Такав аутомат можемо одредити тако што ћемо прво наћи аутомат A који препознаје те речи, а онда ћемо одредити њему супротан аутомат $\overline{A}$. Како нећемо доказивати особине аутомата $\overline{A}$, одређивање комплемента аутомата ћемо узети да је по дефиницији.

ДЕФИНИЦИЈА 6.2.1. Нека је задат аутомат $A_1 = (S_1, U_1, f_1, P_1, s_1^*)$. Тада је *комплементарни аутомат* $\overline{A}_1 = (S_2, U_2, f_2, P_2, s_2^*)$ аутомат дефинисан на следећи начин:

1) Скуп стања је $S_2 = S_1$, тј. оба аутомата имају иста стања.

2) Скуп улазних симбола је $U_2 = U_1$, тј. оба аутомата имају исте скупове улазних симбола.

3) Функција прелаза је $f_2 = f_1$, тј. имају и исте функције прелаза.

4) Скуп прихватајућих стања је $P_2 = S_1 \setminus P_1$, тј. у комплементу су прихватајућа стања она која нису била у полазном аутомату и обрнуто.

5) Почетно стање је $s_2^* = s_1^*$, тј. имају иста почетна стања.

Ако се у задацима тражи да одредимо аутомат $\overline{A}_1$, који препознаје **непразне речи** које не препознаје аутомат A_1, онда ситуација може да се закомпликује. Суштински ту имамо 3 различита случаја у зависности од тога да ли је почетно стање s_1^* у аутомату A_1 прихватајуће ($s_1^* \in P_1$) или неприхватајуће ($s_1^* \notin P_1$), као и да ли је могуће да се врати у то почетно стање неком петљом или повратном граном:

1° $s_1^* \in P_1$

Овде ћемо урадити обичан комплемент и он је и комплемент који препознаје непразне речи (јер у комплементу $s_1^* \notin P_2$).

2° $s_1^* \notin P_1$, не може да се врати

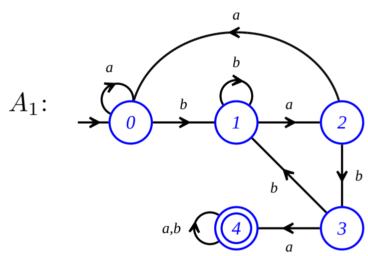
Овде ћемо урадити обичан комплемент, али ћемо почетном стању променити да није прихватајуће.

3° $s_1^* \notin P_1$, може да се врати

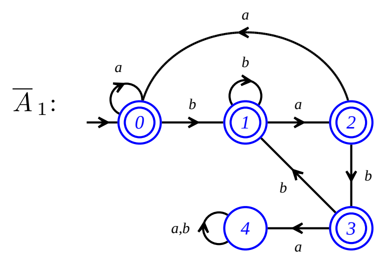
Овде ћемо урадити обичан комплемент, али затим почетно стање морамо да делимо на 2 стања – стање које одговара празној речи $s_{1\,\varepsilon}^* \notin P_2$ које није прихватајуће и стање које одговара свим осталим речима које су у том стању $s_{1\,\not\varepsilon}^* \in P_2$ које је прихватајуће.

Поред ова 3 случаја на испиту/колоквијуму може доћи и обичан комплемент (да се не траже непразне речи). Све ове случајеве ћемо илустровати кроз примере.

ПРИМЕР 6.2.1. Одредити аутомат који препознаје све речи које не препознаје аутомат A_1 са Слике 6.3.



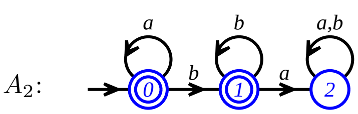
Слика 6.3. Аутомат A_1.



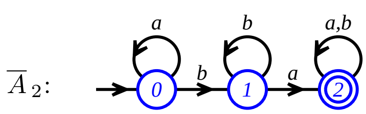
Слика 6.4. Аутомат $\overline{A}_1$.

Решење. Овде треба да одредимо комплемент $\overline{A}_1$ за аутомат A_1, тј. да само променимо сва стања (да ли су прихватајућа или не) и добијамо тражени аутомат $\overline{A}_1$ (на Слици 6.4). ■

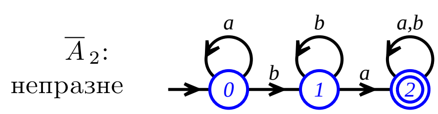
ПРИМЕР 6.2.2. Одредити аутомат који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_2 са Слике 6.5.



Слика 6.5. Аутомат A_2.



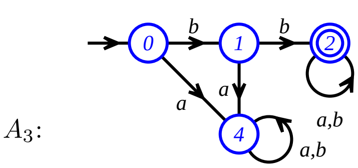
Слика 6.6. Аутомат $\overline{A}_2$.



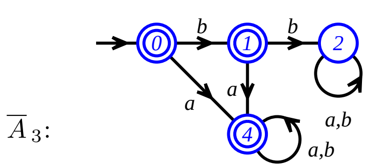
Слика 6.7. Аутомат $\overline{A}_2$ непразне.

Решење. Овде када урадимо комплемент $\overline{A}_2$ (на Слици 6.6) почетно стање је неприхватајуће, па је то $\overline{A}_2$ за непразне речи (на Слици 6.7). ■

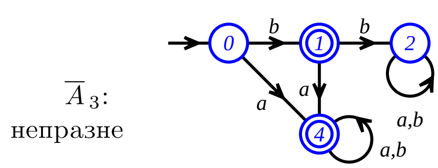
ПРИМЕР 6.2.3. Одредити аутомат који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_3 са Слике 6.8.



Слика 6.8. Аутомат A_3.



Слика 6.9. Аутомат $\overline{A}_3$.

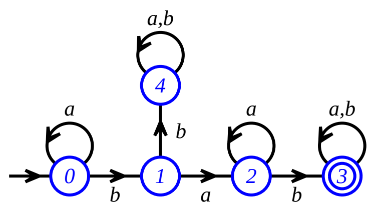


Слика 6.10. Аутомат $\overline{A}_3$ непразне.

Решење. Овде када урадимо комплемент $\overline{A}_3$ (на Слици 6.9) почетно стање је прихватајуће, па само њега променимо и добијамо $\overline{A}_3$ за непразне речи (на Слици 6.10). ■

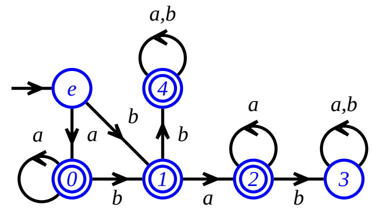
ПРИМЕР 6.2.4. Одредити аутомат који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_4 са Слике 6.11.

A_4:



Слика 6.11. Аутомат A_4.

$\overline{A}_4$:
непразне



Слика 6.12. Аутомат $\overline{A}_4$ непразне.

