AKADEMIJA TEHNIČKO-UMETNIČKIH STRUKOVNIH STUDIJA BEOGRAD

ODSEK VISOKA ŠKOLA ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DR LJILJANA PECIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIKE

Prvo izdanje

Beograd, 2022

Mehanika – zbirka zadataka

Autor: dr Ljiljana Pecić, profesor strukovnih studija

Prvo izdanje

Recenzenti: mr Milija Džekulić, predavač, ATUSS, Visoka škola elektrotehnike i računarstva
dr Sreten Perić, redovni profesor Univerziteta odbrane, Vojna akademija

Izdavač: Akademija tehničko-umetničkih strukovnih studija Beograd, Starine Novaka, 24 Beograd

Za izdavača: dr Vera Petrović, predsednik

Naslovna strana: Vladimir Cerić

Štampa: Donat Graf Doo, Beograd

Tiraž: 50

ISBN: 978-86-6090-122-6

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

531(075.8)(076)

ПЕЦИЋ, Љиљана, 1972-
Zbirka zadataka iz mehanike / Ljiljana Pecić. - 1. izd. - Beograd : Akademija tehničko-umetničkih strukovnih studija "Beograd", 2022 (Beograd : Donat graf). - 221 str. : ilustr. ; 24 cm

Na vrhu nasl. str.: Odsek Visoka škola elektrotehnike i računarstva. - Tiraž 50. - Bibliografija: str. 221.

ISBN 978-86-6090-122-6

а) Механика -- Задаци

COBISS.SR-ID 72995849

PREDGOVOR

Predmet Mehanika se nalazi u planu i programu studijskih programa: Automatika i sistemi upravljanja vozilima, Ekološki inženjering i Nove energetske tehnologije na Akademiji tehničko-umetničkih strukovnih studija Beograd, Odsek Visoka škola elektrotehnike i računarstva. Ova zbirka zadataka namenjena je, prvenstveno, studentima ovog odseka koji slušaju predmet Mehanika, ali može poslužiti i studentima drugih visokih tehničkih škola.

Zbirka je nastala kao rezultat višegodišnjeg rada na izvođenju nastave iz predmeta Mehanika na Odseku Visoka škola elektrotehnike i računarstva i ima za cilj da olakša studentima savladavanje gradiva i uspešno polaganje ispita.

Gradivo je podeljeno u šesnaest poglavlja, koja pokrivaju četiri posebne celine mehanike: statiku, kinematiku, dinamiku tačke i dinamiku sistema. Prvih sedam poglavlja se odnosi na statiku, četiri poglavlja na kinematiku, tri na dinamiku tačke i dva na dinamiku sistema. Prolazak kroz ova poglavlja, redom kojim su organizovani, omogućava studentima da nauče i sa lakoćom primenjuju sve zakone i postulate mehanike. Ispred svake celine je dat pregled osnovnih obrazaca koji će se u toj celini primenjivati, kako bi se olakšalo savladavanje gradiva.

Kako se mehanika kao nauka jako oslanja na matematiku, na kraju zbirke je kao prilog dat pregled matematičkih formula i izraza koji se primenjuju u ovoj zbirci. Takođe, kao prilozi su date i sledeće tablice: tablice težišta linija i figura i tablica osnovnih momenata inercije tela .

Autor ove zbirke se zahvaljuje recenzentima, mr Miliji Džekuliću i dr Sretenu Periću, na svim korisnim predlozima i sugestijama, čime su pomogli da ova zbirka bude što kvalitetnija i u funkciji studijskih programa kojima je namenjena.

I pored najveće pažnje s kojom je pristupljeno izradi i recenziranju ove zbirke, moguće je da su se potkrale neke greške. Autor će biti zahvalan svim čitaocima koji mu ukažu na njih, ali će, takođe, biti zahvalan i na svim predlozima i sugestijama za dalje unapređenje zbirke.

Beograd, 2022

Autor

SADRŽAJ:

OBRASCI ZA STATIKU

- Sila ($\vec{F}$) je vektor i potpuno je određena:
  - pravcem,
  - smerom,
  - intenzitetom i
  - napadnom tačkom.
- Zapis sile kao vektora se definiše izrazom: $\vec{F} = X \cdot \vec{\imath} + Y \cdot \vec{\jmath} + Z \cdot \vec{k}$,
- U statici, sila je klizeći vektor,
- Rezultanta sila je sila koja menja dejstvo svih sila koje deluju na neko telo i dobija se:$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ i ova sila spaja početak prve i kraj zadnje sile i tako se zatvara poligon sila,
- Ukoliko se poklapaju kraj zadnje sile i početak prve – rezultanta je jednaka nuli,
- Uravnotežavajuća sila sili $\vec{F}_R = -\overrightarrow{F'}_R$
- Ukoliko na telo deluje neka sila $\vec{F}$ i ako je $\vec{r}$ vektor položaja te sile u odnosu na neku tačku O (osu) , onda je moment sile za tu tačku: $\vec{M} = \vec{r} x \vec{F},$ a intenzitet je $M = rF \sin(r, F)$
- Spreg sila čine dve sile istog intenziteta, paralelnih pravaca, a suprotnog smera,
- Moment sprega sila je:$\vec{M} = \vec{d} x \vec{F}$, pri čemu je d najkraće rastojanje između pravaca dejstva sila.
- Ukoliko na telo deluje nekoliko momenata, onda je rezultujući moment:$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$
- Ukoliko na telo deluje sučeljeni sistem sila, onda je za ravnotežu tela potrebno da bude zadovoljen uslov: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$,
- Ukoliko na telo deluju sile čije se napadne linije ne seku u jednoj tački, telo će biti u ravnoteži ako i samo ako je vektorski zbir svih sila jednak nuli ($\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$) i ako je zbir momenata svih tih sila u odnosu na neku proizvoljnu tačku jednak nuli $\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$=0.
- Koordinate težišta C neke figure su:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot x_i}{A}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot y_i}{A}$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot z_i}{A}$$

pri čemu su: x_i,$y_i i$ z_i koordinate težišta i-te figure.

- Koordinate težišta C homogene linije se određuju:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta L_i \cdot x_i}{L}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta L_i \cdot y_i}{L}$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta L_i \cdot z_i}{L}$$

pri čemu su: x_i,y_i i z_i koordinate težišta *i-te* linije.

- Sila trenja uvek deluje po pravcu kretanja, suprotno od smera kretanja tela i proporcionalna je koeficijentu trenja μ i normalne reakcije veze:

$$F_\mu = \mu \cdot N.$$

- Koeficijent μ je statički koeficient trenja, koji treba razlikovati od kinematskog koeficienta trenja.
- U slučaju da se radi o klizanju jednog tela po drugom, javlja se statički koeficijent trenja klizanja, a u slučaju da se jedno telo kotrlja po površini drugog tela, u pitanju je trenje kotrljanja.

1. SILA KAO VEKTOR

ZADATAK 1: Odrediti rezultantu zadatog sistema sila (geometrijski) ako su im intenziteti $F_1=3$ *kN i* $F_2=6$ *kN*.

Slika 1.1

Rešenje:

Kako se radi o kolnearnim silama, sila je klizeći vektor, a pozitivan smer *x* ose je sa leva na desno (slika 1.1), rezultanta će biti: $F_R = F_1 - F_2 = 3 - 6 = -3kN$

ZADATAK 2: Pokazati da je zadati prostorni sistem sila u ravnoteži.

$\vec{F}_1(1kN, 6kN, 7kN),$
$\vec{F}_2(0kN, 1kN, -4kN),$
$\vec{F}_3(-1kN, -7kN, -3kN).$

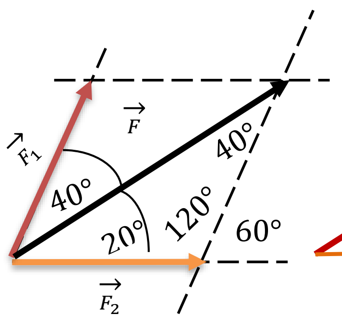
Rešenje:

$X_R = X_1 + X_2 + X_3 = (1 + 0 - 1)kN = 0kN,$
$Y_R = Y_1 + Y_2 + Y_3 = (6 + 1 - 7)kN = 0kN,$
$Z_R = Z_1 + Z_2 + Z_3 = (7 - 4 - 3)kN = 0kN,$
$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} F_R = = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0\ Nm$

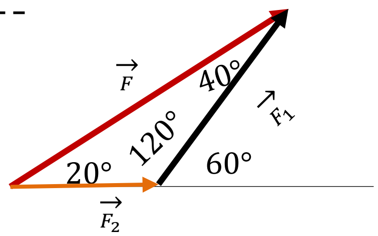
ZADATAK 3: Razložiti silu $F = 5kN$ na komponente, čiji su pravci zadati uglovima $\alpha=40°$ i $\beta=20°$ i izračunaj njihov intenzitet (slika 1.3.1.).

Rešenje:

Zadatak rešavamo primenom sinusne ili kosinusne teoreme, a na osnovu slika 1.3.1. i 1.3.2.



Slika 1.3.1.



Slika 1.3.2.

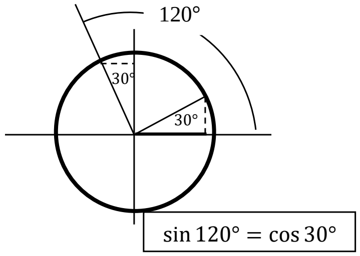
$|\vec{F}| = F$

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 120°}$ - *kosinusna teorema*

$\frac{F}{\sin 120°} = \frac{F_1}{\sin 20°} = \frac{F_2}{\sin 40°}$ - *sinusna teorema*

Iz trigonometrijskog kruga vidimo odnos vrednosti trigonometrijskih veičina (slika 1.3.3)

$$\frac{F}{\sin 120°} = \frac{F_1}{\sin 20°} \Rightarrow F_1 = F \cdot \frac{sin120°}{sin20°}$$



$$F_1 = 5kN \cdot 0{,}3420 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$F_1 = 1{,}977\ kN$$

$$\frac{\mathrm{F}}{\sin 120°} = \frac{F_2}{\sin 40°} \rightarrow F_2 \sin 120° = F \cdot \sin 40°$$

Slika 1.3.3.

$$F_2 = F \cdot \frac{sin\ 40°}{sin\ 120°}$$

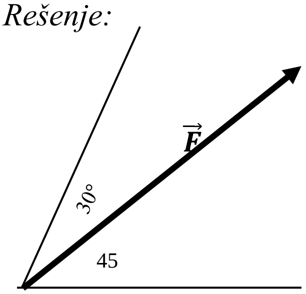
$$F_2 = \frac{F \cdot \sin 40°}{\cos 30°}$$

$$F_2 = 5kN\frac{0{,}643}{0{,}867} = 3{,}71kN$$

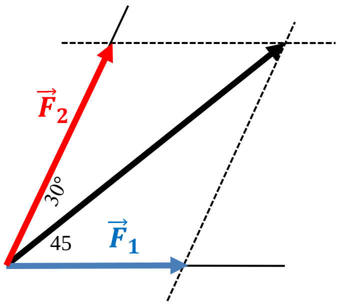
Kosinusnom teoremom se, naravno, dobijaju isti rezultati.

ZADATAK 4: Razložiti silu $F = 100\ N$ datu na slici 1.4.1.na komponente F_1 i F_2, čiji su pravci dati na slici. Komponenta F_1 zaklapa ugao od 45°, a sila F_2 30° sa silom.

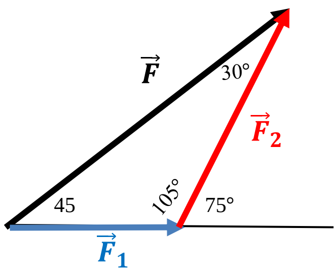
Rešenje:



Slika 1.4.1.



Slika 1.4.2.



Slika 1.4.3.

Grafičko rastavljanje sile $\vec{F}$ na komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ dato je na slici 1.4.2. Analitički ćemo odrediti intenzitet komponenti primenom sinusne teoreme, a na osnovu slike 1.4.3..

$\frac{F}{sin\ 105°} = \frac{F_2}{\sin 45°}$, pa je $F_2 = F\,\frac{\sin 45°}{\sin 105°} = 100\ \frac{0{,}707}{0{,}966} = 73{,}19\ N$

$\frac{F}{\sin 105°} = \frac{F_1}{\sin 30°}$, pa je $F_1 = 100\ \frac{\sin 30°}{\sin 105°} = 100\ \frac{0{,}5}{0{,}966} = 51{,}76$ N

Provera kosinusnom teoremom:

$F^2 = {F_1}^2 + {F_1}^2 - 2\cdot F_1 \cdot F_2 \cos 105° = 2679{,}10 + 5356{,}77 + 1969{,}92 = 1005{,}79$

pa je F = 100, 02 N.

ZATAKAK 5: Odrediti zbir tri sile: $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ i $\overrightarrow{F_3}$, čije su projekcije na ose: *X_1=6 kp, Y_1=3 kp, Z_1=12 kp; X_2=3 kp, Y_2= -7 kp; Z_2=1 kp; X_3=5 kp, Y_3= 2 kp i Z_3= - 8 kp.*

Rešenje:

$$X_R = X_1 + X_2 + X_3 = 6\ kp + 3\ kp + 5\ kp = 14\ kp$$
$$Y_R = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 3\ kp + (-7)\ kp + 2\ kp = -2\ kp$$
$$Z_R = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 12\ kp + 1\ kp + (-8)\ kp = 5\ kp$$

$$\mathrm{F_R} = \sqrt{\mathrm{X_R^2} + \mathrm{Y_R^2} + \mathrm{Z_R^2}} = \sqrt{14^2 + (-2)^2 + (5)^2}$$
$$\mathrm{F_R} = \sqrt{196 + 4 + 25} = \sqrt{225} = 15\ kp$$

$$cos\ \alpha = \frac{\mathrm{X_R}}{\mathrm{F_R}} = \frac{14\mathrm{kp}}{15\mathrm{kp}} = 0{,}933 \Rightarrow \alpha = arccos\ 0{,}933 = 21{,}09°$$
$$cos\ \beta = \frac{\mathrm{Y_R}}{\mathrm{F_R}} = -\frac{2kp}{15kp} = 0{,}133 \Rightarrow \beta = \arccos 0{,}133 = 83{,}35°$$
$$\cos\gamma = \frac{\mathrm{Z_R}}{\mathrm{F_R}} = \frac{5\mathrm{kp}}{15\mathrm{kp}} = 0{,}333 \Rightarrow \gamma = arcos 0{,}333 = 70{,}55°$$

ZADATAK 6: Zapisati u vektorskom obliku silu F i odrediti vrednost intenziteta sile ako se znaju koordinate tačaka $A\ (2{,}2{,}2)\ m$ i $B\ (4{,}4{,}5) m$, između kojih se prostire vektor sile (slika 1.6.).

Rešenje:

Položaj sile F u prostoru je u potpunosti definisan vektorom $\vec{r}_{AB}$. Stoga će projekcije sile F na koordinatne ose biti jednake projekcijama vektora $\vec{r}_{AB}$ na koordinatne ose (slika 1.6.).

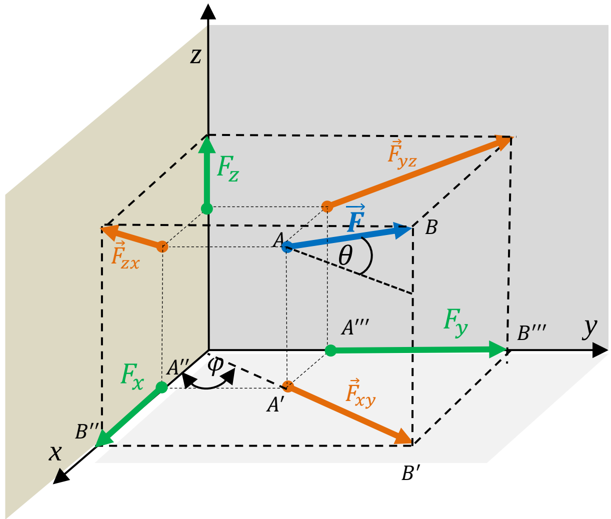
Stoga je:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{F} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k} =$$

$$= (4-2)\vec{\imath} + (4-2)\vec{\jmath} + (5-2)\vec{k} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

$$|\vec{r}_{AB}| = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} = 4{,}12\ N$$

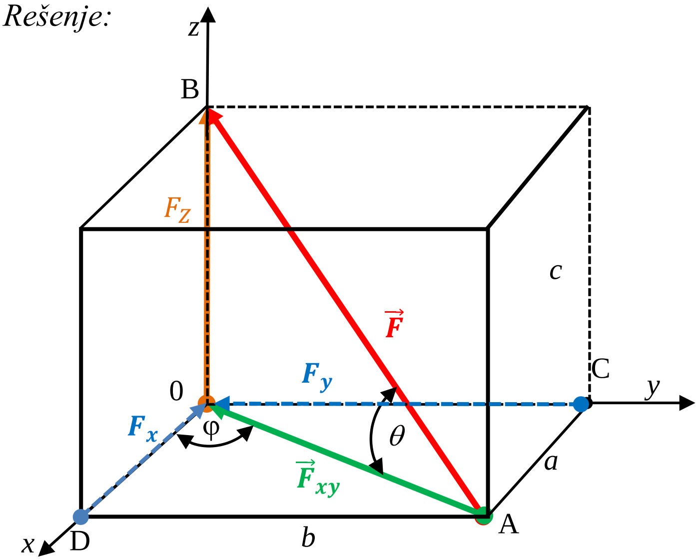
$$\vec{F} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$



Slika 1.6.: Projekcija sile na ravni i koordinatne ose

ZADATAK 7: Data je sila $\left|\vec{F}\right| = 900N$ i uglovi kao na slici. Odrediti vrednosti projekcija, kao i uglove φ i θ (slika 1.7.).

Rešenje:



Slika 1.7.

A (3, 4, 0)
B (0, 0, 3)
C (0, 4, 0)
D (3, 0, 0)

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath}(Y_B - Y_A)\gamma + (Z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (0 - 3)\vec{\imath} + (0 - 4)\vec{\jmath} + (3 + 0)\vec{k}$$

$\vec{r}_{AB} = -3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$
$|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2}$
$|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{9 + 16 + 9}$
$|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{34} = 5{,}83m$
Jedinični vektor $\overrightarrow{l_{AB}}$ se dobija:

$$\vec{l}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{-3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}}{5{,}83} = -0{,}514\vec{\imath} - 0{,}686\vec{\jmath} + 0{,}514\vec{k}$$

Vrednosti projekcija sile F na ose *x,y i z* su:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{l}_{AB} = 900 \cdot \left(-0{,}514\vec{\imath} - 0{,}686\vec{\jmath} + 0{,}514\vec{k}\right)$$

$\vec{F} = (-462{,}6\vec{\imath} - 617{,}4\vec{\jmath} + 462{,}6\vec{k})\ N$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(-462{,}6)^2 + (-617{,}4)^2 + 462{,}6^2} = 899{,}55 \approx 900N$$

$$F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-462{,}6)^2 + (-617{,}4)^2} = 771{,}47N$$

$cos\theta = \frac{F_{xy}}{F} = \frac{771{,}47}{900} = 0{,}857,\ \theta = arccos\theta = 31{,}02°$

$cos\varphi = \frac{-462{,}6}{-771{,}47} = 0{,}599,\ \varphi = arccos\varphi = 53{,}20°$

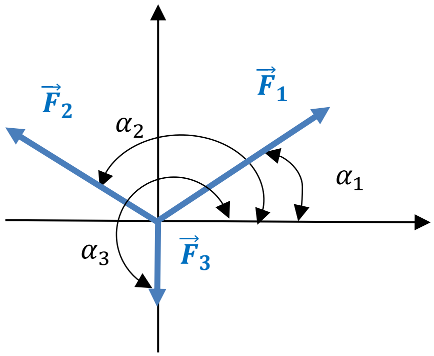
ZADATAK 8: Odrediti rezultantu tri sučeljene sile, ukoliko su $F_1 = F_2 = 10\ kN, F_3$= 10 kN, a uglovi: α_1= 30° , α_2= 150° α_3= 270° (slika 1.8.1.).

Rešenje:

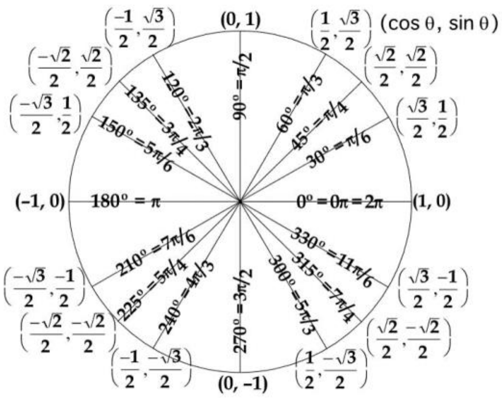
Na osnovu trigonometrijskog kruga, vidimo da je:

- sin α = sin 30° = 0,5,
- cos α = cos 30° = 0,866;
- cos 150 ° = cos (180° - 30°) = - cos 30° = - 0,866;
- sin 150° = sin (180° - 30°) = sin 30° = 0,5;
- sin 270 ° = - sin 90 ° = - 1
- cos 270 ° = cos 90 ° = 0

Unećemo vrednosti projekcija sila u tabelu, koristeći trigonometrijski krug (slika 1.8.2.).



Slika 1.8.1.



Slika 1.8.2.

Sila	Vrednost sile$[kN]$	Projekcija na x osu $F_{ix}= F_i \cdot cos\alpha_i$ $[kN]$	Projekcija na y-osu $F_{ix}= F_i \cdot sin\alpha_i$ $[kN]$
F_1	10	10 · cos 30° = 8,66	10 ·sin 30 °= 5
F_2	10	10 · cos 150° = - 8,66	10 · sin 150° = 5
F_3	5	10 · cos 270 ° = 0	10 · sin 270 ° = - 10

Zbirovi projekcija svih sila na *x*-osu i *y*-osu su:
ΣX_i = 8,66 – 8,66 + 0 = 0 kN,
ΣY_i = 5 + 5 – 10 = 0 kN.
Kako su vrednosti zbirova projekcija sve tri sile na i na *x* i na *y* osu jednake nuli, to znači da je rezultanta F_R = 0 kN, odnosno dejstvo sila se međusobno poništava. Pod dejstvom ovih sila se telo nalazi u mirovanju.

ZADATAK 9: Za sile prikazane na slici 1.9.1. odrediti odgovarajuću rezultantu.

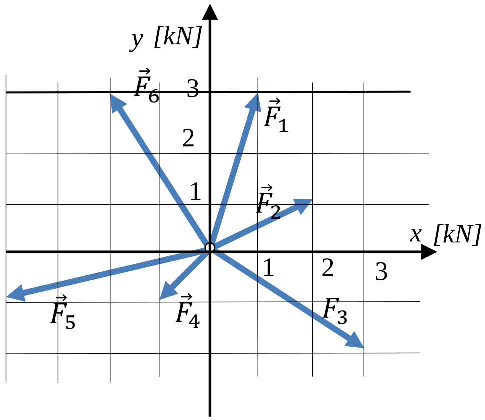
Rešenje:
Prikazaćemo u tabeli sve sile preko njihovih projekcija na *x* i *y* osu, a na osnovu slike 1.9.1. Intenzitet rezultante je:

$$F_R = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} = 3{,}61 \text{ kN}$$

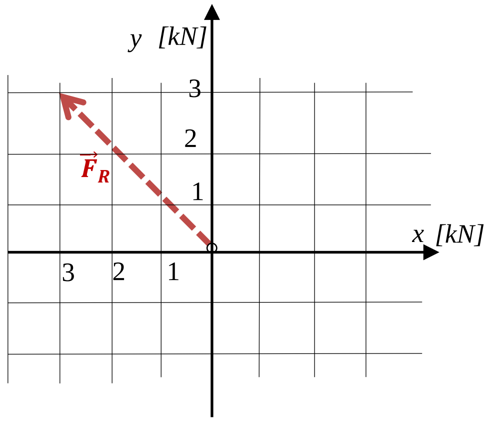
U tabeli 1 je dat prikaz projekcije svih sila na ose x i y, a na slici 1.9.2. je grafički prikazana rezultanta sila.

Tabela 1

Sila	Projekcija sile na x osu [kN]	Projekcija sile na y osu [kN]	Zapis sile u vektorskom obliku [kN]
F_1	1	3	$\overrightarrow{F_1} = 1\cdot \vec{\imath} + 3\cdot \vec{\jmath}$
F_2	2	1	$\overrightarrow{F_2} = 2\cdot \vec{\imath} + 1\cdot \vec{\jmath}$
F_3	3	-2	$\overrightarrow{F_3} = 3\cdot \vec{\imath} - 2\cdot \vec{\jmath}$
F_4	-1	-1	$\overrightarrow{F_4} = -1\cdot \vec{\imath} - 1\cdot \vec{\jmath}$
F_5	-5	-1	$\overrightarrow{F_5} = -5\cdot \vec{\imath} - 1\cdot \vec{\jmath}$
F_6	-2	3	$\overrightarrow{F_6} = -2\cdot \vec{\imath} + 3\cdot \vec{\jmath}$
F_R	-2	3	$\overrightarrow{F_R} = -2\cdot \vec{\imath} + 3\cdot \vec{\jmath}$



Slika 1.9.1.



Slika 1.9.2.

ZADATAK 10: Odrediti rezultantu tri sile prikazane na slici 1.10., ukoliko je $F_1 = 200N$, $F_2 = 300$ N i $F_3 = 400N$. Za proračun koristiti unete dimenzije paralelograma na slici (*a =2m, b=3m, c= 4m*).

Rešenje:

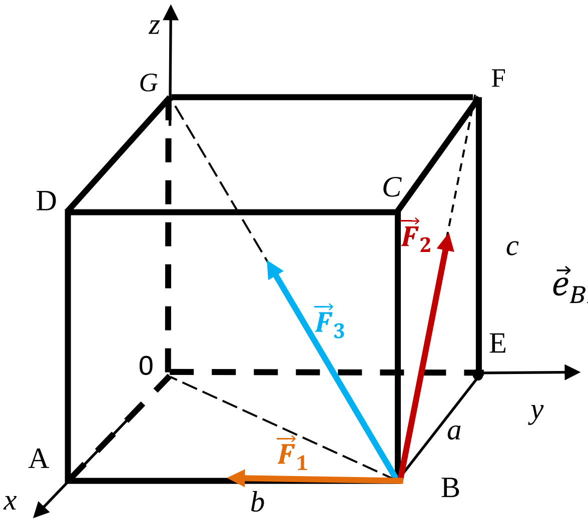
Da bismo odredili rezultantu, potrebno je da sve sile zapišemo u vektorkom obliku. Svaka sila može se prikazati u vektorskom obliku kao proizvod intenziteta sile i jediničnog vektora po pravcu razmatrane sile. Zato je potrebno da prvo odredimo koordinate tačaka paralelograma.

A (2,0,0); E(0,3,0);

B (2,3,0); F (0,3,4);

C (2,3,4); G (0,0,4);

D (2,0,4) O (0,0,0).



Slika 1.10.

Jedinični vektori se definišu:

$$\vec{e}_{BA}=\frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}}\ ;\ \vec{e}_{BF}=\frac{\vec{r}_{BF}}{r_{BF}}\ ,\vec{e}_{BG}=\frac{\vec{r}_{BG}}{r_{BG}}$$

$\vec{r}_{BA} = (x_A - x_B)\cdot\ \vec{\imath} + (y_A - y_B)\cdot\vec{\jmath} + (z_A - z_B)\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BA}\ = (2\text{-}2)\cdot\ \vec{\imath} + (0-3)\cdot\vec{\jmath} + (0-0)\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BA} = 0\cdot\ \vec{\imath}\ - 3\cdot\vec{\jmath} + 0\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BA}\ =\ \sqrt{0^2+3^2+0^2}$

$\vec{r}_{BA} = 3\ ;$

$$\vec{e}_{BA} = \frac{-3\cdot\vec{\jmath}}{3} = -\,\vec{\jmath}$$

$\vec{r}_{BF}\ = (x_F - x_B)\cdot\ \vec{\imath} + (y_F - y_B)\cdot\vec{\jmath} + (z_F - z_B)\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BF} = (0\text{-}2)\cdot\ \vec{\imath} + (3-3)\cdot\vec{\jmath} + (4-0)\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BF} = -\,2\cdot\ \vec{\imath}\ + 0\cdot\vec{\jmath} + 4\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BF}\ =\ \sqrt{2^2+0^2+4^2}$

$\vec{r}_{BF} = \sqrt{20}\ ;$

$\vec{r}_{BF} = \sqrt{20}\ ;$

$$\vec{e}_{BF} = \frac{-\,2\cdot\vec{\imath}\ + 0\cdot\vec{\jmath} + 4\cdot\ \vec{k}}{4{,}472} = -\,0{,}447\cdot\vec{\imath}\ + 0\cdot\vec{\jmath}\ + 0{,}894\cdot\ \vec{k}$$

$\vec{r}_{BG} = (x_G - x_B)\cdot\ \vec{\imath} + (y_G - y_B)\cdot\vec{\jmath} + (z_G - z_B)\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BG}\ = (0-2)\ \cdot\vec{\imath} + (0-3)\ \cdot\vec{\jmath} + (4-0)\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BG} = -\,2\cdot\ \vec{\imath}\ - 3\cdot\vec{\jmath} + 4\cdot\ \vec{k}$

$\vec{r}_{BG} =\ \sqrt{2^2+3^2+4^2}$

$\vec{r}_{BG} = \sqrt{29}$

$$\vec{e}_{BG} = \frac{-\,2\cdot\vec{\imath}\ - 3\cdot\vec{\jmath} + 4\cdot\ \vec{k}}{5{,}385} = -\,0{,}371\ \cdot\vec{\imath}\ -\ 0{,}557\cdot\vec{\jmath}\ +\ 0{,}743\cdot\ \vec{k}$$

$\vec{F}_1 = 200 \cdot (-\vec{j}) = -200 \cdot \vec{j}$

$\vec{F}_2 = 300 \cdot (-0{,}447 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0{,}894 \cdot \vec{k}) = -134{,}1 \cdot \vec{i} + 268{,}2 \cdot \vec{k}$

$\vec{F}_3 = 400 \cdot (-0{,}371 \cdot \vec{i} - 0{,}557 \cdot \vec{j} + 0{,}743 \cdot \vec{k})$

$\vec{F}_3 = -148{,}4 \cdot \vec{i} - 222{,}8 \cdot \vec{j} + 297{,}2 \cdot \vec{k}$

$\vec{F}_R = (-134{,}1 - 148{,}4) \cdot \vec{i} + (-200 - 222{,}8) \cdot \vec{j} + (268{,}2 + 297{,}2) \cdot \vec{k}$

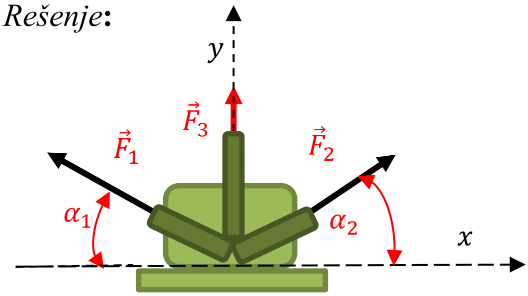
$$\vec{F}_R = -282{,}5 \cdot \vec{i} - 422{,}8 \cdot \vec{j} + 565{,}4 \cdot \vec{k}$$

$|\vec{F}_R| = F_R = \sqrt{(-282{,}5)^2 + (-422{,}8)^2 + 565{,}4^2}$

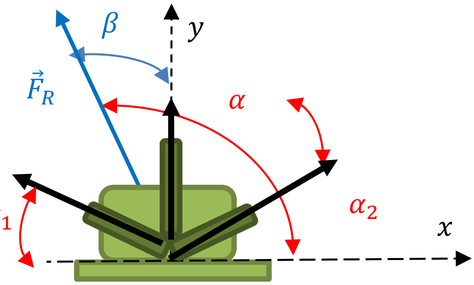
$F_R = 760{,}42$ N

ZADATAK 11: Na telo deluju tri sučeljene sile ($F_1 = 300N, F_2 = 350\ N, i\ F_3 = 150\ N$), kao na slici 1.11.1.Potrebno je odrediti njihovu rezultantu i odgovarajuće uglove koje sila zauzima prema koordinatnim osama, ako su dati uglovi sa slike: $\alpha_1 = 30°\ i\ \alpha_3 = 45°$.

Rešenje:



Slika 1.11.1.



Slika 1.11.2.

Vrednosti projekcija sila na kooordinatne ose su:

$F_{1x} = -F_1 \cos 30° = -300 \cdot \cos 30° = -259{,}8\ N$

$F_{1y} = F_1 \sin 30° = F_1 \cos 60° = 300 \cdot \cos 60° = 150\ N$

$F_{2x} = F_2 \cos 90° = 350 \cdot 0 = 0\ N$

$F_{2y} = F_2 = 350\ N$

$F_{3x} = F_3 \cos 45° = 150 \cdot \cos 45° = 106{,}05\ N$

$F_{1y} = F_3 \sin 45° = 150 \cdot \sin 45° = 106{,}05\ N$

Rezultujuća sila je:

$\vec{F}_R = (-259{,}8 + 0 + 106{,}05) \cdot \vec{i} + (150 + 350 + 106{,}05) \cdot \vec{j}$

$\vec{F}_R = -153{,}75 \cdot \vec{i} + 562{,}10 \cdot \vec{k}$ – vektorski zapis

Intenzitet rezultante je:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-153{,}75)^2 + (562{,}10)^2} = 582{,}75 \text{ N},$$

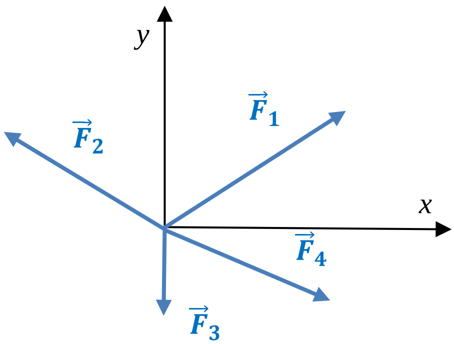
$\boldsymbol{cos\alpha = \frac{F_{Rx}}{F} = \frac{-153{,}75}{582{,}75} = -0{,}263}$; **pa je** $\boldsymbol{\alpha = \arccos(-0{,}263) = 105{,}30°}$**,**

$cos\beta = \frac{F_{Ry}}{F} = \frac{562{,}10}{582{,}75} = 0{,}96$, pa je $\beta = \arccos 0{,}9645 = 15{,}30°$.

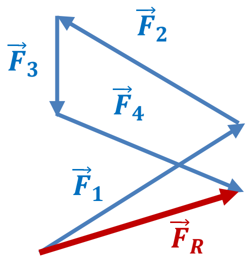
ZADATAK 12: Grafički odrediti rezultantu sila datih na slici 1.12.1..

Rešenje:

Sile koje su zadate (slika 1.12.1.) formiraju poligon sila (slika 1.12.2.) i rezultanta je sila $\vec{F}_R$.



Slika 1.12.1.

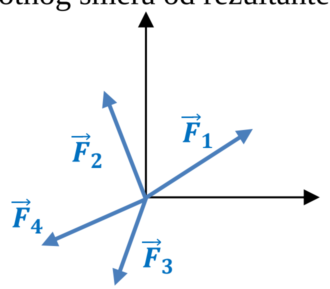


Slika 1.12.2.

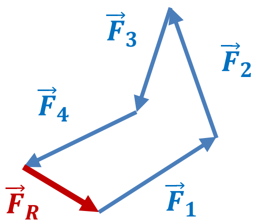
ZADATAK 13: Postojećim silama na slici 1.13.1. dodati silu F_5 tako da rezultanta svih sila bude nula sila.

Rešenje:

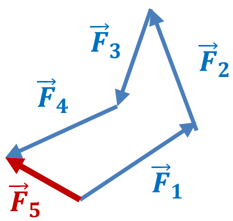
Prvo ćemo odrediti rezultantu zadate 4 sile (slika u sredini). Da bi poligon sila bio zatvoren, postojećim silama dodajemo silu F_5, koja je istog pravca, intentiteta ali suprotnog smera od rezultante 4 zadate sile.



Slika 1.13.1.



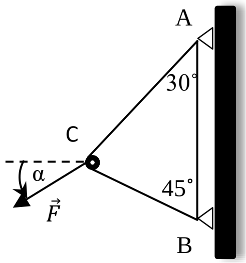
Slika 1.13.2.



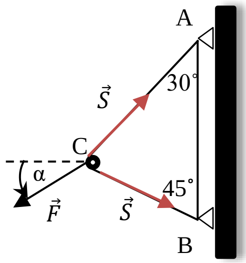
Slika 1.13.3.

2. SUČELJENI SISTEM SILA

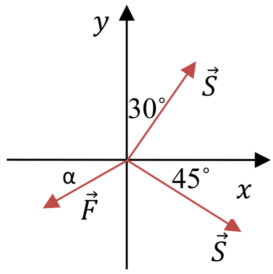
ZADATAK 1: Silom $\vec{F}$ je, preko malog kotura, nategnuto uže ABC tako da u njemu nastane sila $\vec{S}$ intenziteta 600 N (slika 2.1.1). Za ravnotežni položaj prema slici odrediti intenzitet, pravac i smer sile $\vec{F}$ i ugao α.



Slika 2.1.1.



Slika 2.1.2.



Slika 2.1.3.

Rešenje:

Potrebno je prvo osloboditi sistem od veza i uvesti reakcije veza, odnosno uvesti sile reakcije veza (slika 2.1.2.). Na osnovu slike 2.1.3. pisaćemo potrebne jednačine.U ovom slučaju imamo dve nepoznate, što znači da nam trebaju i 2 jednačine.

Kako imamo slučaj sučeljenog sistema sila, potpuno dovoljan i neophdan uslov je da zbir projekcija svih sila na dve međusobno upravne ose bude jednak nuli, što znači da ne postoji mogućnost pomeranja sistema po *x* i *y* osi. Iz takve dve jednačine dobićemo i intenzitet tražene sile i vrednost ugla α.

(1) $\sum X_i = 0$: $\quad -F \cdot cos\alpha + S \cdot sin30° + S \cdot cos45° = 0$

$$F \cdot cos\alpha = S \cdot (sin30° + cos45°)$$

$$F \cdot cos\alpha = S \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$F = \frac{S \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{cos\alpha} = \frac{424{,}26}{cos\alpha}$$

(2) $\sum Y_i = 0$: $\quad -F \cdot sin\alpha + S \cdot cos30° - S \cdot cos45° = 0$

$$F \cdot sin\alpha = S(cos45° + S \cdot cos30°)$$

$$F \cdot sin\alpha = 600 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$F \cdot sin\alpha = 519{,}6 - 424{,}26$$

$$F = \frac{95{,}34}{sin\alpha}$$

Kada izjednačimo krajnje izraze iz jednačine (1) i jednačine (2) dobićemo veličinu traženog ugla α:

$$\frac{424{,}26}{cos\alpha} = \frac{95{,}34}{sin\alpha}$$

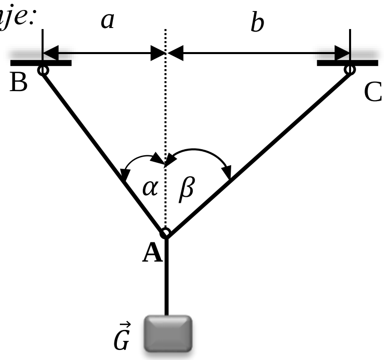
$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha = \frac{95{,}34}{424{,}26} = 0{,}2247$, pa je: $\alpha = +12{,}66° \quad - pravac\ sile\ \vec{F}$

Sada se iz prve jednačine može odrediti intenzitet sile F:

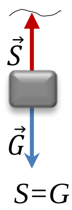
$$F = \frac{424{,}26}{cos\alpha} = \frac{424{,}26}{cos12{,}66°} = 434{,}83\ N$$

ZADATAK 2: Za konac ABC učvršćen je, pomoću prstena u tački B, teg težine $G = 300N$. Konac je u tačkama A i B prikačen za zid (slika 2.2.1). Ukoliko je $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, odrediti sile u delovima konca AB i AC.

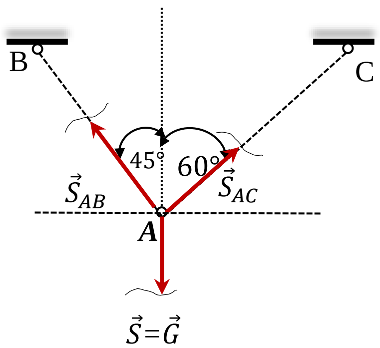
Rešenje:



Slika 2.2.1.



Slika 2.2.2.



Slika 2.2.3.

Da bismo odredili ukupnu silu u užetu koja deluje u tački A, preseći ćemo uže iznad tega. Jasno je da je sila $S = G$ (slika 2.2.2). Na slici 2.2.3 je izvršeno zamišljeno presecanje konca u 3 tačke. Na mestima preseka, pojavljuju se sile koje zamenjuju dejstva ostalih delova sistema. Ako sada odvojimo teg i posmatramo ostatak, silu S treba uravnotežiti sa silama u užetu S_{AB} i S_{AC} (slika 2.2.3).
Da bi tačka B bila u miru, projekcijom sila koje deluju u tački B na koordinatne ose dobijamo sledeće jednačine:

(1) $\sum X_i = 0 \rightarrow S_{AC} \cdot \cos 30° - S_{AB} \cdot \cos 45° = 0$
(2) $\sum Y_i = 0 \rightarrow S_{AB} \cdot \cos 45° + S_{AC} \cdot \cos 60° - G = 0$

Iz jednačine (1) dobijamo:
$S_{AB} \cdot \cos 45° = S_{AC} \cdot \cos 30°$

$$S_{AB} = S_{AC} \cdot \frac{\cos 30°}{\cos 45°} = S_{AC} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_{AB} = S_{AC} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

U jednačinu (2) sada možemo zameniti silu S_{AB} dobijenim izrazom iz jednačine (1):

$$S_{AC} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \cos 45° + S_{AC} \cdot \cos 60° - G = 0$$

$$S_{AC} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{AC} \cdot \frac{1}{2} = G$$

$$S_{AC} = G \cdot \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

Sada je:

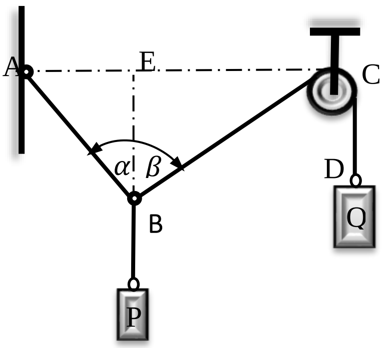
$$S_{AC} = 300 \cdot 0{,}73 = 219{,}78N$$

$$S_{AB} = S_{AC} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 269{,}23\ N$$

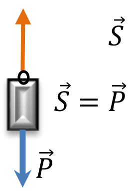
ZADATAK 3: Za konac AB, učvršćen je u tački B teg težine P. Za tačku B učvršćen je drugi konac BCD, koji je prebačen preko nepokretnog kotura i zategnut tegom $Q = 150\ kN$ (kao na slici 2.3.1). Odrediti silu u koncu AB i težinu tega P ako je $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

Rešenje:

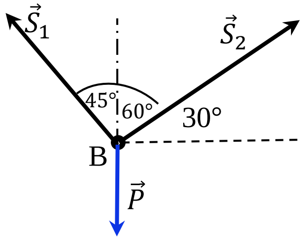
Na slici 2.3.1 je izvršeno zamišljeno presecanje konaca u 3 tačke.



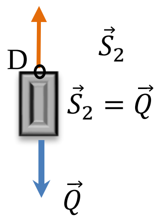
Slika 2.3.1.



Slika 2.3.2.



Slika 2.3.3.



Slika 2.3.4.

Da bi sistem bio u stanju mirovanja, potrebno je da rezultantna sila u bilo kojoj tački sistema, bude jednaka nuli. Na mestima preseka, pojavljuju se sile koje zamenjuju dejstvo ostatka sistema. Ukoliko sada posmatramo deo konca koji pridržava teg težine Q, i posmatramo odsečeni deo sa teretom Q (slika 2.3.4.), izjednačavanjem po y osi prisutnih sila, dobijamo da je $S_2 = $ Q.

Na osnovu slike 2.3.2. (zamišljeno presecanje konca iznad tereta težine P) možemo zaključiti da je: $S = P$.
Da bi tačka B bila u mirovanju, projekcijom sila koje deluju u tački B na koordinatne ose dobijamo sledeće jednačine (slika 2.3.3.):

(1) $\sum X_i = 0 \rightarrow -S_1 \cdot \cos 45° + S_2 \cdot \cos 30° = 0$
(2) $\sum Y_i = 0 \rightarrow S_1 \cdot \cos 45° + S_2 \cdot \cos 60° - P = 0$

Iz jednačine (1) dobijamo:

$$S_1 \cdot \cos 45° = S_2 \cdot \cos 30°$$

$$S_1 = S_2 \cdot \frac{\cos 30°}{\cos 45°}$$

$$S_1 = Q \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = Q\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 184{,}04N.$$

Iz jednačine (2) sada možemo dobiti vrednost sile P:

$$P = S_1 \cdot cos\, 45° + S_2 \cdot cos\, 60°$$

$$P = S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \cdot \frac{1}{2} = Q\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{Q} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Q}{2} \cdot (1 + \sqrt{3})$$

$$P = 150 \cdot (\sqrt{3} + 1)kN$$

$$P = 409{,}5kN$$

ZADATAK 4: U tački K se nalazi nepomični kotur (slika 2.4.1), preko koga je prebačen kanap, na čijem jednom kraju je okačen teg *P=10kN*. Drugi kraj kanapa je privezan za tlo u tački C. Nepomičnost kotura se obezbeđuje pomoću 2 laka štapa, koji su u tačkama A i B povezani za tlo. Odrediti reakcije F_A i F_B.

Rešenje:

Nakon zamišljenog presecanje štapova i kanapa, vidimo da imamo 3 reakcije veze, a kako je trougao CBK jednakostranični , sile u štapovima CK i BK će biti jednake ($S_2 = S_3$). Uslovi ravnoteže se na osnovu slike 2.4.2 mogu zapisati:

(1) $\sum X_i = 0 \rightarrow S_1 + P \cdot \cos 30° + P \cdot \cos 60° = 0$

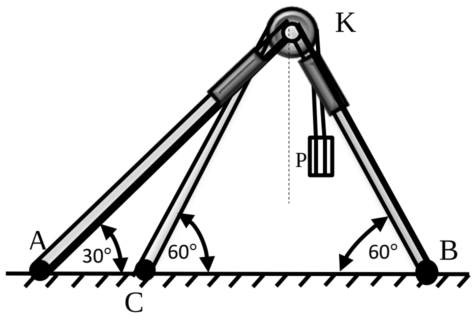
(2) $\sum Y_i = 0 \rightarrow P \cdot \cos 30° + P \cdot \cos 60° - S_2 = 0$

Iz jednačine (2)→ $S_2 = P \cdot \cos 30° + P \cdot \cos 60°$

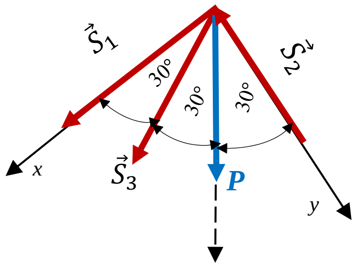
$$S_2 = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 5 \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

$S_2 = 13{,}65kN$



Slika 2.4.1



Slika 2.4.2

Iz jednačine (1)→ $S_1 = -P \cdot \cos 30° - P \cdot \cos 60°$

$$S_1 = -10 \cdot (\cos 30° + \cos 60°)$$
$$S_1 = -10 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$$
$$S_1 = -5 \cdot (\sqrt{3} + 1)$$
$$S_1 = -13{,}65kN$$

Kako su reakcije u osloncima jednake po pravcu i intenzitetu silama u odgovarajućim štapovima, a suprotnog su smera, to je $F_A = S_1$, $F_B = S_2$.

ZADATAK 5: Točak C je pomoću užeta AE prikačen za vertikalni zid u tački E (slika 2.5.1). Težina točka je $G = 10kN$. Odrediti reakciju zida F_B i silu u užetu, ako je poznat ugao $\alpha = 30°$.

Rešenje:

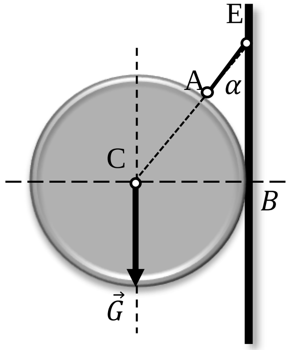
Oslobađanjem od veza točka C, dobijamo silu F_B, kao reakciju zida u tački dodira B, silu S u užetu (klizeći vektor, prolazi kroz težište C točka), u pravcima i pretpostavljenim smerovima, kao na slici 2.5.2. Zajedno sa težinom točka G, ove sučeljene sile grade trougao sila (slika 2.5.3).

Zadatak možemo rešiti na dva načina.

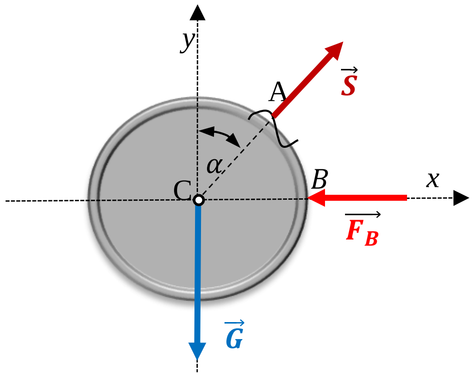
<u>I način:iz poligona sila</u> (slika 2.5.3):

$$\frac{G}{\sin(90°-\propto)} = \frac{S}{sin\ 90°} \to S = \frac{G}{cos\alpha} = \frac{10kN}{cos30°} = \frac{10kN}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}kN = 23{,}12\ kN$$

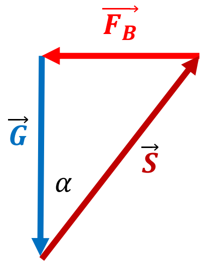
$$\frac{F_B}{sin \propto} = \frac{S}{sin\ 90°} \to F_B = S\ sin\alpha = \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}kN = \frac{10\sqrt{3}}{3}kN$$



Slika 2.5.1



Slika 2.5.2



Slika 2.5.3

<u>II način : analitički iz uslova ravnoteže (slika 2.5.2):</u>

(1) $\sum X_i \ = \ 0 \rightarrow \ S \cdot sin\alpha - F_B = 0$
(2) $\sum Y_i \ = \ 0 \ \rightarrow \ S \cdot cos\alpha - G = 0$

Iz jednačine (2) $\rightarrow$ $S \cdot cos\alpha \ = \ G$, pa je:

$$S \ = \ \frac{G}{cos \propto} = 23{,}12\text{kN}$$

Iz jednačine (1) $\rightarrow$ $F_B = S \cdot sin\alpha$, odnosno:

$$F_B = \frac{10\sqrt{3}}{3} kN$$

ZADATAK 6: Homogeni cilindar, težine $G = 100\text{N}$, se oslanja u tački A na kosu ravan, koja zaklapa ugao od $\alpha = 60°$ u odnosu na horizontalu, a u tački B se oslanja na ispust, kao na slici 2.6.1. Analitički i grafički odrediti reakcije kose ravni i ispusta .

Rešenje:

Rešićemo zadatak analitički:

(1) $\Sigma X_i = 0$; $F_B \sin\alpha$ - $F_A \sin\alpha = 0$,

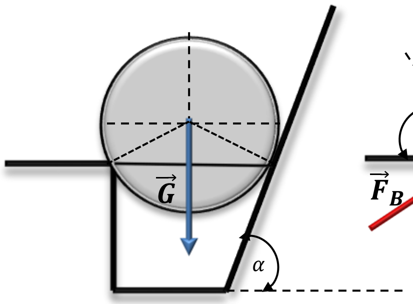
(2) $\Sigma Y_i = 0$; $F_B \cos\alpha + F_A \cos\alpha - \text{G} = 0$

Iz jednačine (1) je:

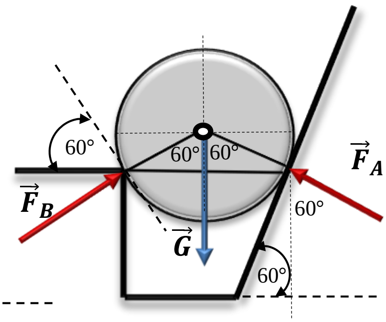
$$F_B \sin\alpha = F_A \sin\alpha, \text{ pa je } F_B = F_A,$$

Sada je iz jednačine (2):

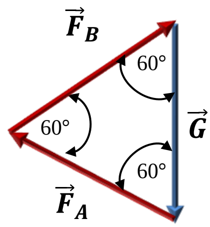
$$2 \cdot F_B \cdot \cos\alpha = \text{G},$$



Slika 2.6.1



Slika 2.6.2



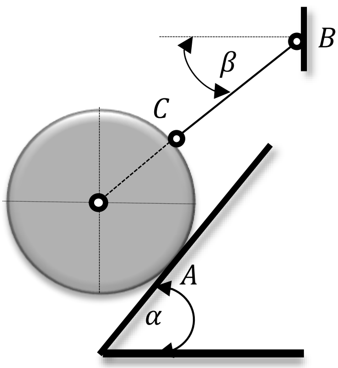
Slika 2.6.3

pa je:

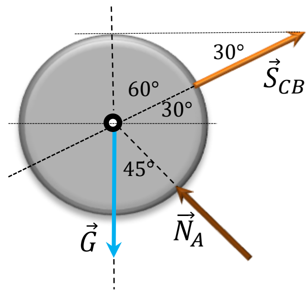
$$F_B = \frac{G}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{100\ N}{2\ \cdot 0{,}5} = 100\ \text{N}.$$

Vrednost sila dobijamo i iz trougla sila (slika 2.6.3). Kako su uglovi između sila svi po 60°, sve sile su iste (100 N, u naznačenom smeru).

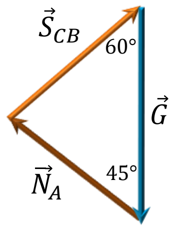
ZADATAK 7: Kugla, težine *G*, se oslonjena je na strmu (glatku) ravan u tački A i vezana je užetom BC za podlogu (slika 2.7.1). Odrediti grafičkim i analitičkim postupkom iznose reakcije strme ravni u tački A i sile u užetu BC ako je zadano: $= 500\ N$, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.