Решење. Овде смо почетно стање 0 поделили на 2 стања: e које одговара само празној речи (стање e је неприхватајуће) и 0 која одговара свим непразним речима у стању 0 (боље би било назвати неком другом ознаком, али може и овако; стање 0 је прихватајуће). Из e са a идемо у 0, а са b у 1, а сви остали прелази су исти као и у полазном аутомату, сва остала стања су као у обичном комплементу $\overline{A}_4$. Тако смо добили аутомат $\overline{A}_4$ који препознаје непразне речи (на Слици 6.12). ■

6.3 Спајање коначних аутомата

Сада ћемо се осврнути на комбиновање аутомата, тј. њихов пресек и унију. Како нећемо показивати особине тих аутомата, спајања два аутомата ћемо узети да су по дефиницији.

ДЕФИНИЦИЈА 6.3.1. Нека су задати аутомати $A_1 = (S_1, U, f_1, P_1, s_1^*)$ и $A_2 = (S_2, U, f_2, P_2, s_2^*)$ који имају исти скуп улазних симбола U. Нека је $A = (S, U, f, P, s^*)$ аутомат дефинисан на следећи начин:

1) Скуп стања је $S = S_1 \times S_2$, тј. S садржи све уређене парове (s_1, s_2), где $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$.

2) Скуп улазних симбола аутомата је једнак U.

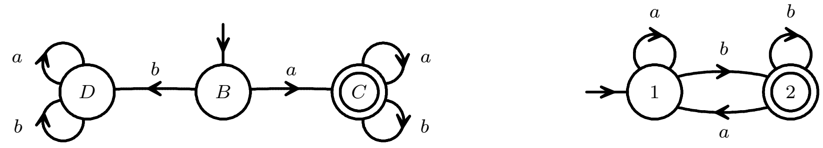
3) Функција прелаза $f : S \times U \longrightarrow S$ дефинише се као
$f\big((s_1, s_2), u\big) = \big(f_1(s_1, u), f_2(s_2, u)\big)$ за свако $(s_1, s_2) \in S$ и свако $u \in U$.

4) Скуп прихватајућих стања је $P = \big\{(s_1, s_2) \mid s_1 \in P_1 \text{ и } s_2 \in P_2\big\}$.

5) Почетно стање је $s^* = (s_1^*, s_2^*)$.

Тада аутомат A препознаје језик $L(A_1) \cap L(A_2)$. Углавном ћемо овај аутомат означавати са $A = A_1 \wedge A_2$

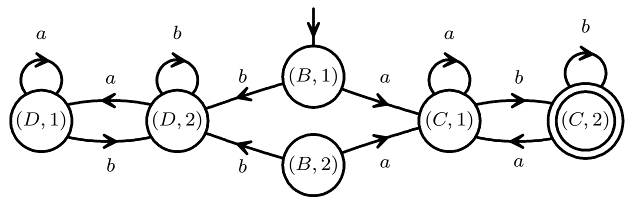
ПРИМЕР 6.3.1. Посматрајмо два аутомата A_1 и A_2 са Слике 6.13 који су дефинисани над истим скупом улазних симбола $\{a, b\}$. A_1 очигледно препознаје све улазне низове над $\{a, b\}$ који почињу са a, док A_2 препознаје све улазне низове над $\{a, b\}$ који се завршавају са b (оба ова аутомата су минимална за језике које препознају).



A_1 A_2

Слика 6.13. Аутомати A_1 и A_2 који се спајају.

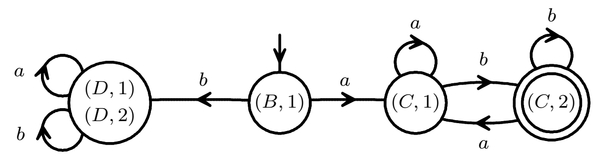
Применом поступка, датог Дефиницијом 6.3.1, на аутомате A_1 и A_2 добија се аутомат $A = A_1 \wedge A_2$ на Слици 6.14. Скуп стања овог аутомата је $\{(B,1),(B,2),(C,1),(C,2),(D,1),(D,2)\}$. Пошто је C једино прихватајуће стање у A_1, а 2 једино прихватајуће стање у A_2, тада је $(C,2)$ једино прихватајуће стање аутомата A. Његово почетно стање је $(B,1)$, јер је B почетно стање у A_1, а 1 почетно стање у A_2.



Слика 6.14. Аутомат $A = A_1 \wedge A_2$, спој A_1 и A_2.

Деловањем улаза a на стање B у A_1 прелази се у стање C, док се деловањем a на стање 1 у A_2 остаје у овом стању. Зато деловање улаза a на стање $(B,1)$ у аутомату A изазива прелаз у стање $(C,1)$. На сличан начин се могу објаснити и остали прелази у овом аутомату.

Према Дефиницији 6.3.1 аутомат A препознаје пресек језика аутомата A_1 и A_2, а то је скуп свих оних улазних низова над $\{a,b\}$ који почињу са a и завршавају се са b. Напоменимо да, иако су A_1 и A_2 минимални аутомати, аутомат A није минималан за језик који препознаје. Наиме, у њему је стање $(B,2)$ недостиживо, док се лако може показати да су $(D,1)$ и $(D,2)$ уједначива стања (то је терминологија из наредног поглавља). Зато се A може свести на аутомат на Слици 6.15. ■



Слика 6.15. Минимални аутомат $A_1 \wedge A_2$.

ДЕФИНИЦИЈА 6.3.2. Нека су задати аутомати $A_1 = (S_1, U, f_1, P_1, s_1^*)$ и $A_2 = (S_2, U, f_2, P_2, s_2^*)$ који имају исти скуп улазних симбола U. Нека је $A = (S, U, f, P, s^*)$ аутомат дефинисан на следећи начин:

1) Скуп стања је $S = S_1 \times S_2$, тј. S садржи све уређене парове (s_1, s_2), где $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$.

2) Скуп улазних симбола аутомата је једнак U.

3) Функција прелаза $f : S \times U \longrightarrow S$ дефинише се као
$f\big((s_1,s_2),u\big) = \big(f_1(s_1,u), f_2(s_2,u)\big)$ за свако $(s_1,s_2) \in S$ и свако $u \in U$.

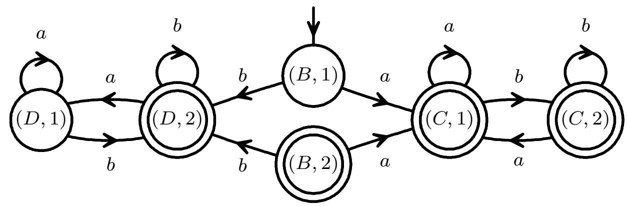
4) Скуп прихватајућих стања је $P = \big\{(s_1,s_2) \mid s_1 \in P_1 \text{ или } s_2 \in P_2\big\}$.

5) Почетно стање је $s^* = (s_1^*, s_2^*)$.

Тада аутомат A препознаје језик $L(A_1) \cup L(A_2)$. Углавном ћемо овај аутомат означавати са $A = A_1 \vee A_2$

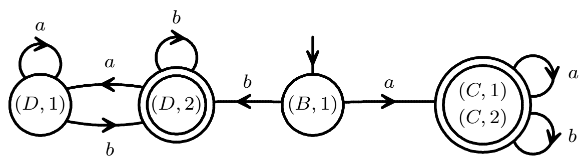
Можемо уочити да се аутомат добијен применом Дефиниције 6.3.2 разликује од аутомата добијеног применом Дефиниције 6.3.1 само у скупу прихватајућих стања (услов 4) у обе дефиниције).

ПРИМЕР 6.3.2. Применом Дефиниције 6.3.2 на аутомате A_1 и A_2 са Слике 6.13 може се добити аутомат $A = A_1 \vee A_2$ са Слике 6.16. Он се од аутомата са Слике 6.14 разликује само по скупу прихватајућих стања. Наиме, у складу са условом 4), прихватајућа стања у A су сва она стања која садрже бар једно од прихватајућих стања C или 2, а то су $(B,2)$, $((C,1)$, $(C,2)$ и $(D,2)$.



Слика 6.16. Аутомат $A = A_1 \vee A_2$, спој A_1 и A_2.

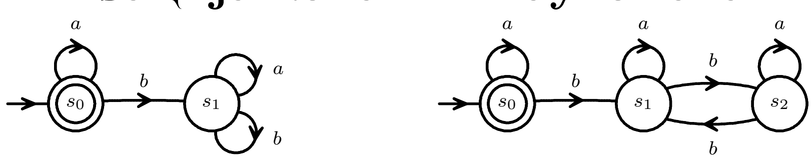
Према Дефиницији 6.3.2 аутомат A препознаје унију језика аутомата A_1 и A_2, а то је скуп свих оних улазних низова над $\{a, b\}$ који почињу са a или се завршавају са b. Ни овај аутомат није минималан за језик који препознаје, јер је у њему стање $(B, 2)$ недостиживо, док су $(C, 1)$ и $(C, 2)$ уједначива стања. Аутомат добијен редуковањем аутомата A приказан је на Слици 6.17. ■



Слика 6.17. Минимални аутомат $A_1 \vee A_2$.

Примери 6.3.1 и 6.3.2 указују на могуће практичне примене Дефиниција 6.3.1 и 6.3.2. Ако неки аутомат треба да препознаје све улазне низове симбола који задовољавају особину облика **„особина 1 и/или особина 2“** (тј. ова особина представља конјункцију или дисјункцију неких једноставнијих особина). Овакав аутомат A добијамо тако што прво одредимо аутомат A_1 који препознаје низове са **особином 1**, а затим аутомат A_2 који препознаје низове са **особином 2**, па затим одговарајућим комбиновањем ова два аутомата према Дефиницијама 6.3.1 и 6.3.2 одредимо њихов спој. На тај начин се конструкција сложенијих аутомата своди на налажење више једноставнијих аутомата, које затим спајамо (то је честа ситуација у задацима за писмени испит). При томе примењујемо одговарајуће поступке минимизације да би у сложенијем аутомату, који је спој 2 аутомата, избегли сувишна стања. Поступцима минимизације се бавимо у наредном поглављу.

6.4 Минимизација коначних аутомата



Слика 6.18. Еквивалентни аутомати A_1 и A_2.

Један исти језик може бити препознат од стране више различитих аутомата. На пример, два аутомата на Слици 6.18 препознају исти језик $L(A) = a^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, тј. оба ова аутомата препознају само празну реч ε и све речи које се састоје само од слова a. Да бисмо боље описали овакве аутомате уводимо наредну дефиницију.

ДЕФИНИЦИЈА 6.4.1. Аутомати A_1 и A_2 су *еквивалентни* ако имају исти скуп улазних симбола и $L(A_1) = L(A_2)$.

Већ смо видели да је проблем налажења тзв. *минималног* аутомата који препознаје задати језик изузетно значајан. Под минимизацијом подразумевамо тражење аутомата који има најмањи број стања од свих аутомата који препознају тражени језик. Приликом минимизације, обично се полази од једног познатог аутомата, који се поједностављује налажењем неких његових „сувишних“ стања (ако постоје) и њиховим елиминисањем или „сажимањем“. Тако се може добити еквивалентни аутомат са мањим бројем стања.

ДЕФИНИЦИЈА 6.4.2. Неко стање аутомата се назива *недостижививим* ако у његовом дијаграму прелаза не постоји оријентисани пут од почетног чвора до чвора који одговара овом стању.

Два стања аутомата називамо *уједначивим* (или *еквивалентним*) ако за сваки улазни низ важи да ће, полазећи од једног или другог стања као од почетног, овај низ или у оба случаја бити прихваћен или у оба случаја неприхваћен.

ТЕОРЕМА 6.4.1. Аутомат A без недостижививих стања је минималан (има најмање стања) за језик који препознаје ако и само ако његов скуп стања S не садржи ни један пар међусобно различитих уједначивих стања. $\square$

Формално се нећемо бавити минимизацијом. Заинтересованог читаоца позивамо да више научи у уџбенику [13]. Сада ћемо само навести само основна тврђења везана за минимизацију и релације.

ТЕОРЕМА 6.4.2. Релација уједначивости $\equiv$ на скупу стања S аутомата A представља једну релацију *еквиваленције*. Ова релација разбија скуп S на K класа еквиваленције $C_1, C_2, \ldots, C_K$, $K \geqslant 1$, при чему је свако стање из било које класе C_i уједначиво са свим стањима из те класе и ни са једним стањем које припада некој другој класи C_j, $j \neq i$.

Број стања у минималном аутомату који препознаје исти језик као и аутомат A, једнак је броју класа еквиваленције K на које релација $\equiv$ разбија скуп стања S овог аутомата. $\square$

ТЕОРЕМА 6.4.3. Нека су за аутомат A познате класе еквиваленције $C_1, C_2, \ldots, C_K$ на које релација $\equiv$ разбија скуп стања S овог аутомата. Тада се минимални аутомат $A_{\min} = (S_{\min}, U_{\min}, f_{\min}, P_{\min}, s^*_{\min})$, који препознаје исти језик као и аутомат A, може конструисати на следећи начин:

1) Свака класа еквиваленције C_i, $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$, представља једно стање аутомата $A_{\min}$, тј. $S_{\min} = \{C_1, C_2, \ldots, C_K\}$.

2) Скуп улазних симбола $U_{\min}$ једнак је скупу улазних симбола U аутомата A, тј. $U_{\min} = U$.

3) Функција прелаза $f_{\min} : S_{\min} \times U \longrightarrow S_{\min}$ се дефинише на следећи начин: деловањем улаза $u \in U$ на класу C_i прелази се у класу C_j, тј. $f_{\min}(C_i, u) = C_j$, ако и само ако постоји стање $s \in C_i$ за које важи да је $f(s, u) \in C_j$.

4) Почетно стање $s^*_{\min}$ је класа еквиваленције $[s^*]$ почетног стања s^* аутомата A, тј. $s^*_{\min} = [s^*]$.

5) Скуп свих прихватајућих стања $P_{\min}$ садржи све класе еквиваленције $[p]$ прихватајућих стања p аутомата A, тј. $P_{\min} = \big\{[p] \mid p \in P\big\}$.