Slika 2.7.1



Slika 2.7.2



Slika 2.7.3

Rešenje:

Kao i prethodni zadaci, i ovaj se može rešiti na dva načina. Prvi korak je pravilno određivanje uglova koje sile zauzimaju sa *x* i *y* osom. Ukoliko kuglu oslobodimo od veze od podloge i zamislimo da presečemo uže, dobićemo reakciju podloge N_A i silu u užetu, S_{CB} (slika 2.7.2). Trougao sila je prikazan na slici 2.7.3, a uradićemo zadatak analitički, projektovanjem na ose.

(1) $\Sigma X_i = 0$; $S_{CB} \cdot cos\ 30° - N_A sin\ 45° = 0$,

(2) $\Sigma Y_i = 0$; $N_A cos\ 45° + S_{CB} sin\ 30° - G = 0$

Iz jednačine (1) je:

$$S_{CB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = N_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pa je:}$$

$$S_{CB} = 0{,}816\ N_A$$

Iz jednačine (2), zamenom S_{CB}, dobijamo:

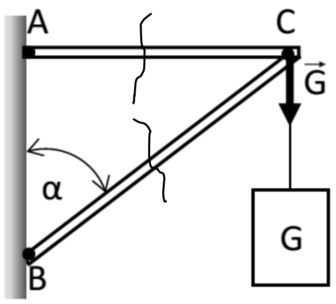
$$N_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}816\ N_A \cdot 0{,}5 = G,$$

$$N_A = \frac{G}{(0{,}705 + 0{,}408)} = \frac{500\ N}{1{,}113} = 449{,}24 \text{ N}$$

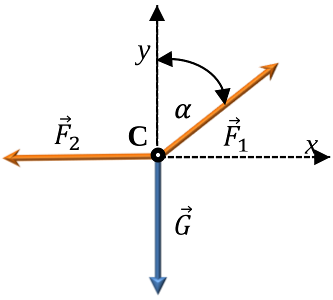
Sada je:

$$S_{CB} = 0{,}816 \cdot 449{,}24 = 366{,}58N.$$

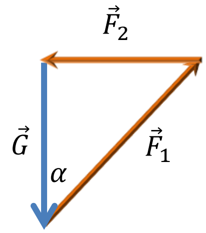
ZADATAK 8: Štapovi AB i BC su vezani za vertikalni zid i međusobno zglobovima. $\sphericalangle ABC = \alpha$ (kao na slici 2.8.1). U zglobu C obešen je teret težine G. Zanemarujući težine štapova odrediti silu koja pritiska štap BC.



Slika 2.8.1



Slika 2.8.2



Slika 2.8.3

Rešenje:

Vektorska jednačina ravnoteže, u ovom slučaju, glasi: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$. Projektovanjem ove jednačine (na osnovu slike 2.8.2) na koordinatne ose *x* i *y* dobijamo:

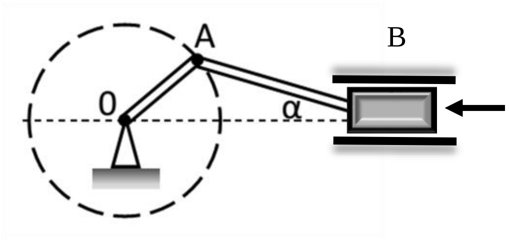
(1) $\sum X_i = 0$: $F_1 \cdot sin\alpha - F_2 = 0$

(2) $\sum Y_i = 0$: $F_1 \cdot cos\alpha - G = 0$

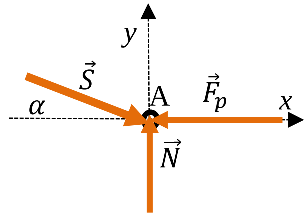
Iz jednačine (2) je $F_1 = \frac{G}{cos\ \alpha}$, a iz jednačine (1) se dobija: $F_2 = G \cdot tg\alpha$.

Zadatak se može rešiti i preko trougla sila, jednom od poznatih teorema.Sile u osloncima su jednake odnosnim silama u štapovima.

ZADATAK 9: Klipna pumpa na slici 2.9.1 potiskuje fluid nad-pritiskom od $p = 2kN/cm^2$. Princip rada je dat na slici 2.9.1. Površina klipa je A_k=50cm^2, a α_{max} =20°. Odrediti silu u štapu AB i bočnu silu klipa (zanemariti trenje i težine delova mehanizma).



Slika 2.9.1



Slika 2.9.2

Rešenje:
Odnos sila koje učestvuju u uspostavljanju ravnoteže se može videti na slici 2.9.2. Vektorska jednačina ravnoteže sučeljenih sila u tački B je:

$$\overrightarrow{F_p} + \vec{S} + \vec{N} = 0,$$

pri čemu je N- reakcija veze pri kretanju klipa kroz cilindar.
Projektovaćemo jednačinu ravnoteže na ose:
(1) $\sum X_i = 0$: $S \cdot cos\alpha - F_p = 0$
(2) $\sum Y_i = 0$: $- S \cdot sin\alpha + N = 0.$

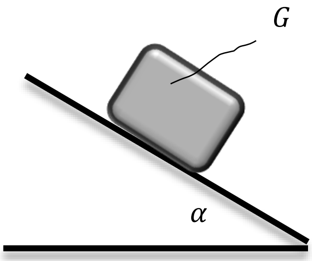
Sila $F_p = p \cdot A_k = 2 \cdot 50 = 100\ kN$.
Iz jednačine (1) je: S = $\frac{F_p}{cos\alpha}$ = $100 \cdot cos\ 20° = 106{,}42\ kN$
a iz jednačine (2) je:

$$N = S \cdot sin\alpha = \frac{F_p}{cos\alpha} \cdot sin\alpha = F_p \cdot tg\alpha = 100 \cdot tg\ 20° = 36{,}4\ kN.$$

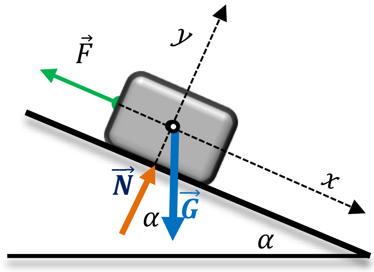
ZADATAK 10: Teret težine *G* klizi (bez trenja) po strmoj ravni koja zaklapa ugao α sa horizontalom (slika 2.10.1). Odrediti iznos sile *F* koja treba da deluje na teret paralelno strmoj ravni da bi sistem bio u ravnoteži. Odrediti silu kojom teret u ravnoteži pritiska strmu ravan.

Rešenje:
Na telo deluje sila Zemljine teže, sila *F* i reakcija podloge *N*. Da bi telo bilo u ravnoteži, sume projekcija svih sila na ose x i y treba da budu 0 (slika 2.10.2). Sila *G* sa osom *x* zaklapa ugao (90° - α).Projektovanjem sila na ose, dobijamo:

(1) $\sum X_i = 0$: $G \cdot cos\,(90° - \alpha) - F = 0$, pa sledi da je: $F = G \cdot sin\ \alpha$
(2) $\sum Y_i = 0 : N - G \cdot cos\alpha = 0$, pa sledi da je $N = G \cdot cos\ \alpha$.



Slika 2.10.1

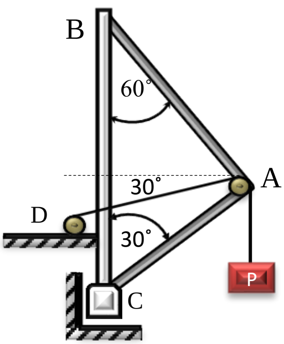


Slika 2.10.2

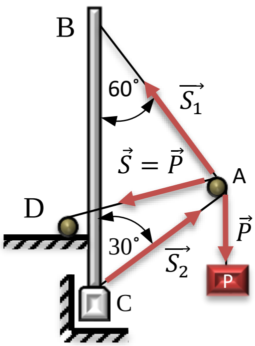
ZADATAK 11: Magacinskom dizalicom se pomoću užeta podiže teret $P = 20kN$. Uže je prebačeno preko kotura A i kotura D (slika 2.11.1). Odrediti sile S_1 i S_2 u štapovima AB i AC.

Rešenje:

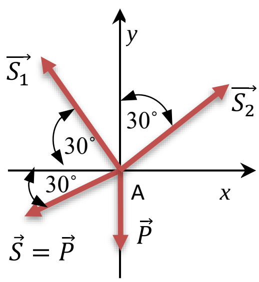
Potrebno je prvo osloboditi sistem od veza i njihov uticaj zameniti silama - reakcijama veza, odnosno nadomestiti dejstvo silama u štapovima i užetu. Sa slike 2.11.2 se vidi da imamo sučeljeni sistem sila, pojavljuju se 2 nepoznate, pa su potrebne 2 jednačine da se obezbedi da ne postoji mogućnost pomeranja sistema po osama x i y. Rešavanjem sistema od ove dve jednačine, dobijamo intenzitete traženih sila.



Slika 2.11.1



Slika 2.11.2



Slika 2.11.3

Uslovi ravnoteže, na osnovu slike 2.11.3, su:

1) $\sum X_i = 0; \quad S_2 \cdot cos60° - S_1 \cdot cos30° - P \cdot cos30° = 0$

2) $\sum Y_i = 0;\ \ -P - P \cdot cos60° + S_1 \cdot cos60° + S_2 \cdot cos\ 30° = 0$

Zamenom poznatih vrednosti, dobijamo:

1) $\sum X_i = 0;\quad S_2 \cdot 0{,}5 - S_1 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot 0{,}866 = 0$
2) $\sum Y_i = 0;\ \ -20 - 20 \cdot 0{,}5 + S_1 \cdot 0{,}5 + S_2 \cdot 0{,}866 = 0$

Iz jednačine (1) izrazićemo S_2:

$$S_2 \cdot 0{,}5 - S_1 \cdot 0{,}866 = 17{,}32$$

$$S_2 = \frac{17{,}32 + S_1 \cdot 0{,}866}{0{,}5} = 34{,}64 + 1{,}732 \cdot S_1$$

Kada se vratimo na jednačinu (2), i u nju uvrstimo dobijenu zavisnost S_2 od S_1, dobićemo tražene sile u štapovima:

$$S_1 \cdot 0{,}5 + S_2 \cdot 0{,}866 = 30$$

$$S_1 \cdot 0{,}5 + 0{,}866 \cdot (34{,}64 + 1{,}732 \cdot S_1) = 30$$

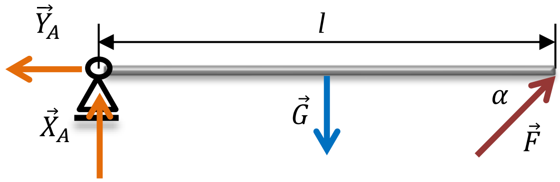
$$2 \cdot S_1 = 30 - 29{,}9$$

$$S_1 = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05kN \approx 0$$

$$S_2 = 34{,}64 + 1{,}732 \cdot 0{,}05 = 34{,}73kN$$

3. MOMENT SILE I SPREGOVI SILA

ZADATAK 1: Odrediti momente za tačke A, B i C, ako su poznate sile i reakcije veze. Šema je data na slici 3.1.



Slika 3.1

Rešenje:

$$M_A = -G \cdot \frac{l}{2} + F \cdot sin\alpha \cdot l,$$

$$M_B = +G \cdot \frac{l}{2} - Y_A \cdot l$$

$$M_C = -Y_A \cdot \frac{l}{2} + S \cdot sin\alpha \cdot \frac{l}{2}$$

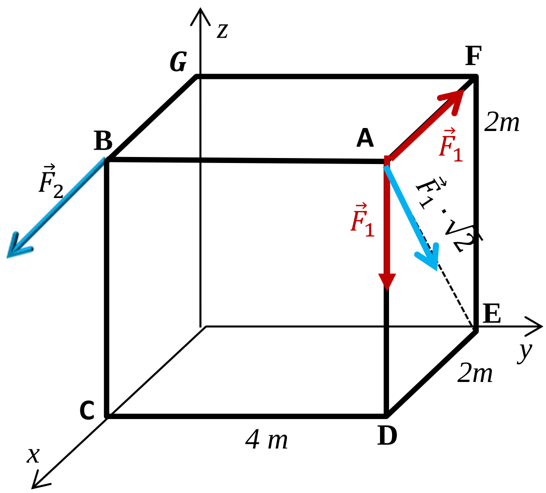
ZADATAK 2: Dve sile, sila, $\vec{F_1} \cdot \sqrt{2}$ i $\vec{F_2}$, deluju kao što je prikazano na slici 3.2. Odrediti rezultujuće momente za ose *x,y i z*, kao i rezultujući moment za tačku O. ($F_1 = 10\ kN$, $F_2 = 20\ kN$).

Rešenje:

Prvi korak u rešavanju ovog zadatka je razlaganje zadatih sila na komponente (projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema), kao i određivanje vektora položaja napadnih tačaka sila.

Kako su stranice DE i EF jednake, sila $F_1 \cdot \sqrt{2}$ zauzima uglove od po 45° u odnosu na stranice kvadra AF i AD, pa su vrednosti projekcija

$\boldsymbol{F_{1x}} = F_1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10kN = F_1$ i $F_{1z} = 10\text{kN} = F_1$.



Slika 3.2

$$\boldsymbol{F_{1x}} = -10kN$$

$$\boldsymbol{F_{1z}} = -10kN$$

$$\boldsymbol{F_2} = 20kN$$

Sa slike, projekcije sila na ose izgledaju:

$$\boldsymbol{F_1} = (-10, 0, -10)kN$$
$$\boldsymbol{F_2} = (20, 0, 0)\ kN$$

Za određivanje momenta, potrebno je odrediti vektore položaja napadne tačke sile. Zato su potrebne koordinate tačaka A i B:

$$\boldsymbol{A} = (2{,}4{,}2)m$$
$$\boldsymbol{B} = (2{,}0{,}2)m$$

Vektor položaja tačke A se određuje:

$$\vec{r}_{OA} = (x_A - x_O)\cdot\ \vec{\imath} + (y_A - y_O)\cdot\ \vec{\jmath} + (z_A - z)\cdot\ \vec{k} =$$
$$= (2-0)\cdot\ \vec{\imath} + (4-0)\cdot\ \vec{\jmath} + (2-0\ )\cdot\ \vec{k} =$$
$$= 2\cdot\ \vec{\imath} + 4\cdot\ \vec{\jmath} + 2\cdot\ \vec{k}$$

Vektor položaja tačke B se određuje:

$$\vec{r}_{OB} = (x_B - x_O)\cdot\ \vec{\imath} + (y_B - y_O)\cdot\ \vec{\jmath} + (z_B - z)\cdot\ \vec{k} =$$
$$= (2-0)\cdot\ \vec{\imath} + (0-0)\cdot\ \vec{\jmath} + (2-0\ )\cdot\ \vec{k} =$$
$$= 2\cdot\ \vec{\imath} + 0\cdot\ \vec{\jmath} + 2\cdot\ \vec{k}$$

Kako je moment sile za tačku vektor koji predstavlja vektorki proizvod vektora položaja napadne tačke i sile, proračun momenata za tačku O od strane sila $\overrightarrow{F_1}\cdot\sqrt{2}$ i $\overrightarrow{F_2}$ je:

$$M_o^{\overrightarrow{F_1}} = \vec{r}_{OA} x\, \overrightarrow{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 2 \\ -10 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}\ \cdot(-40-0) - \vec{\jmath}\ \cdot(-20+20) + \vec{k}\ \cdot(0+40) =$$
$$= -40\ \cdot\vec{\imath} + 0\ \cdot\vec{\jmath} + 40\ \cdot\vec{k}$$

$$M_o^{\overrightarrow{F_2}} = \vec{r}_{OB} x\, \overrightarrow{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\ \cdot(0) + \vec{\jmath}\ \cdot(40) + \vec{k}\ \cdot(20-0)$$
$$= -40\ \cdot\vec{\jmath}$$

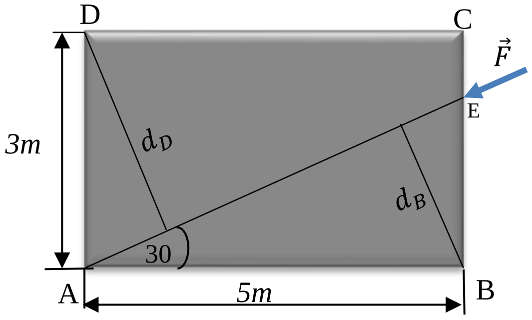
$$\vec{M}_O^{\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i} = M_x\cdot\ \vec{\imath}\ + M_y\cdot\ \vec{\jmath}\ \ + M_z\cdot\ \vec{k}\ =$$
$$= (-40+0)\cdot\ \vec{\imath}\ + (0-40)\cdot\ \vec{\jmath} + (40+0)\cdot\vec{k}$$

Dakle, momenti za ose *x*, *y* i *z* su, retrospektivno, $M_{ox} = -40\vec{\imath}$; $M_{oy} = 40\vec{\jmath}$ i $M_{oz} = 40\vec{k}$, pa je

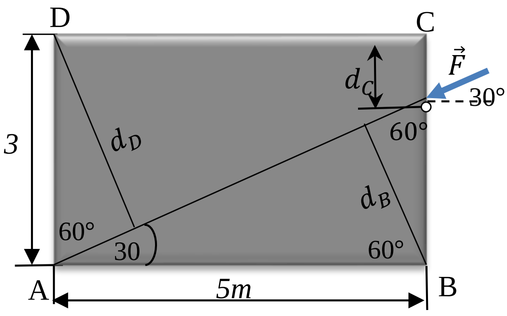
$$\left|\vec{M}_O^{\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i}\right| = \sqrt{(-40)^2 + 40^2 + 40^2}$$

$$\left|\vec{M}_O^{\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i}\right| = 40\sqrt{3}\ kNm$$

ZADATAK 3: Ukoliko na ploču oblika kao na slici 3.3.1 deluje sila $F = 200\ N$, odrediti momente sile za tačke A, B, C i D.



Slika 3.3.1



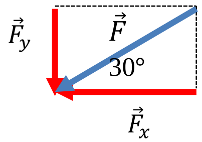
Slika 3.3.2

Rešenje:

Da bismo izračunali vrednosti momenta, potrebni su nam kraci sile. Kako napadna linija sile F prolazi kroz tačku A, moment za tu tačku je jednak nuli.Kako je dat ugao od 30°, spuštanjem normale na pravac dejstva sile dobijamo krake dejstva sile, $d_C\ i\ d_B$ (slika 3.3.2):

$d_D = \overline{AD} \cdot \cos 30° = 3 \cdot 0{,}867 = 2{,}6\ m$

$d_B = \overline{AB} \cdot sin\ 30° = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\ m$



Slika 3.3.3

Odgovarajući momenti su za tačke A, B i D su:

$M_A^{\vec{F}} = F.d_A = -200 \cdot 0 = 0\ Nm$

$M_B^{\vec{F}} = +F.d_B = 200 \cdot 2{,}5 = 500Nm$

$M_D^{\vec{F}} = +F.d_D = 200 \cdot 2{,}6 = 520\ Nm$

Što se tiče tačke C, najlakše ćemo moment za nju izračunati ako silu F projektujemo na ose *x i y* (slika 3.3.3). Pravac komponente F_y prolazi kroz tačku C i nema moment, dok komponenta F_x ima moment, ali je potrebno odrediti vrednost kraka d_C.

$$d_C = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{BC} - \overline{AB} \cdot tg30° = 3 - 5 \cdot 0{,}58 = 0{,}1m$$

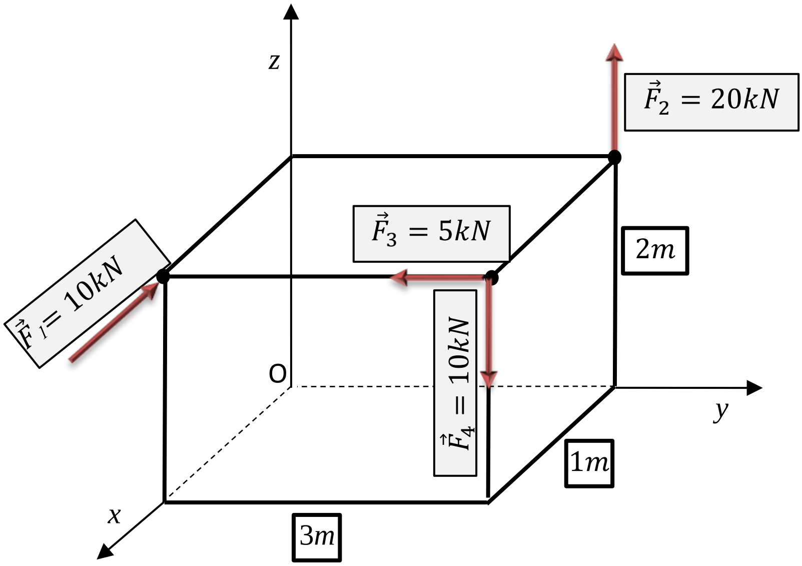
Projekcija $F_x = F \cdot cos30° = -200 \cdot 0{,}867 = 173{,}4N$

Sada je: $M_C^{\vec{F}} = -F_x \cdot d_C = -173{,}4 \cdot 0{,}1 = -17{,}34Nm.$

ZADATAK 4: Odrediti rezultujući moment za ose i rezultujući moment za tačku O za sile koje deluju kao na slici 3.4.

Rešenje:

Zadatak možemo rešiti primenom matrica ili možemo posmatrati sile odnosno njihove projekcije na ose i definisati momente za ose i tačku O uz pomoć pravila desne ruke, vodeći računa da moment ne grade one komponente sile koja prolazi kroz nelu tačku, a da moment za neku osu ne gradi ona komponenta sile čiji se pravac a se seče sa tom osom.



Slika 3.4

$M_x^{F_1} = 0 -$ zato što je sila F_1 paralelna Ox osi.
$M_y^{F_1} = -F_1 \cdot 2m = -20kNm$
$M_z^{F_1} = 0 -$zato što pravac sile F_1 seče Oz osu

$M_x^{F_2} = F_2 \cdot 3m = 60kNm$
$M_y^{F_2} = 0 -$ zato što sila F_2 seče osu
$M_z^{F_2} = 0 -$ zato što je sila F_2 paralelna Oz osi

$M_x^{F_3} = F_3 \cdot 2m = 10kNm$
$M_y^{F_3} = 0 -$ zato što je sila F_3 paralena O_y osi
$M_z^{F_3} = -F_3 \cdot 1m = -5kNm$

$M_x^{F_4} = -F_4 \cdot 3m = -30kNm$
$M_y^{F_4} = +F_4 \cdot 1m = 10kNm$
$M_z^{F_4} = 0 -$ zato što je sila F_4 paralelna osi O_z

$+\circlearrowleft$
$-\circlearrowright$
matematički smerovi

$$M_o = \sqrt{{M_x}^2 + {M_y}^2 + {M_z}^2}$$

$$M_o = \sqrt{40^2 + (-10)^2 + (-5)^2}$$

$$M_o = \sqrt{1725} = 41{,}53kNm$$

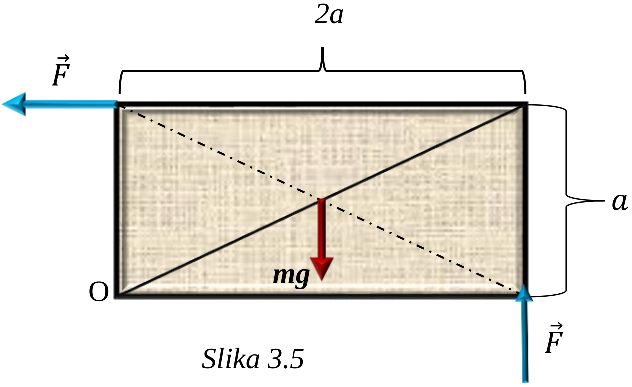
$$M_x = \sum M_x^{F_i} = 0 + 60 + 10 - 30 = 40kNm$$

$$M_y = \sum M_y^{F_i} = -20 + 0 + 0 + 10kNm = -10kNm$$

$$M_z = \sum M_z^{F_i} = 0 + 0 - 5 + 0 = -5kNm$$

ZADATAK 5: Ukoliko na telo oblika pravougaonika (kao na slici 3.5) i mase *m=5kg* čija je kraća stranica a =*2m*, a duža $2a$, deluje sila $F = 105N$, odrediti sumu momenata za tačku O.Ubrzanje $g = 10\frac{m}{s^2}$.

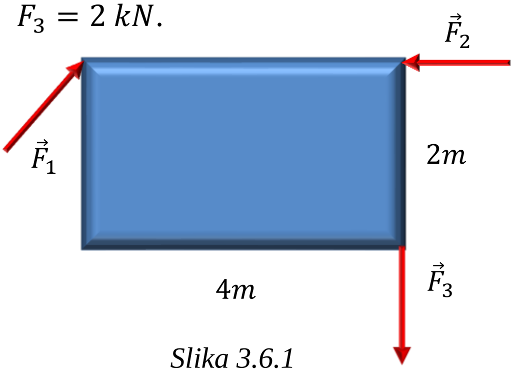
Rešenje:



Slika 3.5

$$\sum M_0 = +F \cdot a - mg \cdot \frac{2a}{2} + F \cdot 2a = a\,(3F - mg)$$
$$\sum M_o = 2 \cdot (3 \cdot 105 - 5 \cdot 10) = 530Nm$$

ZADATAK 6: Pokazati da se sistem sila, koji deluje na pravougaonu ploču, (slika 3.6.1) svodi na spreg i naći taj moment, ako je $F_1 = 2\sqrt{2}\,kN$, $F_2 = 2\,kN$ i $F_3 = 2\,kN$.



Slika 3.6.1

Rešenje:

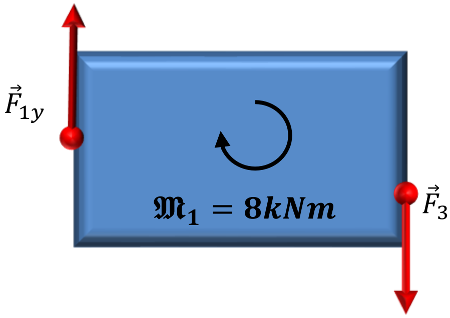
Projektovanjem sila na ose *x* i *y*, dobijamo da je suma svih sila na *x* osu jednaka nuli, kao i suma projekcija na y osu.

$$F_{1x} = F_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = +2\,kN$$
$$F_{1y} = F_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = +2\,kN$$
$$F_{2x} = -F_2 = -\,2\,kN$$
$$F_{2y} = 0$$

$$F_{3x} = 0$$
$$F_{3y} = -F_3 = -2kN$$

Kada se pogledaju vrednosti ovih projekcija, vidi se da imamo pojavu jednog sprega sila – par sila $\vec{F}_{1y}$ i $\vec{F}_{3y}$, dok se sile $\vec{F}_{1x}$ i $\vec{F}_{2x}$, kao kolinearne sile, međusobno poništavaju. Spreg sila gradi moment sprega sila i on je:

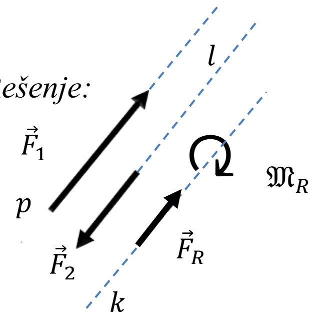
$\mathfrak{M}_1 = -2\,kN \cdot 4m = -8kNm$ (negativan matematički smer, slika 3.6.2)



Slika 3.6.2

ZADATAK 7: Odrediti rezultujući moment datih sila $\vec{F}_1 = 5kN$ i $\vec{F}_2 = 3\,kN$, predstavljene na slici 3.7 za pravu k, ako je rastojanje između paralelnih pravih *1m*.

Rešenje:



Slika 3.7

Prenošenjem sila F_1 i F_2 na pravac k, *dobija se rezultanta* F_R i svaka sila zbog paralelnog prenošenja generiše po jedan moment sprega.

$$F_R = 5 - 3 = 2kN - u\ prikazanom\ smeru$$

$$\mathfrak{M}_R = -5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -2kNm$$

ZADATAK 8: Data je sila $\vec{F} = 5\,\vec{\imath} + 7\,\vec{\jmath} + 9\vec{k}$. Njena napadna tačka A ima koordinate A (3,4,5). Odrediti vrednost momenta za svaku osu, kao i za tačku 0.

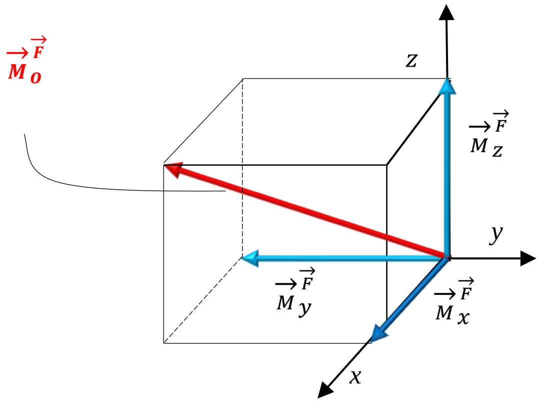
Rešenje:

Poznate su nam koordinate napadne tačke i sile koja u njoj deluje: $A(3,4,5)$ i $\vec{F}= 5\,\vec{\imath} + 7\,\vec{\jmath} + 9\vec{k}$. Po definiciji moment sile za tačku O jednak je vektorskom proizvodu vektora položaja napadne tačke i date sile, odnosno:

$$\vec{M}_0^{\vec{F}} = \vec{r}\ x\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (36-35)\,\vec{\imath} - (27-25)\vec{\jmath} + (21-20)\,\vec{k} =$$
$$= 1 \cdot \vec{\imath} - 2 \cdot \vec{\jmath} + 1 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{M}_{0x}^{\vec{F}} = 1\ Nm,\ \vec{M}_{0y}^{\vec{F}} = -2\ Nm,\ \vec{M}_{0z}^{\vec{F}} = 1\ Nm$$
$$|\vec{M}_0^{\vec{F}}| = \sqrt{Mox^2 + Moy^2 + Moz^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\ |\vec{M}_0^{\vec{F}}| = 2{,}45\ Nm$$

Vizuelni prikaz dobijenog rešenja je dat na slici 3.8.



Slika 3.8

ZADATAK 9: Odrediti vektor rezultujućeg sprega koji zamenjuje sledeći sistem zadatih spregova:

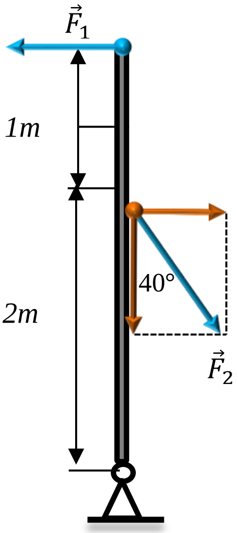
- $\vec{\mathfrak{M}}_1 = 2\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 3\vec{k}\ (kNm)$
- $\vec{\mathfrak{M}}_2 = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 1\vec{k}\ (kNm)$
- $\vec{\mathfrak{M}}_3 = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}\ (kNm)$
- $\vec{\mathfrak{M}}_4 = 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}\ (kNm)$.

Rešenje:

$$\mathfrak{M}_{Rx} = \sum \mathfrak{M}_{ix} = 2 - 2 + 3 + 0 = 3$$
$$\mathfrak{M}_{Ry} = \sum \mathfrak{M}_{iy} = -1 + 3 - 2 + 2 = 2$$
$$\mathfrak{M}_{Rz} = \sum \mathfrak{M}_{iz} = 3 + 1 - 2 - 2 = 0$$
$$\vec{\mathfrak{M}}_R = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

$$|\vec{\mathfrak{M}}_R| = \sqrt{\mathfrak{M}_{Rx}{}^2 + \mathfrak{M}_{Ry}{}^2 + \mathfrak{M}_{Rz}{}^2}$$
$$|\vec{\mathfrak{M}}_R| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13} = 3{,}61 kNm$$

ZADATAK 10: Na laki štap deluju sile kao na slici 3.10. Ako su sile $F_1 = 3kN$ i $F_2 = 5kN$ Odrediti rezultujući moment datih sila, za tačku A, za slučaj predstavljen na slici.



Slika 3.10

Rešenje:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A^{\vec{F}_1} + \vec{M}_A^{\vec{F}_2}$$

Kako sile deluju u istoj ravni, onda je:

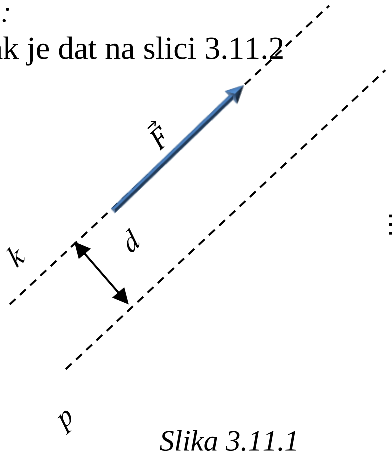
$$M_A = M_A^{F_1} + M_A^{F_2}$$

$$\sum M_A = +F_1 \cdot (1+2) - F_2 \cdot cos 50° \cdot 2$$

$$\sum M_A = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 0{,}64 \cdot 2$$
$$\sum M_A = -0{,}4 kNm \curvearrowleft$$

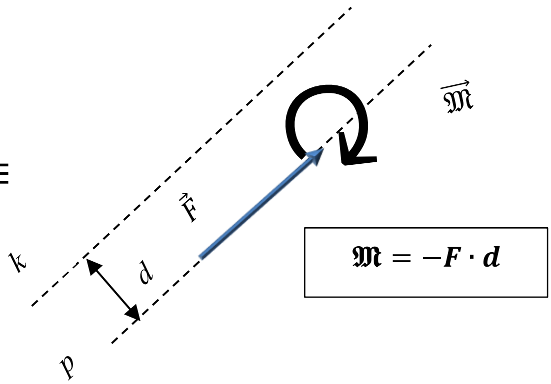
ZADATAK 11: Data je sila F na pravcu *k* (slika 3.11.1). Uraditi prenošenje sile na zadat pravac *p*.

Rešenje:
Postupak je dat na slici 3.11.2



Slika 3.11.1

$\equiv$



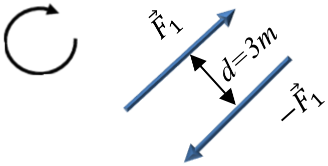
Slika 3.11.2

ZADATAK 12: Spregu sila datom na slici 3.12.1 nacrtaj:

a.) ekvivalentni i

b.) suprotni spreg,

ako je $F = 10kN$.



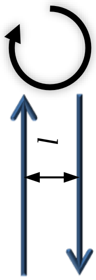
Slika 3.12.1

Rešenje:

Na slici 3.12.1 je dat spreg, za koji treba izračunati intenzitet i odrediti smer. Intenzitet zadatog sprega je: $\mathfrak{M}_1 = -F_1 \cdot d$= - 10· 3 $= 30kNm$.

Na slici 3.12.2 prikazan je jedan od mogućih ekvivalentnih spregova, a na 3.12.3 jedan od mogućih suprotnih spregova.

a.)



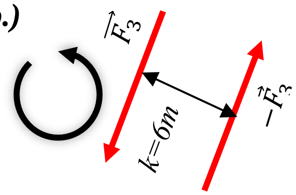
Slika 3.12.2

l=1,5*m*

$F_2 = 2F_1$= 20*kN*

$\mathfrak{M}_2 = -F_2 \cdot l$= -20· 1,5 $= -30kNm$

b.)

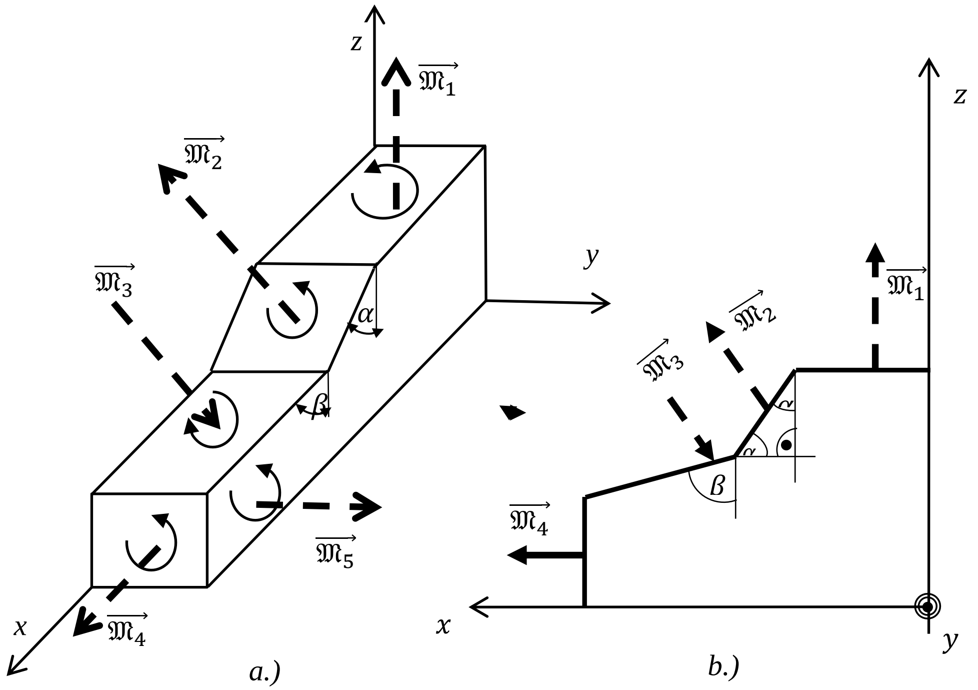


Slika 3.12.3

$F_3 = \frac{F}{2}$= 5*kN*

$\mathfrak{M}_3 = +F_3 \cdot k$ =5· 6 $= 30kNm$

ZADATAK 13: Za zadat sistem spregova na slici 3.13 pod a, odrediti rezultujući spreg. Podaci su: $\mathfrak{M}_1 = 1kNm;$ $\mathfrak{M}_2 = 2\,kNm;$ $\mathfrak{M}_3 = 2kNm;$ $\mathfrak{M}_4 = 1kNm;$ $\mathfrak{M}_5 = 2kNm;$ α=45°; β =60°.



Slika 3.13: a.) Spregovi u prostoru i b.) spregovi pogled sa strane u ravni zOx

Rešenje:

Da bismo došli do projekcija spregova na ose, potreban nam je pogled sa strane, što je prikazano na slici 3.12 pod b).

$\mathfrak{M}_{1z} = \mathfrak{M}_1 = 1kNm$

$\mathfrak{M}_{2x}=\mathfrak{M}_2 \cdot \cos\alpha = 2 \cdot cos45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}kNm$

$\mathfrak{M}_{2z}=\mathfrak{M}_2 \cdot sin\alpha = 2 \cdot sin45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}kNm$

$\mathfrak{M}_{3x}=-\mathfrak{M}_3 \cdot cos\beta = -2 \cdot cos60° = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1kNm$

$\mathfrak{M}_{3z}=-\mathfrak{M}_3 \cdot sin\beta = -2 \cdot \sin 60° = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}kNm$

$\mathfrak{M}_{4x} = 1kNm,$ $\mathfrak{M}_{4y}$=0 kNm, $\mathfrak{M}_{5y}$= 2 kNm

$\mathfrak{M}_{Rx}$= $0+\sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}kNm = 1{,}41kNm$

$\mathfrak{M}_{Ry}=\mathfrak{M}_{5y}$=2 kNm, $\mathfrak{M}_{Rz}=\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = 0{,}68\ kNm$

$$\mathfrak{M} = \sqrt{{\mathfrak{M}_{Rx}}^2 + {\mathfrak{M}_{Ry}}^2 + {\mathfrak{M}_{Rz}}^2} = \sqrt{1{,}41^2 + 2^2 + 0{,}68^2} = \sqrt{6{,}4505} = 2{,}54kNm$$

$$cos\alpha = \frac{1{,}41}{2{,}54} = 0{,}56;\ \ cos\beta = \frac{2}{2{,}54} = 0{,}79;\ \ cos\gamma = \frac{0{,}68}{2{,}54} = 0{,}27.$$

4. USLOVI RAVNOTEŽE PROIZVOLJNOG SISTEMA SILA I SPREGOVA

ZADATAK 1: Odrediti reakciju veze u uklještenju (slika 4.1), ako je štap mase $30\ kg$ i dužine $2m$ uklješten u zid u tački A.

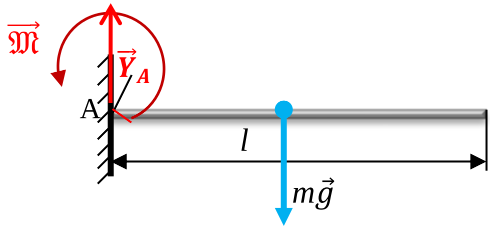
Rešenje:

$$\sum Y_i = 0:\ Y_A - mg = 0$$

$$Y_A = 30 \cdot 9{,}81 = 294{,}3\ N$$

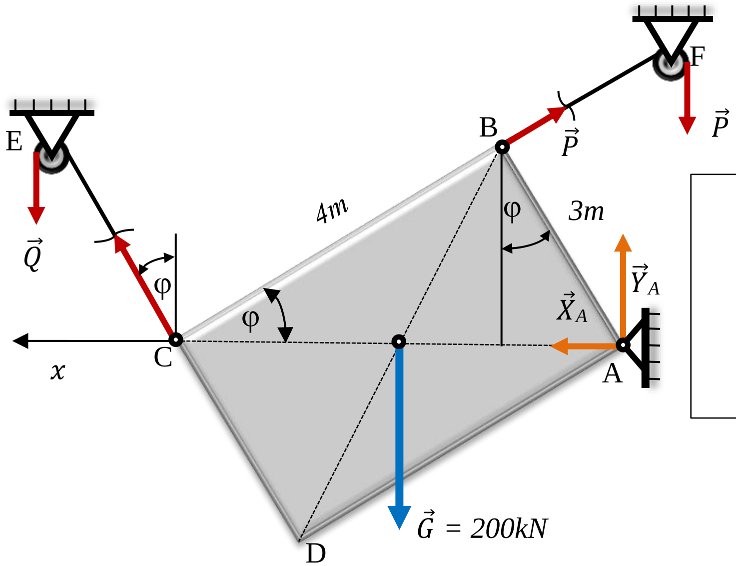
$$\sum M_A = 0:\ \mathfrak{M} - mg \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\mathfrak{M} = 30kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{2m}{2} = 294{,}3\ Nm$$



Slika 4.1

ZADATAK 2: Homogena pravougaona ploča $ABCD$, težine Q, prikazana na slici 4.2 može se obrtati u vertikalnoj ravni oko nepomičnog zgloba A. Ploča se održava u datom ravnotežnom položaju pomoću užadi koja su prebačena preko glatkih nepokretnih koturova E i F i zategnuta silama. Odrediti intenzitet sile P i komponente otpora zgloba A, kada je $G = 200\ kN$, levo uže zategnuto silom Q od $50\ [kN]$ i $cos\ \varphi\ = \frac{4}{5}$.



$$cos\varphi = \frac{4}{5}$$

$$sin\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\overline{AC} = d = 5m$$

Slika 4.2

Rešenje:

Oslobodićemo ploču od veza zmišljenim presecanjem užadi $\overline{CE}$ i $\overline{BF}$. Na mestima preseka pojavljuju se sile $Q' = Q$ i $P' = P$. Nakon oslobađanja od veza uočavamo da postoje 3 nepoznate,pa je zato potrebno kreirati 3 jednačine za 3 uslova ravnoteže.

1) $\sum X_i = 0 : Q \cdot \sin\varphi - P \cdot \cos\varphi + X_A = 0$
2) $\sum Y_i = 0 : Q \cdot \cos\varphi + P \cdot \sin\varphi - Q + Y_A = 0$

Da bi se postavila treća, momentna jednačina za izabranu tačku A, potrebno je odrediti krakove sila Q' i P'. Na osnovu slike 4.2, tražena odstojanja su:

- $\overline{AC} = 4 \cdot \cos\varphi + 3 \cdot \sin\varphi = 4\frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 5m$ i
- $\overline{AB} = 3m.$

Sada postavljamo treću jednačinu za treći uslov ravnoteže:
3) $\sum M_A = 0 : Q \cos\varphi \cdot AC + P \cdot AB - G \cdot 2{,}5 = 0$

Iz jednačine (3), nakon zamene vrednosti, dobijamo silu P:

$$50 \cdot 4 + P \cdot 3 - 200 \cdot 2{,}5 = 0$$

odnosno : $P = 100\ [kN]$

Iz jednačine (1): $X_A = -50 \cdot \frac{3}{5} + 100 \cdot \frac{4}{5};\quad X_A = 50\ [kN]$

Iz jednačine (2): $Y_A = 200 - 50 \cdot \frac{4}{5} - 100 \cdot \frac{3}{5};\ Y_A = 100\ [kN]$

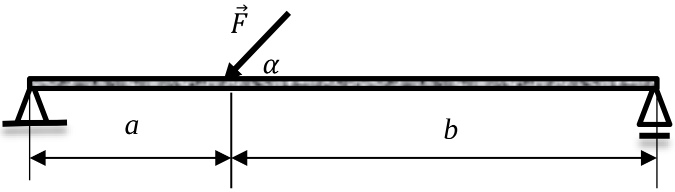
Ukupna reakcija veze u osloncu A je:

$F_A = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{50^2 + 100^2} = 50\sqrt{1^2 + 2^2} = 50\sqrt{5}$ [kN]

$tg\,\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{100}{50} = 2$

$\alpha = arctg\,2 = 63°30`$; $F_A = 111{,}80\ [kN]$.

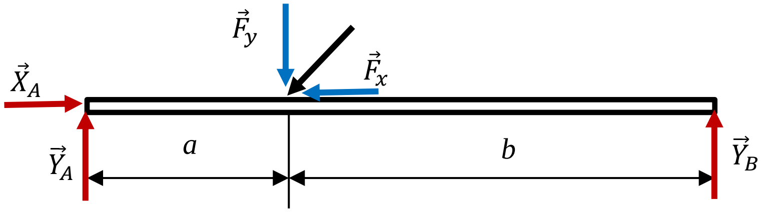
ZADATAK 3: Za laku gredu na slici 4.3.1 , odrediti reakcije veza u funkciji sile F.



Slika 4.3.1

<u>Rešenje:</u>Oslobađanjem od veza (slika 4.3.2), u osloncima se javljaju 3 nepoznate: dve u nepokretnom (A) i jedna u pokretnom osloncu (B).

Potrebne su tri jednačine da bismo definisali uslov ravnoteže. Postavljamo te jednačine:



Slika 4.3.2

$$(1) \sum X_i = 0: \; X_A - F\sin\alpha = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0: Y_A - F\sin\alpha + Y_B = 0$$

$$(3) \sum M_A^{F_i} = 0: \; -F\sin\alpha \cdot a + Y_B(a+b) = 0$$

Iz jednačine (1) je: $X_A = F \cdot a\cos\alpha$.

Iz jednačine (3) je: $Y_B(a+b) = F \cdot a\sin\alpha$

$$Y_B = F\frac{a}{a+b} \cdot \sin\alpha$$

Iz jednačine (2) je: $Y_A = F \cdot \sin\alpha - Y_B$

$$Y_A = F \cdot \sin\alpha - F\frac{a}{a+b} \cdot \sin\alpha$$

$$Y_A = F \cdot \sin\alpha\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)$$

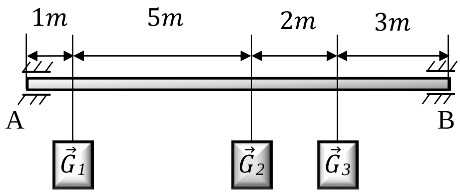
$$Y_A = F \cdot \frac{a+b-a}{a+b} \cdot \sin\alpha$$

$$Y_A = F \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \sin\alpha$$

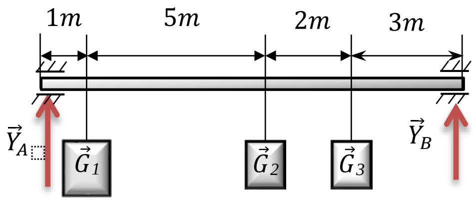
ZADATAK 4: Analitičkim postupkom odrediti reakcije u osloncima grede na kojoj se nalaze tereti: $G_1 = 10\,kN$, $G_2 = 40kN$ *i* $G_3 = 10\,kN$ (slika 4.4.1).

Rešenje:

Prvo ucrtavamo reakcije u osloncima A i B, pretpostavljajući smerove sila Y_A i Y_B (slika 4.4.2). Kako nemamo aktivne sile koje deluju duž x ose, neće biti ni reakcija u osloncima duž x ose. Uslovi ravnoteže glase:



Slika 4.4.1



Slika 4.4.2

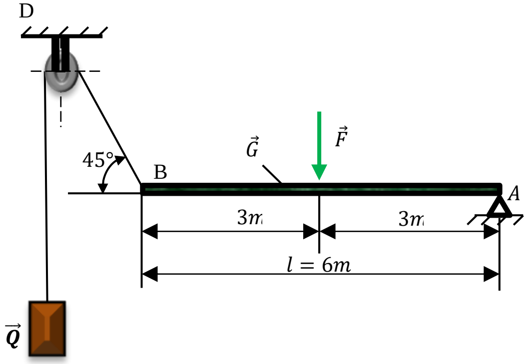
$$(1)\sum Y_i = 0 \rightarrow \; Y_A - G_1 - G_2 - G_3 + Y_B = 0$$
$$Y_A + Y_B = \; 10 + 40 + 10$$
$$Y_A + Y_B = 60 \; kN$$
$$(2) \;\sum M_A = 0 \rightarrow \; -G_1 \cdot 1 - G_2 \cdot 6 - G_3 \cdot 8 + Y_B \cdot 11 = 0$$

$$Y_B = \frac{10 \cdot 1 + 40 \cdot 6 + 8 \cdot 10}{11} = \frac{330}{11} = 30kN$$

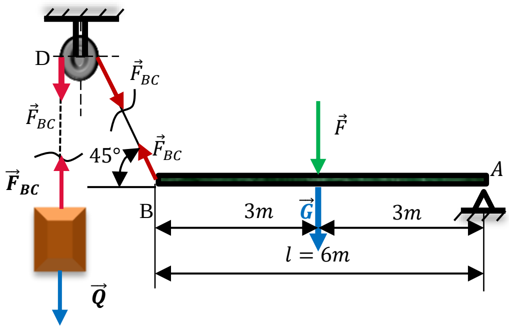
Iz jednačine (1) je: $Y_A = 60 - 30 = 30kN$

ZADATAK 5: Štap *AB* (slika 4.5.1), dužine *6m*, težine *G=6kN*, opterećen je na sredini vertikalnom silom $\vec{F}$. Krajem A, štap je vezan nepokretnim cilindričnim zglobom ,a krajem B, vezan je lakim neistegljivim užetom BC, koje je pod uglom od 45° prebačeno preko kotura D. Na kraju C užeta, okačen je teret težine $Q=10\sqrt{2}kN$. Odrediti silu u užetu BC, silu $\vec{F}$ i reakciju u nepokretnom cilindričnom zglobu A, ako se dati sistem nalazi u stanju ravnoteže.

Rešenje:
Oslobađamo od veza teret Q i gredu i unosimo reakcije veza (slika 4.5.2)
Posebno ćemo posmatrati teret Q, i posebno gredu.



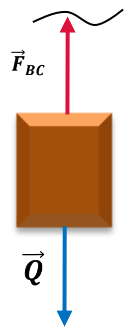
Slika 4.5.1



Slika 4.5.2

I: Uslov ravnoteže tereta (slika 4.5.3):

$$F_{BC} = Q = 10\sqrt{2}kN$$



Slika 4.5.3

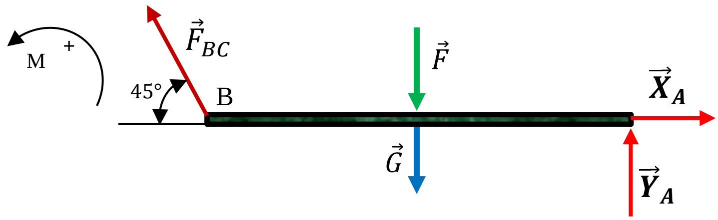
II: Uslov ravnoteže grede (slike 4.5.3 i 4.5.4):

1) $\sum X_i = 0 \rightarrow -F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{x}_A = 0$

2) $\sum Y_i = 0 \rightarrow F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F - \sigma + \mathrm{y}_A = 0$

3) $\sum M_A = 0 \rightarrow -F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l + \mathrm{F} \cdot \frac{l}{2} + \sigma \cdot \frac{l}{2} = 0$

Iz jednačine (1) je : $\mathrm{X}_A = F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} kN = 10kN$



Slika 4.5.4

Iz jednačine (3), zamenom vrednosti izraz dobija oblik:

$$-10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} kN \cdot 6m + F \cdot 3m + 6kN \cdot 3m = 0$$

$$F \cdot 3m = 10kN \cdot 6m - 18kNm$$
$$F \cdot 3m = (60 - 18)Nm$$
$$F = \frac{42Nm}{3m} = 14kN$$

Iz jednačine (2) je: $F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F - \sigma + \mathrm{Y}_A = 0$

$$\mathrm{Y}_A = F - F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma$$

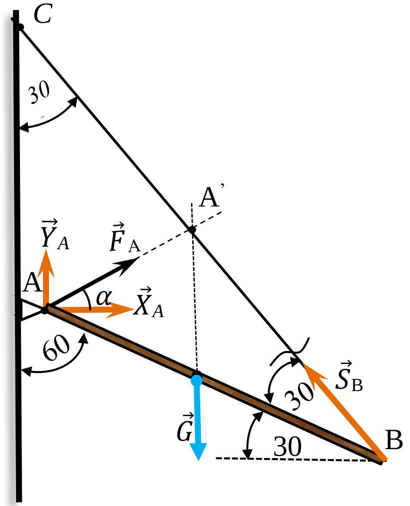
$$Y_A = F - 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} kN + 6kN$$
$$Y = 14kN - 10kN + 6kN$$
$$Y_A = 10kN$$

$$F_A = \sqrt{{X_A}^2 + {Y_A}^2}$$
$$F_A = \sqrt{(10kN)^2 + (10kN)^2}$$

$F_A = 10\sqrt{2}kN$

ZADATAK 6: Homogeni prizmatični štap $\overline{AB}$ vezan je krajem A za zid, a kraj B pridržava se užetom BC (slika 4.6). Osa štapa zaklapa sa vertikalom ugao od 60°. Ugao ABC= 30°. Težina štapa iznosi $G = 2$[kN]. Odrediti brojnu vrednost, pravac i smer otpora A i silu u užetu S_B.

Rešenje:
Oslobađanjem štapa AB od veza (kao na slici), dobijamo 3 nepoznate, pa su nam potrebne 3 jednačine.