Овако конструисани аутомат $A_{\min}$ представља *јединствени* минимални аутомат за језик који препознаје. $\square$

Развијено је много алгоритама који се међусобно разликују у начину како се генерише релација еквиваленције $\equiv$ и њене класе еквиваленције. Овај начин се обично базира на једном од следећа два, узајамно еквивалентна, својства те релације.

ТЕОРЕМА 6.4.4. Ако су стања s_1 и s_2 уједначива, тада су и $f(s_1, u)$ и $f(s_2, u)$ уједначива стања за сваки улазни симбол u. $\square$

ТЕОРЕМА 6.4.5. Ако стања $f(s_1, u)$ и $f(s_2, u)$ нису уједначива за неки улазни симбол u, тада ни s_1 и s_2 нису уједначива стања. $\square$

6.5 Веза коначних аутомата и регуларних граматика

Прича о коначним аутоматима била би непотпуна, ако не би успоставили њихову везу са регулатним граматикама.

ДЕФИНИЦИЈА 6.5.1. *Граматика* G представља уређену четворку (N, T, Π, σ^*), где је

- N коначни скуп *незавршних симбола* (или *нетерминала*);
- T коначни скуп *завршних симбола* (или *терминала*), при чему важи $T \cap N = \emptyset$;
- Π скуп *правила извођења* чији су сви елементи облика (w_1, w_2), где $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$, а w_1 мора да садржи бар један незавршни симбол;
- σ^* *почетни симбол*, где $\sigma^* \in N$

ТЕОРЕМА 6.5.1. Нека је $A = (S, U, f, P, s^*)$ коначан аутомат и $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ регуларна граматика дефинисана на следећи начин:

1) Скуп незавршних симбола N једнак је скупу свих стања S аутомата A.

2) Скуп завршних симбола T једнак је скупу улазних симбола U аутомата A.

3) Скуп правила извођења Π се формира на основу функције прелаза f и скупа прихватајућих стања P аутомата A на следећи начин:

- за свако $s \in S$ и свако $u \in U$ ако је $f(s, u) = t$, тада правило $s \to ut$ припада скупу Π;
- за свако прихватајуће стање $s \in P$ имамо правило $s \to \varepsilon$ у скупу правила извођења Π.

4) Почетни симбол σ^* једнак је почетном стању s^* аутомата A.

Тада регуларна граматика G генерише језик који аутомат A препознаје, тј. $L(G) = L(A)$. □

6.6 Примери рада са аутоматима

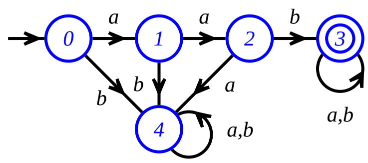
Овде ћемо претходну материју, која била доста теоретска, илустровати на мноштву испитних и колоквијумских задатака које ћемо веома исцрпно и детаљно решавати.

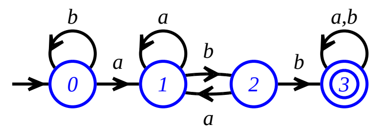
ПРИМЕР 6.6.1. *Писмени испит, јун 2008.*
Наћи коначан аутомат који препознаје непразне речи над азбуком $\{a, b\}$ које почињу са aab и садрже abb.

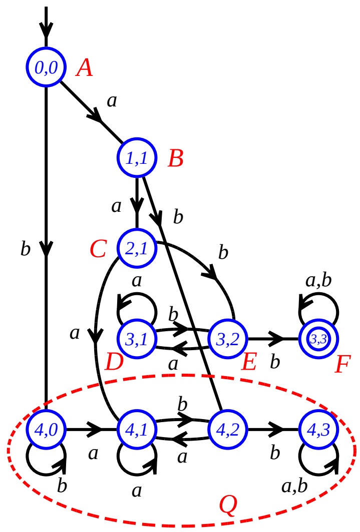
а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

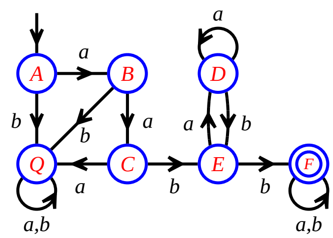
б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

Решење. Одредићемо прво коначан аутомат A_1 који препознаје речи које почињу са aab (пошто почињу са aab оне су и аутоматски непразне!), затим аутомат A_2 који препознаје речи које садрже abb, и коначно ћемо их спојити у један аутомат $A_1 \wedge A_2$.

A_1: 

A_2: 

$A_1 \wedge A_2$: 

A_3: 

а) Недостижива стања $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(2,3)$ и $(3,0)$ нису ни приказана на слици аутомата $A_1 \wedge A_2$.
Аутомат $A_1 \wedge A_2$ није оптималан јер се стања $(4,0)$, $(4,1)$, $(4,2)$ и $(4,3)$ могу спојити у једно стање Q које је недопустиво. Такође уведимо и једноставније ознаке за остала стања: $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (2,1)$, $D = (3,1)$, $E = (3,2)$, $F = (3,3)$. Тако добијен аутомат A_3 је оптималан.

б) Одредимо регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара коначном аутомату A_3. Имамо $N = \Big\{A, B, C, D, E, F, Q\Big\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \Big\{A \to aB, A \to bQ, B \to aC, B \to bQ, C \to aQ, C \to bE, D \to aD, D \to bE, E \to aD, E \to bF, F \to aF, F \to bF, F \to \varepsilon, Q \to aQ, Q \to bQ\Big\}$ и $\sigma^* = A$. ∎

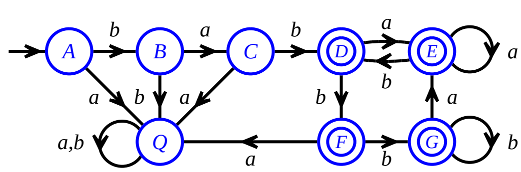
ПРИМЕР 6.6.2. *Писмени испит, март 2009.*
Наћи коначан аутомат који препознаје непразне речи над азбуком $\{a, b\}$ које почињу са bab и не садрже $abba$.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

Решење. Аутомат A ћемо састављати директно: након почетка, који мора бити bab водићемо рачуна да се не јави реч $abba$.

а) Добијени аутомат A је оптималан.

A: 

б) Регуларна граматика $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара аутомату A је $N = \Big\{A, B, C, D, E, F, Q\Big\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \Big\{A \to aQ, A \to bB, B \to aC, B \to bQ, C \to aQ, C \to bD, D \to aE, D \to bF, D \to \varepsilon, E \to aE, E \to bD, E \to \varepsilon, F \to aQ, F \to bG, F \to \varepsilon, G \to aE, G \to bG, G \to \varepsilon, Q \to aQ, Q \to bQ\Big\}$ и $\sigma^* = A$.

∎

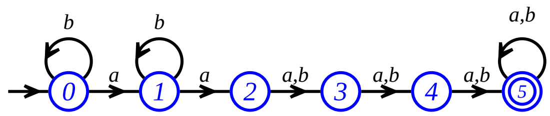
ПРИМЕР 6.6.3. *Писмени испит, фебруар 2010.*
Наћи коначан аутомат који препознаје непразне речи над азбуком $\{a, b\}$ које након другог појављивања слова a садрже бар још 3 (било која) слова.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

Решење. Одмах ћемо одређивати коначан аутомат A који препознаје речи (непразне су јер садрже бар 5 слова: 2 a и још 3 нека слова) које након другог појављивања слова a садрже бар још 3 (било која) слова. Када аутомат дође до стања 2 онда он препознаје да је дошло друго слово a и након тога треба да садржи бар још три слова (у стању 3 има бар једно, у 4 бар два и у 5 бар три).

A:



а) Аутомат A је оптималан (сва стања представљају бројаче – прва три су колико има слова a на почетку, а друга три колико има слова након другог a).

б) Регуларна граматика $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара аутомату A је $N = \Big\{0, 1, 2, 3, 4, 5\Big\}$, $T = \{a, b\}$,
$\Pi = \Big\{0 \to a1, 0 \to b0, 1 \to a2, 1 \to b1, 2 \to a3, 2 \to b3, 3 \to a4, 3 \to b4, 4 \to a5, 4 \to b5, 5 \to a5, 5 \to b5, 5 \to \varepsilon\Big\}$ и $\sigma^* = 0$. ■

ПРИМЕР 6.6.4. Наћи коначан аутомат који препознаје оне речи над азбуком $\{a, b\}$ које садрже најмање три слова a и између свака два слова b (ако постоје) се налази најмање једно слово a.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

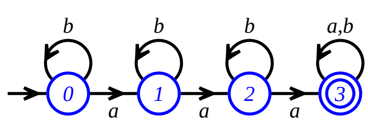
б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

Решење. Прво ћемо конструисати следеће аутомате:

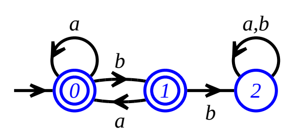
A_1: препознаје речи које имају $\geqslant$3 слова a;

A_2: препознаје речи које не садрже bb
(то је комплемент од аутомата који препознаје речи које садрже bb).

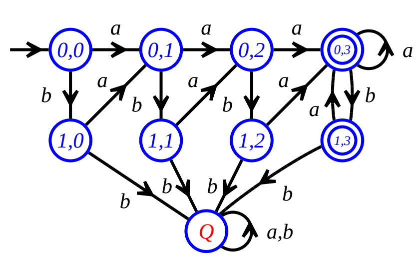
A_1:



A_2:



A_3:



Аутомате A_1 и $\overline{A}_2$ смо спојили у $\overline{A}_2 \wedge A_1$. Кад оптимизујемо овај аутомат добијамо тражени аутомат A_3.

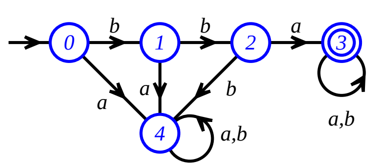
За домаћи задатак, одредите сами регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара коначном аутомату A_3. ■

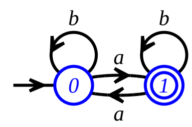
ПРИМЕР 6.6.5. *Писмени испит, јун 2009.*
Наћи коначан аутомат који препознаје непразне речи над азбуком $\{a, b\}$ које почињу са bba и не садрже паран број слова a.

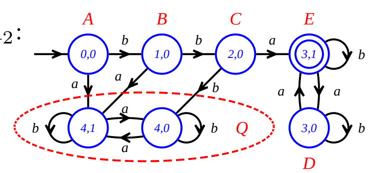
а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

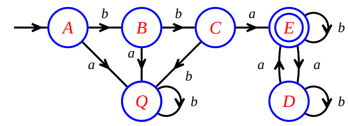
б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

Решење. Одредићемо прво коначан аутомат A_1 који препознаје речи које почињу са bba (пошто почињу са bba оне су и непразне!), затим аутомат A_2 који препознаје речи које не садрже паран број слова a (тј. које садрже непаран број слова a), и коначно ћемо их спојити у један аутомат $A_1 \wedge A_2$.

A_1:


A_2:


$A_1 \wedge A_2$:


A_3:


а) Аутомат $A_1 \wedge A_2$ није оптималан јер се стања $(4, 0)$ и $(4, 1)$ могу спојити у једно стање Q које је неприхватајуће. Такође уведимо и једноставније ознаке за остала стања: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$, $E = (3, 1)$. Тако добијен аутомат A_3 је оптималан.

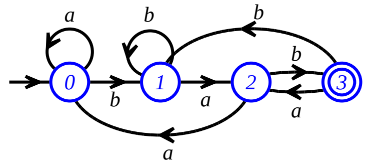
б) Одредимо регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара коначном аутомату A_3. Имамо да је $N = \Big\{A, B, C, D, E, Q\Big\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \Big\{A \to aQ, A \to bB, B \to aQ, B \to bC, C \to aE, C \to bQ, D \to aE, D \to bD, E \to aD, E \to bE, E \to \varepsilon, Q \to aQ, Q \to bQ\Big\}$ и $\sigma^* = A$. ■

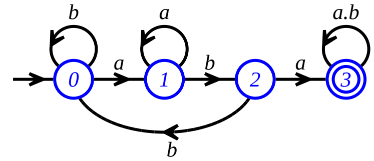
ПРИМЕР 6.6.6. *Писмени испит, септембар 2008.*
Наћи коначан аутомат који препознаје речи над азбуком $\{a, b\}$ које се завршавају са bab и између свака два слова a (ако постоје) се не налази тачно једно слово b.

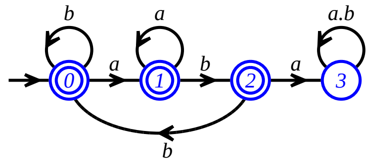
а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

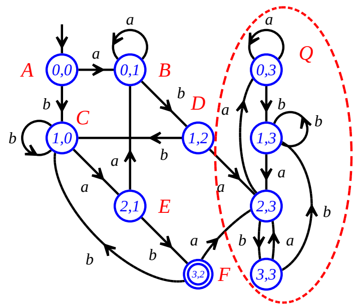
Решење. Одредићемо прво коначан аутомат A_1 који препознаје речи које се завршавају на bab, затим аутомат A_2 који препознаје речи које између нека 2 слова a имају тачно 1 слово b, онда аутомат $\overline{A}_2$ који препознаје речи у којима се између свака 2 слова a не налази тачно 1 слово b.

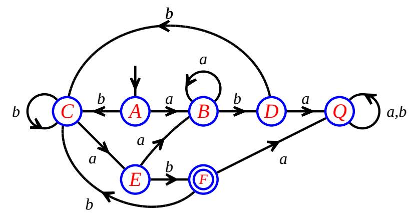
A_1:


A_2:


$\overline{A}_2$:


Остаје још да аутомате A_1 и $\overline{A}_2$ спојимо у један аутомат $A_1 \wedge \overline{A}_2$.