Slika 4.6

$$(1) \sum X_i = 0 : X_A - S_B \cos 60^\circ = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0 : Y_A - G + S_B \sin 60^\circ = 0$$

$$(3) \sum M_A = 0 : S_B \cdot \overline{AA'} - G\frac{\overline{AB}}{2}\sin 60^\circ = 0$$

$$S_B = \frac{G}{2}\frac{\overline{AB}}{\overline{AA'}}\sin 60^\circ$$

$$\overline{AA'} = \overline{AB} \cdot \sin 30^\circ$$

$$S_B = \frac{G}{2}\frac{\overline{AB}\sin 60^\circ}{\overline{AB}\sin 30^\circ} = \frac{G}{2}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_B = G\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}[\text{kN}]$$

Iz jednačine (1) je: $X_A = S_B \cos 60^\circ = G\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow X_A = G\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Iz jednačine (2) je: $Y_A = G - S_B \sin 60^\circ = G - G\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Y_A = \frac{G}{4}$

Ukupna reakcija u tački A je sada:

$$F_A = \sqrt{{X_A}^2 + {Y_A}^2} = \sqrt{\left(G\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{G}{4}\right)^2} = \frac{G}{4}\sqrt{3+1} \Rightarrow \boldsymbol{F_A} = \frac{1}{2}G = 1[\text{kN}]$$

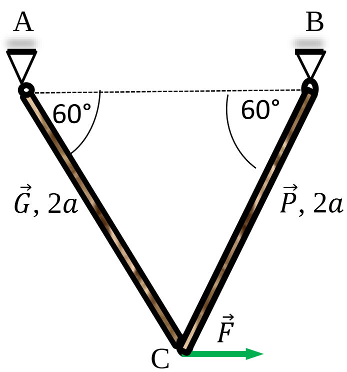
$$tg\alpha = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{\frac{G}{4}}{\frac{G\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \alpha = 30°$$

ZADATAK 7: O dva nepokretna oslonca obešena su (kao na slici 4.7) dva štapa jednake dužine, koja su u tački C zglobno spojena. U tački C na konstrukciju deluje horizontalna sila F. Štapovi su težine G i P, a uglovi su dati na slici. Odredite reakcije veza u osloncima A i B?

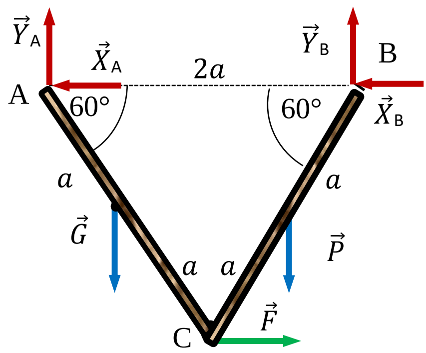
Rešenje:
Oslobađanje od spoljašnjih veza štapova dato je na slici 4.7.2. Pojavljuju se 4 nepoznate veličine. Možemo napisati 3 jednačine na osnou slike:

$$(1)\sum M_A^{F_i} = 0:\ -G\cdot\frac{a}{2} - P\cdot\frac{3}{2}a + F\cdot a\sqrt{3} + Y_B\cdot 2a = 0$$

$$Y_B = \frac{G}{4} + \frac{3}{4}P - \frac{\sqrt{3}}{2}F.$$



Slika 4.7.1



Slika 4.7.2

$$(2)\sum Y_i = Y_A + Y_B - G - P = 0$$

$$Y_A = \frac{3}{4}G + \frac{P}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$(3)\sum X_i = 0:\ X_B - X_A + F = 0$$

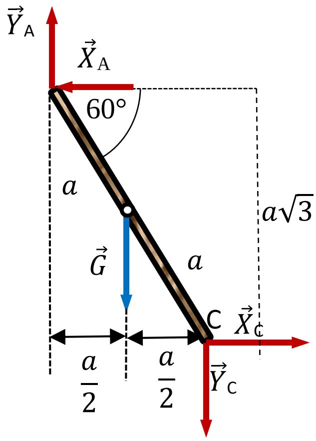
$$X_B = X_A - F$$

Kako nam je potrebna još jedna jednačina, razdvojićemo štapove AC i CB (slike 4.7.3 i 4.7.4). U tački C nam se pojavljuju dodatne dve sile X_C i Y_C.
Da bismo izbegli izračunavanje ovih sila u tački C, napisaćemo momentnu jednačinu za tačku C, bilo za štap AC, bilo za BC (tako eliminišemo učestvovanje novih sila u jednačinama, jer je moment za sile koje prolaze kroz tačku jednak nuli).
Postavljanjem momentnu jednačine za štap AC (slika 4.7.3):

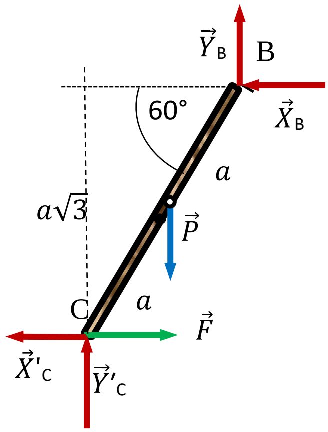
$$(4)\sum M_{Ci} = 0:\ G\cdot\frac{a}{2} - Y_A\cdot a + X_A\cdot\sqrt{3a} = 0$$

Sada, zamenom sile Y_A dobijene iz (2) dobijamo:

$$X_A = \frac{\sqrt{3}(G+P) + 6F}{12}$$



Slika 4.7.3



Slika 4.7.4

Uvrštavanjem dobijenog izraza za X_A u jednačinu (3), dobijamo:

$$X_B = \frac{-\sqrt{3}(G+P)+6F}{12}$$

Tako su određene komponente reakcija u osloncima A i B.

ZADATAK 8: Homogeni štap $\overline{\text{AB}}$, dužine $2L$, težine G, postavljen je u unutrašnjosti glatkog polukružnog prstena, poluprečnika $R = L$, u vertikalnoj ravni. Na kom rastojanju $\overline{\text{AE}}$ treba dejstvovati silom $F = 2G$, upravno na štap, da bi zauzeo položaj ravnoteže tako da se kraj A štapa nalazi na istoj vertikali sa centrom polukružnog prstena (slika 4.8)? Odrediti reakcije u tačkama oslanjanja štapa.

Rešenje:

Postavićemo jednačine ravnoteže (problem ima tri nepoznate, pa nam trebaju tri jednačine).

(1) $\sum Xi = 0: \; X_A = G \sin 45° \;=> X_A = G\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$X_A = F_A \sin 45° = F_A \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa sledi: $F_A = G$, a $Y_A = X_A = G\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sum Yi = 0: \; Y_A - G\cos 45° - 2G + F_D = 0$

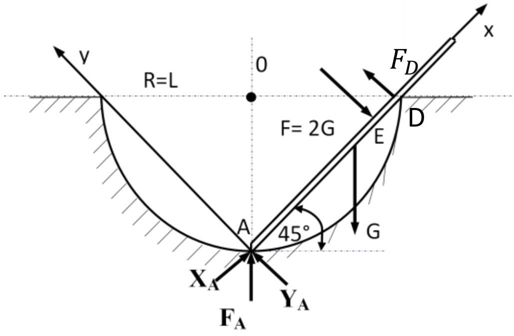
$$G\frac{\sqrt{2}}{2} - Y_A + 2G = F_D$$

$$F_D = G \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) = 2G$$

(3) $\sum M_A = 0$: $\quad G \cdot L \cdot cos45° + 2 \cdot G \cdot \overline{AE} - F_D \cdot L \cdot \sqrt{2} = 0$

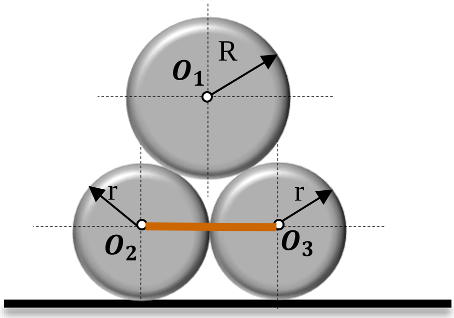
$$G \cdot L\frac{\sqrt{2}}{2} + 2G \cdot \overline{AE} - 2GL\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2}L + 4 \cdot \overline{AE} - 4\sqrt{2}L = 0$$
$$4 \cdot \overline{AE} = 3\sqrt{2} \cdot L$$
$$\overline{AE} = \frac{3\sqrt{2}}{4}L = 1{,}056\ L$$

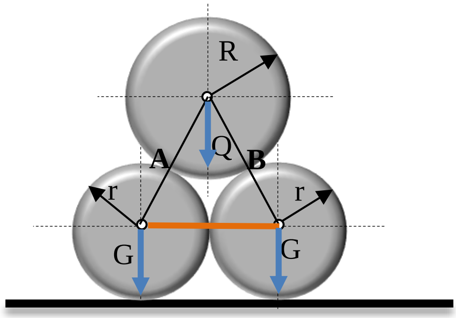


Slika 4.8

ZADATAK 9: Na dva jednaka homogena cilindra radijusa *r* i težine *G* (slika 4.9.1), koji leže na horizontalnoj ravni i koji su vezani u centrima sa nerastegljivim užetom dužine *2r*, leži treći cilindar radijusa *R* i težine *Q*. Odrediti silu u užetu, pritisak cilindara na ravninu i uzajamni pritisak cilindara. Trenje se zanemaruje.



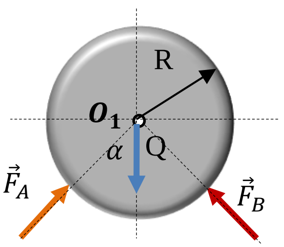
Slika 4.9.1



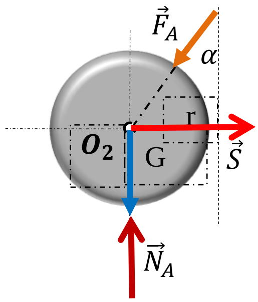
Slika 4.9.2

Rešenje:

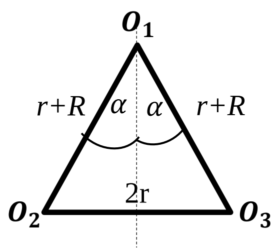
Da bismo odredili vrednosti traženih veličina, potrebno je da rastavimo sistem na sastavne elemente i postavimo jednačine ravnoteže.Na slici 4.9.3 prikazan je cilindar poluprečnika *R*, a na slici 4.8.4 levi cilindar poluprečnika *r*.



Slika 4.9.3



Slika 4.9.4



Slika 4.9.5

Kod velikog cilindra imamo dve reakcije veze od strane malih cilindara. Uslovi ravnoteže za veliki cilindar su:

(1) $\sum X_i = 0$: $F_A sin\alpha - F_B sin\alpha = 0$

(2) $\sum Y_i = 0$: $F_A cos\alpha + F_B cos\alpha - Q = 0$

Iz jednačine (1) je $F_A = F_B$, pa je iz (2):

$$2F_B cos\alpha = Q, \text{ odnosno } F_B = F_A = \frac{Q}{2cos\alpha}.$$

Na osnovu slike 4.9.5 je: $(r + R) \cdot sin\alpha = 2r$, pa je: $sin\alpha = \frac{2r}{r+R}$.

Koristeći trigonometrijsku jednakost: $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$, dobija se da je:

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2+2Rr}}{R+r}.$$

Sada je: $F_B = F_A = \frac{Q\cdot(r+R)}{2\sqrt{R^2+2Rr}}$.

Na osnovu slike 4.9.4 pišemo uslove ravnoteže za levi mali cilindar:

(3) $\sum X_i = 0: S - F_A sin\alpha = 0$

(4) $\sum Y_i = 0$: $N_A - F_A cos\alpha - G = 0$

Iz jednačine (3), koristeći dobijenu vrednost za F_A, dobijamo:

$$S = F_A sin\alpha = \frac{Q\cdot(r+R)}{2\sqrt{R^{2+2Rr}}}\cdot sin\alpha = \frac{Q\cdot(r+R)}{2\sqrt{R^2+2Rr}}\cdot\frac{2r}{r+R} = \frac{Q\cdot r}{2\sqrt{R^2+2Rr}}$$

Iz jednačine (4) je:

$$N_A = G + F_A cos\alpha = G + \frac{Q\cdot(r+R)}{2\sqrt{R^2+2Rr}}\cdot\frac{\sqrt{R^2+2Rr}}{R+r} = G + \frac{Q}{2}$$

Reakcija (kod desnog manjeg cilindra) $N_B = N_A$.

ZADATAK 10: Poznate su veličine: P, G, a, $\mathfrak{M} = \frac{Ga}{4}$. Odredite sve reakcije veze i $\overline{DK}$ (slika 4.10.1).

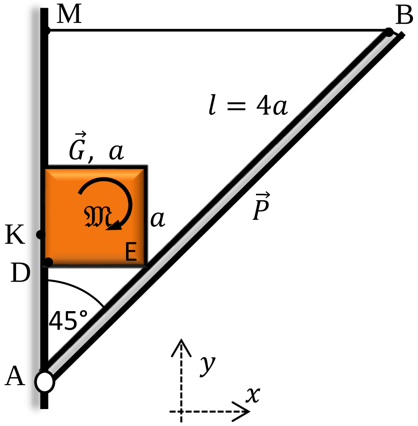
Rešenje:

Vršimo odvajanje delova, uvodimo unutrašnje sile i za svaki deo posebno pišemo jednačne ravnoteže. Prve tri jednačine pišemo na osnovu slike 4.10.4:

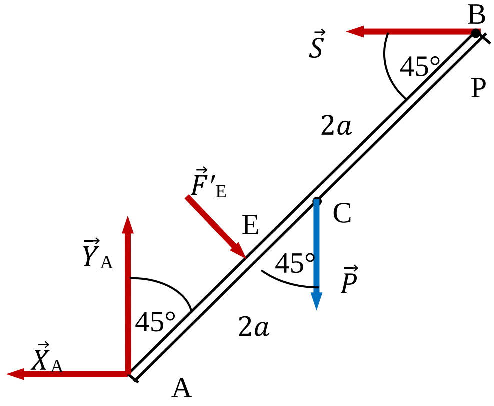
(1) $\sum Y_i = F_E \sin 45° - G = 0$, odakle je: $F_E = \sqrt{2}G$,

(2) $\sum X_i = F_K - F_E \cos 45° = 0$, pa je: $F_K = G$,

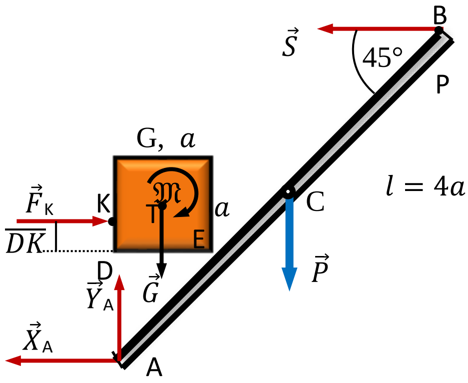
(3) $\sum M_{Ei} = G\frac{a}{2} - F_K\overline{DK} - \mathfrak{M} = 0$, pa je: $\overline{DK} = \frac{a}{4}$.



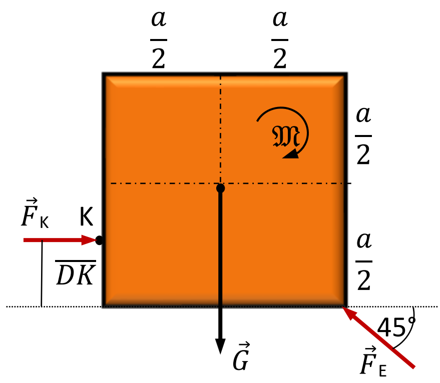
Slika 4.10.1



Slika 4.10.2



Slika 4.10.3



Slika 4.10.4

Četvrtu jednačinu pišemo na osnovu slike 4.10.2, pri čemu je $\overline{AE} = \sqrt{2}a$:

$$(4) \sum M_{Ai} = S \cdot 4a\frac{\sqrt{2}}{2} - P \cdot 2a\frac{\sqrt{2}}{2} - F_E \cdot \overline{AE} = 0 => S = \frac{P}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}G$$

Petu i šestu jednačinu pišemo na osnovu slike 4.10.3:

$$(5) \sum X_i = -X_A + F_K - S = 0 => \ X_A = G - \frac{\sqrt{2}}{2}G - \frac{P}{2}$$

$$(6) \sum Y_i = Y_A - P - G = 0 => Y_A = P + G$$

ZADATAK 11: Kugla težine $G = N$ i poluprečnika R se sa jedne strane oslanja na zid, a sa druge na štap koji je uklješten o zid u tački A (slika 4.11.2). Potrebno je odrediti reakcije veza. Poznate veličine: P, G, R i α. Odtredite sve reakcije veza?

Rešenje:

Oslobađanjem sistema od veza (slika 4.11.3) vidimo da imamo 4 nepoznate. Odvajanjem kugle od štapa, javlja se još jedna nepoznata (slika 4.11.1). To zanči da nam je potrebno 5 jednačina da rešimo problem. Na osnovu slika, postavljaju se jednačine ravnoteže.

Prve dve jednačine pišemo na osnovu slike 4.11.1:

$$(1) \sum Y_i = 0: F_E \sin\alpha - G = 0 \rightarrow F_E = \frac{G}{\sin\alpha}$$

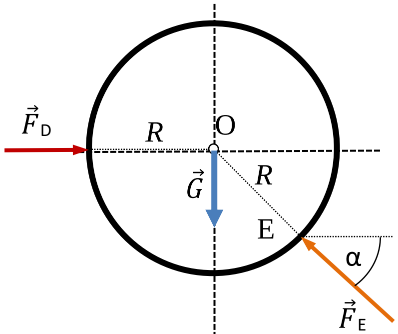
$$(2) \sum X_i = F_D - F_E \cos\alpha = 0 => F_D = G \cdot ctg\alpha$$

Treću jednačinu pišemo na osnovu slike 4.11.3:

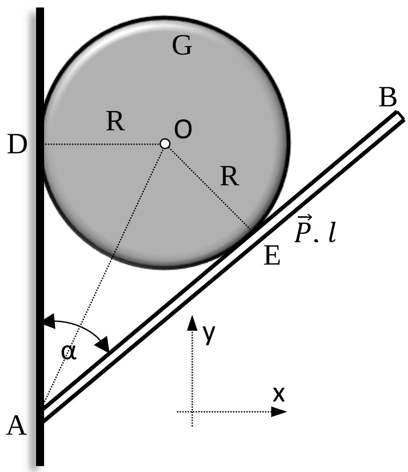
$$(3) \sum M_{Ai} = -P \cdot \frac{l}{2} \sin\alpha - F_E \cdot \overline{AE} + \mathfrak{M}_A = 0$$

pri čemu je:

$$\overline{AE} = R \cot\frac{\alpha}{2} => \mathfrak{M}_A = \frac{Pl}{2}\sin\alpha + \frac{GR}{\sin\alpha}\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$$



Slika 4.11.1

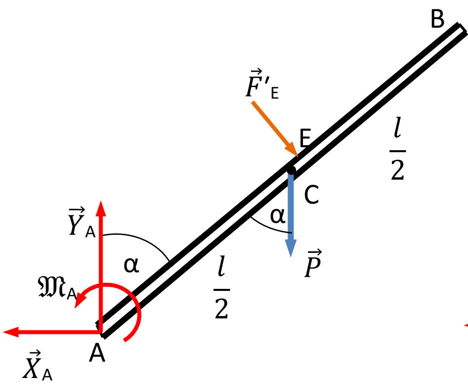


Slika 4.11.2

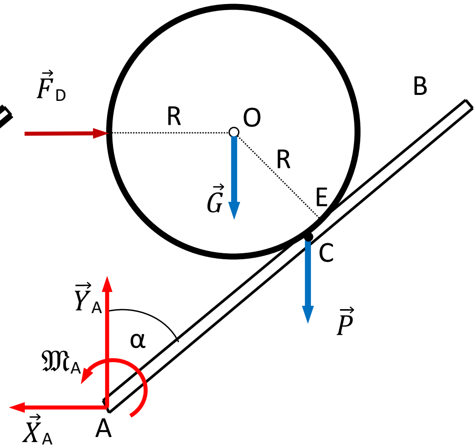
Četvrtu i petu jednačinu pišemo na osnovu slike 4.11.4:

$$(4) \sum X_i = 0: -X_A + F_D = 0 => X_A = G\,\text{ctg}\,\alpha$$

$$(5) \sum Y_i = 0: Y_A - P - G = 0 => Y_A = P + G$$



Slika 4.11.3

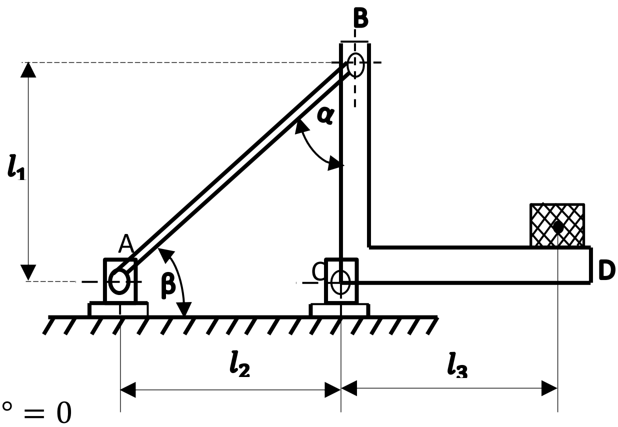


Slika 4.11.4

ZADATAK 12: Platforma prema slici 4.12.1 vezana je zglobno osnovicom u tački C i lakim štapom $\overline{AB}$ u tački B. Odrediti ukupnu reakciju zglobne veze (slika 4.12.1) i silu u štapu, ako je maksimalna težina tereta koji platforma treba da nosi: $Q_{max} = 20kN$. Poznate su duzine $l_1 = l_2 = 4m$ i $l_3 = 3m$.

Rešenje:

Posmatranjem slike, radimo presecanje lakog štapa, unosimo reakcije veze u oslonac C i postavljamo jednačine ravnoteže.



Slika 4.12.1

Na osnovu slike 4.12.2, vidimo da imamo tri nepoznate i zato pišemo 3 jednačine:

(1) $\sum X_i = 0 \rightarrow X_c$ - Scos 45°=0

(2) $\sum Y_i = 0 \rightarrow Y_c - Q - S \cdot \sin 45° = 0$

(3) $\sum M_c^{F_i} = 0 \rightarrow \quad S \cos 45° \cdot l_1 - Q \cdot l_3 = 0$

Iz jednačinne (3) je:

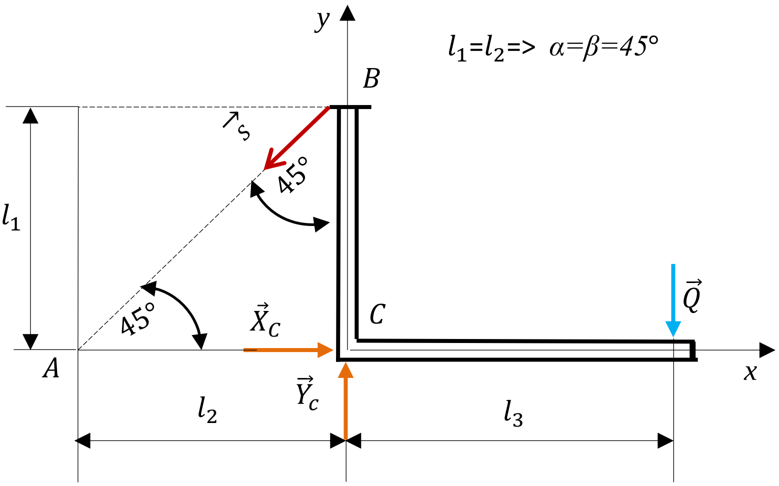
$S \cdot l_1 . \cos 45° = Q \cdot l_3$

$S = Q \cdot \frac{l_3}{l_1 \cos 45°} = 20 \cdot 10^3 \cdot \frac{3m}{4m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \qquad 15\sqrt{2} \cdot 10^3 N$

Iz jednačine (1) je:

$X_c = S cos\, 45°$

$X_c = 15\sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{N} = 15 \cdot 10^3\ N$



Slika 4.12.2

Iz jednačine (2) je:

$$Y_c = S \cdot \cos 45° + \mathrm{Q}$$
$$Y_c = X_C + Q$$
$$Y_c = 15kN \cdot 10^3 + 20N \cdot 10^3$$
$$Y_c = 35 \cdot 10^3 N$$

Ukupna vrednost sile reakcije u tački C je:

$$F_c = \sqrt{X_A{}^2 + Y_A{}^2}$$
$$F_c = \sqrt{(15)^2 + (35)^2}\mathrm{kN}$$
$$F_c = \sqrt{225 + 1225}\mathrm{kN}$$
$$F_c = 38{,}08kN$$

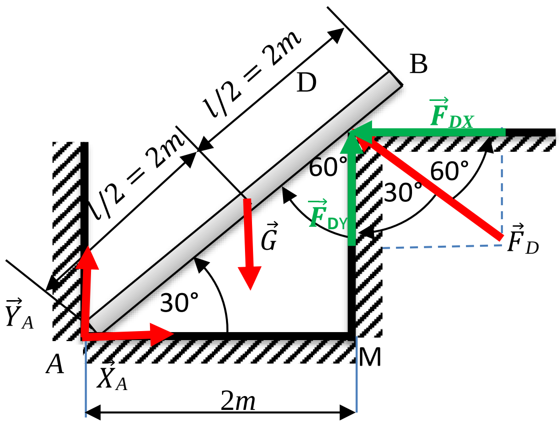
ZADATAK 13: Na gredu, datoj na slici 4.13.1, deluju sile F_1 = *500 N*,F_2 =*300 N*. Zadato je: *a = 2 m*, *b = 3m*, *c = 1 m*. Krajem A greda se oslanja na ispust poda, dok se njena tačka D oslanja na ispust pravog ugla. Greda gradi ugao od 30° sa horizontalom, dok je dužina $\overline{AM} = 2m$. Odrediti reakcije u tačkama A i D.

Rešenje:
U tački A površine dodira su nepomične ravni veze. U tački D površina dodira je strma ravan.
Na osnovu slike 4.13.2 pišemo uslove ravnoteže:

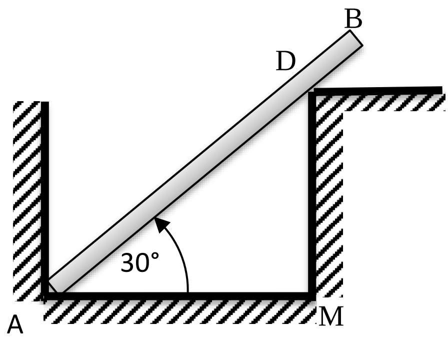
(1) $\sum X_i = 0$: $X_A - F_D \cdot cos60° = 0$

(2) $\sum Y_i = 0$: $Y_A - G + F_D \cdot cos30° = 0$

(3) $\sum M_A = 0: \; -G \cdot \frac{l}{2} \cdot cos30° + F_D \cdot \overline{AD} = 0.$



Slika 4.13.1



Slika 4.13.2

Sa slike 4.13.1 je:

$$\Delta ADM \rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = \frac{\overline{AM}}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\; m$$

Sada iz jednačina (3), (1) i (2) dobijamo F_D, X_A i Y_A:

$$(3) \Rightarrow \; F_D \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} - G \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$F_D \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = G\sqrt{3}$$

$$F_D = G\frac{3}{4} = 40 \cdot \frac{3}{4}$$

$$F_D = 30 \;\; daN$$

$$(1) \; \Rightarrow \; X_A = F_D \cos 60^\circ$$

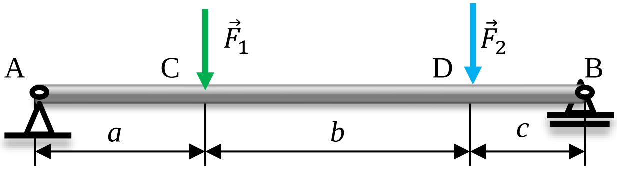
$$X_A = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \; daN$$

$$(2) \; \Rightarrow \; Y_A = G - F_D \cos 30^\circ$$

$$Y_A = 40 - 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Y_A = 14 \; daN$$

ZADATAK 14: Na gredu AB deluju sile F_1 i F_2 kao na slici. Ukoliko su sile poznate ($F_1 = 400\ N$, $F_2 = 350\ N$), kao i rastojanja $a, b\ i\ c$ ($a = 2m, b = 3m, c = 1m$), odrediti reakcije veze u osloncima.



Slika 4.14.1

Rešenje:

Postavljamo 3 jednačine uslova ravnoteže:

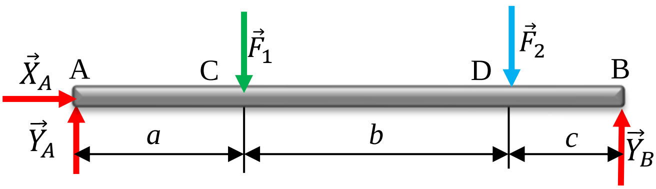
(1) $\sum X_i = 0$: $X_A = 0$,

(2) $\sum Y_i = 0$: $Y_A - F_1 - F_2 + Y_B = 0$

(3) $\sum M_i = 0$: $Y_B(a+b+c) - F_1 a - F_2(a+b) = 0$

Iz j-ne (3) dobijamo da je: $Y_B = \frac{F_1 a + F_2(a+b)}{(a+b+c)} = \frac{400 \cdot 2 + 350 \cdot 5}{6} = 425\ N$

Iz j-ne (2) je: $Y_A = F_1 + F_2 - Y_B = 400 + 350 - 425 = 325\ N$.

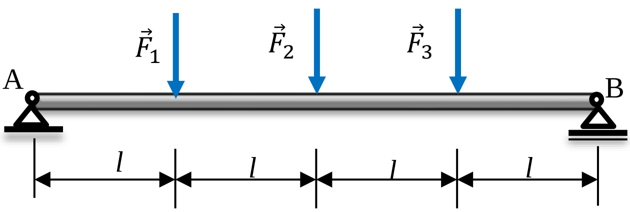


Slika 4.14.2

ZADATAK 15: Na horizontalnu gredu AB deluje paralelni sistem sila u ravni sastavljen od tri sile F_1 , F_2 i F_3 (slika 4.15.1). Potrebno je redukovati zadati paralelni sistem sila u tačke A i B. Kolike su reakcije oslonaca? Poznato je: $a = 2$ m, F_1=300 N , F_2 = 100 N , F_3 = 200 N. Zapisati u vektorskom obliku rezultujuću silu i momente redukcije.

Rešenje:

Sile koje deluju na gredu su paralelne i istog smera, pa se može odrediti rezultanta F_R.



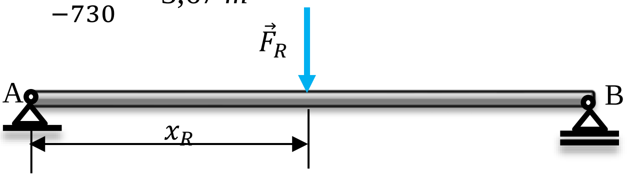
Slika 4.15.1

Po intenzitetu $F_R = 300 + 100 + 200 = 600\ N$.

Napadna tačka sile se određuje iz jednakosti momenta rezultujuće sile sa zbirom momenata pripadajućih sila za proizvoljno izabranu tačku, s tim što se mora imati smer/znak koji odgovara smeru koji pravi rezultanta.

Određivanje kraka sile x_r vršimo uz pomoć slika 14.5.1 i 4.15.2.
$-F_R \cdot x_r =$ - $F_1 \cdot l - F_2 \cdot 2l - F_3 \cdot 3l = 300 \cdot 2 - 100 \cdot 2 \cdot 2 - 200 \cdot 3 \cdot 2 =$ - 2200 Nm

Odavde je: $x_R = \frac{-2820}{-730} = 3{,}67\ m$



Slika 4.15.2

Za redukciju rezultante (glavnog vektora) u tačku A, prenosimo rezultantu $F_R = 600N\ i$ već izračunati moment $M_A = 2200\ Nm$ sa naznačenim smerom (negativni matematički smer – u smeru kretanja kazaljke na satu) jeste glavni moment sila za tačku A. Vidi se na slici 4.15.3. Zapis u vektorskom obliku je:

$\vec{F}_R = -730 \cdot \vec{j}$, $\vec{M}_A = -2820 \cdot \vec{k}$ (međusobno normalni vektori)

Slika 4.15.3

Što se tiče tačke B, vrednost glavnog momenta (redukcije) dobijamo:

$$M_B = F_r \cdot (4l\ \text{-}3{,}67) = 600 \cdot (8\ \text{-}3{,}67) = 2598\ Nm.$$

Vektorski zapis rezultata redukcije u tačku B je:

$$\vec{F}_R = -600 \cdot \vec{j},\ \vec{M}_B = +2598 \cdot \vec{k}$$

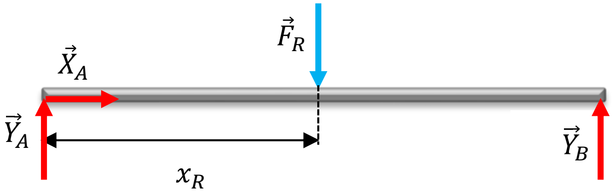
Što se tiče određivanja reakcija veza, postavljamo rezultantu (glavni vektor) na proračunato mesto (kako smo to već odredili da smanjimo broj koraka u proračunu) i unosimo reakcije veze (pretpostavljenih smerova).

Postavljamo jednačine ravnoteže:

(1) $\sum X_i = 0$: $X_A = 0$,

(2) $\sum Y_i = 0$: $Y_A + Y_B - F_R = 0$

(3) $\sum M_{Ai} = 0$: $- F_R \cdot x_R + Y_B \cdot 4a = 0$



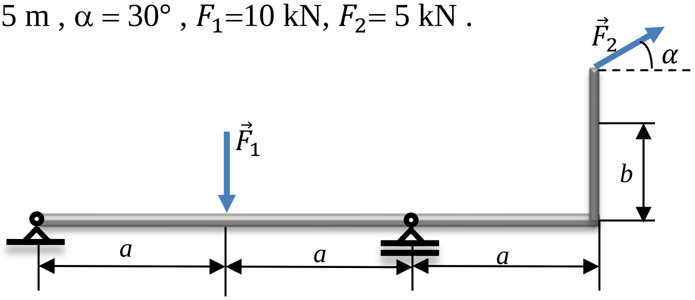
Slika 4.15.4

Iz jednačine (3) dobijamo da je: $Y_B = \frac{F_R \cdot x_R}{4a} = \frac{600 \cdot 3{,}67}{8} = 275{,}25 N.$

Iz jednačine (2) potom dobijamo: $Y_A = F_R - Y_B = 600 - 275{,}25 = 324{,}75\ N.$

ZADATAK 16: Greda (sa zakrivljenjem), zanemarive težine, opterećena je koncentriranim silama F_1 I F_2 i vezana za podlogu nepomičnim osloncem u tački A i pomičnim osloncem u tački B (*slika 4.16.1*). Potrebno je odrediti reakcije oslonaca A i B. Zadato je:

$a = 2$ m , $b = 1{,}5$ m , $\alpha = 30°$, F_1=10 kN, F_2= 5 kN .



Slika 4.16.1

Rešenje:

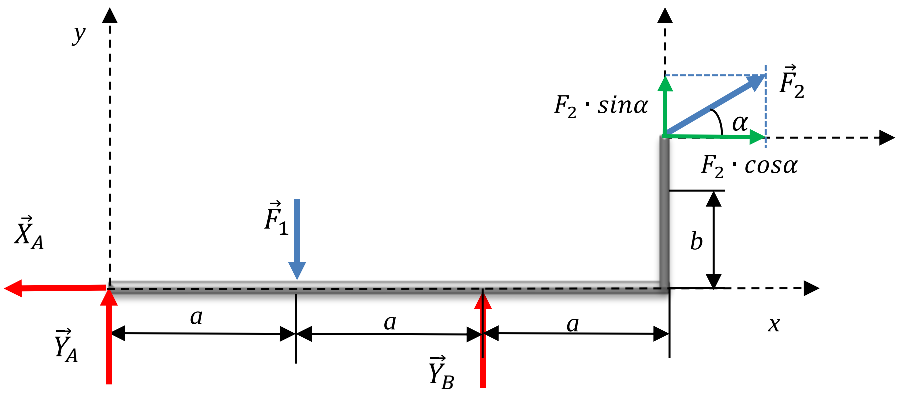
Prvo ćemo osloboditi gredu od veza i ucrtati odgovarajuće reakcije veze na šemi: Silu F_2 ćemo razložiti na njene komponente (na projekcije na *x* i *y* osu). Da bi sistem bio u ravnoteži, potrebno je da budu zadovoljena tri izabrana uslova ravnoteže:

(1) $\sum X_i = 0$: $- X_A + F_2 \cos 30° = 0$,

(2) $\sum Y_i = 0$: $Y_A + Y_B + F_2 \sin 30° - F_1 = 0$

(3) $\sum M_0 = 0{:} -\ F_1 \cdot a\ + Y_B \cdot 2a + F_2 \cdot \sin 30 \cdot 3a -\ F_2 \cos 30° \cdot 1{,}5 = 0$

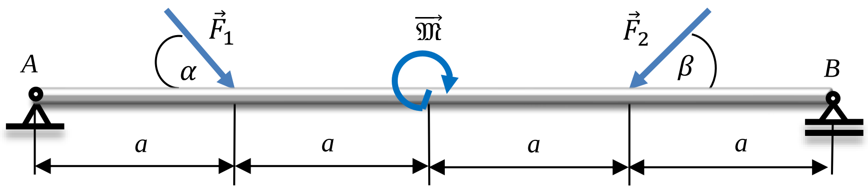
Iz jednačine (1) dobijamo da je $X_A = \ F_2 \cos 30° = 5 \cdot 0{,}867 = 4{,}335\ kN$
Iz jednačine (3) dobijamo da je $Y_B\ = \frac{F_1.a - F_2 \cdot \sin 30 \cdot 3a + \ F_2 \cos 30° \cdot b}{2a}$, pa nakon kalkulacije dobijamo: $Y_B\ = 1{,}80\ kN$.



Slika 4.16.2

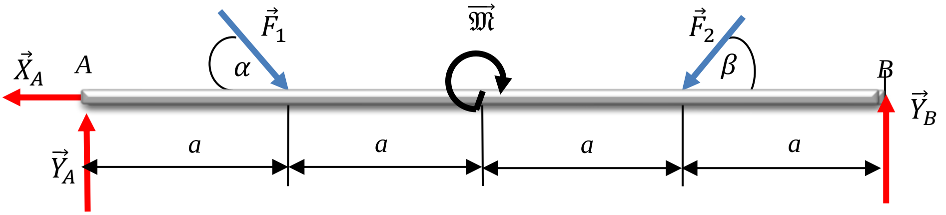
Iz jednačine (2) je:
$Y_A\ = \ F_1 -\ Y_B\ - F_2 \sin 30° = 10 - 1{,}80 - 5 \cdot 0{,}5$, pa je: $Y_A = 5{,}7\ kN$.
Sila otpora (veze) oslonca A je: $F_A\ = \ \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 5{,}98\ kN$.

ZADATAK 17: Ravni puni nosač opterećen je sa dve koncentrirane sile (F_1 i F_2) i spregom sila momenta M . Nosač je za podlogu vezan nepomičnim osloncem u tački A i pomičnim sloncem u tački B. Ukoliko su zadate vrednosti: $F_1 = 8\ kN, F_2 = 4\ kN$, $\mathfrak{M} =$ 10 kNm, a odstojanja $a\ =\ 2\ m$ i ugao $\alpha\ =\ 60°$, $\beta = 30°$odrediti reakcije u osloncima kako bi sistem bio u ravnoteži.



Slika 4.17.1

Rešenje:
Oslobađanjem nosača od veza dobijaju se 2 reakcije veze u osloncu A ($X_A i\ Y_A$) i jedna u osloncu B (Y_B).



Slika 4.17.2

Postavljamo jednačine ravnoteže:

(1) $\sum X_i = 0: -X_A + F_1 \cos 60° - F_2 cos30° = 0$
(2) $\sum Y_i = 0: Y_A - F_1 \sin 60° - F_2 sin30° + Y_B = 0$
(3) $\sum M_A = 0:\ Y_B \cdot 4a - F_2.sin30° \cdot 3a - \mathfrak{M} - F_1 \cdot \sin 60° \cdot a = 0$

Iz jednačine (1) dobijamo da je:

$X_A = F_1 \cos 60° - F_2 \cdot cos30° = 8 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}54\ kN$

Iz jednačine (3) dobijamo da je:

$$Y_B = \frac{F_2 \cdot sin30°3 \cdot a + \mathfrak{M} + F_1 \sin 60° \cdot a}{4a} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{1{,}73}{2} \cdot 2 + 10}{4 \cdot 2} = 4{,}48\ kN$$

Sada iz jednačine (2) dobijamo da je: $Y_A = F_1 \sin 60° + F_2 - Y_B = 4{,}64\ kN$.

ZADATAK 18: Masa dizalice bez protivtega iznosi 50 t a težište je na pravoj udaljenoj 1,5 m od desne šine (slika 4.18). Nosivost dizalice je 25 t. Ako je masa protiv-tega 33 t, odrediti rastojanje x, da bi dizalica bila stabilna.

Rešenje:

U graničnom slučaju, tj. u trenutku kada počne prevrtanje, reakcija u osloncu B je $FB = 0$, pa iz uslova ravnoteže:

$$M_A^{Gp} = M_A^{Gd} + M_A^{Gt}$$

Masa dizalice: $m_d = 50t = 50 \cdot 10^3 kg \quad G_d = 50 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 = 490{,}5\ kN$

Masa protivtega: $m_p = 33t = 33 \cdot 10^3 kg \quad G_p = 33 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 = 323\ kN$

Masa tereta: $m_t = 25t = 25 \cdot 10^3 kg \quad G_t = 25 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 = 245\ kN$

Granični slučaj: F_B=0

$\sum M_A = 0; \quad M_A^{Gp} = M_A^{Gd} + M_A^{Gt}$

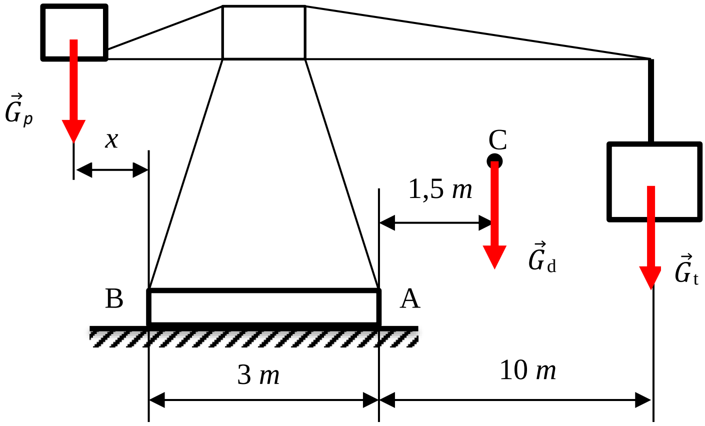
$$G_p \cdot (3+x) = G_d \cdot 1{,}5 + G_t \cdot 10$$

$$323 \cdot (3+x) = 490{,}5 \cdot 1{,}5 + 245 \cdot 10$$

$$3 + x = \frac{735{,}75 + 2450}{323}$$

$$x = 9{,}86 - 3$$

$$x = 6{,}86\ m$$



Slika 4.18.1

ZADATAK 19: Homogenu pravougaonu ploču ABCD ($AB = 4a, BC = 5a$), težine G, u položaju ravnoteže održavaju sferni zglob A, cilindrično ležište B i štap CE zanemarljive težine. Štap je svojim krajevima vezan zglobovima – krajem C za ploču, a krajem E za nepomičnu tačku $E(0,0,7a)$. Ploča je nagnuta u odnosu na horizontalnu ravan A_{xy}, tako da je tačka C na visini $z_C = 3a$. Ako u tački D dejstvuju sila F ($F = G$) upravno na ploču, i u ravni ploče spreg sila momenta $M = Ga$, odrediti reakcije svih veza.

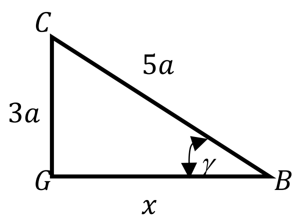
Rešenje:

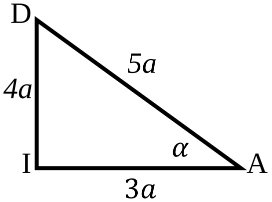
Prvo ćemo na osnovu slike 4.19.1 rešiti geometrijske probleme.

$$sin\gamma = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$$

$$cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$x = 4a$$



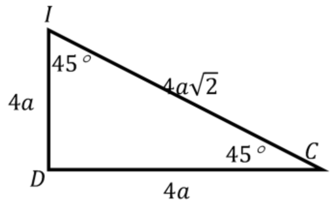


$$sin\alpha = \frac{4}{5}$$

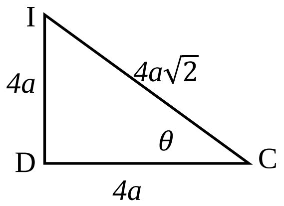
$$cos\alpha = \frac{3}{5}$$

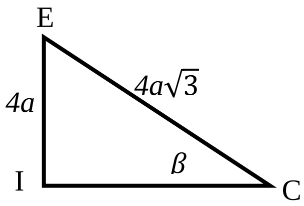
Koordinate tačaka na osnovu slike 4.19.1 su:

$A(0,0,0)$
$B(0,4a,0)$
$C(4a,4a,3a)$
$D(4a,0,3a)$
$E(0,0,7a)$
$F(4a,0,0)$
$G(4a,4a,0)$
$T(2a,2a,\frac{3}{2}a)$
$H(0,4a,3a)$
$I(0,0,3a)$



$$\overline{CI}^2 = \overline{DI}^2 + \overline{DC}^2$$
$$\overline{CI}^2 = (4a)^2 + (4a)^2$$
$$\overline{CI}^2 = 32a^2$$
$$\overline{CI} = a\sqrt{16\cdot 2}$$
$$\overline{CI} = 4a\sqrt{2}$$





$$\overline{CE}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{EI}^2$$
$$\overline{CE}^2 = 16a^2 + 32a^2$$
$$\overline{CE}^2 = 48a^2$$
$$\overline{CE} = a\cdot 4\cdot\sqrt{3}$$
$$\overline{CE} = 4\cdot a\cdot\sqrt{3}$$

Trougao DCI je pravougli i jednakokraki, pa je ugao $\theta = 45°$ ($\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$\cos\beta = \frac{\overline{CI}}{\overline{CE}} = \frac{4a\sqrt{2}}{4a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\beta = \frac{4a\sqrt{3}}{4a} = \sqrt{3}$$

Na osnovu slike 4.19.3 projektujemo silu S:

$$S_z = +S\cdot sin\beta = S\cdot\frac{\sqrt{3}}{3};$$

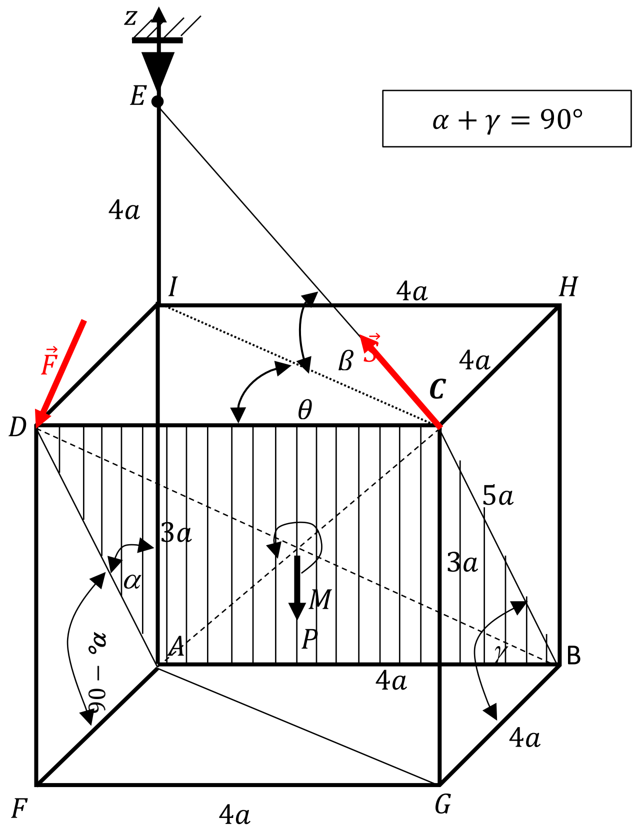
$$S_{xy} = -Scos\beta = -S\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S_x = -S_{xy}\cos\theta = -S_{xy}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -S\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_x = -S\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$S_x = -S\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S_y = -S\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Slika 4.19.1

Projekcije sila na ose su:

$\vec{S}(-S\frac{\sqrt{3}}{3}; -S\frac{\sqrt{3}}{3}; S\frac{\sqrt{3}}{3})$

$\vec{G}(0,0,-6)$

$\overrightarrow{F_A} = (X_A, Y_A, Z_A)$

$\overrightarrow{F_B}(X_B, 0, Z_B)$

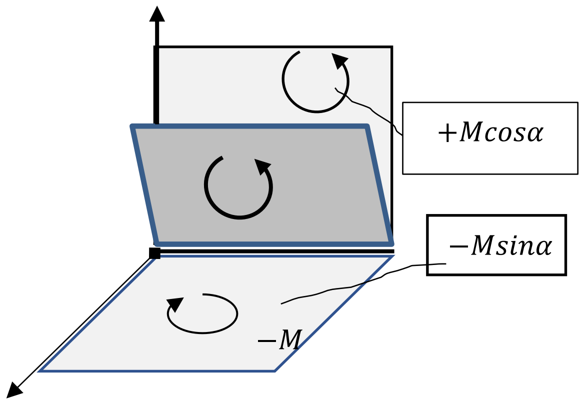
$\vec{F}(F \cdot cos\alpha, 0, -Fsin\alpha)$

$\vec{F}(F \cdot \frac{3}{5}; 0, -F \cdot \frac{4}{5})$

Jednačine ravnoteže za ose su:

$\sum X_i = 0 \rightarrow 0$

$\sum Y_i = 0 \rightarrow 0$



Slika 4.19.2

Projekcija zadatog momenta u ploči na ravni (slika 4.19.2) je:

$$+M \cdot cos\alpha = Ga\frac{5}{3} \qquad M = Ga(dato)$$

$$\vec{M} = M_{Ax}\vec{\imath} + M_{Ay}\vec{\jmath} + M_{Az}\vec{k}$$

$$\vec{M} = \frac{3}{5}Ga\vec{\imath} + o\vec{\jmath} - Ga \cdot \frac{4}{5}\vec{k}$$

Projektujemo moment iz ploče na ravni. Moment u ravni A_{xy}- vektor se projektuje na z osu!

Na osnovu slike 4.19.3 možemo napisati jednačine ravnoteže:

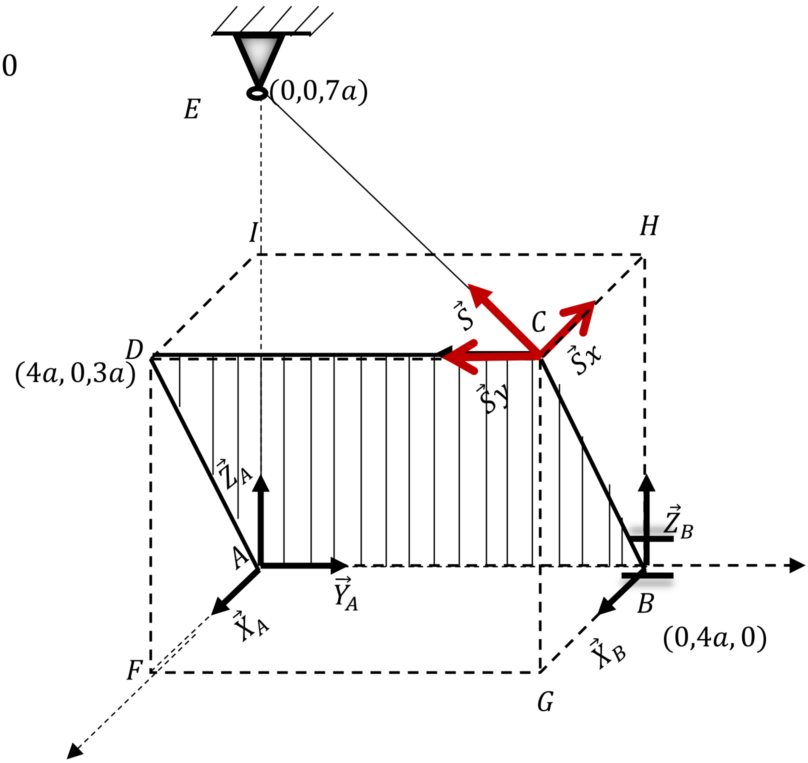
$$(1) \sum X_i = 0 \rightarrow X_A + X_B - S\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{5}F = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0 \rightarrow -S\frac{\sqrt{3}}{3} + Y_A = 0$$

$$(3) \sum Z_i = 0 \rightarrow S\frac{\sqrt{3}}{3} - G + Z_A - \frac{4}{5}F = 0$$

$$(4) \sum M_A = 0$$

$$M_A^{F_A} = 0$$



Slika 4.19.3

$$M_A^{F_B} = r_S x F_B = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 4a & 0 \\ X_B & 0 & Z_B \end{vmatrix} = \vec{\imath}(Z_B \cdot 4a) - \vec{\jmath}(0) + 4aX_B\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{S}}} = \vec{r_s} x \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4a & 4a & 3a \\ -s\frac{\sqrt{3}}{3} & -s-\frac{\sqrt{3}}{3} & s\frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left[+4a \cdot (\frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot S + 3a \cdot \frac{s\sqrt{3}}{3}\right] - \vec{j}(+4aS\frac{\sqrt{3}}{3} + 3aS\frac{\sqrt{3}}{3}) =$$

$$= \vec{i}(S\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7a) - \vec{j}(7aS\frac{\sqrt{3}}{3}) + 0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_A^6} = \vec{r_6} \cdot \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & 2a & \frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2aG) - \vec{j}(-2aG) + \vec{k} \cdot 0 = -2aG\vec{i} + 2aG\vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_A^F} = \vec{r_F} \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4a & 0 & 3a \\ \frac{3}{5}F & 0 & -\frac{4}{5}F \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}\left(-\frac{16}{5}Fa - \frac{9}{5}Fa\right) + \vec{k}(0) = \frac{25}{5}Fa\vec{j} = 5Fa\vec{j}$$

Moment $\vec{M} = \frac{3}{5}Ga\vec{i} + 0\vec{j} - \frac{4}{5}Ga\vec{k}$

(4) $\sum M_i = 0 \rightarrow 4aZ_B + \frac{7\sqrt{3}}{3}Sa - 2aG + \frac{3}{5}Ga = 0$

(5) $\sum M_j = 0 \rightarrow 0 - \frac{7\sqrt{3}}{3}aS + 2aG + 5Fa = 0$

(6) $\sum M_k = 0 \rightarrow 0\ 4aX_B - \frac{4}{5}Ga = 0$

Sada iz jednačina dobijamo nepoznate sile:

(4) $4aX_B - \frac{4}{5}Ga = 0$

$X_B = \frac{4}{5}Ga \cdot \frac{1}{4a}$

$X_B = \frac{G}{5}$

(5) $-\frac{7\sqrt{3}}{3}aS = -2aG - 5Fa$

S = $\frac{3}{7\sqrt{3}}(2G + 5F) = \frac{3\sqrt{3}}{7}(2G + 5F) = 3\sqrt{3}G$

(4) $\rightarrow Z_B = -4{,}9G$

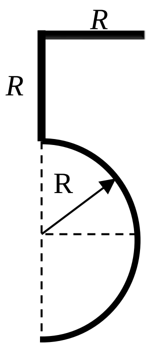
(2)$\rightarrow Y_A = S\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot 3\sqrt{3}G = \frac{3}{7}\sqrt{3}$G

(1)$X_A = \frac{11}{5}G$

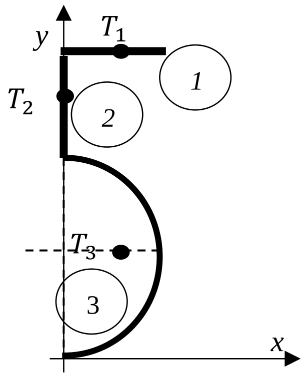
(3) $Z_A = -\frac{6}{5}G.$

5. TEŽIŠTE LINIIJA, FIGURA I TELA

ZADATAK 1: Odrediti težište složene materijalne linije, date na slici 5.1.1, ako je $R = 1m$.



Slika 5.1.1



Slika 5.1.2

Rešenje:
Na slici 5.1.1 se vidi da se data složena linija sastoji od dve prave linije (1 i 2) i jedne polukružne linije (3). Koordinate težišta složene linije se u tom slučaju (na osnovu opšteg obrasca) određuju prema izrazima:

$$(1)\ x_T = \frac{L_1 \cdot x_{T1} + L_2 \cdot x_{T2} + L_3 \cdot x_{T3}}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$(2)\ y_T = \frac{L_1 \cdot y_{T1} + L_2 \cdot y_{T2} + L_3 \cdot y_{T3}}{L_1 + L_2 + L_3}$$

Pri tome su dužine linija: $L_1 = L_2 = R = 1m$, a $L_3 = R\pi$ (polovina obima kruga). Sa slike 5.1.2 i uz pomoć tablica (prilog 2) očitavamo koordinate težišta linija:

$$x_{T1} = 0{,}5\,R;\ y_{T1} = 3R$$

$$x_{T2} = 0;\ \ y_{T2} = 2{,}5\,R$$

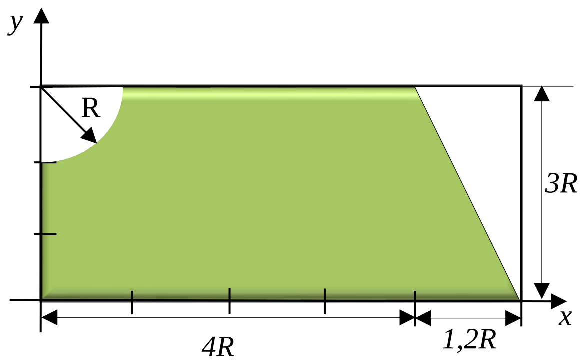
$$x_{T3} = \frac{2R}{\pi};\ \ y_{T3} = R$$

Zamenom ovih vrednosti u obrasce, dobijamo:

$$x_T = \frac{R \cdot 0{,}5R + R \cdot 0 + R\pi \cdot \frac{2R}{\pi}}{R + R + R\pi} = 0{,}486R = 0{,}486\ m$$

$$y_T = \frac{R \cdot 3R + R \cdot 2{,}5R + R\pi \cdot R}{R + R + R\pi} = 1{,}681R = 1{,}681m$$

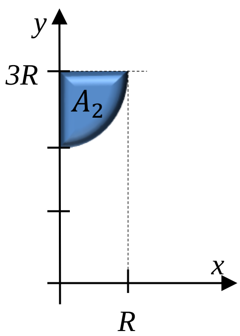
ZADATAK 2: Potrebno je odrediti težište materijalne ploče prikazane na slici , pri čemu je $R = 0{,}5\ m$.



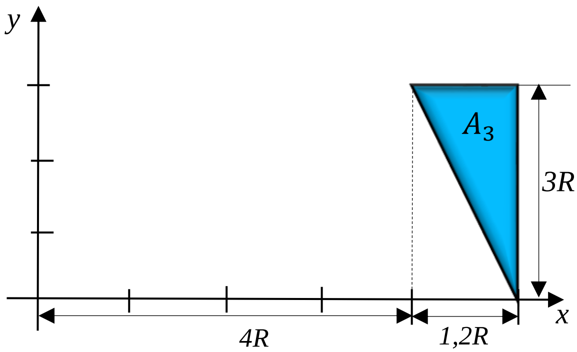
Slika 5.2.1

Rešenje:

Data figura se može predstaviti tako što ćemo od pravougaone figure A_1 (koja ima dimenzije $5{,}2\,R\ i\ 3R$) oduzeti dve figure: A_2 (četvrtina kruga) i A_3 (pravougli trougao, dimenzija *3R* i *1,2R*). Ove figure su prikazane na slikama 5.2.2 i 5.2.3.



Slika 5.2.2



Slika 5.2.3

Položaj težišta se, na osnovu ovog polaznog stava, određuje prema obrascu:

$$x_T = \frac{A_1 \cdot x_{T1} - A_2 \cdot x_{T2} - A_3 \cdot x_{T3}}{A_1 - A_2 - A_3}$$

$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_{T1} - A_2 \cdot y_{T2} - A_3 \cdot y_{T3}}{A_1 - A_2 - A_3}$$

Potrebni podaci za figure 1, 2 i 3 su:

- Fugura 1:
  $A_1 = 5{,}2R \cdot 3R = 15{,}6R^2$,

$x_{T1} = 2{,}6R;\ y_{T1} = 1{,}5R$

- Figura 2:

$$A_2 = \frac{R^2\pi}{4} = 0{,}785R^2,$$

$$x_{T2} = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}424R$$

$$y_{T2} = 2R + \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right) = \frac{9\pi R - 4R}{3\pi} = 2{,}575R$$

- Figura 3:

$$A_3 = \frac{3R \cdot 1{,}2R}{2} = 1{,}8R^2$$

$$x_{T3} = 5{,}2R - \frac{1{,}2 \cdot R}{3} = 4{,}8R;\ \ y_{T3} = 2\,\frac{3R}{3} = 2R$$

Površina figure A je:

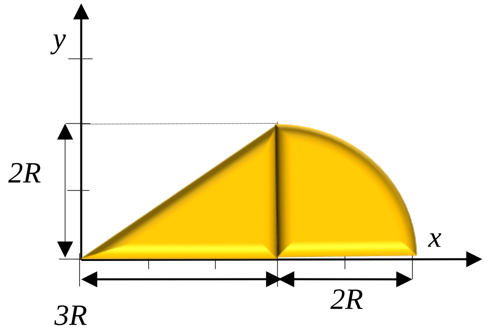
$$\mathrm{A} = A_1 - A_2 - A_3 = (15{,}6 - 0{,}785 - 1{,}8)R^2 = 13{,}015R^2$$

Sada imamo sve podatke neophodne da izračunamo koordinate težišta cele figure:

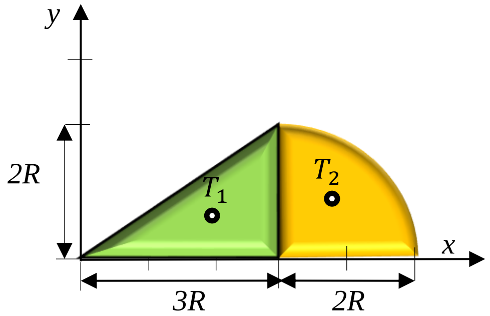
$$x_T = \frac{15{,}6R^2 \cdot 2{,}6R - 0{,}785R^2 \cdot 0{,}424R - 1{,}8R^2 \cdot 4{,}8R}{13{,}015R^2} = 2{,}427\ R = 1{,}41\ m$$

$$y_T = \frac{15{,}6R^2 \cdot 1{,}5R - 0{,}785R^2 \cdot 2{,}575R - 1{,}8R^2 \cdot 2R}{13{,}015R^2} = 1{,}366R = 0{,}683m$$

ZADATAK 3: Potrebno je odrediti koordinate težišta figure sa slike 5.3.1, ukoliko je $R = 2m$.



Slika 5.3.1



Slika 5.3.2

Rešenje:

Figura površine A, data na slici 5.3.1, se sastoji iz dve figure: figure 1 (trougla) i figure 2 (četvrtina kruga), što se jasnije vidi na slici 5.3.2.

Potrebni podaci za proračun su:

- Figura 1:

  $A_1 = \frac{3R \cdot 2R}{2} = 3R^2$

  $x_{T1} = \frac{2}{3} 3R = 2R;\ y_{T1} = \frac{1}{3} 2R = 0{,}667R$

- Figura 2:

  $A_2 = \frac{(2R)^2 \pi}{4} = 3{,}14R^2$

  $x_{T2} = 3R + \frac{4 \cdot (2R)}{3\pi} = 3{,}849R;\ y_{T2} = \frac{4 \cdot 2R}{3\pi} = 0{,}849R$

Ukupna površina figure A je:

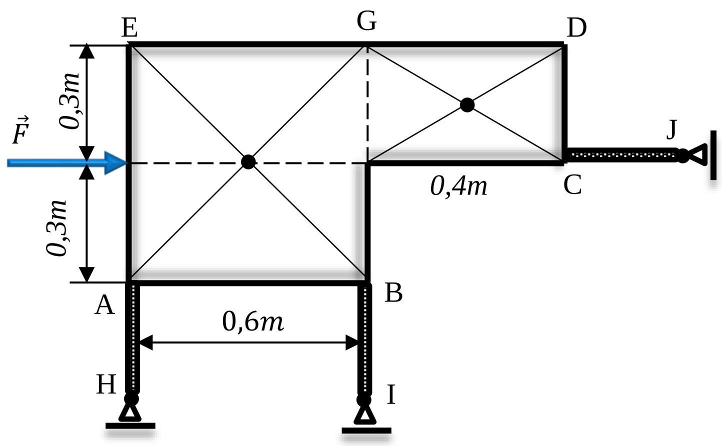
$$A = A_1 + A_2 = 3R^2 + 3{,}14R^2 = 6{,}14R^2$$

Koordinate težišta su:

$$x_T = \frac{3R^2 \cdot 2R + 3{,}14R^2 \cdot 3{,}849R}{6{,}14R^2} = 2{,}946R$$

$$y_T = \frac{3R^2 \cdot 0{,}667R + 3{,}14R^2 \cdot 0{,}849R}{6{,}14R^2} = 0{,}762R = 0{,}762 \cdot 2 = 1{,}524m$$

ZADATAK 4: Homogena ploča ABCDE konstantne debljine, data na slici 5.4.1, opterećena je silom $F = 10kN$, a njena težina je $G = 6kN$. Analitički odrediti sile u štapovim AH, BI i CJ (slika 5.4.1).



Silka 5.4.1

Rešenje:

Ako homogenu ploču oslobodimo veza (slika 5.4.2),uvodimo sile $S_A, S_B i\ S_C$:

Da bismo odredili mesto delovanja sile teže G, odredićemo težište prema jednačinama:

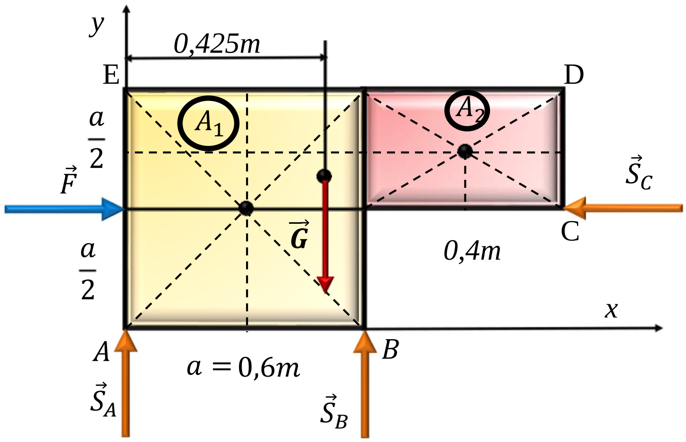
$$x_c = \frac{\sum A_i X_i}{A}\,;\; y_c = \frac{\sum A_i Y_i}{A}$$

Površine sastavnih delova i cele figure su:

$A_1 = a^2 = (0{,}6m)^2 = 0{,}36m^2$

$A_2 = a \cdot b = 0{,}4m^2 \cdot 0{,}3m^2 = 0{,}12m^2$

$A = A_1 + A_2 = 0{,}36m^2 + 0.12m^2 = 0{,}48m^2$



Slika 5.4.2

U koordinatnom sistemu xAy koordinate težišta figura 1 i 2 su:

$x_{c1} = 0{,}3m \qquad\qquad x_{c2} = 0{,}8m$

$y_{c1} = 0{,}3m \qquad\qquad y_{c2} = 0{,}3 + \frac{0{,}3}{2} = 0{,}45m$

Koordinate težišta cele figure su:

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{0{,}3m \cdot 0{,}36m^2 + 0{,}12m^2 \cdot 0{,}8}{0{,}48m^2} = \frac{0.204m^3}{0{,}48m^2} = 0{,}425m$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{0{,}36m^2 \cdot 0{,}3m + 0{,}12m^2 \cdot 0{,}45m}{0{,}48m^2} = \frac{0{,}162m^3}{0{,}48m^2} = 0{,}3375m$$

Kako sistem sa slike 5.4.2 ima 3 nepoznate, potrebne su nam 3 jednačine za obezbeđenje uslova ravnoteže. Sada postavljamo jednačine ravnoteže sistema:

(1) $\sum X_i = 0\colon\; F - S_c = 0$

(2) $\sum Y_i = 0\colon S_A + S_B - G = 0$

(3) $\sum M_A^{\vec{F_i}} = 0\colon -F \cdot 0{,}3m - G \cdot 0{,}425m + S_c \cdot 0{,}3m + S_B \cdot 0{,}6m = 0$

Iz jednačine (1) je: $S_c = F, pa\ je\colon S_c = 10kN.$

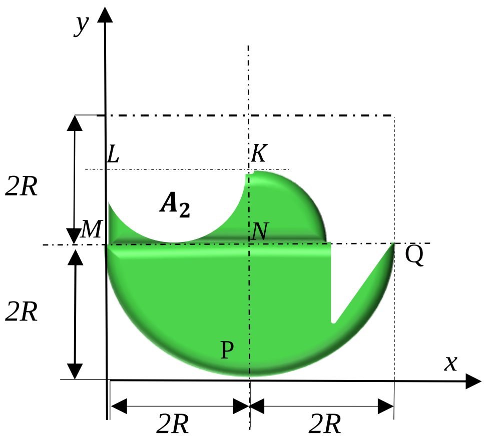
Iz jednačine (3) je: $S_B \cdot 0{,}6m = F \cdot 0{,}3m + G \cdot 0{,}425m - S_c \cdot 0{,}3m$
Zato je:

$$S_B = \frac{10kN \cdot 0{,}3m + 6 \cdot 0{,}425m - 10 \cdot 0{,}3m}{0{,}6m} = 4{,}25kN$$

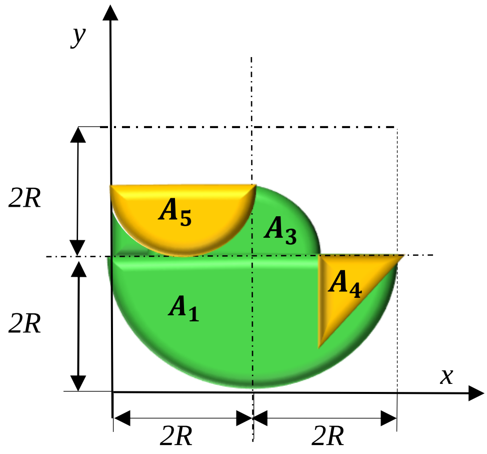
Iz jednačine (2) je: $S_A = G - S_B = 6kN - 4{,}25kN$=1,75$kN$

ZADATAK 5: Na slici 5.5.1 je prikazan obradak od lima koji se dobija presecanjem. Za zadato $R = 33$ cm, odrediti koordinate težišta tako dobijene složene površine računskim putem .

Rešenje:



Slika 5.5.1



Slika 5.5.2

Datu figuru ćemo dobiti preko definisanja površina koje grade zelenu površinu.

Ukupna površina A se dobija:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5$$

pri čemu je:

$A_1 - površina\ polovine\ kruga$, poluprečnika *2R* (NPQ)
$A_2 - površina\ pravougainika\ KLMN$
$A_3 - površina\ četvrtine\ kruga\ poluprečnika\ R$
$A_4 -\ površina\ pravouglog\ trougla, sa\ katetama\ R\ i\ R\ ,$
$A_5 - površina\ polovine\ kruga, poluprečnika\ R.$

Koordinate težišta su:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_{Ci}}{\sum A_i}, \; y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ci}}{\sum A_i}$$

Površina prve slike je:

$$A_1 = \frac{(2R)^2\pi}{2} = \frac{4R^2\pi}{2} = 2 \cdot 33^2 \cdot 3{,}14 = 6838{,}92\ cm^2$$

Koordinata x_{C1} prve slike je:

$$x_{C1} = 2R$$

Koordinata Y prve slike je:

$$y_{C1} = 2R - \frac{4 \cdot 2R}{3\pi} = 2 \cdot 33 - \frac{4 \cdot 2 \cdot 33}{3 \cdot 3{,}14} = 1{,}15R = 37{,}97cm$$

Površina druge slike je:

$$A_2 = R \cdot 2R = 33 \cdot 2 \cdot 33 = 2178\ cm^2$$

Koordinata X druge slike je :

$$X_{C2} = R = 33\ cm$$

Koordinata Y druge slike je :

$$Y_{C2} = 2R + \frac{R}{2} = 2{,}5 \cdot 33 = 82{,}5\ cm$$

Površina treće slike je:

$$A_3 = \frac{R^2\pi}{4} = R^2\pi = \frac{1}{4} \cdot 33^2 \cdot 3{,}14 = 854{,}87\ cm^2$$

Koordinata X treće slike je :

$$x_{C3} = 2R + \frac{4R}{3\pi} = \frac{R \cdot (6\pi + 4)}{3\pi} = 80{,}02cm$$

Koordinata Y treće slike je:

$$y_{C3} = 2R + \frac{4R}{3\pi} = \frac{R \cdot (6\pi + 4)}{3\pi} = 80{,}02cm$$

Površina četvrte slike je:

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R = 0{,}5 \cdot 33^2 = 544{,}5\ cm^2$$

Koordinata X četvrte slike je:

$$X_{C4} = 3R + \frac{1}{3} \cdot R = 3 \cdot 33 + \frac{1}{3} \cdot 33 = 110\ cm$$

Koordinata Y četvrte slike je:

$$Y_{C4} = R + \frac{2}{3}R = 33 + \frac{2 \cdot 33}{3} = 55\ cm$$

Površina pete slike je:

$$A_5 = \frac{1}{2}R^2\pi = 0{,}5 \cdot 33^2 \cdot 3{,}14 = 1709{,}73cm^2$$

Koordinata X pete slike je:

$$x_{C5} = R = 33\ cm$$

Koordinata Y pete slike je:

$$y_{C5} = 3R - \frac{4 \cdot R}{3\pi} = \frac{9R\pi - 4R}{3\pi} = \frac{9 \cdot 33 \cdot 3,14 - 4 \cdot 33}{3 \cdot 3,14} = 84,99cm$$

Sada se mogu izračinati koordinate težišta:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}, y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i},$$

$$x_T = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 - A_4 \cdot x_4 - A_5 \cdot x_5}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5}$$

$$x_T = \frac{6838,92 \cdot 66 + 2178 \cdot 33 + 854,87 \cdot 80,02 - 544,50 \cdot 110 - 1709,73 \cdot 33}{6838,92 + 2178 + 854,87 - 544,5 - 1709,73}$$

$$x_T = 62,41\ cm$$

$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 - A_4 \cdot y_4 - A_5 \cdot y_5}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5}$$

$$y_T = \frac{6838,92 \cdot 37,97 + 2178 \cdot 82,5 + 854,87 \cdot 80,02 - 544,50 \cdot 55 - 1709,73 \cdot 84,99}{6838,92 + 2178 + 854,87 - 544,5 - 1709,73}$$

$$y_T = 43,65\ cm$$

Ukupna površina figure je: $A = 7617,56\ cm^2$

ZADATAK 6: Na slici 5.6.1 je prikazan obradak od lima koji se dobija presecanjem. Za zadato $R = 31cm$, odrediti koordinate težišta tako dobijene složene površine računskim putem.

Rešenje:

Koordinate težišta izračunavamo po obrascu:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; Y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}.$$

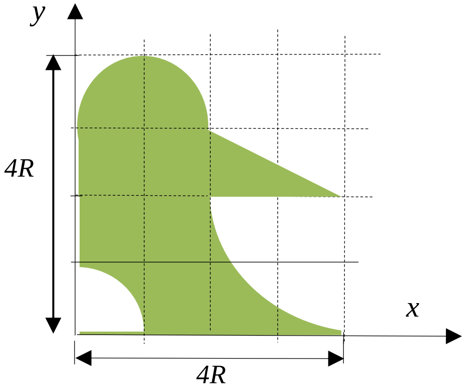
Osenčena površina A je:

$$A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5$$

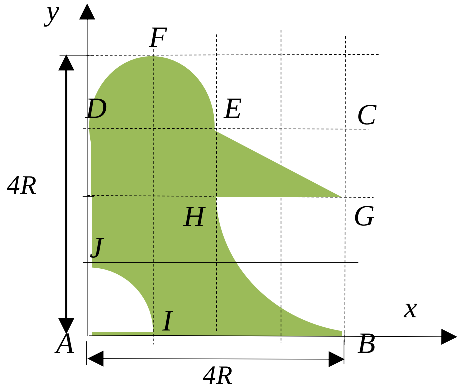
pri čemu je:

$A_1 - površina\ pravougaonika\ stranica\ ABCD,$

A_2 − *površina polovine kruga (linija* $\widehat{DEF}$*)*,
A_3 − *površina trougla GCE*,
A_4 − *površina četvrtine kruga BGH*,
A_5 − *površina četvrtine kruga (linija luka* $\widehat{AIJ}$*)*



Slika 5.6.1



Slika 5.6.2

Površina prve slike je :

$$A_1 = 3 \cdot R \cdot 4 \cdot R = 12 \cdot 32^2 = 11532\ cm^2$$

Koordinata X prve slike je :

$$X_{C1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot R = 2 \cdot 31 = 62\ cm$$

Koordinata Y prve slike je :

$$Y_{C1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot R = \frac{3 \cdot 31}{2} = 46,5\ cm$$

Površina druge slike je :

$$A_2 = \frac{(2 \cdot R)^2 \cdot \pi}{4} = \frac{(2 \cdot 31)^2 \cdot \pi}{4} = 3017,54\ cm^2$$

Koordinata X druge slike je :

$$X_{C2} = R = 31\ cm$$

Koordinata Y druge slike je :

$$Y_{C2} = 3 \cdot R + \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 3 \cdot 31 + \frac{4 \cdot 31}{3 \cdot 3,14} = 106,16\ cm$$

Površina treće slike je :

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 31^2 = 961\ cm^2$$

Koordinata X treće slike je :

$$X_{C3} = 2R + \frac{2}{3} \cdot R = 2 \cdot 31 + \frac{2 \cdot 31}{3} = 82,66\ cm$$

Koordinata Y treće slike je :

$$Y_{C3} = 2R + \frac{R}{3} = 2 \cdot 31 + \frac{31}{3} = 72,33\ cm$$

Površina četvrte slike je :

$$A_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4R)^2 \pi}{4} = \frac{(4 \cdot 31)^2 \cdot 3,14}{16} = 3017,54\ cm^2$$

Koordinata X četvrte slike je :

$$X_{C4} = 2R + \left(2R - \frac{4R}{3\pi}\right) = 2 \cdot 31 + \left(2 \cdot 31 - \frac{4 \cdot 31}{3 \cdot 3,14}\right) = 110,83\ cm$$

Koordinata Y četvrte slike je :

$$Y_{C4} = 2R - \frac{4R}{3\pi} = 2 \cdot 31 - \frac{4 \cdot 31}{3 \cdot 3,14} = 48,84\ cm$$

Površina pete slike je:

$$A_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2R)^2 \pi}{4} = \frac{(2 \cdot 31)^2 \cdot 3,14}{16} = 754,38\ cm^2$$

Koordinata X pete slike je:

$$X_{C5} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 31}{3 \cdot 3,14} = 13,16\ cm$$

Koordinata Y pete slike je:

$$Y_{C5} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 31}{3 \cdot 3,14} = 13,16\ cm$$

Sada, kada imamo sve potrebne elemente, možemo da izračunamo koordinate težišta figure/slike:

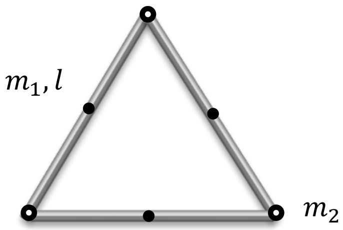
$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 - A_3 \cdot X_3 - A_4 \cdot X_4 - A_5 \cdot X_5}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5}$$

$$X_C = \frac{11532 \cdot 62 + 3017,54 \cdot 31 - 961 \cdot 82,66 - 3017,5 \cdot 110,83 - 754,38 \cdot 13,16}{11532 + 3017,54 - 961 - 3017,54 - 754,38} = 44,47\,cm$$

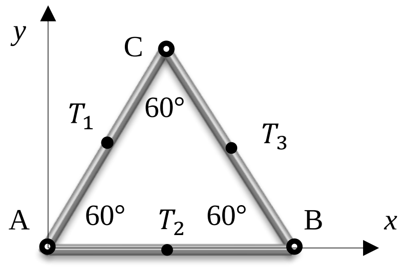
$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 - A_3 \cdot Y_3 - A_4 \cdot Y_4 - A_5 \cdot Y_5}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_4}$$

$$Y_C = \frac{11532 \cdot 46,5 + 3017,54 \cdot 106,16 - 961 \cdot 72,33 - 3017,54 \cdot 48,84 - 754,38 \cdot 13,16}{11532 + 3017,54 - 961 - 3017,54 - 754,38} = 54,46\ cm$$

ZADATAK 7: Sistem se sastoji od 3 štapa, jednakih masa m_1i jednakih dužina l, koji su vezani u trougao tačkama jednakih masa m_2 (slika 5.7.1) Odrediti težište sistema, ako je $m_1 = 4m_2$.



Slika 5.7.1



Slika 5.7.2

Rešenje:

Položaj centra masa odredićemo koristeći opšte jednačine:

(1) $x_C = \frac{\sum m_i \cdot x_{Ti}}{\sum m_i}$,

(2) $y_C = \frac{\sum m_i \cdot y_{Ti}}{\sum m_i}$

Koordinate centra masa štapova, posmatrajući sliku 5.7.2, su:

- štapa $\overline{AC}$ - $x_{T_1} = \frac{l}{2}cos60° = \frac{l}{4}$, $y_{T_1} = \frac{l}{2}cos30° = \frac{l\sqrt{3}}{4}$
- štapa $\overline{AB}$ - $x_{T_2} = \frac{l}{2}$, $y_{T_2} = 0$
- štap $\overline{BC}$ - $x_{T_3} = l - \frac{l}{2}cos60° = \frac{3l}{4}$, $y_{T_1} = \frac{l}{2}cos30°$=$\frac{l\sqrt{3}}{4}$

Koordinate centra masa tačaka su:

- tačke A - $x_A = 0, y_A = 0$,
- tačke B - $x_B = l, y_B = 0$,
- tačke C - $x_C = \frac{l}{2}, y_C = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Zamenom dobijenih koordinata u jednačine (1) i (2) dobijamo:

$$x_C = \frac{\sum m_i \cdot x_{Ti}}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot \left(\frac{l}{4} + \frac{l}{2} + \frac{3l}{4}\right) + m_2 \cdot \left(0 + l + \frac{l}{2}\right)}{3m_1 + 3m_2} =$$

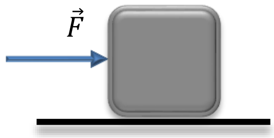
$$= \frac{m_1 \cdot \frac{6l}{4} + m_2 \cdot \frac{3l}{2}}{3m_1 + 3m_2} = \frac{4m_2 \cdot \frac{6l}{4} + m_2 \cdot \frac{6l}{4}}{15m_2} = \frac{l}{2}$$

$$y_C = \frac{\sum m_i \cdot y_{Ti}}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot \left(\frac{l\sqrt{3}}{4} + 0 + \frac{l\sqrt{3}}{4}\right) + m_2 \cdot (0 + 0 + \frac{l\sqrt{3}}{2})}{3m_1 + 3m_2}$$

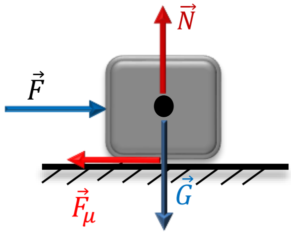
$$y_C = \frac{4m_2 \cdot \frac{2l\sqrt{3}}{4} + m_2 \frac{2l\sqrt{3}}{4}}{15m_2} = \frac{10m_2 l\sqrt{3}}{60m_2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

6. SILA TRENJA

ZADATAK 1: Telo mase m=*5kg* se nalazi na horizontalnoj ravni (slika 6.1.1.). Na telo deluje sila F i telo istaje u stanju mirovanja. Kolika je maksimalna vrednost sile koja može delovati na telo tako da telo ostane u stanju mirovanja, ako je koeficijent trenja između tela i podloge $\mu = 0{,}25$.



Slika 6.1.1.



Slika 6.1.2

Rešenje:

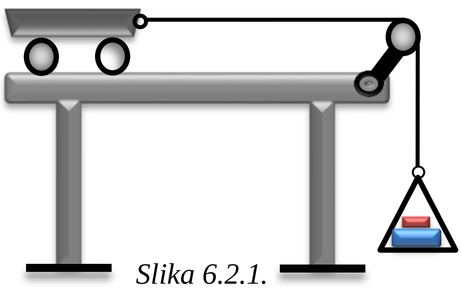
Oslobađanjem tela od veza, (slika 6.1.2.) dobijamo reakciju veze N, usmerenu na gore, dok se u ravni kontakta tela i podloge pojavljuje sila trenja, $F_\mu = \mu N$, usmerena u smeru suprotnom od smera dejstva sile F. Da bi telo ostalo u stanju mirovanja, zbir sila po x i y osi mora biti jednak nuli. Zato imamo dve jednačine:

$$(1) \sum X_i = 0: F - F_\mu = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0: N - G = 0.$$

Kako je $F_\mu = \mu N$, a $G = mg = 5 \cdot 9{,}81 = 49{,}05N$, iz jednačine (2) dobijamo da je: $N = 49{,}05N$. Sada je $F_\mu = 0{,}25 \cdot 49{,}05 = 12{,}26N$, pa je stoga $F_{max} = 12{,}26N$.

ZADATAK 2: Telo mase $M = 10kg$ se nalazi na hrapavoj ravni, a koeficijent trenja između dodirnih površina je $\mu = 0{,}2$. Telo je užetom, zanemarljive mase, povezano preko kotura sa teretom (kao na slici 6.2.1). Pri kojoj masi m tereta će doći do pokretanja tela na horizontalnoj ravni u desnu stranu.



Slika 6.2.1.

Rešenje:
Sistem možemo podeliti na dva dela, presecanjem užeta i uvesti sile unutrašnje reakcije $S\ i\ S'$. Dodavanjem svih aktivih sila, možemo uočiti da imamo uslovno 4 nepoznate, pa će nam trebati 4 jednačine da rešimo sistem.
Za svako telo ponaosob možemo napisati sistem jednačina za uslov mirovanja (slika 6.2.2):

Telo mase M:

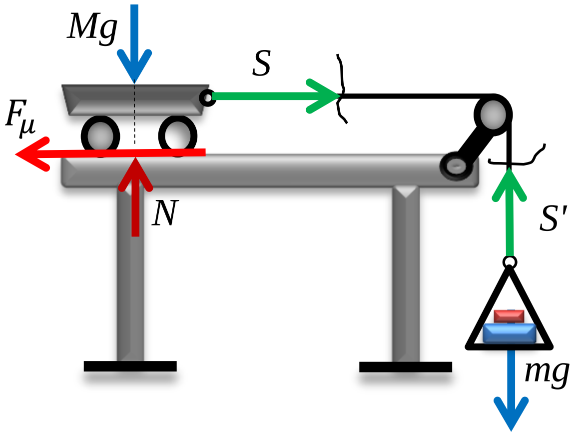
(1) $\sum X_i = 0: S - F_\mu = 0$

(2) $\sum Y_i = 0: N - Mg = 0$

(3) $F_\mu = \mu N$

Za telo mase m:

(4) $\sum Y_i = 0: S' - mg = 0$



Slika 6.2.2.

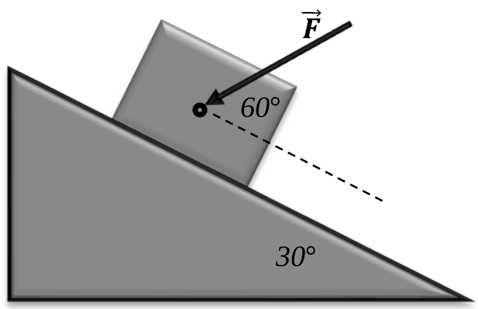
Kako je po jednačini (4) $S' = mg$, onda se iz jednačina (1), (2) i (3) sređivanjem dobija:

$$S = F_\mu = \mu N = \mu Mg.$$

Izjednačavajući $S\ i\ S'$, dobijamo: $mg = \mu Mg$, odnosno: $m = \mu M$.
Teret će krenuti na desno kada je: $m > \mu M$,odnosno $m > 0{,}2 \cdot 10 = 2kg$.

ZADATAK 3: Telo, mase m, nalazi se u mirovanju na strmoj ravni, sa uglom $\alpha = 30°$. Na telo deluje sila, $F = 15kN$, pod uglom od $\beta = 60°$ (*slika* 6.3.1). Ukoliko je koeficijent trenja između tela i strme ravni $\mu = 0{,}3$, odrediti G tako da se ne dozvoli kretanje tela:

a.) uz strmu ravan,
b.) niz strmu ravan.



Slika 6.3.1.

Rešenje:

a.) Oslobađamo telo od veza, uz pretpostavku da se pod dejstvom sile F nastoji pokrenuti telo uz strmu ravan. Unosimo aktivne sile i reakcije veze (slika 6.3.2.) i uočavamo 3 nepoznate (potrebne 3 jednačine).

Imamo slučaj sučeljenih sila, koje projektujemo na ose:

(1) $\sum X_i = 0$: $\quad -F_x + Gsin\alpha + F_\mu = 0, \ -Fcos60° + Gcos60° + F_\mu = 0$

(2) $\sum Y_i = 0$: $\ N - F_y - Gcos\alpha = 0; \ N - Fcos30° - Gcos30° = 0$

(3) $F_\mu = \mu \cdot N$ (dopunska jednačina).

Iz j-ne (2) je:

$N = Fcos30° + Gcos30°$,

pa zamenom u jednačinu (1) dobijamo:

$Fcos60° = Gcos60° + \mu(Fcos30° + Gcos30°)$

Sređivanjem izraza dobijamo:

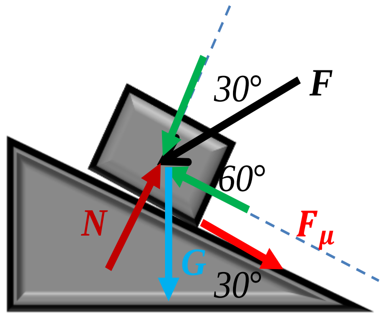
$F(cos60° - \mu\, cos30°) = Gcos60° + \mu Gcos30°$

odnosno:

$$G = F \cdot \frac{cos60° - \mu cos30°}{cos60° + \mu cos30°}$$

Zamenom vrednosti dobijamo da je

$G = 4{,}73kN$.



Slika 6.3.2.

b.) Za slučaj da treba naći granični slučaj vrednosti G da telo ne krene niz strmu ravan, kada bi sila trenja F_μ bila usmerena u negativnom smeru x − osejednačine bi imale sledeći oblik:

(1) $\sum X_i = 0$: $\quad -F_x + Gsin\alpha - F_\mu = 0, \ -Fcos60° + Gcos60° - F_\mu = 0$

(2) $\sum Y_i = 0$: $\ N - F_y - Gcosa = 0; \ N - Fcos30° - Gcos30° = 0$

(3) $F_\mu = \mu \cdot N$ (dopunska jednačina).

Sređivanjem bi se dobilo da je: $G = F \cdot \frac{\mu \cdot cos30° + cos60°}{cos60° - \mu \cdot cos30°}$ = 47,53kN

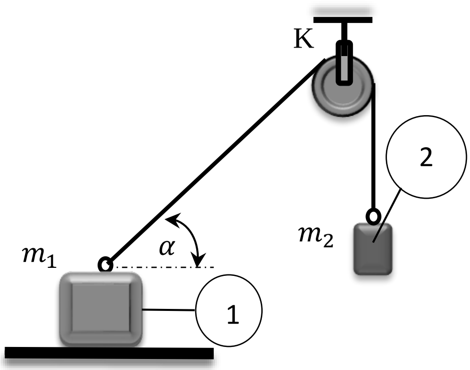
Može se zaključiti da sila treba da uzme vrednost između: $4{,}73kN \leq G \leq 47{,}53kN$ da ne bi došlo do kretanja.

ZADATAK 4: Telo mase m_1=5 *kg* je kanapom bez mase, prebačenog preko kotura K vezano za telo mase $m_2 = 2{,}5kg$. Ukoliko je koeficijent statičkog trenja klizanja $\mu = 0{,}5$, odrediti granični ugao α da sistem ostane u stanju mirovanja (*slika 6.4.1.*).

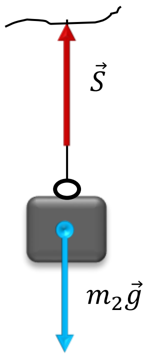
Rešenje:
Izvršićemo presecanje kanapa na dva mesta i dobićemo delove sistema koje možemo da analiziramo posebno (slike 6.4.2. i 6.4.3.). Imamo četiri nepoznate ($S, N, F_\mu i\ \alpha$), pa su nam potrebne i 4 jednačine da bismo rešili problem.
Za telo 2 (slika 6.4.2) ćemo napisati jednačinu ravnoteže:

(1) $\sum Y_i = 0$: $S - m_2 g = 0$, odakle je $S = m_2 g$

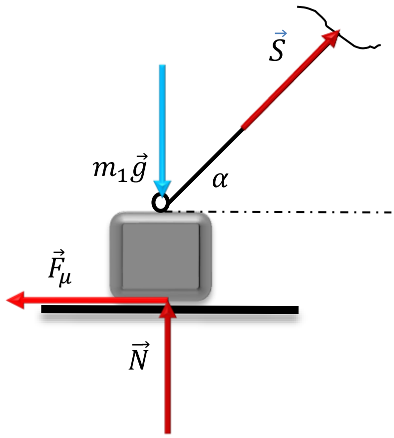
Za telo 1 (slika 6.4.3) ćemo napisati dve osnovne jednačine (za projekcije sila na dve upravne ose) i jednu pomoćnu (za silu trenja):



Slika 6.4.1.



Slika 6.4.2.



Slika 6.4.3.

(2) $\sum X_i = 0$: $Scos\alpha - F_\mu = 0$,
(3) $\sum Y_i = 0$: $S\,sin\alpha - G_1 + N = 0$ i
(4) $F_\mu = \mu \cdot N$.

Iz jednačine (1) je: $Scos\alpha = F_\mu$, odnosno $m_2 gcos\alpha = F_\mu$, a uz pomoć j − ne (3) je:

$$N = \frac{m_2 gcos\alpha}{\mu}$$

Iz jednačine (3) je: $N = G_1 - S\,sin\alpha$, pa zamenom dobijamo:

$$\frac{m_2 \cdot g \cdot cos\alpha}{\mu} = m_1 g - m_2 \cdot g \cdot sin\alpha$$

Ovaj izraz ćemo srediti kvadriranjem, korišćenjem veze: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ i uvođenjem smene: $t = sin\alpha$.

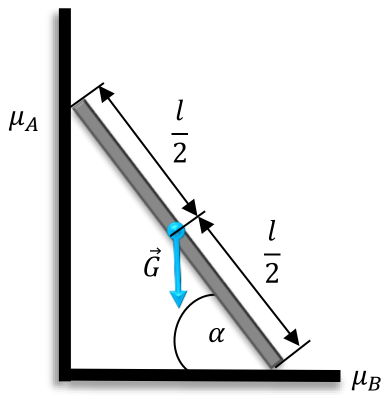
Nakon kvadriranja izraza dobijamo:

$$(m_2 g)^2 \cdot cos^2\alpha = \mu^2 \cdot (m_1 g)^2 + \mu^2 \cdot (m_2 g)^2 \cdot sin^2\alpha - 2 \cdot \mu^2 \cdot m_1 g \cdot m_2 g \cdot sin\alpha$$

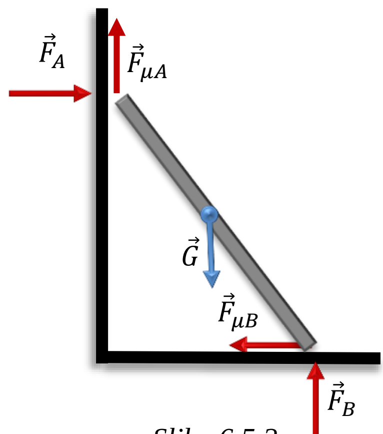
Nakon smene i zamenom datih vrednosti u izraz dobijamo da je $t = 0{,}5$ odnosno $\alpha = 30°$.

ZADATAK 5: Homogena greda $\overline{AB}$, dužine *l* i težine G, oslanja se u tačkama A i B na hrapav vertikalni zid i hrapav horizontalni pod. Koeficijenti trenja su $\mu_A=0{,}5$ i $\mu_B=0{,}4$ (slika 6.5.1.). Odrediti vrednost ugla α (ugao nagiba grede prema horizontali) pri kome greda ostaje u ravnoteži .

Rešenje:
Homogena greda AB nalazi se u ravnotežnom položaju. Na mestu kontakta sa podlogom i vertikalnim zidom javljaju se normalne sile F_A i F_B i sile trenja $F_{\mu A}$ i $F_{\mu B}$ (kao što je prikazano na slici 6.5.2.). Usled težine grede, na polovini dužine (u težištu) crtamo silu težine grede, G. Smer sile trenja je suprotan od smera kretanja grede, a gledano na sliku, zaključujemo da greda teži da kliza po podlozi u desnu stranu, tako da sile trenja u tačkama A i B postavljamo suprotno od pravca kome teži klizanje grede.



Slika 6.5.1.



Slika 6.5.2.

Za ravnotežu proizvoljnog sistem sila u ravni potrebna su tri uslova ravnoteže:

(1) $\sum X_i = 0$: $F_A - F_{\mu B} = 0$
(2) $\sum Y_i = 0$: $F_B + F_{\mu A} - G = 0$

(3) $\sum M_B = 0$: $-F_{\mu A} \cdot l \cdot cos\alpha - F_A \cdot l \cdot sin\alpha + G \cdot \frac{l}{2} \cdot cos\alpha = 0$
Dopunske jednačine ravnoteže baziramo na Kulonovom zakonu:

(4) $F_{\mu B} = \mu_B \cdot F_B$
(5) $F_{\mu A} = \mu_A \cdot F_A$

Rešavanjem jednačina određujemo otpore u osloncima A i B, kao i sile trenja u tim tačkama. Iz jednačine (1) biće: $F_A = F_{\mu B}$, a kada u ovu jednačinu uvrstimo izraz (4), sledi:

$$F_A = F_{\mu B} = \mu_B \cdot F_B.$$

Iz jednačine (2) možemo zapisati: $F_B + F_{\mu A} = G$. Kada u ovu jednačinu uvrstimo izraz (5), sledi: $\mu_A \cdot F_A + F_B = G$.
Sada možemo zameniti dobijene vrednosti u jednačinu kojom smo izrazili silu F_A:

$$\mu_A \cdot F_A + F_B = G$$
$$\mu_A \cdot \mu_B \cdot F_B + F_B = G$$
$$F_B(\mu_A \cdot \mu_B + 1) = G$$
$$F_B = \frac{G}{\mu_A \cdot \mu_B + 1} = \frac{G}{0{,}5 \cdot 0{,}4 + 1} = \frac{G}{1{,}2} = \frac{5}{6}G$$

Kako smo ranije dobili da je: $F_A = \mu_B \cdot F_B$, dobijamo za F_A:

$$F_A = \mu_B \cdot \frac{5}{6}G = 0{,}4 \cdot \frac{5}{6}G = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{6}G = \frac{G}{3}$$

Iz jednačina (4) i (5) računamo sile trenja u tačkama B i A:

$$F_{\mu B} = \mu_B \cdot F_B = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{6}G = \frac{2}{3}G$$
$$F_{\mu A} = \mu_A \cdot F_A = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{3}G = \frac{1}{6}G$$

Iz jednačine (3) možemo odrediti ugao nagiba grede, α:

$$-F_{\mu A} \cdot l \cdot cos\alpha - F_A \cdot l \cdot sin\alpha + G \cdot \frac{l}{2} \cdot cos\alpha = 0$$
$$-\frac{1}{6} \cdot G \cdot cos\alpha - \frac{1}{3} \cdot G \cdot l \cdot sin\alpha + G \cdot \frac{l}{2} \cdot cos\alpha = 0$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=0$$

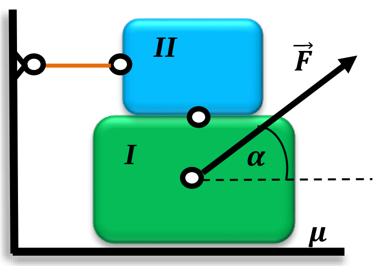
$$-\frac{1}{6}\cdot tg\alpha+\frac{1}{2}\cdot tg\alpha=\frac{1}{3}\ \Big|\cdot 6$$

$$-tg\alpha+3\cdot tg\alpha=2$$

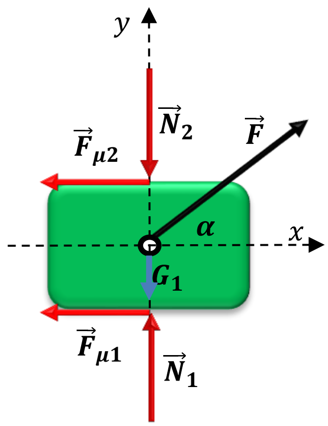
$$2\cdot tg\alpha=2$$

$$tg\alpha=1\quad\Rightarrow\ \alpha=arctg1=45^\circ$$

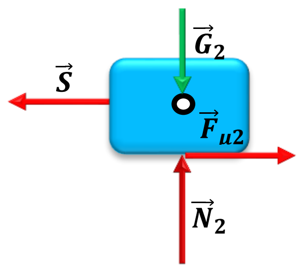
ZADATAK 6: Na horizontalnj hrapavoj podlozi se nalazi telo 1, a na njemu se nalazi telo 2, koje je vezano za vertikalni zid. Kojom najvećom silom F (koja deluje na telo 1 kao na slici 6.6.1.) se sme delovati, pa da sistem ostane u stanju mirovanja? Ugao $\alpha = 30°, G_1 = 400N, G_2 = 200N, \mu = 0{,}2$.



Slika 6.6.1.



Slika 6.6.2.



Slika 6.6.3.

Rešenje:

Rastavićemo sistem na delove - telo I i telo II i oslobodićemo ih od veza i njihovo dejstvo zameniti reakcijama veza (slike 6.6.2. i 6.6.3.). Imamo 6 nepoznatih, što znači da moramo da definišemo 6 jednačina.

Jednačine za telo I su:

(1) $\sum X_i = 0:\ Fcos\alpha - F_{\mu 1} - F_{\mu 2} = 0$

(2) $\sum Y_i = 0:\ Fsin\alpha$ - $N_2 + N_1 - G_1 = 0$

Jednačine za telo II su:

(3) $\sum X_i = 0:\ F_{\mu 2} - S = 0$

(4) $\sum Y_i = 0\text{:}\ \ N_2 - G_2 = 0$

Dodatne jednačine, po Kulonovom zakonu su:

(5) $F_{\mu 1} = \mu \cdot N_1$

(6) $F_{\mu_2} = \mu \cdot N_2$

Iz jednačine (4) je $N_2 = G_2 = 200N$, a na osnovu jednačine (6) je $F_{\mu_2} = 0{,}2 \cdot N_2 = 40N$. Iz jednačine (3) sada možemo da odredimo silu S odnosno: $S = F_{\mu 2} = 40N$.

Sada u jednačini (2) možemo da izrazimo silu $F = \frac{F_{\mu 1}+F_{\mu 2}}{cos\alpha} = \frac{\mu(N_1+N_2)}{cos\alpha}$.

Ukoliko ponovimo postupak i sa jednačinom (2) dobijamo da je: $F = \frac{N_2-N_1+G_1}{sin\alpha}$.

Izjednačavanjem ova dva izraza, dobijamo izraz:

$$\frac{\mu(N_1+N_2)}{cos\alpha} = \frac{N_2-N_1+G_1}{sin\alpha}.$$

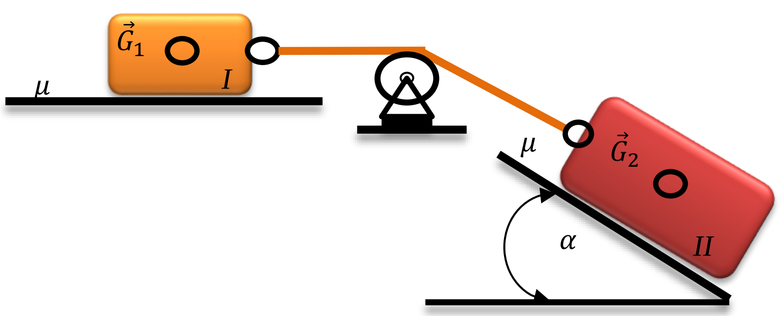
Iz njega zamenom vrednosti i sređivanjem izraza dobijamo da je: $N_1 = 517{,}10N$.

Vrednost sile F =165,8N.

Dakle, granična vrednost sile je *165,8N*. Ovo znači da vrednost sile treba da bude:

$$0 \leq F \leq 165{,}8N.$$

ZADATAK 7: Telo I težine G_1 leži na hrapavoj horizontalnoj podlozi, a telo II težine $G_2 = 5\ kN$ na hrapavoj kosoj ravni. Tela su međusobno povezana užetom koje je prebačeno preko kotura (slika 6.7.1.). Ukoliko je nagib strme ravni α=30°, a statički koeficijent trenja μ = 0,2 odrediti težinu G_1 kako bi sistem bio u ravnoteži.

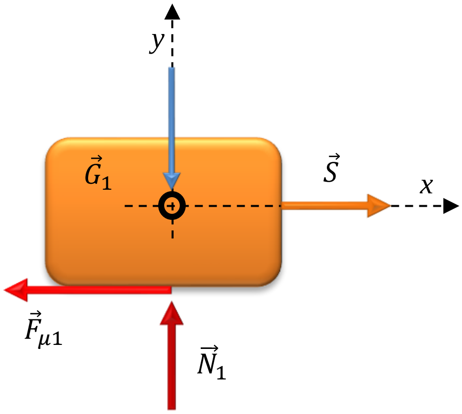


Slika 6.7.1.

Rešenje:
Rastavićemo sistem na dva dela i unećemo reakcije veza i kod tela I i kod tela II. (slike 6.7.2 i 6.7.3). Uočavamo 6 nepoznatih, pa će nam biti potrebno 6 jednačina.

Jednačine ravnoteže za telo I (slika 6.7.2.):

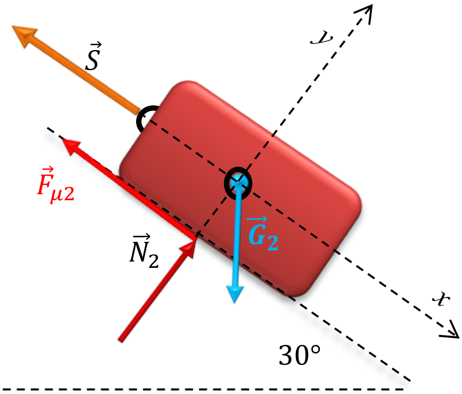
$$(1)\sum X_i = 0: \quad S - F_{\mu 1} = 0$$
$$(2)\sum Y_i = 0: \quad N_1 - G_1 = 0$$



Slika 6.7.2.

Jednačine ravnoteže za telo II (slika 6.7.3.):

$$(3)\sum X_i = 0: \quad G_2 \cdot cos60° - S - F_{\mu 2} = 0$$
$$(4)\sum Y_i = 0: \quad N_2 - G_2 \cdot \cos 30° = 0$$



Dve pomoćne jednačine koje uvodimo su:
(5) $F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}$
(6) $F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}$

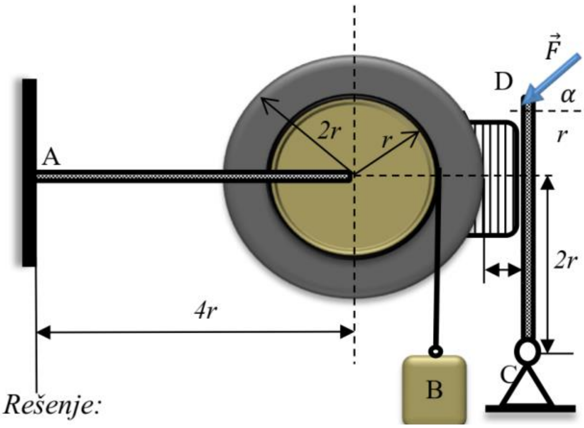
Slika 6.7.3.