$A_1 \wedge \overline{A}_2$: 

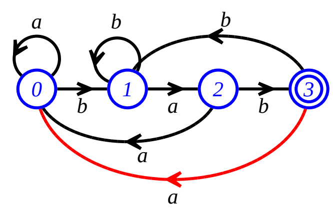
A_3: 

а) Аутомат $A_1 \wedge \overline{A}_2$ није оптималан јер се стања $(0,3)$, $(1,3)$, $(2,3)$ и $(3,3)$ могу спојити у једно стање Q које је недопустиво. Такође уведимо и једноставније ознаке за остала стања: $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,0)$, $D = (1,2)$, $E = (2,1)$, $F = (3,2)$. Тако добијен аутомат A_3 је оптималан.

б) Одредимо регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара коначном аутомату A_3. Имамо да је

$N = \Big\{A, B, C, D, E, F, Q\Big\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \Big\{A \to aB, A \to bC, B \to aB, B \to bD, C \to aE, C \to bC, D \to aQ,$ $D \to bC, E \to aB, E \to bF, F \to aQ, F \to bC, F \to \varepsilon, Q \to aQ, Q \to bQ\Big\}$ и $\sigma^* = A$. ■

Напомена. Честа грешка је била да се погрешно одреди аутомат A_1:

A_1: 

Разлог због чега је на колоквијуму први део задатка био да се провери у ком је стању аутомат за неке речи је да бисте ви то исто радили и на испиту! Па ако аутомат не препознаје неке речи које би требало или препознаје неке речи које не би требало онда имате грешку, а и видите у ком прелазу из стања у стање је та грешка!

Нпр. аутомат A_1 препознаје реч $babab$, али у овом погрешном A_1 ова реч је у незавршном стању 1 (иде $0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 1$) уместо у завршном! Када то установимо видимо да када смо у стању 3 (завршном) и ако нам дође слово a ми већ имамо низ ba па са још једним словом b имамо опет да се завршава на bab. Значи, уместо $3 \xrightarrow{a} 0$ треба $3 \xrightarrow{a} 2$.

Честа грешка је била да се погрешно тражи да у аутомату A_2 између свака 2 слова b има тачно 1 слово a (разлог је што када негирамо квантификатор $\forall$ добијамо $\exists$, и обратно)!

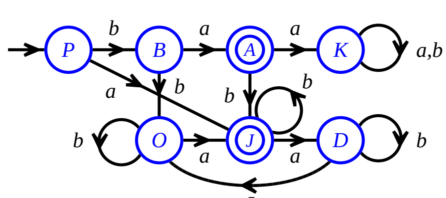
ПРИМЕР 6.6.7. *Писмени испит, јануар 2009.*
Наћи коначан аутомат који препознаје непразне речи над азбуком $\{a, b\}$ које имају тачно $3k+1$ слова a ($k \in \mathbb{N}_0$) и не почињу са baa.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

Решење. Директно ћемо састављати тражени аутомат A: он мора да има стања P, B, A, K која служе провери да ли је почео са baa и поред њих треба да има стања O, J, D која служе као бројачи по модулу 3 броја појављивања слова a.

а) Добијени аутомат A је оптималан (сва стања представљају бројаче).

A: 

б) Регуларна граматика $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара аутомату A је $N = \Big\{P, B, A, K, O, J, D\Big\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \Big\{P \to aJ, P \to bB, B \to aA, B \to bO, A \to aK, A \to bJ, A \to \varepsilon, K \to aK, K \to bK, O \to aJ, O \to bO, J \to aD, J \to bJ, J \to \varepsilon, D \to aO, D \to bD\Big\}$ и $\sigma^* = P$. ■

ПРИМЕР 6.6.8. *Писмени испит, октобар* II *2009.*
Наћи коначан аутомат који препознаје непразне речи над азбуком $\{a, b\}$ којима је број појављивања симбола b дељив са 4 или које се не завршавају на baa.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику (N, T, Π, σ^*) која одговара оптималном аутомату.

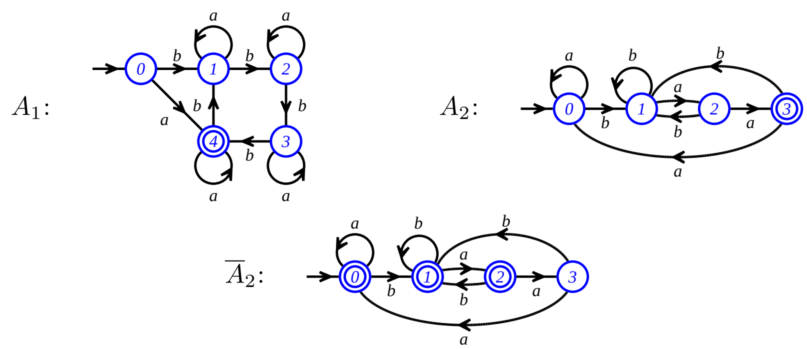
Решење. Прво ћемо конструисати следеће аутомате (водићемо рачуна о непразним речима у аутомату A_1 и приликом спајања $A_1 \vee \overline{A}_2$):

A_1: препознаје непразне речи којима је број појављивања симбола b дељив са 4;

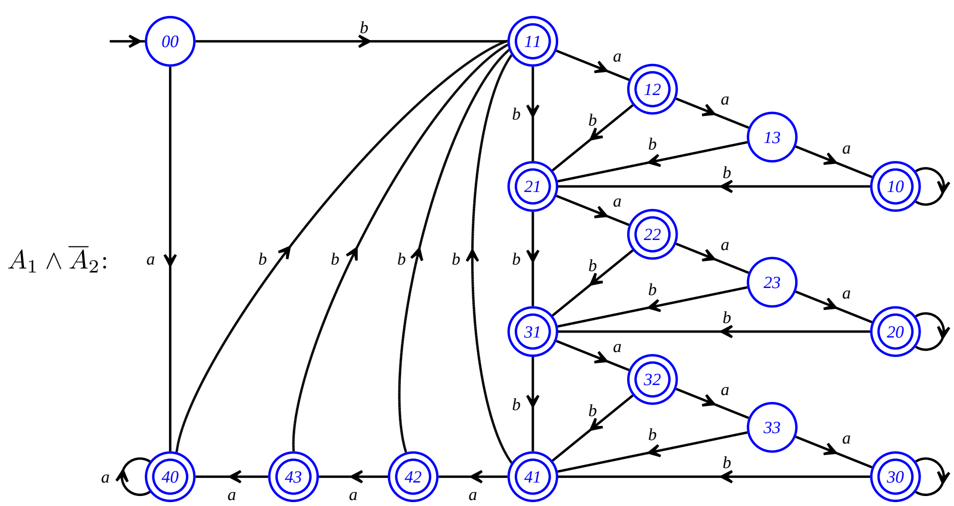
A_2: препознаје речи које се завршавају на baa;

$\overline{A}_2$: препознаје речи које се не завршавају на baa.

Сви ови аутомати су приказани на следећој слици



Прихватајућа стања у споју са или су сва стања облика (i, j) код којих је или стање i прихватајуће у првом аутомату или стање j прихватајуће у другом аутомату. Сада ћемо аутомате A_1 и $\overline{A}_2$ спојити у један аутомат $A_1 \vee \overline{A}_2$ (водите рачуна да би у $A_1 \vee \overline{A}_2$ требало и стање $(0, 0)$ да буде прихватајуће, али ћемо ставити да је оно неприхватајуће, јер оно одговара празној речи ε).