Krećemo u rešavanje ovog sistema jednačina:

- iz jednačine (4) je $N_2 = G_2 \cdot \cos 30° = 5 \cdot 0{,}866 = 4{,}33\ kN$
- Iz jednačinene (6) je $F_{\mu 2} = 0{,}2 \cdot\ 4{,}33$ = 0,866 kN
- Sada iz jednačine (3) možemo dobiti da je:
$$F_s = G_2 \cdot cos60° - F_{\mu 2} = 5 \cdot 0{,}5 - 0{,}866 = 1{,}634kN.$$
- Iz jednačine (1) je: $S = F_{\mu 1} = \mu \cdot N_1$, pa je $N_1 = \frac{S}{\mu} = \frac{1{,}643}{0{,}2} = 8{,}17\ kN.$
- I na kraju iz jednačine (2) je: $G_1 = N_1 = 8{,}17\ kN.$

ZADATAK 8: Dva međusobno kruto spojena koaksijalna cilindra, ukupne težine G (sa poluprečnicima *r i 2r)* dodatno su zglobno vezana zglonom vezom za horizontalni štap $\overline{OA}$, težine G i dužine $4r$. Štap $\overline{OA}$ je drugim krajem ukliješten u tački A. Oko manjeg cilindra poluprečnika r je obavijeno uže na čijem slobodnom kraju visi teret B težine *2G*. Na veliki cilindar se naslanja papučica kočnice, širine

$\frac{r}{2}$, koja je vezana za štap $\overline{CD}$ (dužine 3r i težine G). U tački D, kao na slici 6.8.1. deluje sila F. Odrediti najmanji intenzitet sile F kojom treba delovati u tački D, da bi sistem bio u ravnoteži, kao i reakcije u tačkama A, O i C.



Rešenje:

Slika 6.8.1

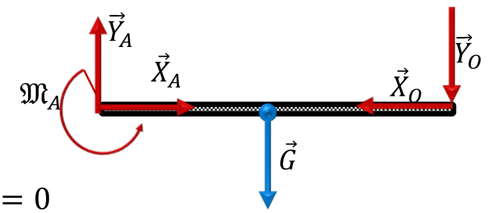
Razdvojićemo elemente sistema i uneti reakcije veza.Pojavljuje nam se 9 nepoznatih, što znači da je potrebno 9 jednačina za rešavanje problema.

Jednačine ravnoteže za štap $\overline{AO}$ (slika 6.8.2.) su:

(1) $\sum X_i = 0\colon\ X_A - X_O = 0$

(2) $\sum Y_i = 0\colon Y_A - Y_O - G = 0$

(3) $\sum M_A = 0\colon \mathfrak{M}_A - G \cdot 2r \cdot -Y_O \cdot 4r = 0$



Slika 6.8.2.

Jednačine ravnoteže za koaksijalni cilindar (slika 6.8.3) su:

(4) $\sum X_i = 0\colon X_O - N = 0$

(5) $\sum Y_i = 0\colon Y_O + F_\mu - 2G - 2G = 0$

(6) $\sum M_O = 0\colon F_\mu \cdot 2r - G \cdot r = 0$

Štap $\overline{CD}$ (slika 6.8.4.):

$$(7)\ \sum X_i = 0: N - X_C - F\cdot cos\alpha = 0$$

$$(8)\ \sum Y_i = 0:\ Y_c - F\cdot sin\alpha - F_\mu = 0$$

$$(9)\ \sum M_C = 0: F\cdot cos\alpha\cdot 3r + N\cdot 2r + F_\mu\cdot\frac{r}{2} = 0$$

Iz jednačine (6) ravnoteže nalazimo da je: $F_\mu = \frac{G}{2}$, pa je $N = \frac{F_\mu}{\mu} = \frac{G}{2\mu}$.

Iz jednačine (4) je: $X_O = N = \frac{G}{2\mu}$,

a iz jednačine (1) je onda: $X_A = X_O = \frac{G}{2\mu}$.

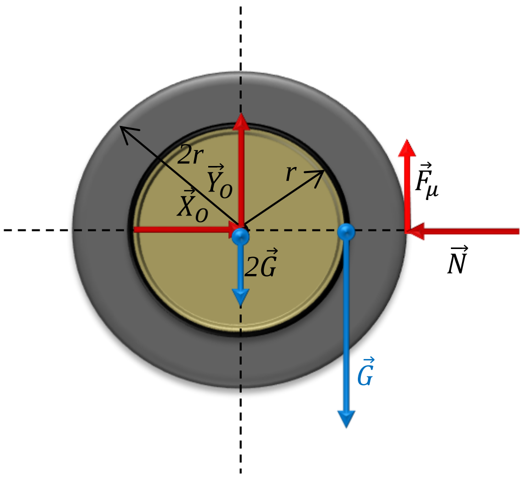
Iz jednačine (9) je: $F = \frac{N\cdot 2r + F_\mu\cdot\frac{r}{2}}{cos\alpha\cdot 3r} = \frac{G}{3cos\alpha}\cdot\frac{4+\mu}{4\mu}$.

Iz jednačine (5) je: $Y_O = 4G - F_\mu = \frac{7G}{2}$,

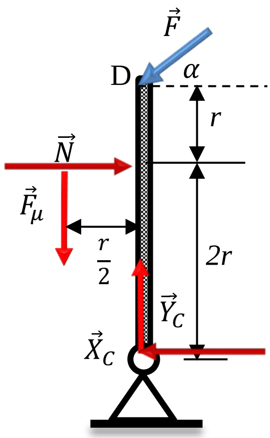
a potom iz jednačine (2) dobijamo: $Y_A = Y_O + G = \frac{9G}{2}$.

Iz jednačine (7) je sada: $X_C = N - F\cdot cos\alpha = -G\,\frac{2+\mu}{4\mu}$,

dok je iz jednačine (8): $Y_c = F\cdot sin\alpha + F_\mu = G\cdot(0{,}5 + \frac{4+\mu}{12\cdot\mu\cdot cos\alpha})$



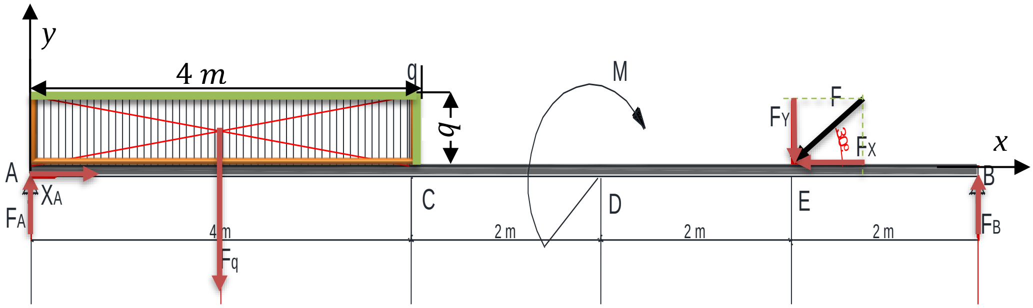
Slika 6.8.3.



Slika 6.8.4.

7. GRAFOSTATIKA

ZADATAK 1: Nosač $\overline{AB}$ opterećen je teretima, kao što je prikazano na slici 7.1.1. Nacrtati statičke dijagrame transverzanih sila i momenata savijanja. Dato je: $q = 1kN/m$; $F = 2kN$; $M = 2kNm$.



Slika 7.1.1

Rešenje:

Na slike 7.1.1 se vidi da je nosač AB je opterećen:

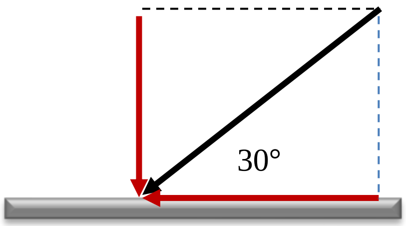
- kontinualnim opterećenjem **q**, na delu AC,
- spregom **M** u tački D i
- kosom koncentrisanom silom **F**, koja deluje na nosač pod uglom od **30°** u tački E.

I. *Oslobađanje od veza u nepokretnom i pokretnom osloncu*

Kako nepokretni oslonac sa sobom nosi dve nepoznate, na mestu nepokretnog oslonca, u tački A dodajemo dve reakcije veze, po x i y osi, sile F_A i X_A. Pokretni oslonac sadrži jednu nepoznatu reakciju, a u ovom slučaju to je u tački B sila F_B.

Sledi postavljanje sile koja zamenjuje dejstvo kontinualnog opterećenja na delu grednog nosača AC. Na tom rasponu, čija je dužina $4\,m$, deluje kontinualno opterećenje q, raspoređeno po dužnom metru, pa je intenzitet sile usled kontinualnog opterećenja: $F_q = q \cdot 4m = 1 \cdot 4 = 4kN$.

Kako je zadata kosa koncentrisana sila $\boldsymbol{F}$, potrebno je razložiti je na njene komponente po x i y osi (slika 7.1.2):



Slika 7.1.2

$$F_x = -F \cdot \cos 30^\circ$$
$$F_y = -F \cdot \sin 30^\circ$$

znak minus nam govori o negativnom smeru projekcije sile F.

Intenzitet komponenti sile F su:

$$F_x = -F \cdot \cos 30^\circ = -2 \cdot \cos 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1{,}73kN$$

$$F_y = -F \cdot \sin 30^\circ = -2 \cdot \sin 30^\circ = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1kN$$

II. *Pisanje jednačina (uslova) ravnoteže*

Pre nego što se počne sa pisanjem uslova ravnoteže, treba sagledati kakav je sistem sila postavljen na zadatom grednom nosaču. Kako u ovom slučaju imamo: sile koje deluju po *y* i *x* osi, spreg u tački D, kosu silu - možemo zaključiti da je nosač opterećen proizvoljnim sistemom sila za koji se postavljaju tri uslova ravnoteže:

1) $\sum X_i = 0 \rightarrow$ čime ne dozvoljavamo aksijalno pomeranje nosača, tj. obezbeđujemo ravnotežu po *x* osi;
2) $\sum Y_i = 0 \rightarrow$ obezbeđujemo da nema pomeranja u vertikalnom pravcu, tj. po *y* osi;
3) $\sum M_A = 0 \rightarrow$ obezbeđujemo da nema rotacije.

Postavljanjem ovih jednačina i njihovim rešavanjem određuju nepoznate reakcije u osloncima A i B:

1) $\sum X_i = 0; \quad X_A - F_x = 0 \Rightarrow X_A = F_x = 1{,}73kN \Rightarrow$ sile koje deluju po *x* osi

2) $\sum Y_i = 0; \quad F_A - F_q - F_y + F_B = 0$

$$F_A + F_B = F_q + F_y$$
$$F_A + F_B = 4 + 1$$
$$F_A + F_B = 5$$

$\Rightarrow$ sile koje deluju po *y* osi

$$3)\ \sum M_A = 0;\ \ -F_q \cdot 2m - M - F_y \cdot (4m + 2m + 2m) + F_B \cdot (4m + 2m + 2m + 2m) = 0$$

$$-2 \cdot F_q - M - 8 \cdot F_y + 10 \cdot F_B = 0$$

$$10 \cdot F_B = 2 \cdot F_q + M + 8 \cdot F_y$$

$$10 \cdot F_B = 2 \cdot 4 + 2 + 8 \cdot 1$$

$$10 \cdot F_B = 18$$

$$F_B = \frac{18}{10}$$

$$F_B = 1{,}8kN$$

U ovom slučaju je za momentnu tačku odabrana tačka A i za nju je kreirana momentna jednačina.

Preporuka: Za momentnu tačku uvek birati tačku u kojoj postoji nepoznata sila, jer na taj način eliminišemo jedan broj nepoznatih u momentnoj jednačini (zato što sila čiji pravac prolazi kroz odabranu momentnu tačku ne daje moment za tu tačku - ne postoji najkraće rastojanje (krak sile) između pravca dejstva sile i momentne tačke).

Iz jednačine (1) se može odrediti aksijalna sila, X_A.

Po konvenciji, pozitivna vrednost aksijalne sile F_a (zatežuća sila), crta se iznad nulte linije na dijagramu aksijalnih sila, dok se negativna sila (pritisna sila) crta ispod nulte linije.

Sledi crtanje dijagrama aksijalnih sila (slika 7.1.3). Dijagram aksijalnih sila je potpuno nezavistan od dijagrama F_T i M_f.

Iz jednačine (2) odredićemo silu u osloncu A, F_A:

$$F_A + F_B = 5$$

$$F_A = 5 - F_B$$

$$F_A = 5 - 1{,}8$$

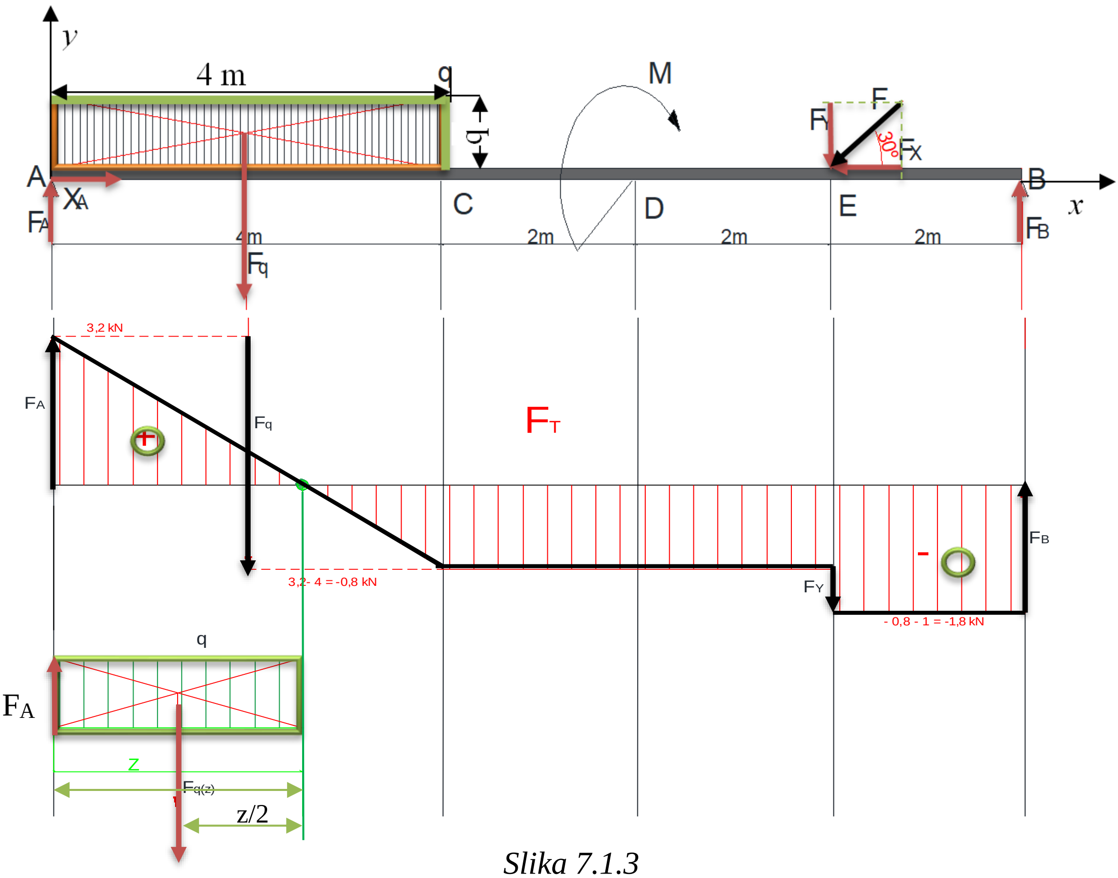
$$F_A = 3{,}2kN$$

Sledi crtanje dijagrama transverzalnih sila koji je dat na slici 7.1.3.

III. Određivanje vrednosti momenata savijanja

Momente savijanja određujemo za svaku karakterističnu tačku (slika 7.1.1). Na ovom nosaču su obeležene karakteristične tačke A, C, D, E i B. Karakteristični preseci su:

- Početak i kraj grede, promena pravca grede,
- Početak i kraj kontinualnog opterećenja,
- Ispred i iza delovanja koncentrisane sile ili koncentrisanog sprega.



Slika 7.1.3

Između karakterističnih tačaka koristimo diferencijalne odnose za crtanje dijagrama:

$$\frac{dM(z)}{dz} = F_T(z)$$

Drugim rečima trensverzalna sila je jednaka izvodu napadnog momenta po apscisi z. Iz matematike je poznato da ako je nekoj funkciji prvi izvod jednak nuli za neku vrednost argumenta, onda ta funkcija ima ekstremnu vrednost za tu vrednost argumenta. Ovo znači da u preseku u kome je trensverzalna sila jednaka nuli, moment savijanja ima ekstremnu vrednost, odnosno u poljima gde je F_T pozitivno moment raste, a gde je F_T negativno moment opada.
Na dijagramu transverzalnih sila, možemo uočiti da usled dejstva kontinualnog opterećenja dolazi do promene transverzalnih sila sa pozitivne na negativnu stranu, tj. postoji presek sa nultom linijom na rasponu dejstva kontinualnog opterećenja. Potrebno je odrediti kritično rastojanje preseka z. U toj tački gde transverzalna sila seče nultu liniju, sila je jednaka nuli. To predstavlja kritični presek za koji je

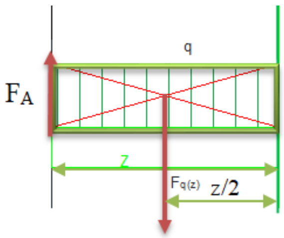
potrebno odrediti *moment savijanja*, i na mestu tog preseka grede je teme parabole na dijagramu momenta savijanja.
Računanje vrednosti momenata savijanja podleže odgovarajućim pravilima. U zavisnosti od toga kako posmatramo opterećenja u odnosu na karakterističnu tačku, potrebno je primeniti pravilo znakova momenta savijanja u odnosu na koju stranu se posmatra opterećenje za datu tačku. To pravilo glasi:

- Moment savijanja, posmatrano *sa leva na desno* u karakterističnoj tački preseka, je *pozitivan* ako sile kreiraju moment koji nastoji da obrne gredu u *smeru kretanja kazaljki na satu* ($\overset{\curvearrowright}{+} M_A{}^{l}$). Isto važi i u slučaju prisutnih spregova. U suprotnom je negativan.
- Moment savijanja, posmatrano *sa desna na levo* do karakteristične tačke preseka je *pozitivan* ako sile kreiraju moment koji nastoji da obrne gredu u *suprotnom smeru od smera kretanja kazaljki na satu* ($\overset{\curvearrowleft}{+} M_A{}^{d}$). Isto važi i u slučaju prisutnih spregova. U suprotnom je negativan.

Vrednosti momenata savijanja, gledano levo ili desno od karakteristične tačke, imaju iste intenzitete za datu tačku $M_A^l = M_A^d$.
Ako u karakterističnoj tački postoji dejstvo sprega (kao što je u ovom primeru u tački D), vrednosti momenata savijanja levo i desno u toj tački se razlikuju upravo za veličinu intenziteta sprega koji deluje u toj tački.

IV. Kritični presek

Kod prisustva kontinualnog opterećenja na rastojanju z (slike 7.1.1 i 7.1.4), intenzitet sile usled dejstva kontinualnog opterećenja na tom delu iznosi:
$F_{q(z)} = q \cdot z = 1 \cdot z = z$



Transverzalne sile koje deluju levo od kritičnog preseka su F_A i $F_{q(z)}$.

Prema konvenciji znakova, gledano sa leve strane preseka, sve sile koje su usmerene na gore su pozitivne, pa pišemo sledeću jednačinu transverzalnih sila u kritičnom preseku. Odatle se određuje rastojanje z:

$$\overset{+}{\uparrow} F_{T(z)}^{l} = 0; \quad F_A - F_{q(z)} = 3{,}2 - z = 0 \Rightarrow z = 3{,}2m$$

V. Vrednost momenta savijanja u kritičnom preseku na rastojanju z

Izvod moment savijanja usled dejstva sila na određenom rastojanju i za određeni presek predstavlja silu na datom preseku. Kako moment zavisi od rastojanja, moment savijanja je, u stvari, zakonitost promene momenta savijanja u funkciji od z (za bilo koji presek grede), kao što je i predstavljeno sledećim izrazima:

$$M^l_{s(z)} = F_A \cdot z - F_{q(z)} \cdot \frac{z}{2}$$

$M^l_{s(z)} = F_A \cdot z - q \cdot z \cdot \dfrac{z}{2} = F_A \cdot z - q \cdot \dfrac{z^2}{2}$ $\Rightarrow$ zavisnost momenta savijanja na rastojanju z

$$M^l_{s(z)} = 3{,}2 \cdot z - 1 \cdot \frac{z^2}{2}$$

$$M^l_{s(z)} = 3{,}2 \cdot 3{,}2 - 1 \cdot \frac{3{,}2^2}{2} = 10{,}24 - \frac{10{,}24}{2}$$

$$M^l_{s(z)} = 5{,}12 kNm$$

Vrednosti momenata savijanja za karakteristične tačke (posmatrajući sliku 7.1.1):

$$M^l_A = 0;$$

$$M^l_C = F_A \cdot 4m - F_q \cdot 2m = 3{,}2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = 4{,}8 kNm$$

$$M^l_D = F_A \cdot 6m - F_q \cdot 4m = 3{,}2 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 3{,}2 kNm$$

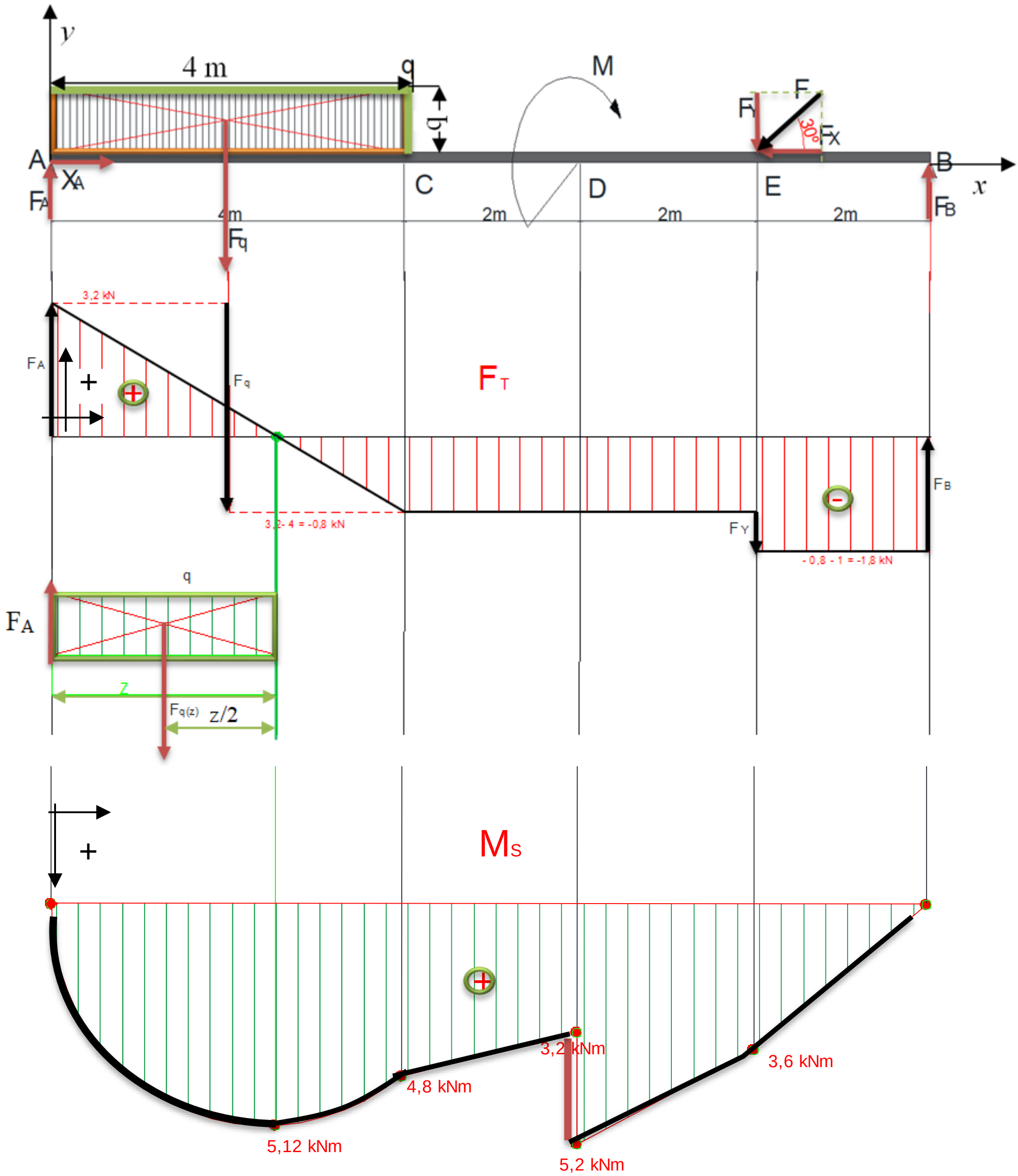
$$M^d_D = -F_y \cdot 2m + F_B \cdot 4m = -1 \cdot 2 + 1{,}8 \cdot 4 = 5{,}2 kNm$$

$$M^d_E = F_B \cdot 2m = 1{,}8 \cdot 2 = 3{,}6 kNm$$

$$M^d_B = 0$$

Do dijagrama na slici 7.1.5 dolazimo poštujući sledeće:

- Na delu grede koja je kontinualno opterećena, moment savijanja se menja parabolično, kriva linija,
- Na mestu gde trensverzalna sila usled kontinualnog opterećenja seče nultu liniju, na dijagramu momenta savijanja se javlja ekstremna vrednost, tj teme parabole (iz matematike pravilo),



Slika 7.1.5

- Na delu gde nosač nije kontinualno opterećen a javlja se negativna sila, moment savijanja linearno opada, prava linija, i suprotno ako je sila na tom delu pozitivna, moment savijanja linearno raste,

- Na delu nosača opterećenim usled dejstva sprega, na dijagramu momenta savijanja javlja se skok veličine intenziteta datog sprega.

Možemo zaključiti da trensverzalne sile utiču na moment savijanja, dok moment savijanja ne utiče na trensverzalne sile i da:

- *prema konvenciji*, pozitivne vrednosti transferzalne sile nanosimo iznad nulte linije dijagrama F_T
- *prema konvenciji*, pozitivne vrednosti momenta savijanja nanosimo ispod nulte linije dijagrama M_s.

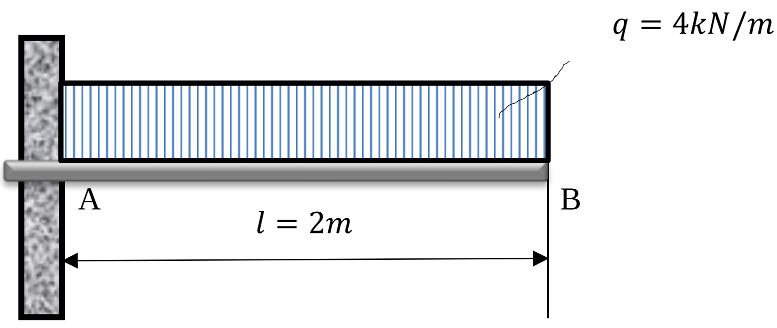
Crtanje dijagrama momenata savijanja

Na slici 7.1.5 je dat zbirni prikaz dijagrama transverzalnih sila i momenta savijanja i može se videti njihova povezanost. Uticaj načina promene transverzalnih sila na način promene momenta savijanja je dat u tabeli 7.1.

Tabela 7.1 Zavisnost momenta savijanja od transverzalnih sila

SILA	MOMENT
Linearna	Paraboličan
Konstantna	Linearan
Nula	Konstantan

ZADATAK 2: Za konzolu prikazanu na slici 7.2.1 odrediti reakcije oslonaca. Skicirati i kotirati dijagrame transverzalnih sila i momenata savijanja. Dato je $q = 4kN/m, l = 2m$.



Slika 7.2.1

Rešenje:

Data konzola opterećena je čitavim rasponom, od tačke A do tačke B, kontinualnim opterećenjem q. Kontinualnno opterećenje možemo zameniti jednom silom Q, koja deluje u težištu pravougaonika, a jednaka je veličini date pravougaone površine:

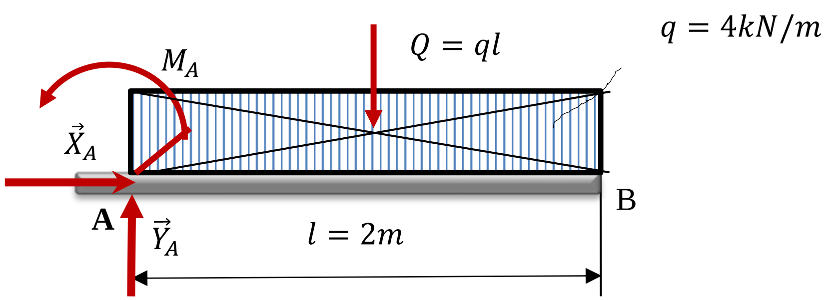
$$Q = q \cdot l = 4\frac{kN}{m} \cdot 2m = 8kN$$

Oslobađanje od veza

U ovom slučaju nosač je konzola, uklještena u tački A, a kao što je poznato, uklještenje ima tri nepoznate veličine. Tako, da bismo se oslobodili veze u tački A, uklještenje ćemo zameniti reakcijama veze (slika 7.2.2):

- silom Y_A (po y osi),
- silom X_A (po x osi) - koja je u ovom slučaju jedina reakcija na x osi, pa je jednaka 0 i
- spregom u uklještenju - $\mathfrak{M} = M_A$.

Kontinualno opterećenje zamenili smo koncentrisanom silom Q, koja deluje u težištu površine usmerena na dole.



Slika 7.2.2

Uslovi ravnoteže

Kako po x osi nema drugih sila osim X_A, ta sila je jednaka 0, pa nema potrebe pisati jednačinu za ravnotežu po x osi. Takođe, gledajući sliku 7.2.2 na kojoj su unete odgovarajuće reakcije veze, vidimo da se sila Q uravnožežava sa silom Y_A, što znači da imamo slučaj paralelnih sila. Za paralelni sistem sila postavljamo dva uslova ravnoteže, tj. ne dozvoljavamo pomeranje konzole po y osi i ne dozvoljavamo rotaciju:

1) $\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - Q = 0$

$$Y_A = Q$$

$$Y_A = 8kN$$

2) $\sum M_A = 0; \qquad M_A - Q \cdot \frac{l}{2} = 0$

$$M_A - 8 \cdot \frac{2}{2} = 0$$

$$M_A = 8kNm$$

Sledi crtanje dijagrama transverzalnih sila (slika 7.2.3). Transverzalna sila sa leva na desno se menja po zakonu:

$$F_T = Y_A - q(l - z).$$

Karakteristične vrednosti transverzalne sile su:

- za $z = \frac{l}{2}$, $F_T = 8 - 4 \cdot 1 = 4kN$,
- za $z = 0, F_T = 8 - 4 \cdot 2 = 0kN$.

Momente savijanja određujemo za svaku karakterističnu tačku. Karakteristične tačke na datoj konzoli su:

- tačka A - predstavlja mesto uklještenja i početak kontinualnog opterećenja i
- tačka B - u njoj se završava kontinualno opterećenje konzole.

Na dijagramu transverzalnih sila (F_T) ne postoji presek sa nultom linijom, što znači da u ovom slučaju nemamo ekstremne vrednosti momenta savijanja.
Moment savijanja, gledano sa leva na desno, se menja po zakonu:

$$M_s^l = -M_A + \frac{qz^2}{2}$$

Vrednosti momenata savijanja za karakteristične tačke su:

- Za $z = 0$ (tačka A), $M_A^l = -M_A = -8kNm$
- Za $z = l$, $M_B^l = -8 - \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 0kNm$

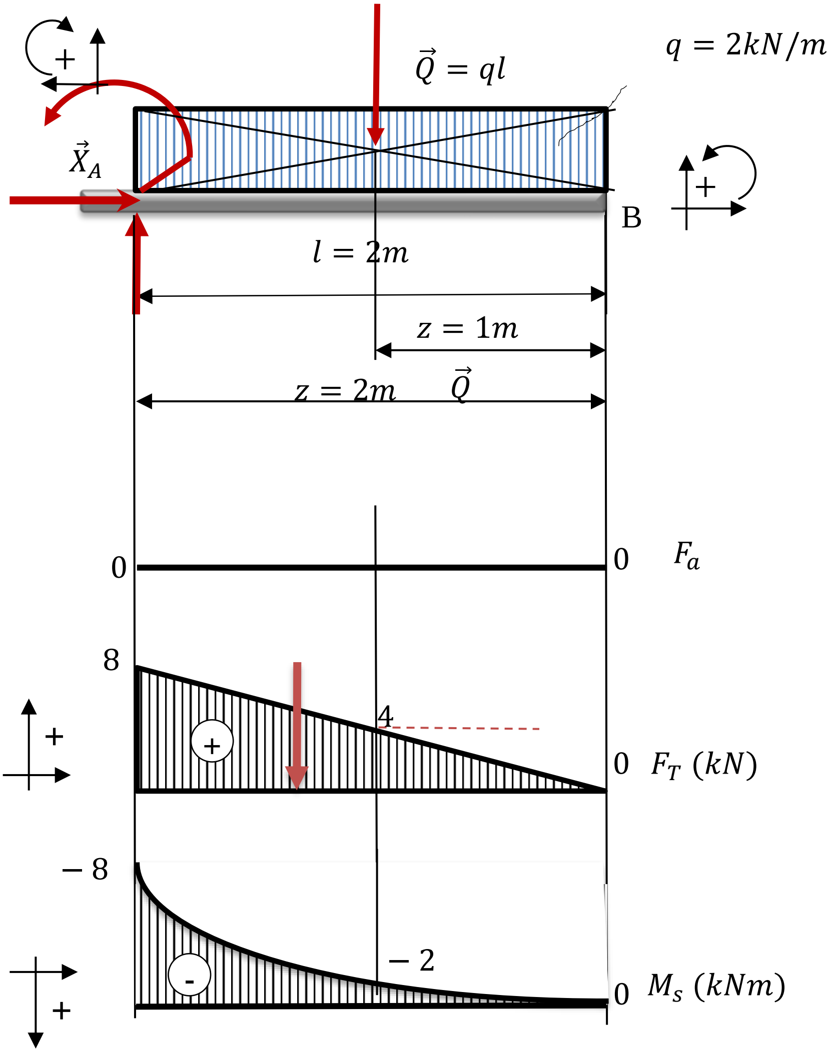
Provere radi, sa desne strane, moment savijanja se menja po zakonu:

$$M_s^d = -\frac{q \cdot z^2}{2}$$

Sa te, desne strane, momenti u tačkama A i B su:

- Za $z = 0$ (tačka B), $M_B^l = 0\ kNm$
- Za $z = l$ (tačka A), $M_A^l = +\frac{4 \cdot 2^2}{2} - 8 = 0kNm$

Sledi crtanje dijagrama transverzalnih sila i momenata savijanja (slika 7.2.3).



$*\ pozitivna\ vrednost\ transverzalne\ sile\ se\ crta\ iznad\ nulte\ linije\ F_T$

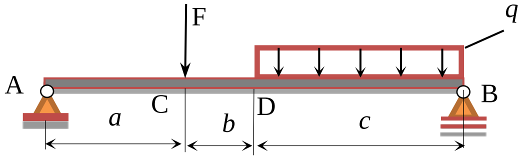
$*\ negativna\ vrednost\ momenta\ se\ crta\ iznad\ nulte\ linije$

Slika 7.2.3

ZADATAK 3: Nacrtati dijagrame unutrašnjih sila (M_S *i* F_T) za nosač opterećen kao na slici 7.3.1. Dato je: $F = 10kN;\ q = 10kN/m;\ a = 3m;\ b = 1m;\ c = 2m$.

Rešenje:

Kontinualno opterećenje, vrednosti: $F_C = q \cdot c = 10 \cdot 2 = 20kNm$ uzimamo, kod proračuna transverzalnih sila da deluje na odstojanju $\frac{c}{2}$ od tačke B. Postavićemo jednačine ravnoteže, da bismo izračunali sile u osloncima.



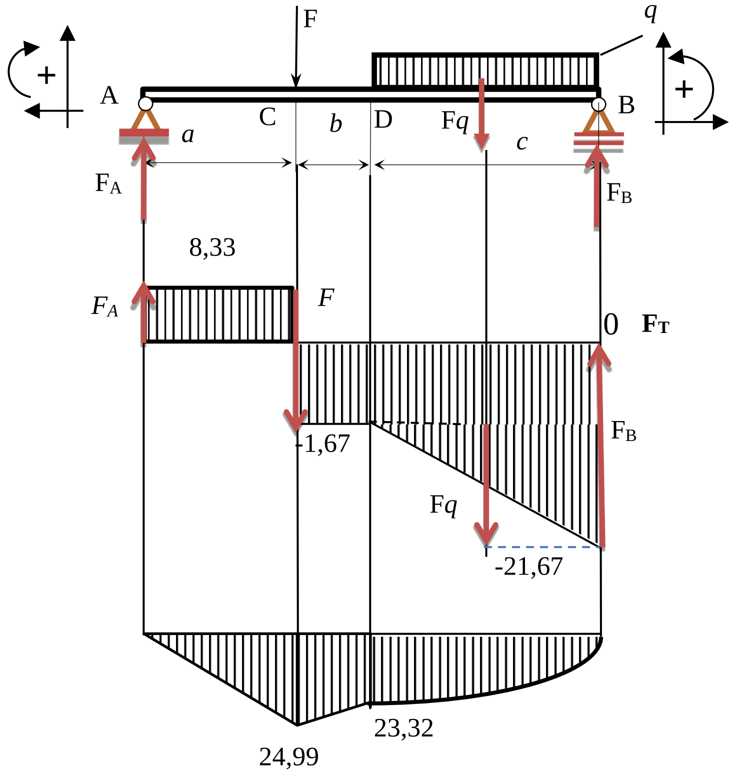
Slika 7.3.1

Kako nema aktivnih aksijalnih sila, imamo dve nepoznate ($F_A i\ F_B$), pa postavljamo 2 jednačine uslova ravnoteže:

(1) $\sum Y_i = 0;\ F_A + F_B = F + F_q$

$$F_A + F_B = 10 + 20 = 30kNm$$

(2) $\sum M_A = 0;\ F_B \cdot (a + b + c) - F \cdot a - F_q \cdot (a + b + \frac{c}{2}) = 0$



Slika 7.3.2

Dobijamo da je sila u osloncu F_B:

$$F_B = \frac{F \cdot a - F_q \cdot (a + b + \frac{c}{2})}{a + b + c}$$

$$F_B =\cdot \frac{10 \cdot 3 + 20 \cdot 5}{3 + 1 + 2} = 21{,}67kN$$

Iz jednačine (1) je: $F_A = 30 - F_B = 30 - 21{,}67 = 8{,}33kNm$.

Momenti savijanja za karakteristične tačke:

$M_A^l = 0; \quad M_B^d = 0;$

$M_C^l = F_A \cdot a = 8{,}33 \cdot 3 = 24{,}99kNm$

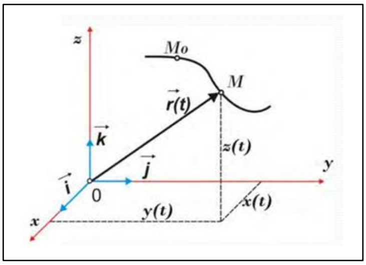
$M_D^l = F_A \cdot 4 - F \cdot 1 = 8{,}33 \cdot 4 - 10 \cdot 1 = 23{,}32kNm$

Dijagrami transverzalnih sila i momenata savijanja su dati na slici 7.3.2.

OBRASCI ZA KINEMATIKU

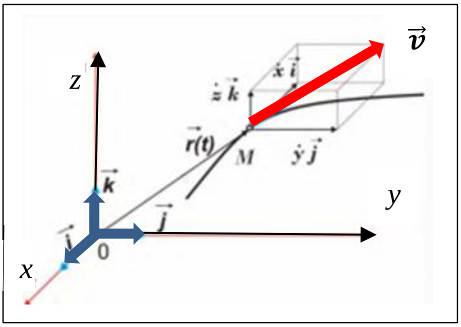
OPŠTI OBLIK ZAKONA KINEMATIKE:

- vektor položaja materijalne tačke: $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- zapis u Dekartovom koordinatnom sistemu: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
- jednačine kretanja u skalarnom obliku:
  - $x = x(t)$,
  - $y = y(t)$
  - $z = z(t)$



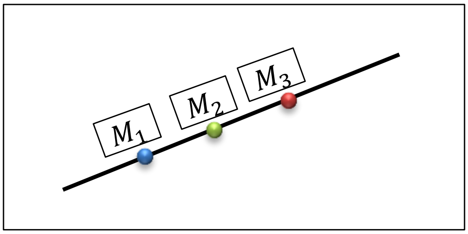
- Brzina u vektorskom obliku: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$
- Komponente brzine u Dekartovom koordinatnom sistemu:
  - $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
  - $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$
  - $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$
- Intenzitet brzine: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
- Ubrzanje u vektorskom obliku: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$
- Ubrzanje u vektorskom obliku:
- Komponente ubrzanja u Dekartovom koordinatnom sistemu:
  - $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
  - $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$
  - $v_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$
- Intenzitet ubrzanja:

  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



PRAVOLINIJSKO KRETANJE TAČKE:

- zakon kretanja (jednačina): $x = x(t)$
- srednja brzina: $v_{sr} = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- trenutna brzina tačke: $v = \dot{x}$



- srednje ubrzanje tačke: $a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

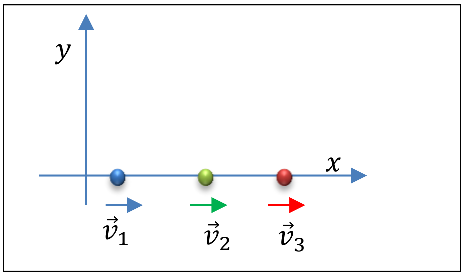
- trenutno ubrzanje: $a = \ddot{x} = \dot{v}$

RAVNOMERNO (JEDNOLIKO) KRETANJE TAČKE ($v = const$)

- položaj tačke: $x = x_0 + vt$
- pređeni put: $s = vt$
- brzina:$v = \frac{s}{t}$

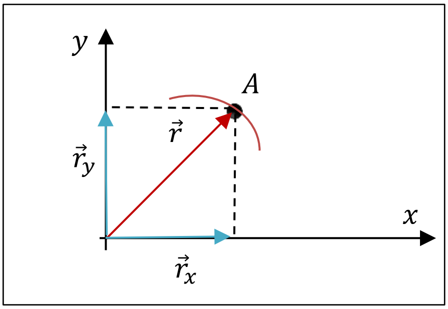
PROMENLJIVO (UBRZANO/USPORENO) KRETANJE, $a = const$

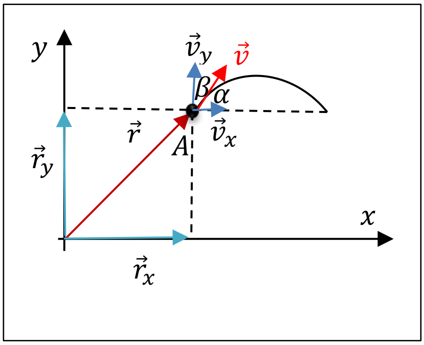
- Položaj tačke: $x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$
- Pređeni put: $s = v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$
- Brzina: $v = v_0 \pm at$



KRIVOLINIJSKO KRETANJE TAČKE:

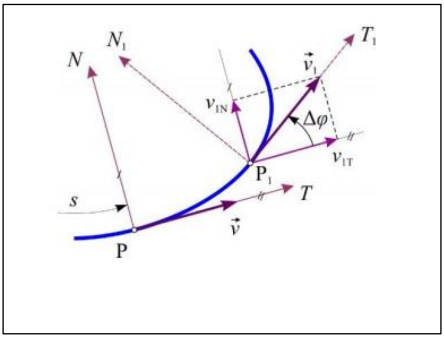
- Važe opšte jednačine kinematike
- Problem u ravni:
  - $x = x(t)$,
  - $y = y(t)$
  - $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
  - $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$
  - $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
  - uglovi koje brzina zaklapa sa koordinatnim osama:
    - ✓ $cos\alpha_v = \frac{\dot{x}}{v}$
    - ✓ $cos\beta_v = \frac{\dot{y}}{v}$
  - $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
  - $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$
  - $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$



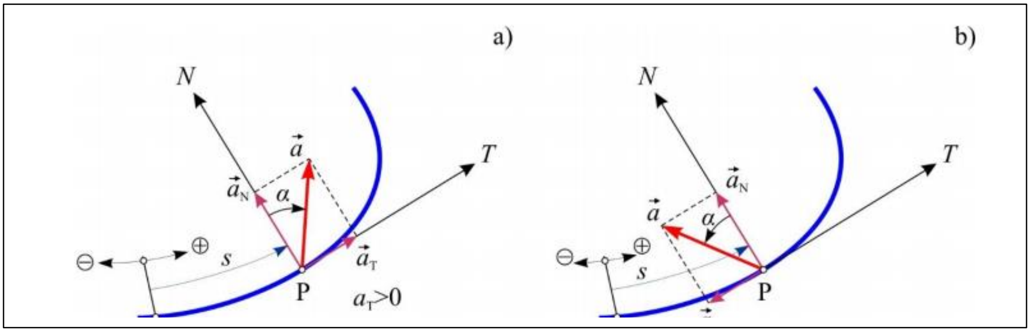


PRIRODNI NAČIN DEFINISANJA RAVNI:

- normala (N) i tangenta (T) (ose u ravni),
- binormala (treća osa u prostoru),



- krivolinijska koordinata: $s = s(t)$
- Brzina: $v = \dot{s}$ (pravac tangente)
- Ubrzanje:
  - normalno ubrzanje: $a_N = \frac{v^2}{R_k}$
  - tangencijalno ubrzanje: $a_T = \frac{dv}{dt}$
  - ukupno ubrzanje: $a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$
  - pravac i smer vektora ubrzanja: $tg\alpha = \frac{|a_T|}{a_N}$



VEZA IZMEĐU PROJEKCIJA UBRZANJA NA PRIRODNE KOORDINATE I DEKARTOVE OSE U RAVNI:

- tangencijalno ubrzanje: $a_T = \frac{|\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}|}{v}$
- normalno ubrzanje: $a_N = \frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{v}$
- poluprečnik krivine: $R_k = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}$

KRUŽNO KRETANJE:

- zakon o promeni ugla: $\varphi = \varphi(t)$
- brzina: $v = \dot{s} = R\dot{\varphi}$
- tangencijalno i normalno ubrzanje: $a_T = \ddot{s} = R\ddot{\varphi}$, $a_N = \frac{v^2}{R_k} = \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R} = R\dot{\varphi}^2$

- ukupno ubrzanje:$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = R\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$

RAVNOMERNO (JEDNOLIKO) KRUŽNO KRETANJE ($v = R\dot{\varphi} = const$):

- ugaona brzina: $\dot{\varphi} = \omega = const$
- ukupno ubrzanje: $a = a_N = R\omega^2 = const$

NAPOMENA: kod ravnomernog kružnog kretanja, tangencijalno ubrzanje je jednako nuli, dok normalno postoji i ima pravac poluprečnika krivine i usmereno je ka centru putanje.

8. KINEMATIKA I – PRAVOLINIJSKO KRETANJE

ZADATAK 1: Brzina metka ispaljenog iz puške je $v = 800\,\frac{m}{s}$. Za koje vreme metak pređe rastojanje od $400\ m$? Koliki put pređe čovek za to isto vreme, ako je njegova brzina $v_{č} = 2\,\frac{m}{s}$?

Rešenje:

Vreme za koje metak pređe dato rastojanje određujemo po obrascu:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{400}{800} = 0{,}5\ s.$$

Za to vreme, čovek, krećući se zadatom brzinom pređe:

$s_{č} = 2 \cdot 0{,}5 = 1m.$

ZADATAK 2: Za koje vreme bi telo prešlo put od $200m$ krećući se stalnom brzinom od $72km/h$.

Rešenje:

$s = 200\ m$

$v = 72\ \frac{km}{h} = 72 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 20\,\frac{m}{s}$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{200}{20} = 10\ s$$

ZADATAK 3: Automobil se kreće jednako ubrzano. Poznato je da automobil *za* $40s$ poveća brzinu od $72km/h$ na $144km/h$. Odrediti ubrzanje automobila.

Rešenje:

t = 40s, $v_0 = 72\,\frac{km}{h} = \frac{72000}{3600}\,\frac{m}{s} = 20\,\frac{m}{s}$,

$v_1 = 144\,\frac{km}{h} = \frac{144000}{3600}\,\frac{m}{s} = 40\,\frac{m}{s}$

$a = \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{40-20}{40} = 0{,}50\,\frac{m}{s^2}$

ZADATAK 4: Pri suvom asfaltu, automobil usporava sa $a_1 = 7\,\frac{m}{s^2}$, a pri vlažnom asfaltu ubrzanjem $a_2 = 5\,\frac{m}{s^2}$. Ukoliko se automobil kreće brzinom od $126\,\frac{km}{h}$, izračunati zaustavni put za slučaj vlažnog i za slučaj suvog asfalta.

Rešenje:

$v = 126\frac{km}{h} = 126 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 35\frac{m}{s}$

Zaustavna brzina $je\ v = 0$ u oba slučaja, pa je za slučaj suvog asfalta:

$v_0 = a_1 \cdot t_1$, odnosno $v_0 = a_2 \cdot t_2$, odakle je: $t_1 = \frac{v_0}{a_1}$, a $t_2 = \frac{v_0}{a_2}$,

Pređeni putevi su:

$s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}a_1 {t_1}^2 = \frac{1}{2}a_1 {t_1}^2 = \frac{{v_0}^2}{2 \cdot a_1} = \frac{35^2}{2 \cdot 7} = 87{,}5\text{m}$ – suvi asfalt

$s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}a_2 {t_2}^2 = \frac{1}{2}a_2 {t_2}^2 = \frac{{v_0}^2}{2 \cdot a_2} = \frac{35^2}{2 \cdot 5} = 122{,}5\ m$ – vlažni asfalt

Zaustavni put kod vlažnog kolovoza je duži za 35 m.

ZADATAK 5: Zaustavni put voza je $450\ m$. Ukoliko se voz kretao jednakousporeno i zaustavio se za 30 s, odrediti usporenje a.

Rešenje:

Kako je obrazac za brzinu $v = v_0 - at$ i kako je brzina prilikom zaustavljanja $v = 0$, dobijamo:

$v_0 - at = 0$, pa je $v_0 = at$.

Zamenom $v_0 = at$, u izraz za pređeni put:

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \cdot at^2, \text{ (za } s_0 = 0,)$$

dobijamo:

$s = at^2 - \frac{1}{2} \cdot at^2$, pa je: $s = \frac{1}{2} \cdot at^2$, odnosno:

$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 450}{30^2} = 1\frac{m}{s^2}$.

ZADATAK 6: U jednom trenutku na auto-putu su primećena dva automobila, na odstojanju od $2\ km$ (slika 8.6). Brzina kretanja automobila koji vozi ispred je $108\ km/h$, dok je onog pozadi $126\ km/h$. Za koliko će vremena drugi automobil sustići prvi?

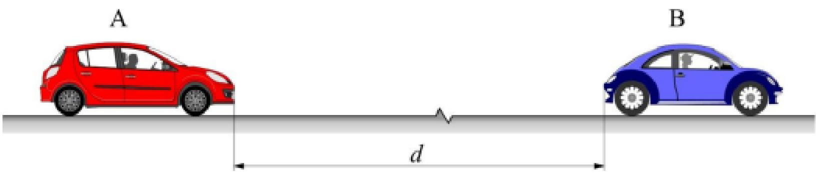
Rešenje:

Ako automobil A treba da sustigne automobil B, od trenutka početka posmatranja, a do sustizanja će preći put s_1, a automobil B će preći put s_2, onda možemo napisati da je:

$s_1 = v_1 \cdot t = d + s_2 = d + v_2 \cdot t$, *pa je:*

$v_1 \cdot t = d + v_2 \cdot t$, odnosno $t \cdot (v_1 - v_2) = d$

$t = \frac{d}{(v_1 - v_2)} = \frac{2\ km}{(126-108)\frac{km}{h}} = \frac{2\ km}{18\frac{km}{h}} = 0{,}111h = 400\ s$



Slika 8.6

ZADATAK 7: Voz, koji se kretao brzinom od 36 km/h, je počeo da koči i zaustavio se posle 1 minut. Ukoliko je voz usporavao sa konstantnim usporenjem, izračunati dužinu traga kočenja.

Rešenje:

Put, koji pređe voz do zaustavljanja, se računa po jednačini:

$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \ (x_0 = 0)$.

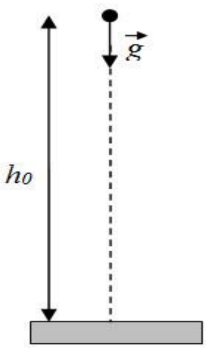
Koristeći izraz da je: $v = v_0 - at$, a da je brzina kod zaustavljanja jednaka nuli, iz izraza $v_0 = at$, $a = \frac{v_0}{t}$, gornji izraz dobija oblik:

$x = v_0 t - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t} t^2 = \frac{1}{2} v_0 t$

Kako je $36 \frac{km}{h} = 36 \frac{1000m}{3600\, s} = 10 \frac{m}{s}$, a $1min = 60s$ onda je:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 60 = 300m$$

ZADATAK 8: Tačka se nalazi na visini $h_0 = 10m$ i počne slobodno da pada bez početne brzine. Za koliko vremena će pasti na zemlju, ako je g = $9{,}81 \frac{m}{s^2}$? Koju brzinu ima tačka pri padu na zemlju? Zanematiti uticaje sredine.



Slika 8.8

Rešenje:

Tačka pada bez početne brzine, uz pomoć ubrzanja sile zemljine teže. Pređeni put je po obrascu:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Ako koordinatni sistem vežemo za početni položaj tačke, dobićemo:

$s = \frac{1}{2}g\,t^2$. Odavde je $2 \cdot s = g\,t^2$. Kada tačka padne na zemlju, pređeni put je: $s = h_0 = 10\ m$.

Odavde je ${t_1}^2 = \frac{2 \cdot s}{g} = \frac{2 \cdot 10}{9{,}81}$, pa je $t_1 = 1{,}43\ s$

Brzina se izračunava po obrascu: $v = v_0 + gt$. Kako je početna brzina, v_0, jednaka nuli, obrazac se svodi na: $v = gt$.

U trenutku pada, proteklo je $t_1 = 1{,}43\ s$ od početka slobodnog pada.

Otuda je brzina $v_1 = g \cdot t_1 = 9{,}81 \cdot 1{,}43 = 14{,}03\,\frac{m}{s}$.

ZADATAK 9: Telo je bačena vertikalno uvis sa početnom brzinom od $15\ \frac{m}{s}$. Izračunajte visinu penjanja tela kao i vreme koje protekne od trenutka bacanja tela do pada na zemlju.

Rešenje:

Tokom kretanja tela vertikalno naviše, brzina se menja po obrascu:

$$v = v_0 - gt.$$

U trenutku dostizanja maksimalne visine, brzina je 0, pa je: $v_1 = 0 = v_0 - g \cdot t_1$.

Odavde je vreme penjanja : $t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{15}{9{,}81} = 1{,}53\ s$.

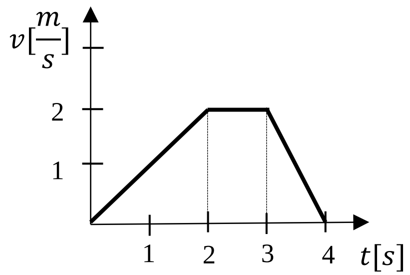
Visina do koje se telo popne je:$h = s = s_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g {t_1}^2$.

Kako je $s_0 = 0$, obrazac se svodi na:

$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_1}^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{{v_0}^2}{g^2} = \frac{{v_0}^2}{2g} = 11{,}47\ m$.

Ukupno vreme putovanja tela je: $t_u = 2 \cdot t_1 = 3{,}06\ s$.

ZADATAK 10: Zakon promene brzine kretanja tela tokom vremena dat je grafikom, na slici 8.10. Izračunati ubrzanja po intervalima vremena.



Slika 8.10

Rešenje:

Tokom prvog intervala, tokom kog je kretanje trajalo $t_1 = 2s$, početna brzina je bila $v_0 = 0\,\frac{m}{s}$, krajnja brzina je $v_1 = 2\ \frac{m}{s}$.

Iz izraza: $v_1 = v_0 + a_1 \cdot t_1 = a_1 \cdot t_1$, dobijamo da je: $a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{2}{2} = 1\ \frac{m}{s^2}$.

Pređeni put tokom prvog intervala je:

$$s_1 = \frac{1}{2}\, a_1 \cdot {t_1}^2 = \frac{1}{2}\frac{v_1}{t_1} \cdot {t_1}^2 = \frac{1}{2} v_1 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2m.$$

Kako je brzina tokom drugog intervala (koji traje $t_2 = 1s$) konstantna (brzina v_1) telo se kreće ravnomerno i pređe put:

$$s_2 = v_1 \cdot t_2 = 2 \cdot 1 = 2m.$$

Tokom trećeg intervala početna brzina sa početka intervala (v_1) padne za $t_3 = 1s$ na $0\frac{m}{s}$, pa se brzina tokom tog intervala (v_3) menja po zakonu: $v = v_1 - a_3 \cdot t$.

Brzina na kraju trećeg intervala je 0, pa je: $v_3 = v_1 - a_3 \cdot t_3 = 0$.

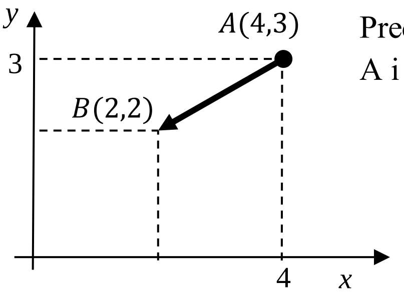
Na osnovu ovoga je: $v_1 = a_3 \cdot t_3$.

Kako je $t_3 = 1s$, dobija se da je $a_3 = \frac{v_1}{t_3} = \frac{2}{1} = 2\,\frac{m}{s^2}$, tako da je:

$$s_3 = v_1 \cdot t_3 - \frac{1}{2}\, a_3 \cdot {t_3}^2 = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 = 1m.$$

Ukupni pređeni put je: $s = s_1 + s_2 + s_3 = 2 + 2 + 1 = 5m$.

ZADATAK 11: Krećući se pravolinijski u ravni *xOy* materijalna tačka iz položaja A (4,3) dospe u položaj B(2,2). Koliki put je pri tome prešla tačka? Dužine su u metrima.



Slika 8.11

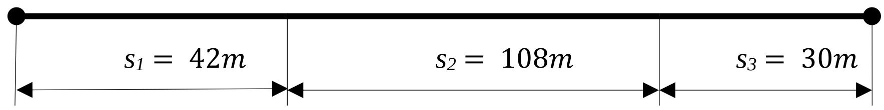
Rešenje:

Pređeni put je jednak dužini duži između tačaka A i B, pa računamo:

$$s = \overline{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(2-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}\text{ m}$$

ZADATAK 12: Trkač za prvih $6s$ pređe $42m$, za sledećih $12s$ pretrči $108m$, a za poslednjih $6s$ pređe $30m$ (slika 8.12). Odrediti srednju brzinu za svaki deo puta.

Rešenje:



Slika 8.12

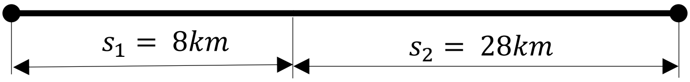
$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{42\,m}{6\,s} = 7\,\frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{108\,m}{12\,s} = 9\,\frac{m}{s}$$

$$v_3 = \frac{s_3}{t_3} = \frac{30\ m}{6\ s} = 5\ \frac{m}{s}.$$

ZADATAK 13: Voz pređe 8 km brzinom od 32 $\frac{km}{h}$, a sledećih 28 km pređe brzinom od 56 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (slika 8.13). Kolika je srednja brzina voza?

Rešenje:
Nacrtaćemo šemu kretanja i sa nje ćemo steći utisak o brzinama i pređenim putevima.



Slika 8.13

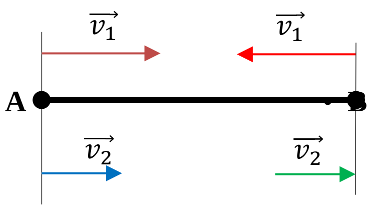
$$v_{sr} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{8 + 28}{t_1 + t_2} = \frac{36}{0{,}25 + 0{,}5} = \frac{36}{0{,}75} = 48\ \frac{km}{h}$$

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{8\ km}{32 \frac{km}{h}} = 0{,}25\ h$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{28\ km}{56 \frac{km}{h}} = 0{,}5\ h$$

ZADATAK 14: Avion leti iz tačke A u tačku B brzinom od 450 km/h u odnosu na vazduh. U pravcu leta u istom smeru stalno duva vetar, čija je brzina 50 km/h. Rastojanje između A i B je 2000 km. Koliko vremena treba avionu za ceo put AB i BA?

Rešenje:



$$v_A = v_1 + v_2 = 450 + 50 = 500 \frac{km}{h}$$

Slika 8.14

$$t_1 = \frac{s}{v_A} = \frac{2000\ km}{500 \frac{km}{h}} = 4\ h$$

$$v_B = v_1 - v_2 = (450 - 50)\ \frac{km}{h} = 400\ \frac{km}{h}$$

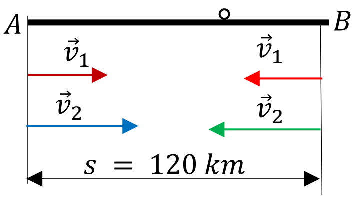
$$t_2 = t_B = \frac{2000\ km}{400\frac{km}{h}} = 5\ h \qquad t = t_1 + t_2 = 4h + 5h = 9h$$

ZADATAK 15: Dva grada na reci su udaljena jedan od drugog $s = 120\ km$. Između njih saobraća rečni tramvaj, koji to rastojanje pređe za $t_1 = 3\ h$, kada ide niz reku, a za $t_2 = 6\ h$, kada ide uz reku (slika 8.15). Kolika je brzina reke u odnosu na obalu?

Rešenje:

$$v_{1sr} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{120\ km}{3\ h} = 40\ \frac{km}{h}$$

$$v_{2sr} = \frac{s_1}{t_2} = \frac{120\ km}{6\ h} = 20\ \frac{km}{h}$$



Slika 8.15

Islučaj:

$$s = t_1 \cdot (v_1 + v_2) \Rightarrow 3v_1 + 3v_2 = 120 / \cdot (-2)$$

$$v_1 + v_2 = \frac{120}{3}$$

II slučaj:

$$s = t_2 \cdot (v_1 - v_2) \Rightarrow 6v_1 - 6v_2 = 120$$

$$-6v_1 - 6v_2 = -240$$

$$6v_1 - 6v_2 = 120$$

$$-12v_2 = -120$$

Nakon sređivanja ovih jednačina dobijamo: $v_2 = 10\ \frac{km}{h}$.

Iz uslova: $v_1 + v_2 = 40\frac{km}{h}$, dobijamo: $v_1 = 40 - v_2 = 30\ \frac{km}{h}$

ZADATAK 16: Krećući se brzinom $v_o = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, automobil se zaustavi za $t = 0{,}5\ s$. Koliko je usporenje automobila? Koliki put pređe automobil za to vreme?

Rešenje:

Polazimo od osnovnih jednačina kinematike.

$$v = v_0 - at$$

$$a \cdot t = v_0 - v$$

$$a = \frac{v_0}{t} = \frac{20\frac{m}{s}}{0{,}5\ s} = 40\ \frac{m}{s^2}$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 20 \cdot 0{,}5\ s - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0{,}5^2 = 10 - 5 = 5m.$$

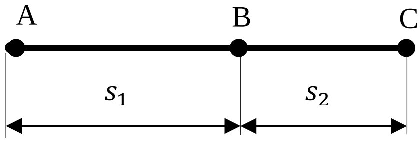
ZADATAK 17: Brzina nekog tela se promeni od $v_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ na $v_2 = 12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, za vreme $\Delta t = 5s$. Koliko je ubrzanje tela i koliki je put telo prešlo za ovo vreme?

Rešenje:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{12-2}{5} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 = 2\,\frac{m}{s} \cdot 5s + \frac{1}{2}\, 2\,\frac{m}{s^2} \cdot 5s^2 = 10\,m + 25\,\mathrm{m} = 35\,m$$

ZADATAK 18: Iz mašinske puške izleti zrno brzinom $v_1 = 700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i na udaljenosti $d = 2\,km$ udari o tlo brzinom $v_2 = 670\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, pri čemu kroz tlo pređe put $s_2 = 0{,}5\ m$ i zaustavi se. Koliko je usporenje zrna kroz vazduh i tlo? Oba kretanja smatrati ravnomerno usporenim.



Slika 8.18

Rešenje:

I deo kretanja – od A do B:

$$s_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{2} \cdot a t_1^{\,2} \rightarrow d = v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1 - v_2}{t} \cdot t_1^2$$

$$v_2 = v_1 - at$$

$$at = v_1 - v_2$$

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t}$$

$$d = v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot at^2$$

$$d = v_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1 - v_2}{t_1} \cdot t_1^2$$

$$d = v_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2}\,(v_1 - v_2) \cdot t_1$$

$$d = t_1 \cdot [\,v_1 - \frac{1}{2}\,v_1 + \frac{1}{2}\,v_2]$$

$$d = t_1 \cdot [\frac{1}{2}\,v_1 + \frac{1}{2}\,v_2]$$

$$t_1 = \frac{d}{\frac{v_1 + v_2}{2}} = \frac{2 \cdot d}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 2000}{700 + 670} = 2{,}920\ \mathrm{s}$$

$$a_1 = \frac{v_1 - v_2}{\mathrm{t}} = \frac{700 - 670}{2{,}92} = 10{,}27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad [usporenje]$$

II deo kretanja - od B do C:

$$v_2 = 670\,\frac{m}{s}$$

$$v_3 = 0\,\frac{m}{s}$$

$$s_2 = v_2 t_2 - \frac{1}{2}\, a_2 t_2^{\,2}$$

$$s_2 = v_2 t_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2}{t_2} \cdot t_2^{\,2}$$

$s = 0{,}5\,m$ $\qquad$ $s_2 = v_2 t_2 - \frac{1}{2} v_2 t_2 = \frac{1}{2} v_2 t_2$

$v_3 = v_2 - a_2 \cdot t_2 = 0$

$v_2 = a_2 \cdot t_2$ $\qquad$ $t_2 = \frac{2 \cdot s}{v_2} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{670} = 1{,}49 \cdot 10^{-3} s$

$a_2 = \frac{v_2}{t_2}$

$a_2 = \frac{v_2}{t_2} = \frac{670 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}49 \cdot 10^{-3}\mathrm{s}} = 449{,}66 \cdot 10^{3}\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

9. KINEMATIKA II- KRIVOLINIJSKO KRETANJE

ZADATAK 1: Materijalna tačka M se kreće u prostoru prema jednačinama kretanja $x = x(t) = 2 + 3t$; $y = y(t) = 5 + 4t$; $z = z(t) = 3 + 5t$, (*x*,*y*,*z* – u cm, *t* u sec). Naći jednačinu putanje, brzinu i ubrzanje tačke.

Rešenje:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 3t \longrightarrow t = \frac{x-2}{3} \\ y &= 5 + 4t \longrightarrow t = \frac{y-5}{4} \\ z &= 3 + 5t \longrightarrow t = \frac{z-3}{5} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-3}{5}$$

Ovo je jednačina prave linije, što znači da je trajektorija prava linija u prostoru

Kada je $t = 0$, dobijamo početne koordinate:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ y_0 &= 5 \\ z_0 &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad M_0\,(2, 5, 3) - \text{ koordinate tačke u početnom trenutku.}$$

Brzinu tačke nalazimo preko njenih projekcija na ose**.** Projekcije su prvi izvodi parametarkih jednačina kretanja po osama.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 3 \\ v_y &= \dot{y} = 4 \\ v_z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}\,\frac{cm}{s} = \text{const}$$

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v} = \frac{3}{5\sqrt{2}};\ \cos\beta_v = \frac{v_y}{v} = \frac{4}{5\sqrt{2}};\ \cos\gamma_v = \frac{v_z}{v} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

Ubrzanje tačke dobijamo preko projekcija na ose. Svaka komponenta ubrzanja u Dekartovom koordinatnom sistemu predstavlja prvi izvod jednačine promene brzine po izabranoj osi.

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = 0 \\ a_y &= \dot{v}_y = 0 \\ a_z &= \dot{v}_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad a = 0$$

Dakle, ubrzanje materijalne tačke je nula, što znači da se kreće jednoliko ravnomerno.

ZADATAK 2: Odrediti brzinu i ubrzanje tačke u položaju nakon $t = 3s$, ako je dat vektor položaja $\vec{r} = (t + 3) \cdot \vec{\imath} + (2t^2 - 4) \cdot \vec{\jmath}$.

Rešenje:

Iz jednačine vektora položaja:

$x(t) = t + 3$, pa je $v_x(t) = \dot{x}(t) = 1\frac{m}{s}$, a $a_x(t) = \ddot{x}(t) = 0\ \frac{m}{s^2}$;

$y(t) = 2t^2 - 4$, pa je $v_y(t) = \dot{y}(t) = 4t$,a $a_y(t) = \ddot{y}(t) = 4\frac{m}{s^2}$

Nakon $t = 3\,s$, $v_x(3) = 1\frac{m}{s}$, a $v_y(3) = 4 \cdot 3 = 12\frac{m}{s}$, pa je ukupna brzina:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{1^2 + 12^2} = \sqrt{145} = 12{,}04\frac{m}{s}$$

Ubrzanje je konstantno i uvek je: $a = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4\frac{m}{s^2}$.

ZADATAK 3: Tačka se kreće po prostornoj putanji čiji je radijus vektor $\vec{r} = 4\sin 2t \cdot \vec{\imath} + 4\cos 2t \cdot \vec{\jmath} + (6t - 2) \cdot \vec{k}$,($r \to cm$; t$\to s$). Naći ort tangente $\vec{T}$ i ort glavne $\vec{N}$ u funkciji vremena, sračunati krivinu K i poluprečnik krivine R_K.

Rešenje:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}; \qquad \vec{N} = \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 4 \cdot \cos 2t \cdot 2\vec{\imath} + 4 \cdot (\sin 2t) \cdot 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 8\cos 2t \cdot \vec{\imath} - 8\sin 2t \cdot \vec{\jmath} + 6 \cdot \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{64\cos^2 2t + 64\sin^2 2t + 36} = \sqrt{64 + 36} = 10\frac{cm}{s}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{8\cos 2t\vec{\imath} - 8\sin 2t\vec{\jmath} + 6k}{10}$$

$$\vec{T} = \frac{4}{5}\cos 2t\,\vec{\imath} - \frac{4}{5}\sin 2t\,\vec{\jmath} + \frac{3}{5}\vec{k}$$

$$K \cdot \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds}; \quad K|\vec{N}| = |\frac{d\vec{T}}{ds}| \quad \vec{N} = \Delta \qquad K = |\frac{d\vec{T}}{ds}|$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{4}{5}\sin 2t \cdot 2\vec{\imath} - \frac{4}{5} \cdot \cos 2t \cdot 2\vec{\jmath} + 0 \cdot \vec{k} = -\frac{8}{5}\sin 2t \cdot \vec{\imath} - \frac{8}{5}\cos 2t \cdot \vec{\jmath}$$

$$\frac{ds}{dt} = v = 10\frac{cm}{s}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{-2/5\ \sin 2t\,\vec{\imath} - 2/5\ \cos 2t\vec{\jmath}}{10} = -\frac{4}{25}\sin 2t\,\vec{\imath} - \frac{4}{25}\cos 2t\,\vec{\jmath}$$

$$|\frac{d\vec{T}}{ds}| = \sqrt{\frac{16}{625}\sin^2 2t + \frac{16}{625}\cos^2 2t} = \sqrt{\frac{16}{625}(\sin^2 2t)} = \frac{4}{25}$$

$$K = |\frac{d\vec{T}}{ds}| = \frac{4}{25}$$

$R_K = \frac{1}{K} = \frac{25}{4} = \ 6{,}25cm$

$\vec{N} = \frac{1}{K} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{25}{4} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{25}{4} [- \frac{4}{25}\ sin2t \cdot \vec{\imath}\, \frac{4}{25} cos\, 2t \cdot \vec{\jmath}];$

$\vec{N} = - sin\, 2t \cdot \ \vec{\imath}$ - $cos\, 2t \cdot \ \vec{\jmath}$

ZADATAK 4: Materijalna tačka se kreće u ravni $x0y$ shodno jednačinama kretanja $x = x(t) = bcos2t;\ y = bcost, gde$ je b pozitivna konstanta dimenzije dužine (cm), a t je vreme.

a) Naći liniju putanje tačke i definisati trajektoriju tačke,

b) Naći brzinu i ubrzanje tačke i

c) Naći brzinu i ubrzanje tačke u trenutku kada se ona prvi put nađe na y osi.

Rešenje:

a) Određivanje linije putanje i trajektorije tačke

Sredićemo prvo jednačinu kretanja po x-osi.

$x = \ x(t) = b\ cos2t = b(cos^2t - sin^2t) = b(cos^2t - 1 + cos^2t)$

Konačno je:

(1) $x = b(2cos^2\ t - 1)$

Transformisaćemo jednačinu kretanja materijalne tačke po y osi u pogodan oblik za dalji rad:

$y\ =\ y(t)\ =\ b\ cost$

(2) $cost\ = \frac{y}{b}$.

Da bismo dobili zakon kretanja materijalne tačke, u jednačinu (1) ubacujemo dobijenu zavisnost (2):

$x\ =\ b\ (2\ \frac{y^2}{b^2} - 1) =\ b\ (\frac{2y^2}{b^2}\ -\ \frac{b^2}{b^2}) = \frac{b}{b^2}\ (2y^2\ -\ b^2) = \frac{2y^2}{b} - b$

$\frac{2y^2}{b} = x + b$

$2y^2 = b\ \cdot\ (x\ +\ b)$

$y^2 = \frac{b}{2} \cdot (x +\ b)\ \rightarrow ovo\ je\ jedna\check{c}ina\ parabole.$

Dakle, linija po kojoj se kreće materijalna tačka je parabola.

Određivanje min i max funkcije:

Kako je $x = b \cdot (2cos^2\ t - 1)$, a $y^2\ = \frac{b}{2}\ \cdot (x +\ b)$ treba proveriti vrednosti izraza za specifične vrednosti $\cos t$. Tako je :

- za $cost = 0 \rightarrow x_{min} = b \cdot (0-1) = -b \rightarrow y^2 = \frac{b}{2} \cdot (-b+b) = 0 \rightarrow$ $y = 0$
- za $cost = 1 \rightarrow x_{max} = b \cdot (2-1) = b \rightarrow y^2 = \frac{b}{2} \cdot (b+b) = b^2$ $\rightarrow y = \pm b$

Može se zaključiti da je: $y_{min} = -b$, $y_{max} = b$.

b) Određivanje brzine i ubrzanja materijane tačke:

Po definiciji, brzina je prvi izvod a ubrzanje drugi izvod zakona kretanja materijalne tačke.

$x = b \cdot cos\,2t$

$\dot{x} = b \cdot (-sin2t) \cdot 2 = -4\,b \cdot sin\ t \cdot cost = v_x$

$\ddot{x} = -2b \cdot cos\,2t \cdot 2 = -4b \cdot \cos 2t = -4b\,(cos^2t - sin^2t) = a_y$

$y = b \cdot \cos t$

$\dot{y} = -b \cdot \sin t = v_y$

$\ddot{y} = -b \cdot \cos t = a_y$

Intenzitet brzine materijalne tačke predstavlja koren zbira kvadrata prvih izvoda zakona kretanja po x i y osi.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-4 \cdot b \cdot sint \cdot cost)^2 + (-b \cdot sint)^2}$$

$$v = \sqrt{16 \cdot b^2 \cdot sin^2t \cdot cos^2t + b^2 \cdot sin^2t}$$

$$v = b \cdot sint \cdot \sqrt{1 + 16 \cdot cos^2t}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-4b)^2 \cdot (cos^2t - sin^2t)^2 + b^2 \cdot cos^2t}$$

$$a = \sqrt{16 \cdot b^2 \cdot (cos^4t + sin^4t - 2sin^2t \cdot cos^2t) + b^2 \cdot cos^2t}$$

Koristeći jednakost: $\cos 2t = cos^2t - sin^2t$, izraz dobija oblik:

$$a = b \cdot \sqrt{16 \cdot (\cos 2t)^2 + cos^2t}$$

c) U trenutku kada se materijalna tačka nađe na *y* osi, koordinata *x = 0*, pa je:

$$b \cdot cos2t = 0 \rightarrow cos2t = 0 \rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

Sada ćemo naći vrednosti brzine i ubrzanja za dobijenu vrednost t, zamenom ove vrednosti, $t = \frac{\pi}{4}$ u izraze za brzinu i ubrzanje.

$$\dot{x}_1 = -2 \cdot b \cdot sin2t = -2 \cdot b \cdot \sin(2\frac{\pi}{4}) = -2 \cdot b \cdot sin\frac{\pi}{2} = -2b$$

$$\dot{y}_1(t = \frac{\pi}{4}) = -b \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\ddot{x}_1 = -4b \cdot \left(cos^2\frac{\pi}{4} - sin^2\frac{\pi}{4}\right) = -4b \cdot 0 = 0$

$\ddot{y}_1 = -b \cdot sin\frac{\pi}{4} = -b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$v = \sqrt{(-2b)^2 + (-\frac{b\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{4b^2 + \frac{2b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4b^2+2b^2}{4}} \rightarrow v = \frac{b}{2}\sqrt{6}$

$a= \sqrt{0^2 + \frac{2b}{4}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Pripadajući uglovi su:

$\cos\alpha_v = \frac{\dot{x}_1}{v} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\beta_v = \frac{\dot{y}_1}{y} = -\frac{1}{3}$

$\cos\alpha_a \frac{\ddot{x}_1}{a} = 0$; $\quad$.$\cos\beta_a = \frac{\ddot{y}_1}{a} = -1$

ZADATAK 5: Tačka se kreće u ravni xOy po delu, čija je jednačina $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$, pri čemu je projekcija vektora brzine na 0x osu $v_x = \dot{x}$ =4cm/s. Tačka počinje kretanje iz položaja čija je apscisa $x_0 = 2$.

a)Naći liniju putanje tačke i objasniti;

b)Naći brzinu i ubrzanje tačke u funkciji vremena i graf brzine;

c)Naći vektor brzine tačke u položaju određenom $x_1 = 4cm$

Rešenje:

Sređivanjem jednačine putanje, dobićemo oblik putanje:

$x^2 - 4x - 4y + 16 = 0 \rightarrow 4y = x^2 - 4x + 16;$

Ako izrazimo ovu jednačinu po y, dobijamo:

(1) $y = \frac{x^2}{4} - x + 4.$

Iz matematike je poznato da je ovo *jednačina parabole.*

Za $x = 0 \rightarrow y = 4$

Prvi izvod zakona puta po x je: $\dot{y} = \frac{1}{4} \cdot 2x - 1 = \frac{x}{2} - 1$

Komponenta brzine po y osi je jednaka nuli kada je $\dot{y} = 0$ pa je tada: $\frac{x}{2} - 1 = 0$, odnosno $\frac{x}{2} = 1$ tj. $x = 2$.

Za $x = 2 \rightarrow y = \frac{4}{4} - 2 + 4$, odnosno: $y = 3$.

Ovo znači da je projekcija brzine po y osi jednaka nuli, kada tačka ima koordinate $A(2,3)$.

Jednačinu promene koordinate x po vremenu ćemo dobiti na osnovu zadatog uslova $v_x = \dot{x}$ = 4cm/s uz pomoć integracije.

$\dot{x} = 4cm/s \rightarrow x = \int \dot{x}dt = \int_0^t 4dt = 4t + C.$

Iz početnih uslova je: $C = x_0$ =*2*, pa je traženi zakon promene koordinate *x*:

(2) $x = 4t + 2$

Sada ćemo jednačinu (2) uključiti u izraz (1), da bismo dobili promenu koordinate y po vremenu.

$$y = \frac{x^2}{4} - x + 4 = \frac{(4t+2)^2}{4} - 4t + 4$$
$$y = \frac{16t^2+16t+4}{4} - 4t - 2 + 4 = 4t^2 + 4t + 1 - 4t + 2$$
$$y = 4t^2 + 3$$

b) Određivanje brzine i ubrzanja

Tekstom zadatka nam je zadata brzina po x osi, $\dot{x} = \frac{4cm}{s} = const$. Da bismo odredili brzinu po y osi, uradićemo prvi izvod zakona kretanja po y osi.
$\dot{y} = 4 \cdot 2t = 8t \rightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{16 + 64t^2} = 4\sqrt{1 + 4t^2}$

Pripadajući uglovi koje vektor brzine gradi sa osama su:
$\cos\alpha_v = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{4}{4\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$; $\cos\beta_v = \frac{8t}{4\sqrt{1+4t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}$

Kako je ubrzanje drugi izvod puta, a prvi brzine, računato po koodrinatama, to je:
$a_x = \ddot{x} = 0$
$a_y = 8 \rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 8$

c)Vektor brzine u zadatompoložaju je $x_1 = 4cm$, što ćemo iskoristiti da iz zakona kretanja po x osi dobijmo vreme kretanja do postizanja ove vrednosti.

$x_1 = 4t_1 + 2 = 4$
$4t_1 + 2 = 4, 4t_1 = 2$
$t = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}s$ – koristimo za određivanje v_y
Kako je: $v_y = 8t$, a zadati trenutak $je\ t_1 = \frac{1}{2}s$, dobijamo: $v_{y1} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4cm/s$
v_x= 4cm/s
Brzina u trenutku t_1 je:
$v = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$cm/s

ZADATAK 6: Odrediti ugaono ubrzanje u funkciji vremena ako je dat zakon promene ugaone brzine: $4t^2 - 8$. Koliko je ugaono ubrzanje u trenutku $t = 3s$?

Rešenje:
Kako je zakon promene ugaone brzine:$\omega = 4t^2 - 8$, a ugaono ubrzanje je prvi izvod ugaone brzine, to je:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 4 \cdot 2t - 0 = 8t$$

U trenutku kada je $t = 3s$, ugaono ubrzanje je: $\varepsilon = 8 \cdot 3 = 24 \frac{rad}{s^2}$.

ZADATAK 7: Vektor brzine materijalne tačke, koja započinje kretanje se menja prema zakonu: $\vec{v} = 16t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j} + (5t + 2)\vec{k}$, pri čemu je t dato u sekundama. Odrediti vektor ubrzanja i njegov intenzitet u trenutku $t_1 = 2s$. Koje su koordinate položaja tačke u tom trenutku?

Rešenje:

Za određivanje intenziteta vektora brzine za $t_1 = 2s$, vrednost brzine je:

$$\vec{v} = 64\vec{i} + 32\vec{j} + 12\vec{k}$$

Intenzitet vektora brzine:

$$v = \sqrt{64^2 + 32^2 + 12^2} = 72{,}55\frac{m}{s}$$

Ubrzanje je prvi izvod brzine, pa je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[16t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j} + (5t + 2)\vec{k}] = 32t\vec{i} + 12t^2\vec{j} + 5\vec{k}\ \frac{m}{s^2}$$

Kada je $t_1 = 2s$, vektor ubrzanja je:

$$\vec{a} = 64\vec{i} + 48\vec{j} + 5\vec{k}$$

Intenzitet vektora ubrzanja:

$$a = \sqrt{64^2 + 48^2 + 5^2} = 80{,}15\frac{m}{s^2}$$

Da bi se odredili koordinate, mora se izvršiti integraljenje projekcija vektora brzine, koje su:

$$v_x = 16t^2,\ v_y = 4t^3,\ v_z = (5t + 2),$$

tako da je:

$$dx = v_x dt = 16t^2 dt, \text{pa je } x = \int 16t^2 dt = \frac{16}{3}t^3 + C_1$$

$$dy = v_y dt = 4t^3 dt, \text{ pa je } y = \int 4t^3 dt = t^4 + C_2$$

$$dz = v_z dt = (5t + 2)dt, \text{ pa je } z = \int (5t + 2)dt = \frac{5}{2}t^2 + 2t + C_3$$

Konstante $C_1, C_2\ i\ C_3$ se dobijaju iz početnih uslova, kada su $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, pa su konstante jednake nuli. Tako su jednačine kretanja:

$$x = \frac{16}{3}t^3, y = t^4 \text{ i } z = \frac{5}{2}t^2 + 2t$$

a za $t_1 = 2s$, koordinate su: $x(2) = 42{,}67m, y(2) = 16m\ i\ z(2) = 14m$.

ZADATAK 8: Jednačina kretanja tela ima oblik: $s = 6t + 0{,}9t^2$. Odrediti zakon promene brzine i ubrzanja, početnu brzinu kao i pređeni put, brzinu i ubrzanje $10s$ od početka kretanja.

Rešenje:

Kako brzina predstavlja prvi izvod jednačine kretanja, a ubrzanje drugi, dobićemo jednačine promene brzine i ubrzanja:

$$\dot{s} = v = 6 + 0{,}9 \cdot 2t = (6 + 1{,}8t)\frac{m}{s}$$

$$\ddot{s} = a = \dot{v} = 1{,}8\frac{m}{s^2}$$

U početnom trenutku, kada je $t = 0$:

- $s_0 = s(0) = 6 \cdot 0 + 0{,}9 \cdot 0^2 = 0m$
- $v_0 = v(0) = 6 + 1{,}8 \cdot 0 = 6\frac{m}{s}$
- $a = 1{,}8\frac{m}{s^2} = const.$

Nakon $t = 10s$, tražene vrednosti su:

- $s(10) = 6 \cdot 10 + 0{,}9 \cdot 10^2 = 150m$
- $v_0 = v(0) = 6 + 1{,}8 \cdot 10 = 24\frac{m}{s}$
- $a = 1{,}8\frac{m}{s^2} = const.$

ZADATAK 9: Jednačine kretanja tačke u ravni su: $x(t) = t \ i \ y(t) = t^2$.Odrediti poluprečnik krivine u trenutku kada je $t = 1s$.

Rešenje:

Kako je poluprečnik krivine $R_k = \frac{v^2}{a_N}$, a $a_T = \left|\frac{\dot{x}\cdot\ddot{x}+\dot{y}\cdot\ddot{y}}{v}\right|$, a $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$, moramo odrediti prve i druge izvode parametarskih jednačina kretanja i odrediti vrednost brzine za $t = 1s$.

- $x = x(t) = t\,[m],\ \dot{x} = v_x = 1[\frac{m}{s}],\ \ \ddot{x} = a_x = \dot{v}_x = 0[\frac{m}{s^2}]$
- $y = y(t) = t^2[m],\ \dot{y} = v_y = 2t[m],\ \ \ddot{y} = a_y = \dot{v}_y = 2[\frac{m}{s^2}]$

Za $t = 1s$ dobijamo sledeće vrednosti traženih veličina:

- $x(1s) = 1m,\ \dot{x}(1s) = 1\frac{m}{s}, \ddot{x} = 0\frac{m}{s^2}$
- $y(1s) = 1m,\ \dot{y}(1s) = 2\frac{m}{s}, \ddot{y}(1s) = 2\frac{m}{s^2}$

Brzinu v, ubrzanje i a_T za $t = 1s$ dobijamo koristeći gore dobijenih vrednosti:

- brzina: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- ukupno ubrzanje: $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2\left[\frac{m}{s^2}\right]$

- tangencijalno ubrzanja: $a_T = \left|\frac{\dot{x}\cdot\ddot{x}+\dot{y}\cdot\ddot{y}}{v}\right| = \left|\frac{1\cdot 0+2\cdot 2}{\sqrt{5}}\right| = \frac{4}{\sqrt{5}}\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Sada određujemo a_N:

$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{2^2 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{20-16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Konačno: $R_k = \frac{v^2}{a_N} = \frac{5\sqrt{5}}{2}[m]$.

ZADATAK 10: Brzina automobila se menja po zakonu: $v = (3t^2 + 2t + 1)\frac{m}{s}$. Odrediti položaj ovog automobila nakon $t = 3s$.

Rešenje:

Kako je $s = \int_0^t v dt$, dobijamo da je: $s = \int_0^t (3t^2 + 2t + 1)dt$, odnosno:

$$s = 3\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} + t + C_1.$$

Kako je u početnom trenutku $t = 0$, $s_0 = 0$, dobijamo da je $C_1 = 0$, pa je zakon promene položaja (pređeni put):

$$s = t^3 + t^2 + t$$

U trenutku kada je $t = 3s$, dobija se da je: $s = 3^3 + 3^2 + 3 = 39m$.

ZADATAK 11: Vektor brzine tela se menja po zakonu: $\vec{v}(t) = 5\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}$. Kolika je promena vektora položaja između trenutaka $t_1 = 5s\ i\ t_2 = 10s$?

Rešenje:

Kako je brzina prvi izvod vektora položaja, odredićemo prvo zakon promene položaja tela:

$\vec{r}(t) = \int vdt = \int (5\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath} + 4t^2\vec{k})\, dt = 5t\vec{\imath} + 6\frac{t^2}{2}\vec{\jmath} + 3\frac{t^3}{3}\vec{k}$

$$\vec{r}(t) = 5t\vec{\imath} + 3t^2\vec{\jmath} + t^3\vec{k}.$$

Kako se traži promena položaja tela između dva trenutka, onda je to:

$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = 5(t_2 - t_1)\vec{\imath} + 3({t_2}^2 - t_1^2)\vec{\jmath} + ({t_2}^3 - t_1^3)\vec{k}$

$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(10s) - \vec{r}(5s) = 5(10 - 5)\vec{\imath} + 3(10^2 - 5^2)\vec{\jmath} + (10^3 - 5^3)\vec{k}$

$$\overrightarrow{\Delta r} = 25\vec{\imath} + 225\vec{\jmath} + 875\vec{k}$$

ZADATAK 12: Tačka se kreće po krugu poluprečnika $R = 2{,}5\ m$, i obrće se sa 85 o/min. Kolike su ugaona i obimna brzina tačke?

Rešenje:

Kako je $\varphi = 2\pi n$, onda je: $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{85 \cdot 3{,}14}{30} = 8{,}90\,\frac{rad}{s}$

Obimna brzina je: $v = R \cdot \omega = 2{,}5 \cdot 8{,}90 = 22{,}25\,\frac{m}{s}$.

ZADATAK 13: Brzina rezanja nekog obratka je $2\,\frac{m}{s}$, a broj obrtaja u minutu je $150\,\frac{o}{min}$. Koliki je prečnik obratka D?

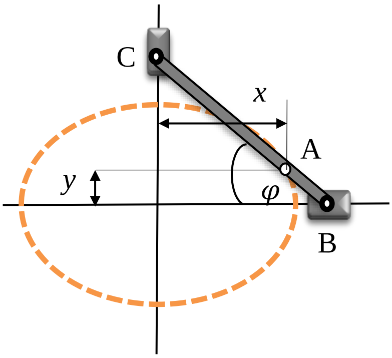
Rešenje:

Kako je $v = R \cdot \omega = R\,\frac{2\pi n}{60} = R\,\frac{\pi n}{30}$, pa je odavde:

$$R = \frac{30 \cdot v}{\pi n} = \frac{30 \cdot 2}{3{,}14 \cdot 150} = 0{,}13m$$

Prečnik $D = 2R = 0{,}26m$.

ZADATAK 14: Tačka A se nalazi na štapu BC (slika 9.14), čiji se krajevi mogu kretati u pravcima osa x i y. Ugao φ se menja po zakonu $\varphi = 3t$. Odrediti zakon kretanja, kao i jednačinu putanje tačke A. ($\overline{CA} = a, \overline{AB} = b, a + b = \overline{CB}$).



Slika 9.14

Rešenje:

Sa slike 9.14 se mogu definisati jednačine kretanja:

$x = \overline{CA} cos\varphi = a \cdot cos3t$

$y = \overline{AB} sin\varphi = b \cdot sin3t$

Zakon puta dobijamo eliminacijom parametra t:

$cos3t = \frac{x}{a}$

$sin3t = \frac{y}{b}$,

a koristeći vezu: $cos^2 3t + sin^2 3t = 1$, dobijamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

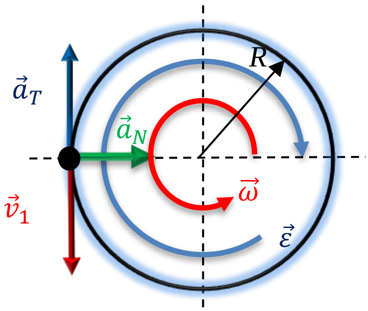
Ovo znači da je putanja tačke A elipsa, sa poluosama a i b.

ZADATAK 15: Krećući se po krugu poluprečnika $R = 100m$ (slika 9.15), materijalna tačka, dobivši usporenje od $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$, nakon $t = 40s$ ima brzinu od $v_1 = 18\,\frac{km}{h}$. Kolika je bila početna brzina?

Rešenje:

Transformišimo zadatu brzinu $v_1 = 18\frac{km}{h} = 18 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}$

Polazimo od obrazaca za izračunavanje brzine i ubrzanja:



$$a^2 = {a_N}^2 + {a_T}^2$$
$$a^2 = \left(\frac{v^2}{r}\right) + r^2\varepsilon^2$$

Slika 9.15

$$\begin{aligned}
{a_{T1}}^2 &= a^2 - {a_{N1}}^2 \\
{a_{T1}}^2 &= \left(0{,}8\frac{m}{s^2}\right)^2 - \left(0{,}25\frac{m}{s^2}\right)^2 \\
a_{T1} &= \sqrt{0{,}64\frac{m^2}{s^2} - 0{,}0625\frac{m^2}{s^2}} \\
a_{T1} &= 0{,}7599\frac{m}{s^2} \\
a_{T1} &\approx 0{,}76\frac{m}{s^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_0 - a_T \cdot t \\
v_0 &= v_1 + a_T \cdot t \\
v_0 &= 5\frac{m}{s} + 0{,}76\frac{m}{s^2} \cdot 40s \\
v_0 &= 5\frac{m}{s} + 30{,}40\frac{m}{s} \\
v_0 &= 35{,}40\frac{m}{s}
\end{aligned}$$

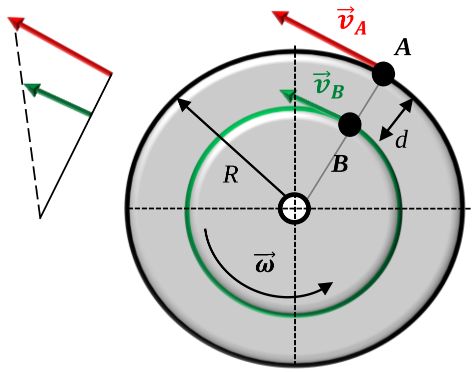
ZADATAK 16: Tačka A, koja se kreće po obodu točka ima obimnu brzinu od $2\ m/s$, dok tačka B, koja je udaljena od tačke A $20\ cm$, ima obimnu brzinu od 0,5 m/s (slika 9.16). Odrediti poluprečnik točka i ugaonu brzinu kojom rotira točak.

Rešenje:

Kako je trenutna obimna brzina proizvod poluprečnika i trenutne ugaone brzine, i kako je poznata brzina tačke A, koja se kreće po obodu diska, poluprečnik se određuje:

$$R = \frac{v_A}{\omega} = \frac{2\frac{m}{s}}{7{,}5s^{-1}} = 0{,}2666\ldots m$$
$$R \approx 0{,}27m$$

Po početnim uslovima, brzine v_A i v_B se izračunavaju:



Slika 9.16

$v_A = R \cdot \omega$
$v_B = (R - d) \cdot \omega$

Postavićemo jednačine iz početnih uslova:

$R \cdot \omega = 2\dfrac{m}{s}$

$(R - 0{,}2)\omega = 0{,}5\ \dfrac{m}{s}$

$R \cdot \omega = 2\frac{m}{s} \quad (-1)$

$R \cdot \omega - 0{,}2\omega = 0{,}5\frac{m}{s}$

$0 \cdot \omega - 0{,}2\omega = -2\dfrac{m}{s} + 0{,}5\dfrac{m}{s} - 0{,}2\omega$

$-0{,}2\omega = -1{,}5\dfrac{m}{s}$

$\omega = \dfrac{1{,}5}{0{,}2} = 7{,}5 s^{-1}$

ZADATAK 17: Po kružnici poluprečnika 12 cm se kreće tačka M brzinom od 6m/s. Koliko iznosi broj obrtaja u minuti?

Rešenje:
Kako jedan puni krug ima 2π radijana, ugao koji pređe tačka krećući se po kružnoj putanji zavisi od broja učinjenih obrtaja, n. Ugaona brzina, pak, zavisi od vremena za koje materijalna tačka obiđe pun krug od 2π radijana.
Kako je $\varphi = 2\pi n$, to je:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

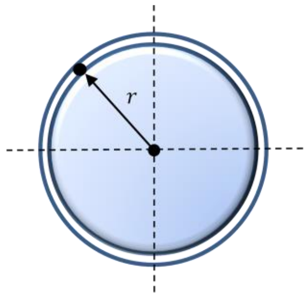
Polazimo od izraza za obimnu brzinu: $v = r \cdot \omega$. Iz ovog izraza se dobija vrednost ugaone brzine:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{6\frac{m}{s}}{0{,}12m} = 50s^{-1} = 50\frac{rad}{s}$$

Kako je $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, to se za n dobija:

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 50s^{-1}}{3{,}14}$$

$$n = 477{,}71\, obr/min$$



Slika 9.17

ZADATAK 18: Izračunati normalno i tangencijalno ubrzanje tačke na obodu diska poluprečnika R = 20cm, u trenutku t = 3s. Disk rotira ubrzano ugaonom brzinom $\omega = 2t - 4$, u smeru kretanja kazaljke na satu. Ucrtati komponente ubrzanja.

Rešenje:

Poluprečnik kružnice po kojoj se kreće materijalna tačka je:

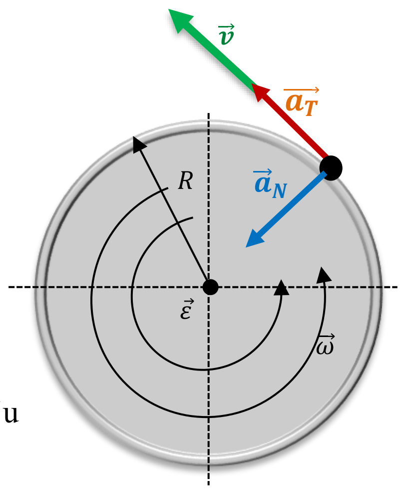
$R = 20cm = 0{,}2m$,

a ugaona brzina se menja po zakonu:

(1) $\omega = 2t - 4$.

Ovo znači da će postojati ugaono ubrzanje/usporenje:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = (2t-4)' = 2\frac{rad}{s^2} = const$$



Slika 9.18

Tangencijalno i normalno ubrzanje se izračunavaju po obrascima:

$$a_T = r \cdot \varepsilon = 0{,}2m \cdot 2\frac{rad}{s^2} = 0{,}4\frac{m}{s^2}$$

$$a_N = r \cdot \omega^2$$

Kako je ugaono ubrzanje konstantno, znači da ne zavisi od vremena. Međutim, vrednost normalnog ubrzanja će zavisiti od trenutka za koji se izračunava, pa se mora naći vrednost ugaone brzine u trenutku $t = 3s$. U jednačinu (1) ćemo zameniti t sa $3s$ i dobiti traženu vrednost ugaone brzine:

$$\omega_{(t=3s)} = 2 \cdot 3 - 4 = 2\frac{rad}{s}$$

Vrednost normalnog ubrzanja u datom trenutku je:

$$a_{N(t=3s)} = r \cdot \omega^2_{(t=3s)} = 0{,}2m \cdot \left(2\frac{rad}{s}\right)^2 = 0{,}8\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 19: Osovina se obrtala sa $n = 90 obr/min$, a posle isključivanja motora, nastavlja da se obrće jednoliko usporeno i zaustavlja se nakon $t = 40s$. Odrediti koliko je obrtaja napravila osovina za to vreme i odrediti ugaono usporenje.

Rešenje:

Kako je dat broj obrtaja u minuti, potrebno je odrediti ugaonu brzinu:

$$\omega = 90\frac{obr}{min} = 90\frac{obr}{60s} = 1,5\frac{obr}{s}$$

Kako jedan obrtaj ima $2\pi\ rad$, ugaona brzina je:

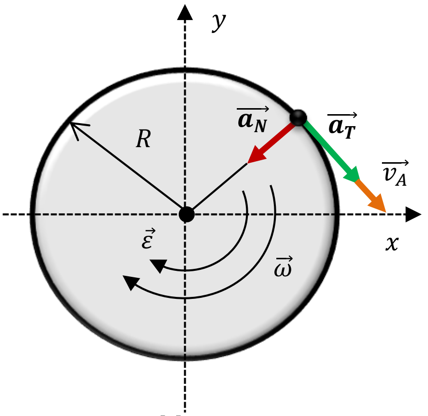
$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 90}{30} = 9,42 s^{-1}$$

Ugaona brzina se menja po zakonu:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

U trenutku zaustavljanja, ugaona brzina je 0, pa je:

$$\omega_0 = \varepsilon \cdot t$$



Slika 9.19

Ugaono ubrzanje je:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{9,42s^{-1}}{40s} = 0,2355 s^{-2}$$

Ugao rotacije se menja po zakonu:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Kako je $\varphi_0 = 0$, ugao koji opiše tačka za $40s$ je:

$$\varphi = 9,42s^{-1} \cdot 40s - \frac{1}{2} \cdot 0,2355 s^{-2} \cdot (40s)^2$$

$$\varphi = 376,8\ rad - 188,4\ rad$$

$$\varphi = 188,4\ rad$$

Kako jedan obrtaj ima 2π radijana, broj napravljenih obrtaja je:

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{188,4}{2 \cdot 3,14} = 30\ obrtaja$$

ZADATAK 20: Točak poluprečnika $r = 10cm$ rotira po zakonu: $\varphi = 1,57 + 3,14 \cdot t + 0,78 \cdot t^2$. Odrediti izraze za ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje. Izračunati ugaono ubrzanje točka i tangencijalno ubrzanje tačke na obodu točka, u trenutku $t = 2s$.

Rešenje:
Poluprečnik točka je: $R = 10cm = 0{,}1m$, a kako je ugaona brzina prvi izvod ugla obrtanja, to je:

$$\omega = \frac{d\varphi}{d_t} = \frac{d(1{,}57 + 3{,}14t + 0{,}78t^2)}{dt} = 3{,}14 + 0{,}78 \cdot 2 \cdot t = 3{,}14 + 1{,}56 \cdot t$$

Ugaono ubrzanje je prvi izvod ugaone brzine, pa je:

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega} = \frac{d(3{,}14 + 1{,}56 \cdot t)}{dt} = 1{,}56\frac{1}{s^2} = 1{,}56\frac{rad}{s^2} = const$$

Tangencijalno ubrzanje je po definiciji jednako prvom izvodu vektora brzine, pa je tako:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{r \cdot d\varphi}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \ddot{\varphi} = r \cdot \varepsilon = 0{,}1m \cdot 1{,}56\frac{rad}{s^2} = 0{,}156\frac{m}{s^2}$$

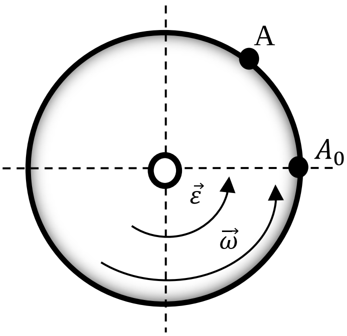
$$\omega(t = 2s) = 3{,}14 + 1{,}56 \cdot 2s = 6{,}26\frac{rad}{s}$$

ZADATAK 21: Zamajac prečnika $r = 0{,}5m$, počinje kretanje iz stanja mirovanja, konstantnim ugaonim ubrzanjem $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ako za $20s$ zamajac napravi $n = 20$ obrtaja, odrediti ugaonu brzinu, broj obrtaja n i ubrzanje tačke na obodu u trenutku $\mathrm{t}_1 = 20\mathrm{s}$.

Rešenje:
Ugao obrtanja se menja po zakonu:

$$(1)\ \varphi = \varphi_{0+}\omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \varphi$$

Na osnovu zadatog broja obrtaja, a svaki ima $2\pi\ radijana$, tačka je opisala ugao:
$\varphi_1 = 2\pi \cdot 200obrt = 125{,}6rad$



Slika 9.21

Kako je kretanje počelo iz mirovanja, jednačina (1) poprima oblik: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2$, pa je:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 125{,}6rad}{(20s)^2} = 0{,}628\frac{rad}{s^2}.$$

Da bi se odredilo ukupno ubrzanje, potrebne su nam obe komponente ubrzanja: tangencijalno i normalno ubrzanje. Intenzitet ukupnog ubrzanja se izračunava po obrascu:

$$a = \sqrt{{a_N}^2 + {a_T}^2}$$

Za određivanje normalnog ubrzanja, potrebno je odrediti ugaonu brzinu koju zamajac ostvaruje nakon $t = 20s$. To je:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot t_1 = 0{,}628\frac{rad}{s^2} \cdot 20s = 12{,}56\ \frac{rad}{s}$$

Primenom poznatih obrazaca se dobijaju komponente ubrzanja:

$$a_{T_1} = r \cdot \varepsilon = 0{,}5m \cdot 0{,}628\frac{rad}{s} = 0{,}314\frac{m}{s^2}$$

$$a_{N_1} = \frac{v_1^2}{R_k} = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{R} = r \cdot \omega_1^2 = 0{,}5m \cdot (12{,}56\frac{rad}{s})^2 = 78{,}8768\frac{m}{s^2}$$

Intenzitet ubrzanja je:

$$a = \sqrt{(78{,}8768\frac{m}{s})^2 + \left(0{,}314\frac{m}{s}\right)^2} = 78{,}88\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 22: Automobil se kreće po putu, koji je oblika kruga, sa prečnikom krivine $2\ km$. Ukoliko je poznato da je ukupno ubrzanje automobila $1\ \frac{m}{s^2}$, a brzina u posmatranom trenutku $72\ \frac{km}{h}$, odrediti kolika su normalna i tangencijalna komponenta ubrzanja.

Rešenje:

Brzina tela u posmatranom trenutku je $72\ \frac{km}{h} = 72 \cdot \frac{1000}{3600}\ \frac{m}{s} = 20\frac{m}{s}$, a poluprečnik je: $R\ =\ 1000\ m$.

Normalno ubrzanje se izračunava:

$$a_N\ = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{1000} = 0{,}4\frac{m}{s^2}$$

Iz obrasca je: $a\ =\ \sqrt{{a_N}^2 + {a_T}^2}$, pa je:

$$a_T\ =\ \sqrt{a^2 - {a_N}^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}4^2} = 0{,}92\ \frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 23: Vektor položaja tačke *M* u proizvoljnom trenutku vremena je: $\vec{r}\ =\ (5t)\vec{\imath}\ +\ (6t\ -\ 3t^2)\vec{\jmath}\ [m]$. Odrediti brzinu i ubrzanje date tačke M nakon proteklih $4\ s$. Odrediti i jednačinu trajektorije.

Rešenje:

Prvi izvod vektora položaja je vektor brzine tačke, a drugi izvod je vektor ubrzanja. Projekcijom vektora položaja na ose *x* i *y* i određivanjem prvog i drugog izvoda odredićemo komponente brzine i ubrzanja za pomenute ose.

Projekcije vektora položaja na ose su:

$r_x = x = 5t$ i $r_y = y = 6t\ -\ 3t^2$

Vrednosti projekcija brzine i ubrzanja na ose su prvi odnosno drugi izvodi komponenti vektora položaja po istoimenim osama:

- $v_x = \dot{x} = 5$, a $v_y = \dot{y} = 6 - 6t$
- $a_x = \dot{v_x} = \ddot{x} = 0$, a $a_y = \ddot{y} = \dot{v_y} = 0 - 6 = -6\frac{m}{s^2}$

Vrednost projekcija brzina na ose, nakon kretanja u trajanju od $4s$ su:

- $v_x = 5\ \frac{m}{s}$,
- $v_y = 6 - 6 \cdot 4 = -18\frac{m}{s}$,

pa je: $v(t = 4s) = \sqrt{5^2 + (-18)^2} = 18{,}68\frac{m}{s}$

Vrednost projekcija ubrzanja na ose, nakon kretanja u trajanju od $4s$ su:

- $a_x = 0\,\frac{m}{s^2}$,
- $a_y = -6\frac{m}{s^2}$,

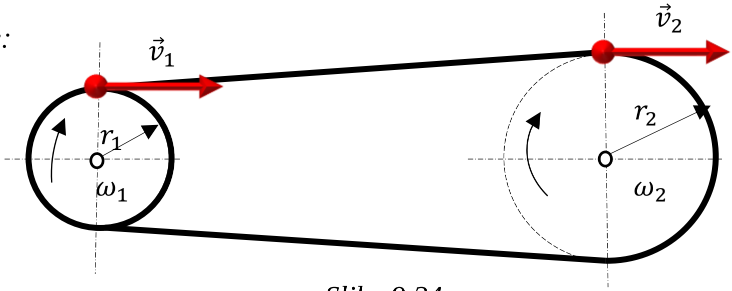
pa je ukupno ubrzanje: $|a| = 6\frac{m}{s^2}$.