а) Аутомат $A_1 \wedge \overline{A}_2$ је оптималан.

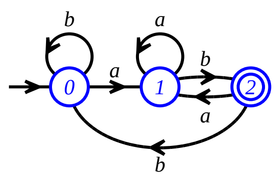
б) Одредимо регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара коначном аутомату $A_1 \wedge \overline{A}_2$. Имамо да је

$N = \{00, 11, 12, 13, 10, 21, 22, 23, 20, 31, 32, 33, 30, 41, 42, 43, 40\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \{00 \to a40, 00 \to b11, 11 \to a12,$ $11 \to b21, 11 \to \varepsilon, 12 \to a13, 12 \to b21, 12 \to \varepsilon, 13 \to a10, 13 \to b21, 10 \to a10, 10 \to b21, 10 \to \varepsilon, 21 \to a22,$ $21 \to b31, 21 \to \varepsilon, 22 \to a23, 22 \to b31, 22 \to \varepsilon, 23 \to a20, 23 \to b31, 20 \to a20, 20 \to b31, 20 \to \varepsilon, 31 \to a32,$ $31 \to b41, 31 \to \varepsilon, 32 \to a33, 32 \to b41, 32 \to \varepsilon, 33 \to a30, 33 \to b31, 30 \to a30, 30 \to b41, 30 \to \varepsilon, 41 \to a42,$ $41 \to b11, 41 \to \varepsilon, 42 \to a43, 42 \to b11, 42 \to \varepsilon, 43 \to a40, 43 \to b11, 43 \to \varepsilon, 40 \to a40, 40 \to b11, 40 \to \varepsilon\}$ и $\sigma^* = 00$. ■

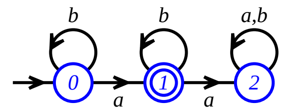
У наредна два задатка имамо да су разне процедуре везане за коначне аутомате разбијене на пуно ситних корака и такве задатке углавном дајемо на колоквијуму.

ПРИМЕР 6.6.9. *Колоквијум 2008.*
На следећим сликама су представљена 2 коначна аутомата A_1 и A_2.

A_1:



A_2:



а) Испитати које од наредних речи

ε, a, b, $abba$, $baba$, $aaab$, abb, $baaab$, $aabaabb$, $bbabbb$

препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

б) Испитати које све речи препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

в) Одредити регуларну граматику $G_1 = (N_1, T_1, \Pi_1, \sigma_1^*)$ која одговара коначном аутомату A_1, као и регуларну граматику $G_2 = (N_2, T_2, \Pi_2, \sigma_2^*)$ која одговара коначном аутомату A_2.

г) Одредити аутомат који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_1.

д) Одредити аутомат који препознаје све речи које препознају и аутомат A_1 и аутомат A_2. Да ли је такав аутомат оптималан?

Решење. **а)** Аутомат A_1 препознаје речи $aaab$ и $baaab$, а аутомат A_2 препознаје речи a, abb и и $babbb$.
За све речи дајемо у ком су стању аутомати A_1 и A_2 када их прочитају:

речи	ε	a	b	$abba$	$baba$	$aaab$	abb	$baaab$	$aabaabb$	$bbabbb$
A_1	0	1	0	1	1	2	0	2	0	0
A_2	0	1	0	2	2	2	1	2	2	1

б) Аутомат A_1 препознаје речи које се завршавају на ab.
Ове речи можемо описати и као: $\ldots ab$.

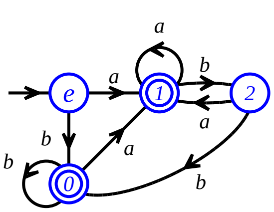
Аутомат A_2 препознаје речи које имају тачно 1 слово a.
Ове речи можемо описати и као: $b^k a b^\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$.

в) Регуларна граматика $G_1 = (N_1, T_1, \Pi_1, \sigma_1^*)$ дата је са: $N_1 = \{0, 1, 2\}$, $T_1 = \{a, b\}$, $\Pi_1 = \{0 \to a1, 0 \to b0, 1 \to a1, 1 \to b2, 2 \to a1, 2 \to b0, 2 \to \varepsilon\}$ и $\sigma_1^* = 0$.

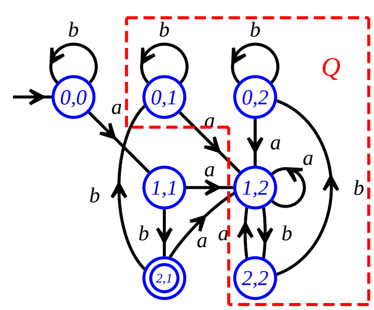
Регуларна граматика $G_2 = (N_2, T_2, \Pi_2, \sigma_2^*)$ дата је са: $N_2 = \{0, 1, 2\}$, $T_2 = \{a, b\}$, $\Pi_2 = \{0 \to a1, 0 \to b0, 1 \to a2, 1 \to b1, 1 \to \varepsilon, 2 \to a2, 2 \to b2\}$ и $\sigma_2^* = 0$.

г),д)

$\overline{A}_1$:
непразне



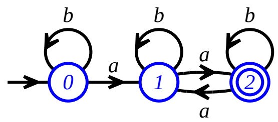
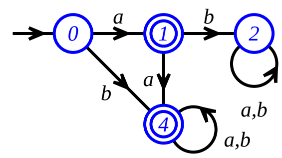
$A_1 \wedge A_2$:



Овде смо почетно стање поделили на 2 стања: e које одговара празној речи ε и 0 које одговара свим непразним речима у стању 0 у аутомату A_2.

Аутомат $A_1 \wedge A_2$ није оптималан јер се неприхватајућа стања $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, и $(2,2)$ могу спојити у једно неприхватајуће стање Q. ■

ПРИМЕР 6.6.10. *Колоквијум 2009.*
На следећим сликама су представљена 2 коначна аутомата A_1 и A_2.

A_1:  A_2: 

а) Испитати које од наредних речи

$$\varepsilon, \quad a, \quad b, \quad abba, \quad baba, \quad aaab, \quad abb, \quad baaab, \quad aabaabb, \quad bbabbb$$

препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

б) Испитати које све речи препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

в) Одредити регуларну граматику $G_1 = (N_1, T_1, \Pi_1, \sigma_1^*)$ која одговара коначном аутомату A_1, као и регуларну граматику $G_2 = (N_2, T_2, \Pi_2, \sigma_2^*)$ која одговара коначном аутомату A_2.

г) Одредити аутомат који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_2.

д) Одредити аутомат који препознаје све речи које препознају и аутомат A_1 и аутомат A_2. Да ли је такав аутомат оптималан?

Решење. **а)** Аутомат A_1 препознаје речи *abba*, *baba* и *aabaabb*, а аутомат A_2 препознаје речи *a*, *b*, *baba*, *aaab*, *baaab*, *aabaabb* и *bbabbb*.
За све речи дајемо у ком су стању аутомати A_1 и A_2 када их прочитају:

речи	ε	a	b	$abba$	$baba$	$aaab$	abb	$baaab$	$aabaabb$	$bbabbb$
A_1	0	1	0	2	2	1	1	1	2	1
A_2	0	1	4	2	4	4	2	4	4	4

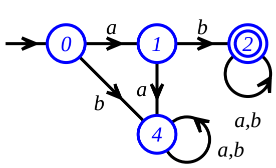
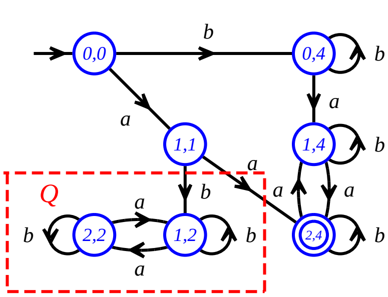
б) Аутомат A_1 препознаје речи које имају паран број, $2k$, слова a, где је $k \geqslant 1$.

Аутомат A_2 препознаје непразне речи које не почињу са ab.
Ове речи можемо описати и као: $b\ldots$ или $aa\ldots$

в) Регуларна граматика $G_1 = (N_1, T_1, \Pi_1, \sigma_1^*)$ је: $N_1 = \{0,1,2\}$, $T_1 = \{a,b\}$, $\Pi_1 = \{0 \to a1, 0 \to b0, 1 \to a2, 1 \to b1, 2 \to a1, 2 \to b2, 2 \to \varepsilon\}$ и $\sigma_1^* = 0$.

Регуларна граматика $G_2 = (N_2, T_2, \Pi_2, \sigma_2^*)$ дата је са: $N_2 = \{0,1,2,4\}$, $T_2 = \{a,b\}$, $\Pi_2 = \{0 \to a1, 0 \to b4, 1 \to a4, 1 \to b2, 1 \to \varepsilon, 2 \to a2, 2 \to b2, 4 \to a4, 4 \to b4, 4 \to \varepsilon\}$ и $\sigma_2^* = 0$.

г),д) Аутомат који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_2 добијамо од аутомата $\overline{A}_2$ тако што почетно стање 0 ставимо да је неприхватајуће јер оно одговара само празној речи ε.

$\overline{A}_2$:
непразне  $A_1 \wedge A_2$: 

Аутомат $A_1 \wedge A_2$ није оптималан јер се неприхватајућа стања $(1,2)$ и $(2,2)$ могу спојити у једно неприхватајуће стање Q. ■

6.7 Резиме

У овој глави смо прво увели основне појмове везане за коначне аутомате. У другом поглављу смо детаљно размотрили све случајеве који могу да се појаве приликом комплементирања аутомата $\overline{A}$. У трећем поглављу смо детаљно размотрили оба случаја за спајања аутомата и $A_1 \wedge A_2$ и $A_1 \vee A_2$. У четвртом поглављу интуитивно уводимо појам минимизације аутомата и дајемо неке везе са релацијама еквиваленције. У петом поглављу смо увели појам регуларних граматика и како се оне повезују са коначним аутоматима. Шесто поглавље садржи мноштво испитних задатака који су детаљно решени и илуструју градиво из свих претходних поглавља.

6.8 Питања за проверу знања

94. Дати дефиницију коначног аутомата $A = (S, U, f, P, s^*)$. Колико има скупова међу S, U, f, P, s^*?

95. Када комплементирамо аутомат A са n стања колико стања има нови аутомат $\overline{A}$? Шта му је почетно стање?

96. Када спојимо аутомат A_1 са n стања и аутомат A_2 са m стања колико стања има нови аутомат $A_1 \wedge A_2$? Шта му је почетно стање?

97. Када спојимо аутомат A_1 са n стања и аутомат A_2 са m стања колико стања има нови аутомат $A_1 \vee A_2$? Шта му је почетно стање?

98. Која је разлика између аутомата $A_1 \wedge A_2$ и аутомата $A_1 \vee A_2$?

99. Приликом комбиновања аутомата $A_1 = (S_1, U_1, f_1, P_1, s_1^*)$ и $A_2 = (S_2, U_2, f_2, P_2, s_2^*)$, објаснити да ли аутомати $A_1 \wedge A_2$ и $A_1 \vee A_2$ имају исто почетно стање? Шта су почетна стања аутомата $A_1 \wedge A_2$ и $A_1 \vee A_2$?

100. Приликом комбиновања аутомата $A_1 = (S_1, U_1, f_1, P_1, s_1^*)$ и $A_2 = (S_2, U_2, f_2, P_2, s_2^*)$, објаснити да ли аутомати $A_1 \wedge A_2$ и $A_1 \vee A_2$ имају иста прихватајућа стања? Шта су прихватајућа стања аутомата $A_1 \wedge A_2$ и $A_1 \vee A_2$?

101. Дефиниција уједначивих стања аутомата. Ако су стања s_1 и s_2 уједначива, која су још стања уједначива за сваки улазни симбол u?

Литература

[1] James A. Anderson, *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, Računarski fakultet, Beograd, 2005.

[2] George E. Andrews, Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004.

[3] George E. Andrews, *The Thoery of Partitions*, Cambridge University Press, 1984.

[4] Владимир Балтић, *Дискретне математичке структуре – збирка испитних и домаћих задатака из 2008. и 2009.*, ФОН, Београд, 2010.

[5] Владимир Балтић, Александар Сеничић, *Припремни материјал за наставнике – Искази и скупови*, (у припреми)

[6] Владимир Балтић, Душан Ђукић, Ђорђе Кртинић, Иван Матић, *Припремни задаци за такмичења из математике ученика средњих школа*, ДМС, Београд, 2008.

[7] Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 1999.

[8] Miklós Bóna, *Combinatorics of Permutations*, Chapman & Hall, 2004.

[9] Dragoš Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[10] Dragoš Cvetković, Mirjana Čangalović, Djordje Dugošija, Vera Kovačević-Vujčić, Slobodan Simić, Jovo Vuleta, *Kombinatorna optimizacija*, Beograd 1996.

[11] Dragoš Cvetković, Slobodan Simić *Diskretna matematika, Matematika za kompjuterske nauke*, Libra, Beograd, 2000.

[12] Dragoš Cvetković, Slobodan Simić *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*, Akademska misao, Beograd, 2002.

[13] Мирјана Чангаловић, Весна Манојловић, Владимир Балтић, *Дискретне математичке структуре*, Факултет организационих наука, Београд, 2014.

[14] Vojislav Petrović, *Teorija grafova*, Novi Sad, 1998.

[15] Neil J.A. Sloane, *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[16] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[17] Драган Стевановић, Владимир Балтић, Слободан Симић, Мирослав Ћирић, *Дискретна математика – основе комбинаторике и теорије графова*, ДМС, Београд, 2008.

[18] Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika, Zbirka rešenih zadataka*, DMS, Beograd, 2004.

[19] Весна Тодорчевић, Владимир Балтић, Мирјана Чангаловић, *Збирка задатака из Дискретних математиких структура*, ФОН, Београд, 2016.

[20] Darko Veljan, *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.