ZADATAK 24: Transmisiju neke mašine pokreće kaišnik1, a poluprečnici točkova su: $r_1 = 15\ cm\ i\ r_2 = 50\ cm$.

1) Koliki je odnos broja obrtaja točkova?

2) Koliki put pređe neka tačka na kaišniku za vreme $t = 20\ s$, ako je ugaona brzina manjeg točka $\omega_1 = 120\ \frac{obr}{min}$?

Rešenje:



Slika 9.24

a) Prenosni odnos se izračunava po obrascu:

$$i = prenosni\ odnos = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{50\ cm}{15\ cm} = 3{,}33$$

b) Put koji pređe bilo koja tačka na kaišniku, zavisi od brzine i vremena kretanja. Kako je ugaona brzina konstantna, pomoću poznatih jednačina se izračunava:

$$\omega_1 = 120\ \frac{obr}{min} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 120}{60} = 4\pi\frac{rad}{s}$$

$$v_1 = r_1 \cdot \omega = 15\ cm \cdot 4\pi\frac{rad}{s} = 0{,}15\ m \cdot 4 \cdot 3{,}14\frac{1}{s} = 1{,}884\ \frac{m}{s}$$

Put koji pređe svaka tačka na kaišniku je:

$$s_1 = v_1 t = 1{,}884\,\frac{m}{s} \cdot 20s = 37{,}68\,m$$

ZADATAK 25: Točkovi B i A, poluprečnika $r_1 = 90\ cm$ i $r_2 = 30\ cm$, naležu jedan na drugi. Elektromotor pokreće točak A, čija je ugaona brzina $\omega_1 = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Kolika je ugaona brzina točka B, ako se pretpostavi da nema klizanja, između točkova?

Rešenje:

Kako nema klizanja, brzina svake tačke na kaišniku je jednaka, pa važi da je:

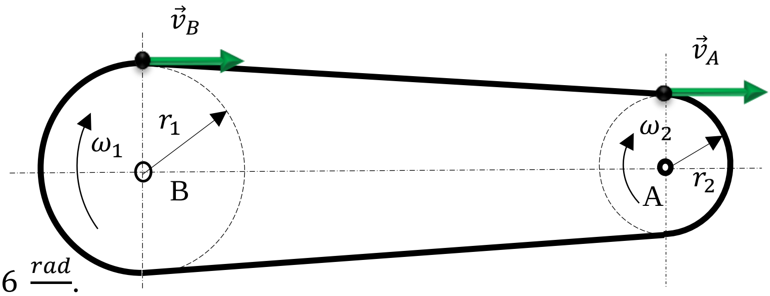
$$v_A = v_{B.}$$

Izjednačićemo ove dve brzine:

$$v_B = v_A$$
$$v_B = r_2 \cdot \omega_2$$
$$v_A = r_1 \cdot \omega_1$$
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{0{,}9}{0{,}3} \cdot 2 = 6\,\frac{rad}{s}.$$

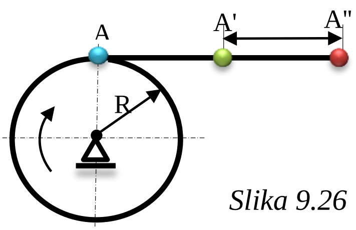


Slika 9.25

ZADATAK 26: Na valjak poluprečnika $r = 80\ cm$, namotano je, kao na slici 9.26, uže koje se ravnomerno odmotava. Za vreme $t = 1\ min$, odmota se dužina $l = 30\ m$ užeta. Kolika je ugaona brzina valjka u toku odmotavanja? Kolika je linijska brzina tačaka na omotaču valjka?

Rešenje:

Kako je dužina odmotanog dela kanapa $l = 30m$, taj put pređe i posmatrana tačka A, prolazivši kroz položaje: A, A', i A''(slika 9.26).



Slika 9.26

Kako je odmotavanje ravnomerno, to je:

$$l = v_0 t = r \cdot \omega \cdot t$$

Slika 9.26

ZADATAK 27: Krećući se stalnom ugaonom brzinom, $\omega_0 = 4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, telo dobije ugaono usporenje $\varepsilon = 0{,}5$ rad/s^2. Kolika će biti ugaona brzina tela posle:

a) vremena $t = 2\ s$,

b) opisanog ugla $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad,

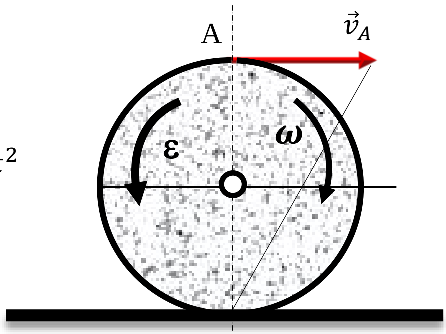
c) $N = 1$ obrtaja i

d) posle koliko vremena će se telo zaustaviti?

Rešenje:

a) Ugaona brzina nakon $t = 2s$ je:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 4 - 0{,}5 \cdot 2 = 3{,}0\ \frac{rad}{s}$$



Slika 9.27

b) Ugao koji opiše svaka tačka tela se, tokom kretanja, menja po zakonu:

$$(1)\ \theta = \theta_o + \omega_o t - \frac{1}{2}\ \varepsilon t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2}\ \varepsilon t^2$$

U trenutku koji je zadat, telo se zaokrenulo za $\theta_1 = \frac{\pi}{3} = \frac{3{,}14}{3} rad$.

Jednačina (1) sada poprima oblik:

$$\omega_0 t - \frac{1}{2}\ \varepsilon t^2 = \theta_1$$

Zamenom vrednosti u ovu jednačinu, dobićemo vreme kretanja:

$$\frac{1}{2}\varepsilon \cdot t_1^2 - \omega_0 \cdot t_1 + \theta_1 = 0$$

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot t_1^2 - 4 \cdot t_1 + \frac{3{,}14}{3} = 0$$

$$0{,}25t^2 - 4t + 1{,}05 = 0$$

$$t_{1\ 1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}05}}{2 \cdot 0{,}25}$$

$$t_{1\,1/2} = \frac{4 \pm 3{,}87}{0{,}5}$$

Prvo rešenje, $t_1 = 15{,}74s$, nije primenljivo jer se dobija da je ugaona brzina negativna,$-\omega$), pa ostaje drugo rešenje: $t_2 = 0{,}26s$.

Ugaona brzina je u ovom slučaju:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 4 - 0{,}5 \cdot 0{,}26 = 3{,}87\ \frac{rad}{s}$$

c) Ugao koji telo napravi nakon $N = 1$ obrtaja je: $\theta_2 = 1 \cdot 2\pi rad = 6{,}28 rad$.
Kako je:

$$\theta_2 = \omega_0 t_2 - \frac{1}{2}\ \varepsilon t_2^2$$

prepakovaćemo ovaj izraz u pogodan oblik kvadratne jednačine i dobiti potencijalna rešenja:

$$\frac{1}{2}\varepsilon t_2^2 - \omega_0 t_2 + \theta_2 = 0$$

$$0{,}25 \cdot t_2^2 - 4 \cdot t_2 + 6{,}28 = 0$$

$$t_{21/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 6{,}28}}{2 \cdot 0{,}25}$$

$$t_{21} = 14{,}24s \text{ , } t_{22} = 1{,}76s$$

Rešenje t_{21} je nemoguće (dobija se negativna vrednost ugla θ), tako da je za $t_{22} = 1{,}76s$, $\omega_{22} = \omega_0 - \varepsilon t = 4 - 0{,}5 \cdot 1{,}76 = 3{,}12\frac{rad}{s}$.

d) U trenutku zaustavljanja, ugaona brzina je jednaka nuli, što u jednačini:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t_3 = 0$$

pa je:

$$t_3 = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{4}{0{,}5} = 8s$$

ZADATAK 28: Osovina se obrtala sa $n = 90 obr/min$ a posle isključivanja motora, nastavlja da se obrće jednako usporeno i zaustavlja se nakon *40s*. Odrediti koliko obrtaja je osovina napravila za to vreme i odrediti njeno ugaono usporenje

Rešenje:

Kod ravnomerno ubrzanog kretanja, kada je $\varphi_0 = 0$, važe obrasci:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \text{ i } \omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Početna ugaona brzina je: $\omega_0 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 90}{60} = 9{,}42\ s^{-1}$

Prilikom zaustavljanja ugaona brzina je 0, pa je u tom trenutku ($t_1 = 40s$): $\omega_0 = \varepsilon \cdot t_1$, pa je:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_1} = \frac{9{,}42}{40} = 0{,}2355 s^{-2}.$$

Ukupan opisani ugao je:

$$\varphi = 2\pi N = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\varepsilon {t_1}^2 = 9{,}42 \cdot 40 - 0{,}5 \cdot 0{,}2355 \cdot 40^2$$

Dobija se da je:

$$2\pi N = 6{,}28\, N = 188{,}4,$$

pa je $N = 30$ obrtaja.

ZADATAK 29: Ugaoni pomeraj tela prilikom rotacije se menja po zakonu: $\varphi(t) = 0{,}2 + 0{,}4t^2$. Odrediti:

a) ugaonu brzinu tela nakon $t_1 = 3s$ od početka kretanja i
b) ugaono ubrzanje tela u tom trenutku.

Rešenje:
Ugaona brzina tela predstavlja prvi izvod ugaonog pomeraja, pa je tako:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(0{,}2 + 0{,}4t^2)}{dt} = 0 + 0{,}4 \cdot 2 \cdot t = 0{,}8t$$

Ugaono ubrzanje je prvi izvod ugaone brzine tela, odnosno:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(0{,}8t)}{dt} = 0{,}8\frac{rad}{s^2} = const$$

Zamenom u izrazima vrednost za $t = 3s$, dobijaju se tražene ugaona brzina i ugaono ubrzanje:

$$\omega_1 = 0{,}8 \cdot 3 = 2{,}4\frac{rad}{s}$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}8\frac{rad}{s^2} = const$$

ZADATAK 30: : Klizači A i B mehanizama su prikazani na slici 9.30, koji su spojeni polugom AB dužine $l = 30\text{ cm}$, kreću se pri obrtanju krivaje OD, po međusobno upravnim pravama. Krivaja OD dužine $\frac{1}{2}l$ je vezana zglobom za sredinu podloge AB. Odrediti zakon kretanja klizača A i B, ako se krivaja obrće tako da se ugao φ povećava proporcijalno vremenu čineći 2 obrtaja u minuti. Kolike su brzina i ubrzanje, kada je ugao $\varphi = 30°$.

Rešenje:
Ugaona brzina štapa $\overline{AB}$ se menja po zakonu: $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{4\pi}{60s} = \frac{\pi}{15}s^{-1}$.
Pri tome su koordinate tačaka A i B na krajevima štapa:

$$x_A = l\cos\varphi;\; y_B = l\sin\varphi$$

$$x_A = \frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi = l\cos\varphi = l\cos\omega t$$

$$y_B = \frac{1}{2}l\sin\varphi + \frac{1}{2}l\sin\varphi = l\sin\varphi = l\sin\omega t$$

Brzine i ubrzanja tačaka A i B su:

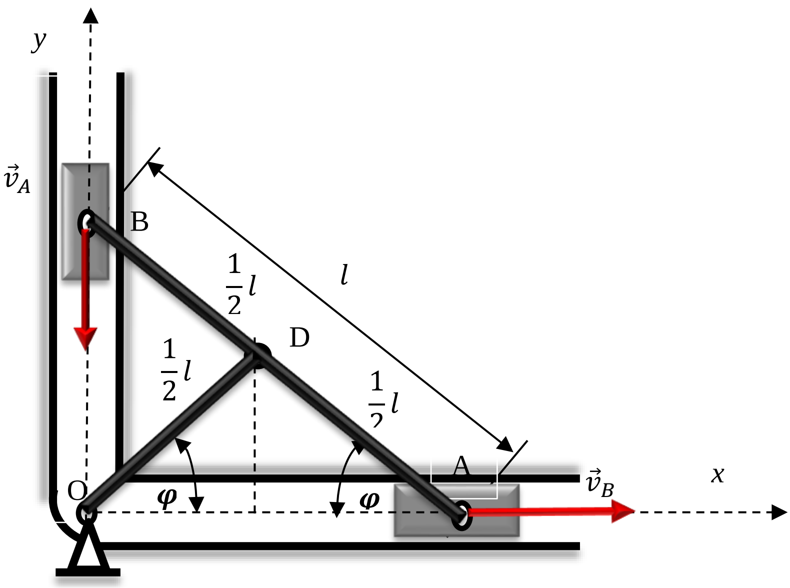
- $v_A = \dot{x_A} = -l\omega \cdot \sin\omega t$
- $v_B = \dot{y}_B = l\omega \cdot \cos\omega t$

- $a_A = \ddot{x_A} = -l\omega \cdot \omega\cos\omega t = -l\omega^2\cos\omega t$
- $a_B = \ddot{y}_B = l\omega \cdot (-\sin\omega t) \cdot \omega = -l\omega^2\sin\omega t$

Za $\varphi = 30°$:

- $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\pi}{6t} \rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} = 30°$

- $v_A = \dot{x}_{A(\varphi=30°)} = -l \cdot \frac{\pi}{15} s^{-1} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{l\pi}{15} \cdot s^{-1} \cdot \frac{1}{2} = 3{,}14 \ \frac{cm}{s}$
- $v_B = \dot{x}_{B(\varphi=30°)} = l \cdot \frac{\pi}{15} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{l\pi}{15} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5{,}44 \ \frac{cm}{s}$
- $a_A = -l\omega^2 \cos\omega t = -l \cdot \left(\frac{\pi}{15}\right)^2 \cdot \cos 30° = -\ l \cdot \frac{\pi^2}{225} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\ 1{,}44 \ \frac{cm}{s^2}$
- $a_B = -l\omega^2 \cdot \sin\omega t = -l \cdot (\frac{\pi}{15})^2 \cdot \frac{1}{2} = -0{,}66 \ \frac{cm}{s^2}$



Slika 9.30

ZADATAK 31: Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje sredine M klipne poluge klipnog mehanizma na slici 9.31, ako je $\overline{OA} = \overline{AB} = 2a,$ i ako pri okretanju krivaje ugao φ u toku vremena raste proporcijonalno vremenu $\varphi = \omega t$.

Rešenje:

Tokom kretanja, koordinate tačke M se, na osnovu slike 9.31, menjaju po zakonu:

$x_M = 2a\cos\varphi + a\cos\varphi \rightarrow x_M = 3 \cdot a \cdot cos\omega t$

$y_M = a\sin\varphi \qquad \rightarrow y_M = a \cdot sin\omega t$

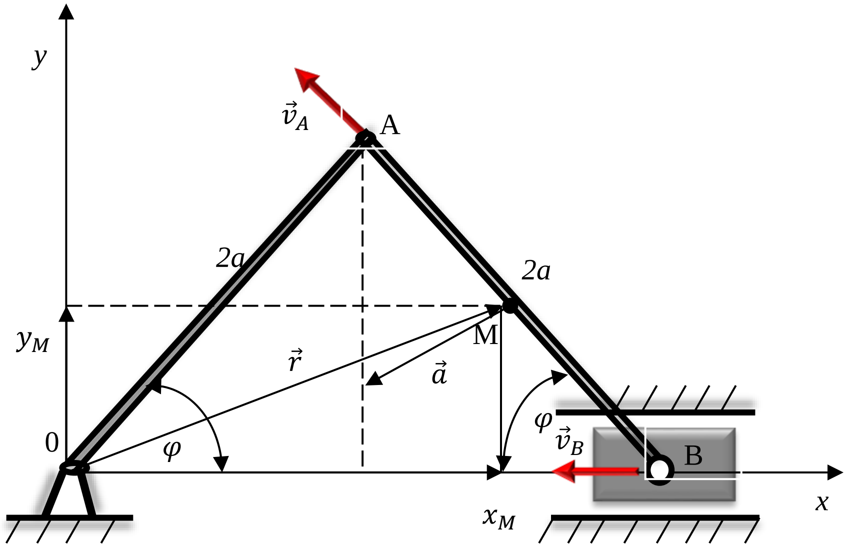
pri čemu je: $\varphi = \omega \cdot t$

Jednačinu kretanja dobijamo:

$$\frac{x}{3a} = \cos\omega t \qquad \frac{y}{a} = \sin\omega t$$

$$sin^2\omega t + cos^2\omega t = 1$$

$$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Slike 9.31

Brzina tačke M je:

$v_x = \dot{x_M} = (3a\cos\omega t)' = 3a\cdot\ \omega\ (\sin\omega t) = -3a\omega\sin\omega t$

$v_y = \dot{y_M} = (a\cdot\ \sin\omega t) = a\ \cdot\ \omega\ \cdot\ \cos\omega t$

$v_M = \sqrt{v_{xM}^2 + v_{yM}^2}$

$v_M = \sqrt{9a^2\omega^2 sin^2\omega t + a^2\omega^2 cos^2\omega t}$

Ubrzanje tačke:

$a_{xM} = \ddot{x_M} = (-3a\omega^2\cos\omega t)' = -3a\omega\ \cdot\omega\ \cdot\cos\omega t = -3a\omega^2\cos\omega t$

$a_{yM} = \ddot{y_M} = (a\omega\cos\omega t)' = a\cdot\ \omega\cdot\omega\ \cdot(-\sin\omega t\ ) = -a\omega^2\sin\omega t$

$a_M = \sqrt{a_{Mx^2} + a_{My^2}}$

$a_M = \sqrt{(3a\omega^2\cos\omega t)^2 + (-a\omega^2\sin\omega t)^2}$

$$a_M = \sqrt{(9a^2\omega^4\cos^2\omega t)^2 + a^2\omega^2\sin^2\omega t}$$

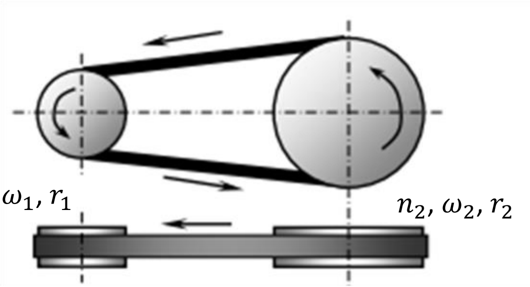
$$a_M = \sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} = \sqrt{r^2\omega^2} = r\omega$$

Za određivanje smera ubrzanja, koriste se formule:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a} = \frac{\dot{x}}{a} = -\frac{x}{r}, \quad ;\cos\beta_1 = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a} = -\frac{y}{r}$$

10. KRETANJE ZUPČASTIH, LANČANIH I KAIŠNIH PRENOSNIKA SNAGE

ZADATAK 1: Elektromotor se okreće sa $n_1 = 1800 \frac{obr}{min}$. Prečnik njegovog kaišnika je 100 mm. Koliki je prečnik kaišnika na bušilici, ako se burgija okreće brzinom obrtanja $n_2 = 800 \frac{obr}{min}$?



Slika 10.1.

Rešenje:

Šema je data na slici 10.1

Zapisaćemo date podatke:

$$n_1 = 1800 \frac{obr}{min} = \frac{1800\ obr}{60\ s}$$

$$r_1 = 100mm = 100 \cdot 10^{-3} m$$

$$n_2 = 800 \frac{obr}{min} = \frac{800\ obr}{60\ s}$$

Na osnovu poznatih relacija je:

$$v_1 = v_2$$

$$r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2$$

U nastavku ćemo izvršiti zamenu zadatih vrednosti, da bismo dobili poluprečnik gonjenog kaišnika:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi \cdot n_1}{60} = \frac{\pi \cdot n_1}{30};$$

$$r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2$$

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2};$$

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{2\pi \cdot n_1 \cdot 60}{60 \cdot 2\pi \cdot n_2} = r_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} = 100 \cdot 10^{-3} m \cdot \frac{1800\ obr}{800\ obr} = 255mm$$

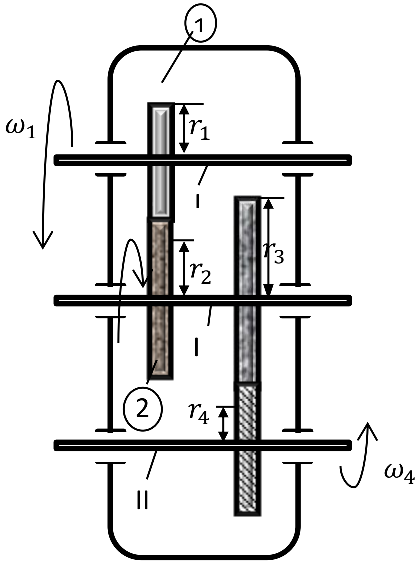
Traženi *prenosni odnos* je:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1500\ ^{obr}/_{min}}{750\ ^{obr}/_{min}} = 2 > 1 - ovo\ je\ reduktor$$

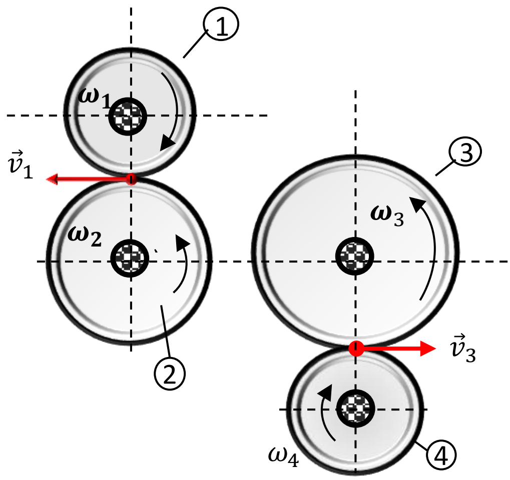
ZADATAK 2: Broj obrtaja ulaznog vratila I prikazanog zupčastog reduktora iznosi $n_1 = 900\,{}^{o}/_{min}$. Zupčanik 1 je čvrsto vezan za vratilo I, zupčanici 2 i 3 za vratilo II, zupčanik 4 za izlazno vratilo III. Naći ugaone brzine vratila I, II, i III, kao broj obrtaja vratila III. Definisati prenosne odnose spregnutih zupčanika, kao i ugaoni prenosni odnos reduktora. Odrediti brzine i ubrzanje tačaka na obodima zupčanika 3 i 4.

Poluprečnici zupčanika su: $R_1 = 0{,}2\text{m}$; $R_2 = 0{,}3\text{m}$; $R_3 = 0{,}4\text{m}$ $R_4 = 0{,}2\text{m}$.

Rešenje:



Slika 10.2.1



Slika 10.2.2

Kako je $\varphi_1 = 2\pi n_1$, to je onda:

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 900\,\frac{obr}{min}}{30} = 94{,}2\,\frac{1}{s}$$

$$v_1 = r_1 \cdot \omega_1 = 0{,}2m \cdot 94{,}2 = 18{,}84\,\frac{m}{s}$$

$$v_2 = v_1 = r_2 \cdot \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_1}{r_2} = \frac{18{,}84\,\frac{m}{s}}{0{,}3m} = 62{,}8\,\frac{m}{s}$$

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{94{,}2\,\frac{1}{s}}{62{,}8\,\frac{1}{s}} = 1{,}50 \rightarrow reduktor$$

Pošto su zupčanik 2 i zupčanik 3 na istom vratilu, to je: $\omega_2 = \omega_3 = 62{,}8\frac{rad}{s}$,pa je:

$$v_3 = r_3 \cdot \omega_3 = r_3 \cdot \omega_2 = 0{,}4m \cdot 62{,}8\frac{m}{s} = 25{,}12\frac{m}{s}$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi \cdot n_3}{60} = \frac{\pi \cdot n_3}{30} \Rightarrow n_3 = \frac{30 \cdot \omega_3}{\pi} = \frac{30 \cdot 62{,}8}{\pi} = 600\ obrtaja$$

$$v_3 = v_1 = r_4 \cdot \omega_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{v_3}{r_4} = \frac{25{,}12\frac{m}{s}}{0{,}2m} = 125{,}6\frac{rad}{s}$$

$$v_4 = r \cdot \omega_4$$

$$\omega_4 = \frac{2\pi \cdot n_4}{60} = \frac{\pi \cdot n_4}{30} \Rightarrow n_4 = \frac{30 \cdot \omega_4}{\pi} = \frac{30 \cdot 125{,}6\frac{m}{s}}{3{,}14} = 1200\ obrtaja$$

$$i_{34} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ \rightarrow multiplikator$$

Ukupni prenosni odnos prenosnika je*:*

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_I}{\omega_{III}} = \frac{94{,}2s^{-1}}{125{,}6s^{-1}} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

Posto nema ubrzanja ($\mathcal{E} = 0$), onda ubrzanje ima samo normalnu komponentu, a_N. Odredićemo intenzitet, koristeći standardni obrazac:$a_N = \frac{v^2}{r}$.

$$a_{N_1} = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{(18{,}84\frac{m}{s})^2}{0{,}2m} = 1774{,}73\frac{m}{s^2}$$

$$a_{N_2} = \frac{v_2^2}{r_1} = \frac{(18{,}84\frac{m}{s})^2}{0{,}3m} = 1183{,}15\frac{m}{s^2}$$

$$a_{N_3} = \frac{v_3^2}{r_3} = \frac{(25{,}12\frac{m}{s})^2}{0{,}4m} = 1577{,}54\frac{m}{s^2}$$

$$a_{N_4} = \frac{v_4^2}{r_4} = \frac{(25{,}12\frac{m}{s})^2}{0{,}2m} = 3155{,}07\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 3: Broj obrtaja ulaznog vratila I prikazanog zupčastog reduktora iznosi $n_I = 600\frac{o}{min}$. Zupčanik 2 je čvrsto vezan za vratilo 1, zupčanici 3 i 4 za donje vratilo, zupčanik 5 za izlazno vratilo 6 (slika 10.3.). Naći ugaone brzine vratila, kao i broj obrtaja izlaznog vratila 6. Definisati prenosne odnose spregnutih zupčanika, kao i ukupan prenosni odnos reduktora. Odrediti brzine i ubrzanja tačaka na obodima zupčanika 2 i 3. Dati su poluprečnici: $r_1 = 15cm$; $r_2 = 40cm$; $r_3 = 20cm\ i\ r_4 = 30cm$.

Rešenje:

Na osnovu teksta i slike 10.3. pod a.) je $n_I = 600\frac{obr}{min} = n_2$ tj. $\omega_I = \omega_1$.

Za zupčasti par 2-3 (slika 10.3. pod b.) je:

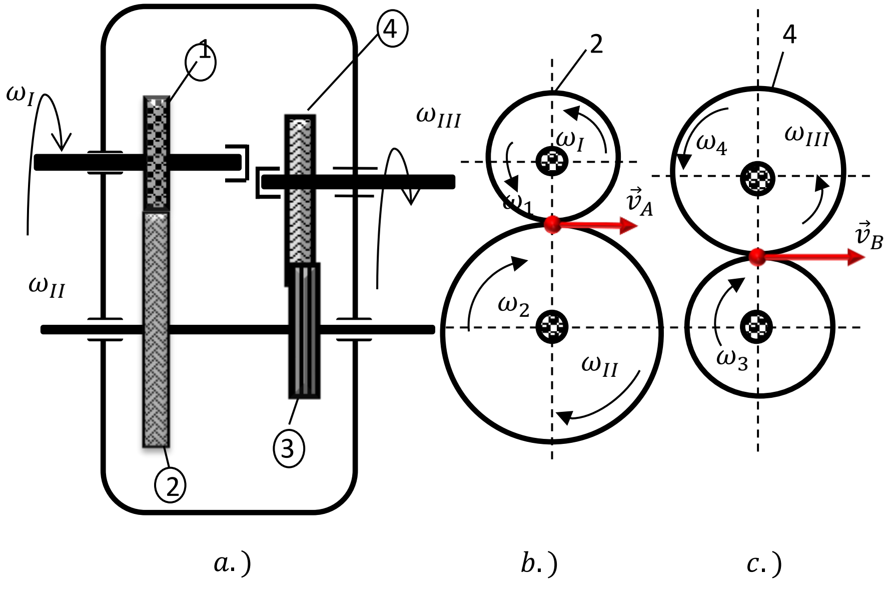
$$v_1 = v_2 = v_A = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$\omega_1 = \omega_I = \frac{2\pi n_I}{60} = \frac{\pi \cdot n_I}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 600}{30s} = 62{,}8s^{-1}$$

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 r_2$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{r_2} = 62{,}8 \cdot \frac{0{,}15}{0{,}4} = 23{,}55s^{-1} = \omega_{II}$$

$$\omega_3 = \frac{\pi \cdot n_3}{30} \Rightarrow n_3 = \frac{30\omega_3}{\pi} = \frac{30 \cdot 23{,}55}{3{,}14} = 225\ obrtaja$$



Slika 10.3.

Kako su zupčanici 2 i 3 na istom vratilu, vratilu II, važi da je $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{II}$. Kada nema proklizavanja među uparenim zupčanicima, brzine tačaka na obodima tih zupčanika su jednake, pa je za zupčanike 3 i 4:

$$v_B = r_3\omega_3 = r_4\omega_4$$

Sada dobijamo:

$$\omega_4 = \omega_3 \cdot \frac{r_3}{r_4} = 23{,}55 \cdot \frac{0{,}20}{0{,}30} = 15{,}7\,\frac{rad}{s}$$

Brzine tačaka na obodima zupčanika 4 i 5 su jednake, što se dokazuje:

$$v_{\mathrm{B3}} = r_3\omega_3 = 0{,}2 \cdot 23{,}55 = 4{,}71\,\frac{m}{s}$$

$$v_{\mathrm{B4}} = r_4\omega_4 = 0{,}3 \cdot 15{,}7 = 4{,}71\,\frac{m}{s}$$

Ubrzanja imaju samo svoje a_N komponente:

$$a_{N2} = r_2\omega_2^2 = 0{,}4 \cdot (23{,}55)^2 = 221{,}84\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{N3} = r_5\omega_3^2 = 0{,}2 \cdot (23{,}55)^2 = 110{,}92\,\frac{m}{s^2}$$

Parcijalni prenosni odnosi su:

$$i_{23} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{62{,}8}{23{,}55} = 2{,}67$$

$$i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{23{,}55}{15{,}7} = 1{,}50$$

Ukupni prenoni odnos je:

$$i = \frac{\omega_I}{\omega_4} = \frac{62{,}8}{15{,}7} = 4 - ukupan\ prenosni\ odnos\ reduktora$$

11. RAVNO KRETANJE TELA

ZADATAK 1: Po horizontalnoj glatkoj površini se kotrlja točak, poluprečnika $R = 0{,}5\ m$, bez klizanja. Brzina točka je v=5 $\frac{m}{s}$. Izračunajte linijske brzine tačaka na obodu točka, koje su pomerene za $\frac{\pi}{2}$ u odnosu na tačku dodira sa zemljom i na vrhu točka?

Rešenje:

Brzina točka je u stvari, brzina središta točka:

$v_C = v$

Ugaona brzina je:

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5}{0{,}5} = 10 s^{-1}$

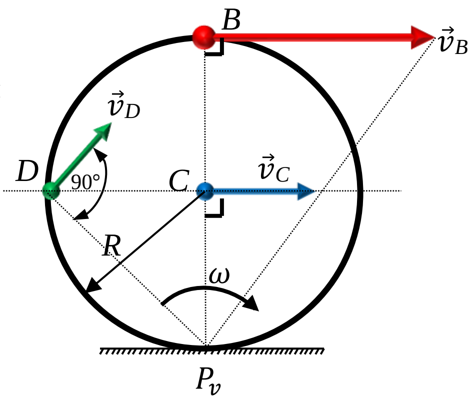
Brzine ostalih tačaka računamo:

$v_D = \overline{DP_v} \cdot \omega = R\sqrt{2} \cdot \omega$

$v_D = 0{,}5\sqrt{2} \cdot 10 = 5\sqrt{2}\frac{m}{s}$

$v_{OM_1} = v_{OM_3}$

$v_B = \overline{M_2 P_v} \cdot \omega = 2R\omega = 10\ \frac{m}{s}$



Slika 11.1.

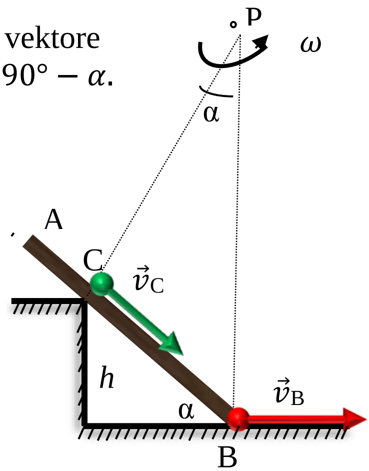
ZADATAK 2: Štap *AB* vrši ravno kretanje tako što klizi po ivici C dok njegova tačka *B* klizi po horizontalnom podu (slika 11.2). Poznate veličine su v_B, l i α. Odrediti ω.

Rešenje:

Trenutni pol brzina se nalazi u preseku normala na vektore brzina tačaka tela. Geometrijski gledano, ∡CBP je $90° - \alpha$. To znači da je ugao između štapa i horizontale α. Posmatrajući sliku, dolazi se do sledećih veza:

$$\sin\alpha = \frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{h}{\sin\alpha},\quad \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$$

$$\overline{BP} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin^2\alpha},\ \omega = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_B}{h}\sin^2\alpha.$$



Slika 11.2.

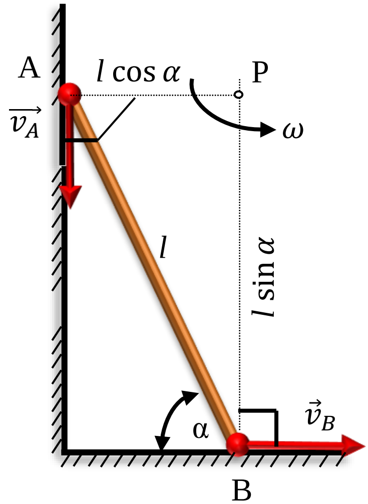
ZADATAK 3: Štap AB vrši ravno kretanje tako što tačka A klizi po vertikalnom zidu a tačka B po horizontalnom podu (slika 11.3). Poznate veličine su v_A, l i α. Odrediti ω i v_B?

Rešenje:

$\omega = \frac{v_A}{\overline{AP}} = \frac{v_A}{l \cdot \cos\alpha}$

$v_B = \overline{BP} \cdot \omega = l \cdot \sin\alpha \frac{v_A}{l \cdot \cos\alpha}$

$v_B = v_A \cdot tg\,\alpha.$



Slika 11.3.

ZADATAK 4: Kolika je ugaona brzima kojom se obrće štap AB (dat na slici 11.4), ako je $v_A = 10\frac{m}{s}$, $\overline{AP_v} = 0{,}8\,\overline{BP_v}$, a dužna štapa $\overline{AB} = 2\,m$? Kolika je brzina tačke B?

Rešenje:

Ako je ukupna dužina štapa $AB =$ 2m, onda, svedeno na BP_v imamo:

$AB = (1 + 0{,}8) \cdot BP_v = 1{,}8\,BP_v$, pa je $BP_v = \frac{2}{1{,}8} = 1{,}11m$

Tada je:

$$AP_v = 0{,}8 \cdot 1{,}11 = 0{,}89m$$

Kako je:

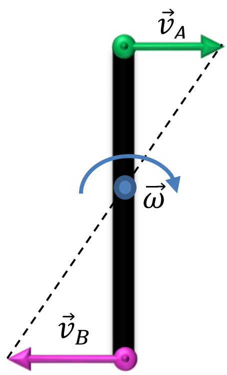
$$v_A = AP_v \cdot \omega = 10\frac{m}{s},$$

možemo izračunati:

$$\omega = \frac{v_A}{AP_v} = \frac{10}{0{,}89} = 11{,}24\frac{rad}{s}.$$

Brzina tačke B je:

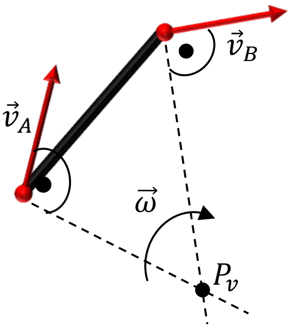
$$v_B = BP_v \cdot \omega = 1{,}11 \cdot 11{,}24 = 12{,}48\frac{m}{s}.$$



Slika 11.4.

ZADATAK 5: Ukoliko su poznati pravci i smerovi brzina (slika 11.5), odrediti trenutni pol brzina.

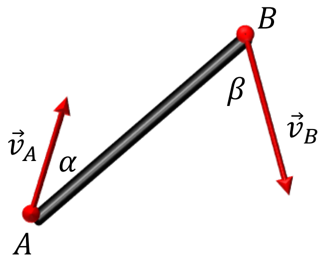
Rešenje:
Na pravce brzina povučemo normale i u tački preseka tih normala se nalazi trenutni pol brzina, P_v .



Slika 11.5.

ZADATAK 6: Za štap na slici 11.6 dato je: $v_A = 10\frac{m}{s}$; $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$. Odrediti brzinu tačke A.

Rešenje:



Slika 11.6.

Na osnovu teoreme o projekciji brzina na pravu, pišemo jednačinu:

$$v_A cos\alpha = v_B cos\beta$$

Zamenom zadatih vrednosti u jednačinu, dobijamo:

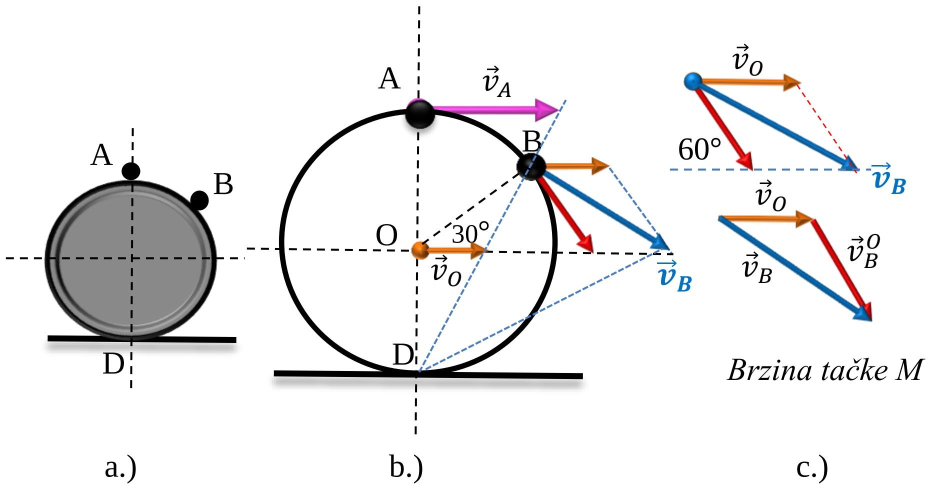
$$v_B = \frac{v_A cos\alpha}{cos\beta} = \frac{10 \cdot cos30}{cos60°} = \frac{10 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = 15{,}85\frac{m}{s}$$

ZADATAK 7: Disk, poluprečnika $R = 0{,}5m$ se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Brzina središta se menja po zakonu: $v_o = 0{,}5t^2$. Odrediti brzine tačaka A i B na obodu diska u trenutku $t = 2s$, kada se tačke nalaze na obodu kao na slici 11.7 pod a.).

Rešenje:
Brzina tačke O je: v_o =0,5$\cdot$ t^2 =0,5$\cdot$ 4 $= 2\frac{m}{s}$
Brzine ostalih tačaka ćemo dobiti vektorskim sabiranjem translacije s polom u tački O i rotacije oko O. Tako je:

- Brzina tačke A: $\vec{v}_A = \vec{v}_o + \vec{v}_A^O$
- Brzina tačke B: $\vec{v}_B = \vec{v}_o + \vec{v}_B^O$
- Brzina tačke D: $\vec{v}_D = \vec{v}_o + \vec{v}_D^O$

Vektori $\vec{v}_A^O, \vec{v}_B^O$ *i* $\vec{v}_D^O$ su jednaki po intenzitetu jer se sve tačke nalaze na rastojanju r od tačke O. Kako je brzina tačke D jednaka nuli, to znači da je $\vec{v}_D^O = v_o = 2\frac{m}{s}$, a kako je $v_O = r \cdot \omega, to\ je\ \omega = \frac{2}{0{,}5} = 4\frac{rad}{s}$.



Slika 11.7.

Na osnovu kosinusne teoreme (slika pod c):

$v_B = \sqrt{v_o^2 + v_{B0}^2 + 2v_0 \cdot v_{Bo} \cdot cos60°} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5} = 3{,}464 \frac{m}{s}$.

Brzina $v_A = 2r\omega = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 4 = 4\frac{m}{s}$.

ZADATAK 8: Za mehanizam (slika 11.8.1) , koji se sastoji od štapova $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$, odrediti brzinu tačke B u prikazanom položaju, ugaone brzine štapova $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, ako je $\overline{OA} = 1m$ i ako štap $\overline{OA}$ u tom položaju ima ugaonubrzinu $\omega_o = 5\frac{rad}{s}$. Dužina štapa $\overline{BC} = 0{,}8m$. Veze u tačkama O, A, B i D su zglobne.

Rešenje:

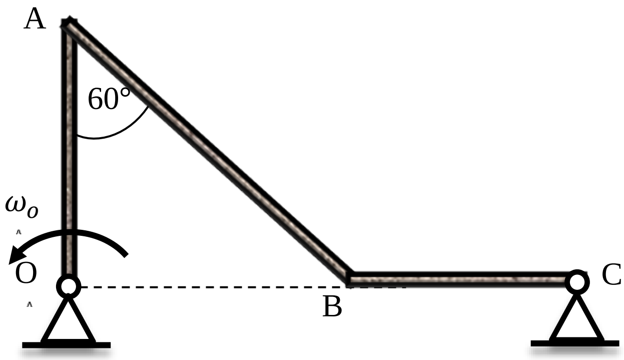
Potrebno je, na osnovu zadate ugaone brzine, ω_0 uneti vektore brzina, prema pravilima kako se one definišu (slika 11.8.2).

Kako je tačka O trenutni pol brzina za štap $\overline{OA}$, (slika 11.8.2.),brzina tačke A je:

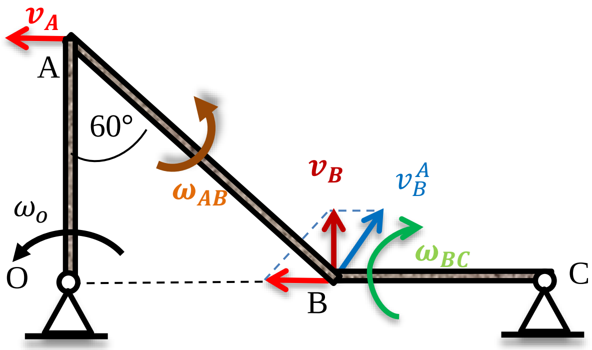
$$v_A = R\omega_0 = 1 \cdot 5 = 5\frac{m}{s}$$

Brzina tačke B je (zato što je tačka C trenutni pol brzina za štap BC):

$$v_B = \overline{BC} \cdot \omega_{BC}$$



Slika 11.8.1.



Slika 11.8.2.

Takođe, brzina tačke B, posmatrajući štap $\overline{AB}$ je:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A, \text{ a } v_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}.$$

Takođe, kako i tačka A i tačka B pripadaju štapu $\overline{AB}$, ukoliko povučemo normale na pravce brzina v_A i v_B dobićemo da je tačka O trenutni pol brzina za štap AB. Odnosno:

$$v_A = \overline{AO} \cdot \omega_{AB} = R\omega_0 \text{ , (pa je } \omega_{AB} = \omega_0 = 5 \frac{rad}{s}\text{) i}$$

$$v_B = \overline{OB} \cdot \omega_{AB} = \overline{OB} \cdot \omega_0$$

Sa slike je $tg60° = \frac{OB}{OA}$, pa je $\overline{OB} = \overline{OA} \cdot tg60° = R \cdot 1{,}73 = 1{,}73m$

Odavde je brzina $v_B = \overline{OB} \cdot \omega_0 = 1{,}73 \cdot 5 = 8{,}65 \frac{m}{s}$.

Kako je: $v_B = \overline{OB} \cdot \omega_0 = \overline{BC} \cdot \omega_{BC} = 0{,}8 \cdot \omega_{BC} = 8{,}65 \frac{m}{s}$ nalazimo da je: $\omega_{BC} = \frac{8{,}65}{0{,}8} \approx 10{,}81 \frac{rad}{s}$.

Brzinu tačke B smo mogli dobiti i projektovanjem jednačine $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$ na pravac $\overline{AB}$:

$$v_B \cos 60° = v_A \cos 30° + 0$$

odakle je:

$$v_B = \frac{v_A \cos 30°}{cos60°} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2} = 8{,}65 \frac{m}{s}.$$

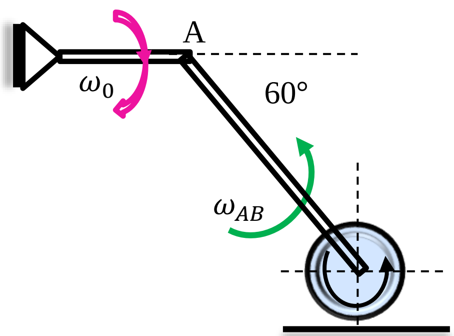
Projektovanjem na pravac normalan na $\overline{AB}$ bismo dobili:

$$v_B \cos 30° = -v_A \cos 60° + v_B^A$$

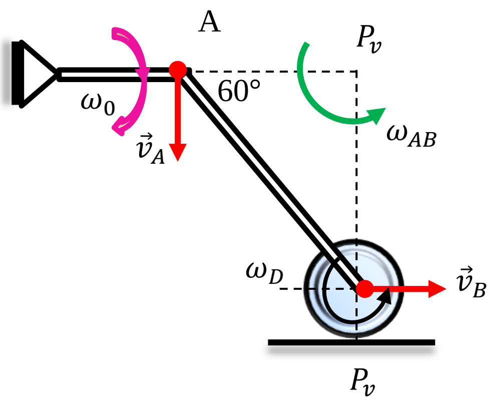
$$v_B^A = v_B \cos 30° + v_A \cos 60° = 8{,}65 \cdot 0{,}865 + 5 \cdot 0{,}5 = 9{,}98225 \frac{m}{s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B^A}{AB} = \frac{9{,}98225}{\frac{R}{cos60°}} \approx 5 \frac{rad}{s}$$

ZADATAK 9: Krivaja $\overline{OA}$ dužine 3m obrće se konstantnom ugaonom brznom $\omega_o = 2s^{-1}$oko nepomične ose O_z. Krivaja dovodi u kretanje štap $\overline{AB}$ dužine $0{,}8m$, što se vidi na slici 11.9.1. Posredstvom štapa $\overline{AB}$, disk poluprečnika *R=0,2m* se kotrlja bez klizanja po ravnoj podlozi. Za dati položaj mehanizma odrediti ugaonu brzinu diska. Veze O,A i B su zglobne.



Slika 11.9.1.



Slika 11.9.2.

Rešenje:

Na osnovu zadatih elemenata kretanja, unose se pravci i smerovi brzina tačaka A i B (slika 11.9.2). Na osnovu slike, za štap $\overline{OA}$ tačka O je trenutni pol brzina, pa je brzina tačke A:

$$v_A = R\omega_0 = 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6 \frac{m}{s}$$

Po teoremi o projektovanju brzina je: $v_A cos30° = v_B cos60°$, pa je: $v_B = 0{,}6\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$

Za disk, trenutni pol brzina je u tački dodira sa podlogom, a vektor brzine je time i određen. Brzina $v_B = \omega_D \cdot R$ pa je:

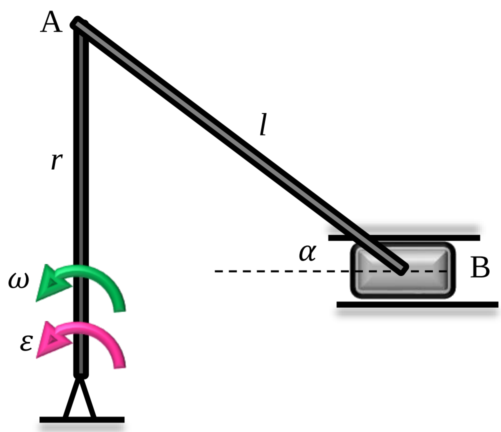
$$0{,}6\sqrt{3} = 0{,}2 \cdot \omega_D \text{ odnosno } \omega_D = 3\sqrt{3}\,\frac{rad}{s}.$$

ZADATAK 10: Za mehanizam prikazan na slici 11.10.1 poznata je ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε poluge $\overline{OA}$. Odrediti:

a) brzinu klipa B i ugaonu brzinu štapa $\overline{AB}$,

b) ubrzanje klipa B i ugaono ubrzanje poluge AB,

u datom položaju. Uzeti da je $\overline{OA} = r$ i $\overline{AB} = l$, a ugao α je poznat.



Slika 11.10.1.

Rešenje:

a) Na osnovu slike 11.10.2 brzina tačke A je:
$v_A = r \cdot \omega$ (obrće se oko nepokretne ose)

Brzina tačke B je: $v_B \cos\alpha = v_A \cos\alpha$ (teorema o projekciji brzina). Iz ovoga su brzine: $v_A = v_B = r \cdot \omega$.

Kako su ove brzine jednake, trenutna ugaona brzina štapa je jednaka nuli, odnosno $\omega_{AB} = 0$.

b) Tačka B pripada i klipu i štapu, pa ubrzanje tačke B možemo predstaviti preko ubrzanja tačke A (slika 11.10.3.).

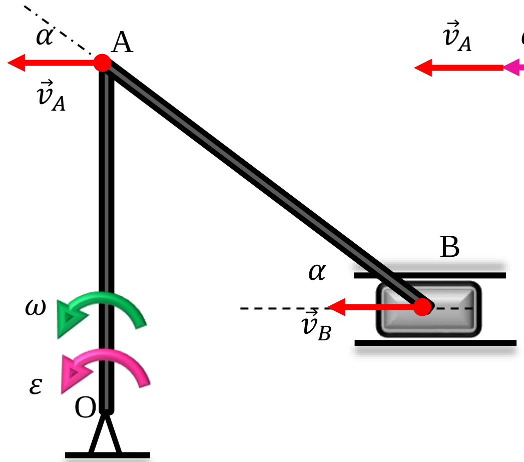
Ubrzanje tačke A se u ovom slučaju može zračunati preko normalne i tangencijalne komponente :

$$a_{AN} = \omega^2 \cdot OA$$
$$a_{AT} = \varepsilon \cdot r$$

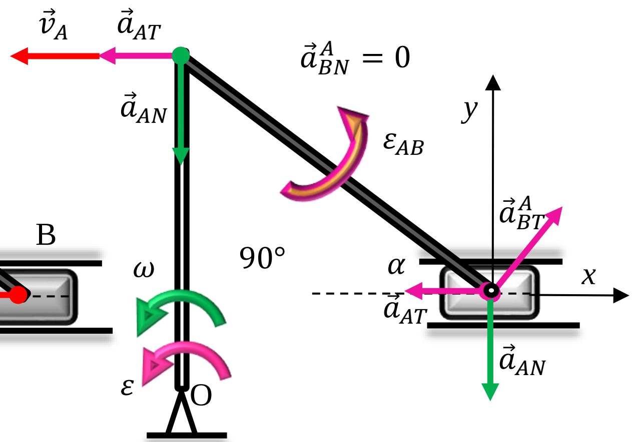
Ubrzanje tačke B se izračunava:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$$

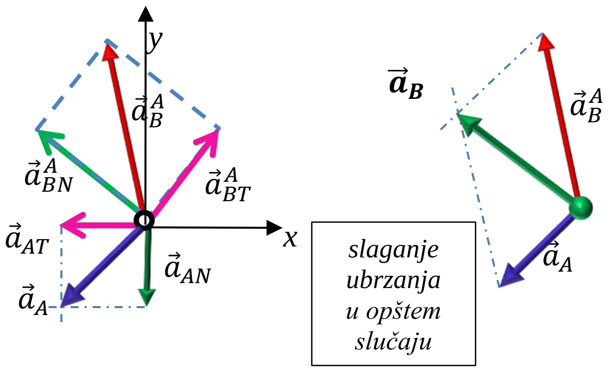
U opštem slučaju, ova jednačina se grafički može prikazati kao na slici 11.10.4.



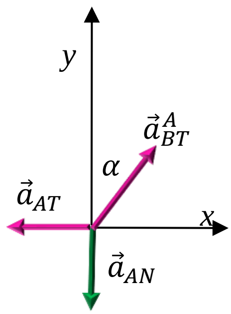
Slika 11.10.2.



Slika 11.10.3.



Slika 11.10.4.



Slika 11.10.5.

Projektovanjem na ose x i y ovog izraza dobijamo:

(1) $a_{Bx} = -a_{AT} - a_{BN}^A \cdot cos\alpha + a_{BT}^A \cdot sin\alpha = -\varepsilon \cdot r + \varepsilon_{AB} \cdot l \cdot sin\alpha$

$(\omega_{AB} = 0, a_{BN}^A = 0)$.

(2) $a_{By} = -a_{AN} + a_{BN}^A \cdot sin\alpha + a_{BT}^A \cdot cos\alpha = 0$

Deo $a_{By} = 0$ zato što je ovo klizač čiji je pravac kretanja određen kanalicom. Takođe je:

$$a_{BN}^A = l \cdot \omega_{AB}^2 = 0, \text{ a}$$

$$a_{BT}^{A} = \varepsilon_{AB} \cdot l.$$

Iz jednačine (2) je:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BT}^{A}}{l} = \frac{a_{AN}}{l \cdot cos\alpha} = \frac{\omega^2 \cdot r}{l \cdot cos\alpha}.$$

Konačno, ubrzanje tačke B je:

$$a_{Bx} = -\varepsilon \cdot r + \frac{\omega^2 \cdot r}{l \cdot cos\alpha} \cdot l \sin\alpha = -r\varepsilon + \omega^2 \cdot r \cdot tg\alpha.$$

Grafički prikaz određivanja ubrzanja tačke B u obom zadatku, uzimajući u obzir uslove zadatka (da je ugaona brzina štapa $\overline{AB}$ jednaka nuli i da se klizač kreće samo horizontalno), dat je na slici 11.10.5.

OBRASCI ZA DINAMIKU TAČKE

- **DRUGI NJUTNOV ZAKON glasi:**

$$m\vec{a} = \vec{F}_R = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N$$

pri čemu je:

- $\sum \boldsymbol{\vec{F}_i^a}$ – suma svih aktivnih sila,
- $\boldsymbol{\vec{F}_N}$- suma svih reaktivnih sila,
- $\boldsymbol{a}$ – ubrzanje sistema

- Jednačina se projektuje na sve tri koordinatne ose:
  - $m\ddot{x} = X_R(t)$,
  - $m\ddot{y} = Y_R(t)$,
  - $m\ddot{z} = Z_R(t)$,
- Integraljenjem se dobijaju brzina i pređeni put:
  - $\dot{x} = \int \ddot{x}dt$,
  - $\dot{y} = \int \ddot{y}dt$
  - $\dot{z} = \int \ddot{z}dt$

- Sila može da zavisi od: vremena, pređenog puta, brzine – *F=F(t), F= F(v), F=F(s)*
- Ako se telo baci vertikalno uvis, sa početnom brzinom v_0, koja sa horizontom zaklapa ugao α, u svakom trenutku se mogu izračunati brzina, ubrzanje, ali i max visina penjanja, kao i domet:
  - $v_x = v_0 cos\alpha$,
  - $v_y = v_0 sin\alpha - gt$,
  - $x = v_0 t cos\alpha$
  - $y = v_0 sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$
  - Domet $x_D = \frac{{v_0}^2 sin2\alpha}{g}$
- Dalamberov princip se često koristi kod krivilinijskog kretanja materijalne tačke:
  - $\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N + \vec{F}^{in} = 0$
  - Projektovanjem na tangentu i normalu inercijalne sile imamo:

  - $F_T^{in} = -ma_T = -\frac{dv}{dt}$
  - $F_N^{in} = -ma_N = -m\frac{v^2}{R}$

- Količina kretanja se izračunava: $\vec{K} = m\vec{v}$
- Impuls sile se izračunava: $d\vec{I} = \vec{F}dt$
- Zakon o promeni količine kretanja: $\frac{d\vec{K}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_i,$
- Zakon o održanju količine kretanja:

  $\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \vec{I}_i$ a ako je $\sum \vec{F}_i = 0,$ onda je: $\vec{K} = const$ i $\vec{v} = const.$
- Kod kružnog kretanja, javlja se moment količine kretanja:$\vec{M}_0 = \vec{L}_0 = \vec{r}x\vec{F}$
- Zakon o promeni momenta količine kretanja:$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_0^{\vec{F}_i},$
- Zakon o odžanju momenta količine kretanja:

  $\vec{L} - \vec{L}_o = 0$, odnosno $\vec{L}_0 = const$, odnosno $\sum \vec{M}_o^{\vec{F}_i} = const$
- Rad bilo koje sile na putu s: $dA = F_T ds$
- Rad elastične sile: $dA_{el} = -kxdx,$
- Rad sile trenja: $dA_{mg} = -\mu F_N ds$
- Zakon o promeni kinetičke energije: $\Delta E_k = \sum A_i, \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$

12. DINAMIKA TAČKE I – NJUTNOVI ZAKONI

ZADATAK 1: Na telo mase $m = 2kg$ počinje da deluje sila $F = 4 \cdot sin5t$. Odrediti brzinu tela u funkciji vremena. Koliki put pređe telo za 5s od početka kretanja?

Rešenje:

Polazimo od jednačine kretanja: $ma = F$. Kako je: $a = \frac{F}{m} = \frac{4 \cdot sin5t}{m}$, $a = \frac{d\dot{x}}{dt}$ onda je:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{4 \cdot sin5t}{m}.$$

Ako pregrupišemo izraz radi integracije, dobijamo:

$$\dot{x} = \frac{4 \cdot sin5t}{m} dt, \text{ odnosno: } \int d\dot{x} = \int \frac{4 \cdot sin5t}{m} dt.$$

Uvodimo smenu: $5t = u$, pa je: $5dt = du$, odnosno: $dt = \frac{1}{5} du$.

Integracijom dobijamo:

$$\dot{x} = \frac{4}{m} \int_0^t sin5tdt = \frac{4}{m} \int_0^u \frac{1}{5} \cdot sinudu = \frac{4}{5m}(-cosu).$$

Sređivanjem ovog izraza i zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$\dot{x} = \frac{4}{5m}(1 - cos5t) = \frac{2}{5} \cdot (1 - cos5t)$$

Kako je: $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5} \cdot (1 - cos5t)$, to je $dx = \frac{2}{5} \cdot (1 - cos5t)dt$.

Da bismo izračunali pređeni put za $t = 5s$, moramo uraditi integraciju zadnjeg izraza. Koristićemo istu smenu: $5t = u$.

$$x = \int_0^t \frac{2}{5} \cdot (1 - cos5t)dt = \frac{2}{5} \cdot \int (1 - cosu)du = \frac{2}{5} \cdot \left[\int du - \int cosu \frac{du}{5}\right]$$

$$x = \frac{2}{25} \cdot (5t - sin5t)$$

ZADATAK 2: Prilikom kretanja metka kroz gredu debljine $D = 5cm$, brzina metka se smanji sa $v_0 = 300 \frac{m}{s}$ na $v = 200 \frac{m}{s}$. Prilikom kretanja metka kroz gredu javlja se sila otpora sredine i sila se menja po zakonu $F = -kv^2$. Odrediti zakon promene brzine metka i koliko dugo traje kretanje metka kroz gredu.

Rešenje:

Poćićemo od jednačine kretanja: $ma = -kv^2$, koju ćemo malo modifikovati sa leve strane.

$$m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dv}{dx} = mv \frac{dv}{dt}$$

Sada je: $mv\frac{dv}{dt} = -kv^2$, pa je: $m\frac{dv}{dt} = -kv$. Sređivanjem izraza se dobija:

$$m\frac{dv}{v} = -kdt$$

Sada je: $m\int\frac{dv}{v} = -k\cdot\int dt$, odnosno:

$$\frac{k}{m}\int\frac{dv}{v} = -k\int dt\,.$$

Sređivanjem dobijamo da je: $v = v_0\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot x}$, što je zakon promene brzine sa promenom *x*.

Da bi se odredilo vreme potrebno da metak prođe kroz gredu, poći ćemo od izraza za promenu brzine:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k\cdot x}{m}}$$

Prepakovanjem izraza u oblik pogodan za integraljenje, dobija se:

$$\frac{dx}{e^{-\frac{k\cdot x}{m}}} = v_o dt$$

$$\int e^{\frac{k\cdot x}{m}}dx = \int v_o dt$$

Nakon uvođenja smene : $u = \frac{k\cdot x}{m}$, pa diferenciranjem: $dx = \frac{m}{k}du$ dobijamo:

$$\frac{m}{k}\int e^u du = \int v_o dt$$

Sada je: $\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{k\cdot x}{m}}\Big|_0^D = v_0 t\Big|_0^t$, pa je konačno: $t = \frac{m}{k\cdot v_0}\cdot(e^{\frac{kD}{m}} - 1)$.

Da bismo odredili *m*, poći ćemo od izraza za brzinu uz uključivanje trenutka izlaska metka iz grede: $v = v_0\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot D}$.

Iz ovog izraza je:

$$\frac{m}{k} = \frac{D}{ln\frac{v_0}{v_D}}.$$

Sada je:

$$t_D = \frac{1}{v_0}\cdot\frac{D}{ln\frac{v_0}{v_D}}\cdot\left(e^{ln\frac{v_0}{v_D}} - 1\right) = \frac{D}{ln\frac{v_0}{v_D}}\cdot\frac{v_0 - v_D}{v_0\cdot v_D}$$

$$t_D = \frac{0{,}05}{ln\frac{300}{200}}\cdot\frac{300 - 200}{300\cdot 200} = 0{,}00021s = 0{,}21ms$$

ZADATAK 3: Putnički lift težine $G = 800\,kg$, se kreće naniže ubrzanjem $a = 0{,}4\,g$, gde je ubrzanje sile teže $g = 9{,}81\text{m/s}^2$. Odrediti silu u konopcu koji pridržava lift, ako je sila otpora kretanju $F_o = 0{,}2$ težine lifta. Lift smatrati materijalnom tačkom.

Rešenje:

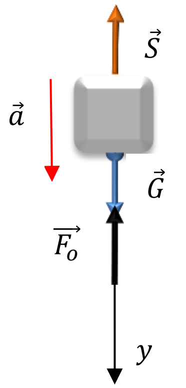
Lift se pridržava čeličnim lancem, koji zamišljeno presecamo i unosimo smerove sile, kao i smer ubrzanja, vertikalno na dole (spuštanje) (slika 12.3).

$$G = 800\ kg \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 7848\ N$$

$$a = 0{,}4\ g = 0{,}4 \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 3{,}924\ \frac{m}{s^2}$$

$$g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

$F_O = 0{,}2 \cdot G = 1569{,}6\ N$ – usmerena u suprotnom smeru od smera kretanja



Slika 12.3

Napisaćemo jednačinu kretanja u vektorskom obliku:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_O + \vec{S}$$

Projektovanjem jednačine na osu *y* dobijamo:

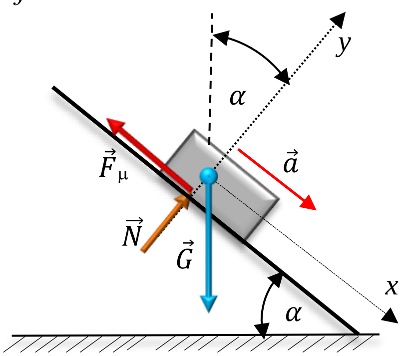
$$ma = G - S - F_o$$

Sada je:

$$S = G - ma - F_o = 7848 - 1569{,}6\ N - 800kg \cdot 3{,}924\ \frac{m}{s^2} = 3129\ N$$

ZADATAK 4: Teret A, koji se spušta niz strmu ravan postavljenu pod uglom α ka horizontu, kreće se saglasno jednačini: $x = bgt^2$, gde je : *g-ubrzanje teže, a b-koeficijent*. Odrediti intenzitet sile trenja klizanja tereta o ravan.

Rešenje:



Slika 12.4

Koordinatni sistem postavljamo kao na slici 12.4. Na osnovu slike 12.4 i II Njutnovog zakona se može zapisati:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$$

1) $m\ddot{x} = Gsin\alpha - F_\mu$

2) $m\ddot{y} = 0 \rightarrow 0 = -Gcos\alpha + N$ (nema kretanja po *y osi*)

3) $F_\mu = \mu N$

Iz jednačine (2) je: $N = Gcos\alpha$.

Kako je: $x = bgt^2$, a $\dot{x} = 2bgt$, onda je: $\ddot{x} = 2bg$. Sada ovo menjamo u jednačinu (4):

$$2mbg = Gsin\alpha - F\mu$$

$$F\mu = Gsin\alpha - 2\,mbg$$
$$F\mu = Gsin\alpha - 2\,bG$$
$$F\mu = G(sin\alpha - 2b).$$

ZADATAK 5: Materijalna tačka, mase $m = 4kg$, se kreće shodno zadatim parametarskim jednačinama: $x = 4\,cost, y = 3sint$. Odrediti silu F koja uzrokuje ovo kretanje.

Rešenje:

Kako je $m\ddot{x} = F_x\ i\ m\ddot{y} = F_y$, odnosno

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\ i\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,$$

potrebno je naći druge izvode po x i y.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -4 \cdot sint, \frac{d^2x}{dt^2} = -4 \cdot \cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 3 \cdot cost, \frac{d^2x}{dt^2} = -3 \cdot \sin t.$$

Na osnovu gornjih veza:

$$F_x = m\,(-4\cos t) = -4m \cdot \cos t$$
$$F_y = m\,(-3 \cdot \sin t) = -3m \cdot \sin t$$

ZADATAK 6: Telo mase $m = 5kg$ kreće se pravolinijski po horizontalnoj podlozi pod dejstvom horizontalne sile $F = 60N$. Odrediti ubrzanje tela ako je:

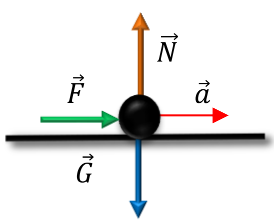
a) podloga glatka,

b) podloga hrapava sa koeficijentom trenja $\mu = 0{,}23$.

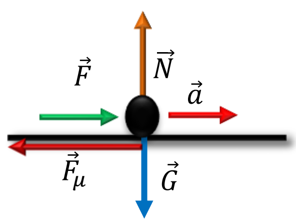
Rešenje:

a.) Za slučaj glatke podloge, uz pomoć slike 12.6.1. i primenom II Njutnovog zakona dobijamo vektorsku jednačinu:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{G}$$



Slika 12.6.1.



Slika 12.6.2.

Kako je kretanje samo po x osi, onda je i $ma = F$, pa je: $a = \frac{F}{m} = \frac{60}{5} = 12\frac{m}{s}$.

b.) U slučaju da je podloga hrapava, na osnovu slike 12.6.2 i II Njutnov zakona, postavljamo jednačinu:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{G}$$

Projekcijom jednačine na pravac ose kretanja (x) dobijamo:

(1) $ma = F - F_\mu$

(2) $0 = N - G$

(3) $F_\mu = \mu \cdot N$ (pomoćna jednačina)

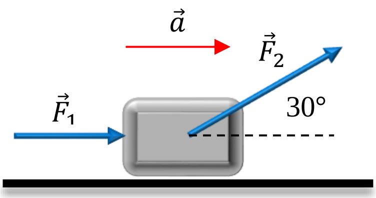
Iz jednačine (2) je $N = mg = 5 \cdot 9{,}81 = 49{,}05N$, pa je zato po (3):

$$F_\mu = 0{,}23 \cdot 49{,}05 = 11{,}28N$$

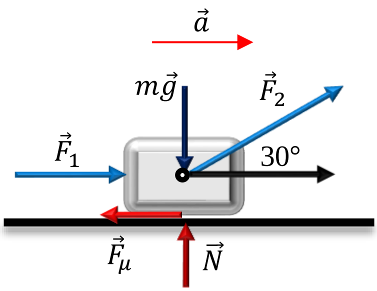
Sada iz jednačine (1) dobijamo da je:

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{60 - 11{,}28}{5} = 9{,}74\frac{m}{s}.$$

ZADATAK 7: Materijalno telo, mase $m = 50kg$ počinje da se iz stanja mirovanja kreće pod dejstvom dveju sila, $F_1 = 120N$ i $F_2 = 60N$ (kao na slici 12.7.1.). Odrediti zakon kretanja tela. Kolike će biti brzna i ubrzanje nakon $t = 5s$? Koeficijent trenja između podloge i tela je 0,25.



Slika 12.7.1



Slika 12.7.2

Rešenje:

Za dati slučaj, na osnovu slike 12.7.2 pišemo jednačnu II Njutnovog zakona:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{F}_\mu$$

Projektovanjem vektorske jednačine na ose:

(1) $m\ddot{x} = F_1 + F_2 cos30° - F_\mu$

(2) $m\ddot{y} = 0 = N + F_2 sin30° - G$

(3) $F_\mu = \mu N$

Iz jednačine (2) dobijamo:

$$N = G - F_2 \sin 30° = 50 \cdot 9{,}81 - 60 \cdot 0{,}5 = 46{,}05\ N$$

Iz jednačine (3) je $F_{\mu} = 0{,}25 \cdot 46{,}05 = 115{,}125N$

Konačno, iz jednačine (1):

$$a = \frac{F_1 + F_2 cos30° - F_{\mu}}{m} = \frac{120 + 60 \cdot 0{,}866 - 115{,}125}{50} = 1{,}14\frac{m}{s^2}$$

Kako je $v = \dot{x}$, a sile su konstantnog intenzteta onda je:

$$\dot{x} = \int \ddot{x}\, dt = 1{,}14t + C_1$$

Kako u početnom trenutku nije bilo kretanja, $C_1 = 0$. Za $t = 5s$, brzina je:

$$v = 1{,}14 \cdot 5 = 5{,}7\frac{m}{s}$$

ZADATAK 8: Telo težine $Q = 15N$ ima početnu brzinu $10\frac{m}{s}$ po glatkoj površini (slika 12.8). Ako sila $F = 2{,}5t$ deluje na telo u trajanju od $t = 3s$, izračunati konačnu brzinu tela i udaljenost koju telo pređe za to vreme.

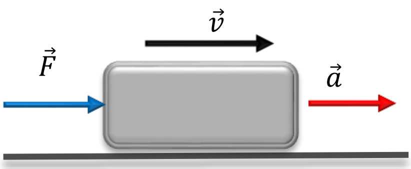
Rešenje:

Kako se kretanje odvija samo po x −osi (slika 12.8), pa jednačina kretanja glasi:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

onda je:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2{,}5t}{\frac{15}{9{,}81}} = 1{,}635t$$



Slika 12.8

Brzina je sada:

$$v = \int adt = \int 1{,}635tdt = 1{,}635 \cdot \frac{t^2}{2} + C_1$$

U početnom trenutku $t = 0, C_1 = 10\frac{m}{s}$, pa je:

$$v = 10 + 0{,}8175 \cdot t^2$$

Udaljenost tela se izračunava:

$$x = \int (10 + 0{,}8175 \cdot t^2)dt = 10t + 0{,}8175 \cdot \frac{t^3}{3} + C_2$$

U početnom trenutku, $t = 0, C_2 = 0$, pa je:

$$x = 0{,}2725t^3 + 10t.$$

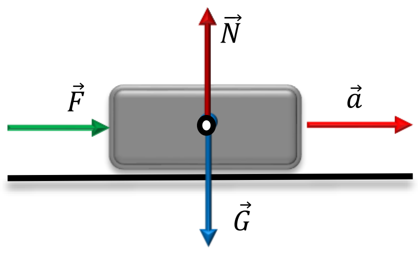
Nakon $t = 3s$:

- brzina je: $v = 10 + 0{,}8175 \cdot 3^2 = 17{,}35\frac{m}{s}$
- udaljenost: $x = 10 \cdot 3 + 0{,}2725 \cdot 3^3 = 37{,}35m.$

ZADATAK 9: Pod dejstvom konstantne sile F telo pređe put od $s = 30m$ za vreme $t = 2s$. Masa tela je 50kg. Koliki je intenzitet sile ako je telo pošlo iz mirovanja.

Rešenje:

Polazimo od jednačine II Njutnovog zakona, koju primenjujemo na sliku 12.9:



Slika 12.9

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{G}$$

Kako se kretanje odvija samo u pravcu dejstva sile F to je:

$ma = m\frac{dv}{dt} = F.$

Dalje, $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ pa je: $dv = \frac{F}{m}\ dt$ odnosno $v = \frac{F}{m}\int dt$ odnosno $v = \frac{F}{m}t + C_1$. Iz početnih uslova ($za\ t = 0, v_0$ je 0), pa je $C_1 = 0$.

Konačan izraz za brzinu je:

$$v = \frac{F}{m}t.$$

Kako je $v = \frac{ds}{dt}$ sledi da je: $s = \int \frac{F}{m}tdt.$

Nakon integraljenja je: $s = \frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + C_2$. Iz početnih uslova je $C_2 = 0$, pa je:

$$s = \frac{Ft^2}{2m}.$$

Na osnovu ovoga je:

$$F = \frac{2\cdot s\cdot m}{t^2} = \frac{2\cdot 30\cdot 50}{2^2} = 750N$$

ZADATAK 10: Telo mase $m = 160g$ se baci vertikalno naviše, sa početnom brzinom $v_0 = 100\frac{m}{s}$. Maksimalnu visinu dostigne nakon $t = 8s$. Odrediti silu otpora vazduha.

Rešenje:

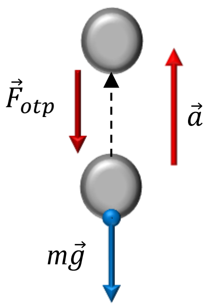
Na osnovu slike 12.10, jednačina kretanja se može zapisati: $m\vec{a} = \vec{F}_{otp} + m\vec{g}$, a projekcijom na vertikalnu osu dobijamo:

$$ma = -F_{otp} - mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -F_{otp} - mg$$

$$dv = -\frac{1}{m}(F_{otp} + mg)$$

$$v = -\frac{1}{m}\int (F_{otp} + mg)dt$$



Slika 12.10

$$v = -\frac{1}{m}\left(F_{otp} + mg\right)t + C_1.$$

Iz početnih uslova je $C_1 = 100\frac{m}{s}$, pa je konačan izraz za brzinu:

$$v = 100 - \frac{1}{m}\left(F_{otp} + mg\right)t$$

U trenutku zaustavljanja, nakon $t = 8s$, brzina je nula, pa možemo izjednačiti:

$$100 = \frac{1}{m}\left(F_{otp} + mg\right) \cdot 8$$

odnosno:

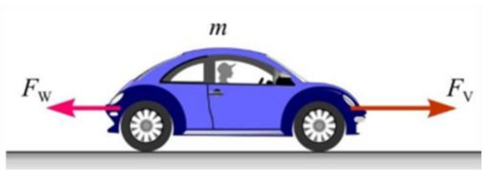
$$F_{otp} = \frac{100m}{8} - mg = \frac{0{,}16 \cdot 100}{8} - 0{,}16 \cdot 9{,}81 = 0{,}43N.$$

ZADATAK 11: Na automobil mase $m = 1250kg$ deluje vučna sila $F_v = 6{,}5kN$, kao na slici 12.11. Ukoliko je sila otpora $F_{otp} = F_w = \frac{mg}{20}$, odrediti brzinu automobila nakon što pređe put od $100m$, ako je pošao iz stanja mirovanja.

Rešenje:

Jednačina kretanja u ovom slučaju je:

$$ma = F_v - F_W,$$



Slika 12.11

pa je:

$$a = \frac{F_v - F_W}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Iz uslova zadatka je:

$$F_w = \frac{1250 \cdot 9{,}81}{20} = 613{,}125N,$$

pa se može napisati:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(6{,}5 - 0{,}613) \cdot 1000}{1250} = 4{,}71\frac{m}{s^2}$$

Odavde je:

$$v = \int 4{,}71dt = 4{,}71t,$$

a pređeni put x je, nakon još jednog integraljenja i uključivanja početnih uslova, kada je $x_0 = 0$: $x = 4{,}71 \cdot \frac{t^2}{2}$.

U trenutku kada je $x = 100m$

$$t_1^2 = \frac{2x}{4{,}71} = \frac{2 \cdot 100}{4{,}71} = 42{,}46s^2, \text{ odnosno } t_1 = 6{,}52s.$$

Brzina u tom trenutku je: $v_1 = 4{,}71 \cdot 6{,}52 = 30{,}71\frac{m}{s}$.

ZADATAK 12: Na materijalnu tačku mase $m = 3kg$ deluju tri konstantne sile, čiji intenziteti stoje u odnosu $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$. Sile saopštavaju materijalnoj tački ubrzanje $a = 3\frac{m}{s^2}$. Odrediti intenzitete tih sila.

Rešenje:

Odnos sila koje deluju na telo je:$F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$, pa možemo reći da u ukupnoj sili postoji nekih 6 delova. Kako je rezultanta:

(1) $F_R = ma = 3 \cdot 3 = 9N$ i

(2) $F_R = 6k$

važi jednakost: $6F_1 = ma$, pa je:

$$F_1 = \frac{ma}{6} = \frac{3 \cdot 3}{6} = 1{,}5N$$

Sile su redom: $F_1 = 1{,}5N;\ F_2 = 3N;\ F_3 = 4{,}5N.$

ZADATAK 13: Kuglica mase $m = 100g$ pada pod dejstvom ubrzanja sile zemljine teže po zakonu $x = 490t + 245(1 - e^{-2t})$, gde je x dato u cm, a t u sekundama. Naći otpor vazduha, F_0, u funkciji vremena t i u funkciji brzine v. Ubzanje $g = 9{,}80\frac{m}{s^2}$.

Rešenje:

Jednačina II Njutnovog zakona u ovom slučaju ima oblik:

$$m\ddot{x} = G - F_0$$

pa je: $F_0 = G - m\ddot{x}$

$$\dot{x} = v = 490 + 490 \cdot e^{-2t}\frac{cm}{s}$$

$$\dot{x} = 4{,}9 \cdot (1 + e^{-2t})\frac{m}{s} = v$$

Odavde je:

$$1 + e^{-2t} = \frac{v}{4{,}9}$$

$$\ddot{x} = -9{,}8 \cdot e^{-2t}$$

Sada je:

$$F_0 = G - m\ddot{x} = mg + m \cdot 9{,}8 \cdot e^{-2t} = 9{,}8 \cdot m \cdot (1 + e^{-2t}).$$

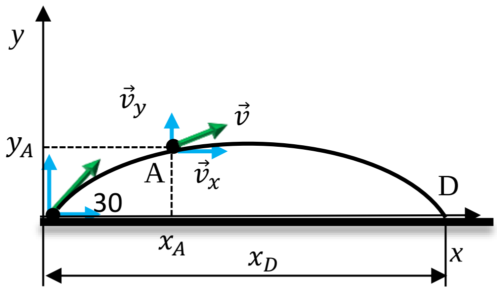
Ovo je izraz u funkciji vremena. Izraz u funkciji brzine je:

$$F_o = 9{,}8 \cdot m \cdot \frac{v}{4{,}9} = 2mv$$

13. DINAMIKA TAČKE II –HORIZONTALNI, VERTKALNI I KOSI HITAC

ZADATAK 1: Telo se izbaci pod uglom $\alpha = 30°$ prema horizontu, početnom brzinom $v_0 = 10\frac{m}{s}$ Potrebno je odrediti:

a.) Koju maksimalnu brzinu telo postiže?
b.) Kolika je maksimalna visina penjanja tela?
c.) Posle kod vremena telo padne na zemlju?
d.) Na kom odstojanju od početnog položaja padne telo?



Slika 13.1

$$-\sin 30° = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$-\cos 30° = 0,866 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Rešenje:
Jednačina kretanja u vektorskom obliku ima oblik:

$$m\vec{a} = -\vec{G}$$

Projektujemo ovu jednačinu na ose x i y.

$$ma_x = 0$$
$$m\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} = 0$$
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$$
$$d\dot{x} = 0dt$$
$$\dot{x} = C_1$$
$$t = 0;\ \ v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$$
$$v_0.\cos\alpha = C_1$$
$$\dot{x} = v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = const$$
$$v_x = v_0 \cdot \cos 30°$$
$$v_x = 10\frac{m}{s} \cdot 0,866 = 8,66\frac{m}{s}$$
$$\dot{x} = v_x = 8,66\frac{m}{s} = const$$

$$ma_y = -mg$$
$$a_y = -g$$
$$\ddot{y} = -g$$
$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g$$
$$d\dot{y} = -gdt$$
$$\dot{y} = -gt + C_2$$
$$v_y = y = -gt + C_2$$
$$t = 0;\ \ v_{y0} = v_0 \cdot \sin\alpha$$
$$v_0 \cdot \sin\alpha = -gt + C_2$$
$$C_2 = v_0 \cdot \sin\alpha$$
$$v_y = \dot{y} = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$$
$$v_y = 10\frac{m}{s} \cdot 0,5 - gt$$
$$\dot{y} = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$$

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos 30°$
$dx = v_0 \cdot \cos 30°\, dt$
$x = v_0 \cdot t \cdot \cos 30° + C_3$
$t = 0$; $x_0 = 0$; pa je
$0 = 8{,}66\, m \cdot 0 + C_3$
$C_3 = 0$

$\frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$
$dy = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot dt - g \cdot t \cdot dt$
$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_4$
Kada je: $t = 0$; $y_0 = 0$
$0 = 0 - 0 + C_4$
$C_4 = 0$

a) Brzina je maksimalna u trenutku izbačaja ili pada na zemlju, a to je v_0.

b) i c) Visinu H dobijamo iz jednačine v_y koja je jednaka nuli u maksimalnoj tački penjanja.

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t = 0$$
$$v_0 \cdot \sin\alpha = g \cdot t$$
$$t_H = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{10\frac{m}{s} \cdot 0{,}5}{9{,}81\frac{m}{s^2}} = 0{,}51s$$

U idealnim uslovima (nema otpora vazduha) ukupno vreme kretanja tela je:

$t_u = 2 \cdot l_H = 2 \cdot 0{,}51s = 1{,}02s = t_D$

$y_H = v_0 \cdot t_H \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot {t_H}^2$
$y_H = 10\frac{m}{s} \cdot 0{,}51s \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}51s)^2$
$y_H = 2{,}55m - 1{,}276m$
$y_H = 1{,}28\, m$
$H = 1{,}28\, m$

d.) Domet (x_D) dobijamo izjednačavanjem koordinate y sa 0:

$y_D = v_0 \cdot t_D \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot {t_D}^2 = 0$
$v_0 \cdot t_D \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} g \cdot {t_D}^2$
$2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha = g \cdot t_D$
$t_D = 2\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$
$t_D = \frac{2 \cdot 10\frac{m}{s} \cdot 0{,}5}{9{,}81\frac{m}{s^2}} = 1{,}02\, s \rightarrow$ isto kao i pod b.).
$x_D = v_0 t \cos\alpha$
$x_D = 10\frac{m}{s} \cdot 1{,}02s \cdot 0{,}867$
$x_D = 8{,}84\, m$

ZADATAK 2: Telo se baci pod uglom od $\alpha = 45°$ prema horizontu sa početnom brzinom $v_0 = 20\frac{m}{s}$ (slika 13.2). Koliki je domet ovog bacanja i koliko traje let tela?

Rešenje:

$D = x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$

$D = v_0 \cdot t_D \cdot \cos\alpha$

U trenutku pada, koordinata y je jednaka nuli.

$y_D = v_0 \cdot t_D \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot {t_D}^2 = 0$

$v_0 \cdot t_D \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} g \cdot {t_D}^2$

$v_0 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} g \cdot t_D$

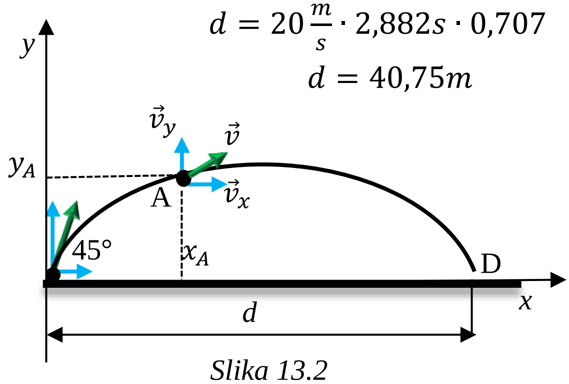
$$t_D = 2\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

$$t_D = \frac{2 \cdot 20\frac{m}{s} \cdot 0{,}707}{9{,}81\frac{m}{s^2}}$$

$t_D = 2{,}882\ s$

$d = 20\frac{m}{s} \cdot 2{,}882s \cdot 0{,}707$

$d = 40{,}75m$



Slika 13.2

ZADATAK 3: Kamen se nalazi na obali reke, na visini $h = 20m$ od površine vode. Taj kamen se horizontalno baci početnom brzinom $v_0 = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Posle koliko vremena kamen pada u vodu? Kojom brzinom on upada u vodu?

Rešenje:

Osnovna jednačina kretanja , na osnovu slike 13.3 je: $m\vec{a} = -\vec{G}$

$ma_x = 0$

$m\ddot{x} = 0$

$\ddot{x} = 0$

$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$

$d\dot{x} = 0dt$

$\int d\dot{x} = \int odt = 0 + C_1$

$Za\ t = 0;\ \ v_0 = 0 + C_1$

$v_0 = C_1$

$v_x = v_0 = 15\frac{m}{s}$

$\frac{dx}{dt} = v_0$

$dx = v_0 dt$

$x = v_0 t + C_2, \quad C_2 = 0$

$ma_y = -mg$

$a_y = -g$

$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g$

$d\dot{y} = -gdt$

$v_y = -\int gdt$

$t = 0;\ \ v_{y0} = -g \cdot t_0 + C_3$

$0 = C_3$

$v_{y0} = -gt$

$\frac{dy}{dt} = -gt$

$dy = -gtdt$

$y = \int(-g \cdot t) \cdot dt$

$x = 15t$

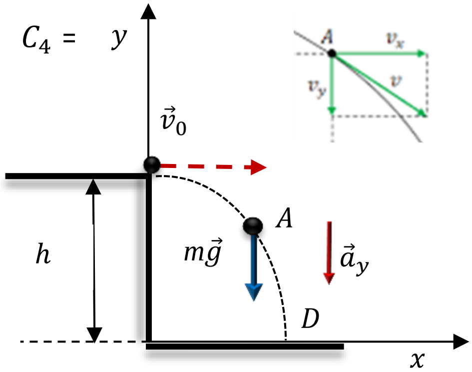
U početnom trenutku: $t_0 = 0;\ y_0 = h$, pa je:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_4$$

$$h = -\frac{1}{2}g \cdot 0 + C_4$$

$C_4 =$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$



Slika 13.3

U trennutku pada, $y = y_D = 0$

$$y_D = h - \frac{1}{2}gt_D{}^2 = 0$$

$$h = \frac{1}{2}gt_D{}^2$$

$$2h = gt_D{}^2$$

$$t_D{}^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 2{,}02\ s$$

U trenutku pada:

$$v_{Dx} = v_0 = 15\frac{m}{s}$$

$$v_{Dy} = -g \cdot 2{,}02s = -9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}02s = -19{,}8162\frac{m}{s}$$

$$v_D = \sqrt{\left(15\frac{m}{s}\right)^2 + \left(19{,}8162\frac{m}{s}\right)^2}$$

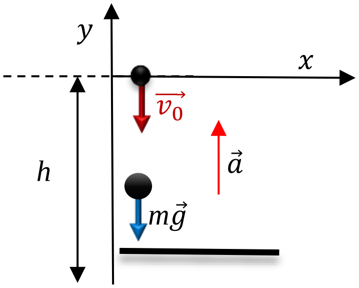
$$v_D = \sqrt{225\frac{m^2}{s^2} + 392{,}6818\frac{m^2}{s^2}}$$

$$v_D = \sqrt{792{,}6818\frac{m^2}{s^2}} = 24{,}85\frac{m}{s}$$

ZADATAK 4: Telo je bačeno vertikalno naniže sa visine $h = 100m$, sa početnom brzinom $v_o = 3\frac{m}{s}$, kao na slici 13.4. Koliko dugo telo pada i kojom brzinom telo pada na tlo?

Rešenje:

Na osnovu slike 13.4 postavljamo jednačinu kretanja:



Slika 13.4.

$$m\vec{a} = \vec{G}$$
$$ma = -mg$$
$$m\frac{d\dot{y}}{dt} = mg$$

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

U trenutku $t_0 = 0$; $\dot{y}_0 = -v_0$; pa je $\dot{y}_0 = -v_0 - gt$; $v = -v_0 - gt \rightarrow$

$$\frac{dy}{dt} = -v_0 - gt$$
$$dy = -(v_0 + gt)dt$$
$$y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

U početnom trenutku $t_0 = 0$; $y_0 = h$; pa je $h = 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = h$,

$$y = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

U trenutku pada y = 0

$$y_k = h - v_0 t_k - \frac{1}{2}g{t_k}^2 = 0\ /(-1)$$
$$\frac{1}{2}g{t_k}^2 + v_0 t_k - h = 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot {t_k}^2 + 3\frac{m}{s}\cdot t_k - 100m = 0$$
$$4{,}905{t_k}^2 + 3t_k - 100 = 0$$
$$t_{k1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t_{k1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4\cdot 4{,}905\cdot 100}}{2\cdot 4{,}905}$$
$$t_{k1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 1962}}{9{,}81}$$
$$t_{k1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1971}}{9{,}81}$$

$$t_{k1/2} = \frac{-3 \pm 44{,}39}{9{,}81}$$
$$t_{k1} = 4{,}219 \approx 4{,}22\ s$$

Drugo rešenje se ne uzima u obzir jer je negativno.
U trenutku pada:

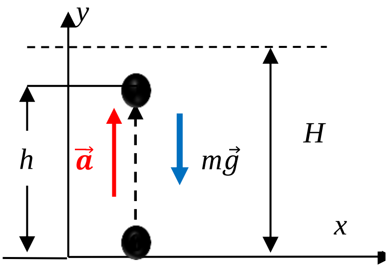
$$v = -v_0 - gt$$
$$v = -v_0 - 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 4{,}22s$$
$$v = -3\frac{m}{s} - 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 4{,}22s$$
$$v = -44{,}40\frac{m}{s}$$

ovaj minus znači kretanje suprotno od pozitivnog smera „y“ose!!!
**osa usmerena na gore, smer kretanja na dole!!!*

ZADATAK 5: Telo se baci vertkalno naviše početnom brzinom v_0, kao na slici 13.5. Posle pređenog puta od 200 m, telo ima brzinu od $v = 150\frac{m}{s}$.

a) Kolika je početna brzina?
b) Do koje visine će dospeti telo?
c) Posle kog vremena će pasti na zemlju?

Rešenje:



Slika 13.5

Na osnovu slike 13.5 postavljamo jednačinu kretanja:

$$m\vec{a} = -\vec{G}$$
$$ma_y = -mg$$
$$a = a_y = -g$$

Integraljenjem dobijamo:

$$\frac{dv}{dt} = -g \; pa \; je: v = -gt + C_1$$

Iz početnih uslova: $t_0 = 0, v = v_0 = C_1$, pa je:

$$v = v_0 - gt$$

Daljim integraljenjem ćemo dobiti zakon promena puta.
$\frac{dy}{dt} = v_0 - gt$, pa je: $dy = (v_0 - gt)dt$.
Nakon integraljenja $y = \int (v_0 - gt)dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C_2$
Na osnovu početnih uslova $C_2 = 0$, pa je zakon puta: $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

a) Da bismo došli do početne brzine iz jednačine za brzinu ćemo odrediti trenutak dostizanja brzine od $150\frac{m}{s}$.

$$v_1 = v_0 - gt_1 = 150$$

Odavde je: $v_0 = v_1 + gt_1$ =150+9,81· t_1 odnosno $t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g}$

Zamenićemo ovo u jednačinu puta: $v_0 \cdot \frac{v_0 - v_1}{g} - \frac{1}{2}\cdot g\left(\frac{v_0 - v_1}{g}\right)^2 - 200 = 0$

Smenom dobijamo da je: $v_0 = 162{,}55\frac{m}{s}$.

b) Da bismo odredili maksimalnu visinu penjanja, izraz za brznu ćemo izjednačiti sa nulom:
$v_0 - gt_H = 0$, pa je: $t_H = \frac{v_0}{g}$

U izrazu za pređeni put menjamo:

$$y = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{gt_H^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g \cdot v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} = H$$

Na osnovu ovoga je $H = 1346{,}71m$.

c) Vreme penjanja je:

$$t_H = \frac{v_0}{g} = \frac{150}{9{,}81} = 15{,}29\ s$$

Ukupno vreme putovanja je $t = 2 \cdot 15{,}29 = 30{,}58\ s$

ZADATAK 6: Telo se baci pod uglom od $\alpha = 30°$ prema horizontu. Ako je brzina tela $v = 50\frac{m}{s}$ posle proteklog vremena t = 2 s od trenutka izbacivanja, izračunati njegovu početnu brzinu v_0.

Rešenje:

Kod kosog hica, projekcije brzina na x i y osu su:

$$v_x = v_0 cos\alpha = \frac{v_0\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

$$v_y = v_0 sin\alpha - gt = \frac{v_0}{2} - 9{,}81 \cdot 2 = (\frac{v_0}{2} - 19{,}62)\frac{m}{s}$$

Kako je brzina nakon $t = 2s$, postavićemo jednačinu za intenzitet brzine nakon $t = 2s$ i u izraz uneti $t = 2s$:

$$v_x^2 + v_y^2 = 50^2$$
$$(v_0 cos\alpha)^2 + (v_0 sin\alpha - gt)^2 = 50^2$$
$$(v_0\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (v_0\frac{1}{2} - 9{,}81 \cdot 2)^2 = 50^2$$
$$\frac{3v_0^2}{4} + \frac{v_0^2}{4} - 2 \cdot \frac{v_0}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 2 + 19{,}62^2 = 2500$$
$$v_0^2 - 19{,}62 \cdot v_0 - 384{,}94 = 0$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo jedno nemoguće rešenje i drugo prihvatljivo $v_0 = 31{,}75\frac{m}{s}$.

ZADATAK 7:Topovsko zrno izleti iz cevi brzinom od $v\ = 200\ \frac{m}{s}$ pod uglom od $\alpha = 30°$ prema horizontu. Izračunati udaljenost mesta pada zrna na horizontalnu ravan, kao i vreme kretanja zrna do pada.

Rešenje:
Kod kosog hica, za zadate početne uslove, projekcije brzina na x i y osu i jednačine kretanja su:
$v_x = v_0 \cdot cos\alpha, \qquad x = v_0 t \cdot cos\alpha$
$v_y = v_0 \cdot sin\alpha - gt, \qquad y = v_0 .t \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
Ukoliko sa t_p obeležimo vreme leta do pada na zemlju, onda je i domet D:

$$x_D = D = v_0 \cdot t_D \cdot cos\alpha$$

Kako je koordinata $y_D = 0$ (trenutak pada na zemlju), iskoristićemo to da odredimo vreme leta do pada:

$$v_0 \cdot t_D \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} g t_D^2 = 0$$

$$t_D \left(v_0 \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t_D \right) = 0 \text{ pa je } t_D = 0 \ \vee \ v_0 \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t_D = 0.$$

Kako $t_D = 0$ otpada kao rešenje, iz izraza: $2v_0 sin\alpha = \ g t_D$, dobijamo da je:

$$t_D = \frac{2v_0 \cdot sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}81} = 20{,}39\ s$$

Vraćajući izraz $t_D = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}$ u izraz za domet dobijamo:

$$x_D = D = v_0 t_D cos\alpha = v_0 \frac{2v_0 sin\alpha}{g} cos\alpha = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g} = \frac{200^2 \cdot \sin 60°}{9{,}81}$$

$$v_D = 2038{,}74\ m$$

ZADATAK 8: Raketa se izbaci pod uglom od $\alpha = 70°$ prema horizontu. Za vreme $t = 80s$ ona dostigne najveću visinu. Izračunati početnu brzinu rakete i položaj mesta pada na horizontalnu ravan.

Rešenje:

Obeležimo vreme leta do postizanja maksimalne visine sa $t_H = 80s$. Poznato je da u trenutku dostizanja maksimalne visine penjanja rakete H, komponenta brzine $v_y = \ v_o \cdot sin\alpha - g t_H$ =0. Iskoristićemo ovo da odredimo v_0. Iz izraza je:

$$v_o \cdot sin\alpha = g t_H \ ,$$

pa je:

$$v_0 = \frac{g t_H}{sin\alpha} = \frac{9{,}81 \cdot 80}{sin70°} = 834{,}89\ \frac{m}{s}$$

Položaj mesta pada (domet D) ćemo odrediti iz izraza za promenu koordinate x, koristeći da je $y_D = 0$. Koristeći poznate izraze, dobijamo da je:

$$D = x_D = \frac{v_0^2 \cdot sin2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot sin2\alpha}{g} = \frac{834{,}89^2 \cdot \sin 140°}{9{,}81} = 45673{,}61\ m$$

ZADATAK 9: Sa vrha brda je izbačena velika stena početnom brzinom od 25 $\frac{m}{s}$ pod uglom od 35° u odnosu na horizontalu, kao na slici 13.9. Stena pada na površinu Zemlje koja je na *50 m* manjoj nadmorskoj visini od vrha brda. Odrediti vreme potrebno steni da pređe ovaj put.

Resenje:

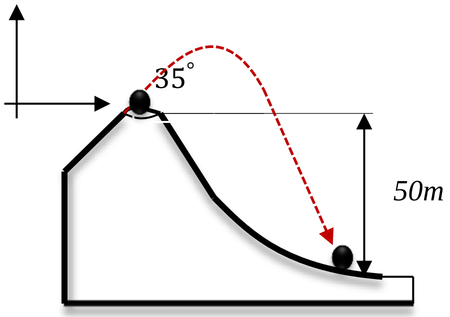
Postavljamo koordinatni sistem na mestu izbačaja stene (slika 13.9). Zamenom podataka u izrazu za promenu koordinate y za kosi hitac i koristeći zadate početne uslove i visinu sa koje pada stena (vodeći računa da je koordinatni sistem usmeren na gore, a da je koordinata y u trenutku pada je -50):

$$y = v_0 \cdot t \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-50 = 25t \cdot sin35^\circ - \frac{1}{2} \cdot 9.81t^2$$

$$-50 = 14{,}34t - 4{,}9t^2$$

$$4{,}9t^2 - 14{,}34t - 50 = 0$$



Slika 13.9

$$t_{12} = \frac{14{,}34 \pm \sqrt{(14{,}34)^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-50)}}{2 \cdot 4.9} = \frac{14{,}34 \pm 34{,}43}{9.8}$$

Jedno rešenje je negativno (nemoguće), a drugo je $t = 4{,}97\ s$.

14. DINAMKA TAČKE – OPŠTI ZAKONI DINAMIKE TAČKE

ZADATAK 1: Koliki je impuls tela (količna kretanja) mase *m =5kg*, ako se kreće brzinom od 3,6$\frac{km}{h}$?

Rešenje:

$$v = 3{,}6 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 1\frac{m}{s}$$

$$I = K_1 - K_0 = mv = 5 \cdot 1 = 5\frac{kgm}{s}$$

ZADATAK 2: Na telo mase $m = 200g$ deluje konstantna sila *F = 20N* u vremenskom intervalu $\Delta t = 0{,}03s$. Koliki je impuls sile i kolika je brzina tela nakon prestanka dejstva sile, ako je telo pošlo iz mirovanja?

Rešenje:

Masa tela je $m = 0{,}2kg$, a kako je telo mirovalo u početku, promena količine kretanja je:$K_1 - K_0 = mv_1 - mv_0 = mv_1$.

Impuls sile je jednak ovoj razlici tj. $I = F \cdot \Delta t = 20 \cdot 0{,}03 = 0{,}6Ns$. Brzina tela na kraju dejstva sile je: $v_1 = \frac{I}{m} = \frac{0{,}6}{0{,}2} = 3\frac{m}{s}$.

ZADATAK 3: Lopta, mase $m = 200g$, udara pod pravim uglom o zid i odbija se, promenivši samo smer, a zadržavši pravac (kao na slici 14.3). Brzina lopte pri udaru je $v = 10\frac{cm}{s}$. Ako je udar trajao $\Delta t = 0{,}1s$, izračunati impuls koji je zid saopštio loptici, kao i veličinu sile kojom lopta deluje na zid.

Rešenje:

Masa tela je: *m=0,2kg, a* brzina pri udaru je:$v = 10\frac{0{,}01}{1}\frac{m}{s} = 0{,}1\frac{m}{s}$. Pogledajmo šta se dešava pri udaru na slici 14.3.

Impuls koji dobija loptica jednak je promeni količine kretanja. Ako u vektorskom obliku ovo zapišemo i projektujemo na osu kretanja, dobićemo:

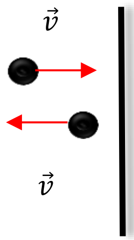
$$mv - (-mv) = I,$$

odnosno

$I = 2mv = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}04\text{Ns}$

Sada je:

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{0{,}04}{0{,}1} = 0{,}4N$$

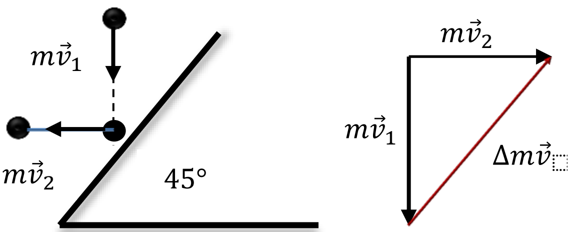


Slika 14.3

ZADATAK 4: Padajući sa visine od $h=2m$, telo mase $m=20g$ udari u strmu ravan nagibnog ugla od 45° (slika 14.4 pod a.) i odbije se od nje po horizontali, ne promenivši intenzitet brzine. Kolika je promena impulsa pri odbijanju?

Rešenje:

Masa tela je $m = 0{,}02kg$. Pogledajmo šta se dešava kada telo udari o strmu ravan.



a.) *b.)*

Slika 14.4

Na osnovu slike14.4 pod b.), možemo izračunati:

$$\Delta mv = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = mv\sqrt{2}$$

Potrebno je odrediti brzinu v, što ćemo učiniti iz izraza:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2} = 6{,}26\,\frac{m}{s}$$

Sada je: $\Delta mv = 2 \cdot 6{,}26 \cdot 1{,}41 = 17{,}65Ns$

ZADATAK 5: Telo, mase $m = 10\,kg$, se kreće pravolinijski po horizontalnoj podlozi pod dejstvom horizontalne sile $F = 100N$. Odrediti ubrzanje tela ako je:

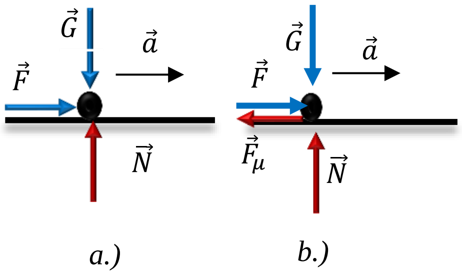
a) podloga glatka,

b) podloga hrapava sa koeficijentom trenja μ=0,25.

Rešenje:

Za slučaj pod a.):

$ma = F$, pa je $a = \frac{F}{m} = \frac{100}{10} = 10\frac{m}{s^2}$



Slika 14.5

Za slučaj pod b.):

$$ma = F - \mu \cdot N$$

$$a = \frac{F - \mu \cdot N}{m} = \frac{F - \mu \cdot G}{m}$$

$$a = \frac{100 - 0{,}25 \cdot 98{,}1}{10} = 7{,}55\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 6: Koliki rad je potrebno izvršiti da bi se telo mase *m=5kg* podiglo na visinu *h=50m* na mestu gde je ubrzanje sile zemljine teže *10* $\frac{m}{s^2}$*?*

Rešenje:

$A = F \cdot \Delta h = mgh$ =5$\cdot$ $10 \cdot 50$ =*2500J*

ZADATAK 7: Motor neke mašine ima snagu $P = 45kW$.Koliki rad može da izvrši motor za vreme od $t = 40$ min, ako je stepen korisnog dejstva $\eta = 0{,}90$?

Rešenje:
$t = 40min = 2400s$
$A = F \cdot s = \frac{P}{v} \cdot v \cdot t = P \cdot t = 45000 \cdot 2400 = 108 \cdot 10^6 J$
Uvodeći stepen iskorištenja: $A_k = A \cdot \eta = 108 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9 = 97{,}2 \cdot 10^6 J$

ZADATAK 8: Odrediti rad sile Zemljine teže i rad sile trenja (po intenzitetu i znaku), pri kretanju materijalne tačke težine $G = 150\ N$,

a.) niz strmu ravan, ako je koeficijent trenja $\mu = 0{,}2$ i b.) uz strmu ravan, ako je normalna reakcija strme ravni $F_N = 26N$. Poznato je da je dužina strme ravni $\overline{AB} = 5m$, ugao $\alpha = 30°$, $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Rešenje:

a) Vektorska jednačina II Njutnovog zakona je:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$$

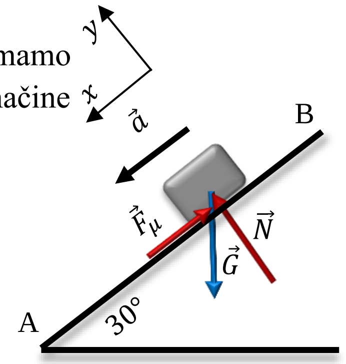
Ovu jednačinu projektujemo na ose *x* i *y*, pri čemu imamo kretanje samo po *x* osi. Na osnovu slike 14.8.1. jednačine kretanja po osama su:

1) po x osi: $m\ddot{x} = Gcos60° - \mu N$

2) po y osi: $0 = N - Gcos30°$

Iz druge jednačine dobijamo da je:

$N = Gcos30° = 150 \cdot 0{,}865 = 129{,}75\ N$



Sila trenja se izračunava

Slika 14.8.1

$$F_\mu = \mu N$$

Zamenom poznate vrednosti za koeficient trenja i dobijene vrednosti normalne reakcije dobijamo:

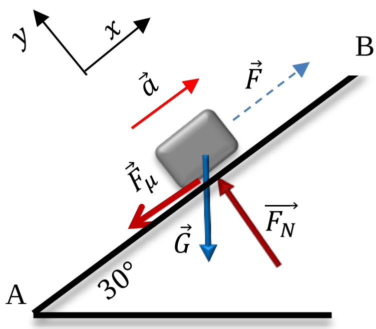
$F_\mu = 0{,}2 \cdot 129{,}75 = 25{,}95N$

U slučaju kretanja niz strmu ravan, rad vrši sila trenja na čitavoj dužini $\overline{AB}$ i sila zemljine teže na visini h.

Sa slike 14.8.1 je:

$h = \overline{AB} \cdot cos60° = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5m$

Sada imamo sve podatke da odredimo tražene radove sila, pa je:



Slika 14.8.2

$A_{tr1} = -\overline{AB} \cdot F_\mu = -5 \cdot 25{,}98 = -129{,}9$ J

$A_{mg1} = +G \cdot h = +G \cdot AB \cdot \cos 60° = +375$ J

b) Kretanje uz strmu ravan je prikazano na slici 14.8.2. Ovakvo kretanje se svakako odigrava pod dejstvom neke sile, ali je u ovom slučaju zadata normalna reakcija podloge, pa nema potrebe da polazimo od jednačina kretanja i uključujemo silu F (ona je samo grafički prikazana na slici). Kako je poznata normalna reakcija podloge, sila trenja je:

$$F_\mu = \mu F_N = 0{,}2 \cdot 26 = 5{,}2N$$

Sila teže deluje na visini h, ali sada promena sa manje na višu tačku – ulaže se rad.

Dakle, tražene vrednosti u slučaju kretanja uz strmu ravan pod zadatim uslovima su:

$A_{tr2} = -\overline{AB} \cdot F_\mu = -5 \cdot 5{,}2 = -\,2{,}6$ J
$A_{mg2} = -G \cdot h = -G \cdot 2{,}5 = \ -375$ J (ulažemo rad).

NAPOMENA:
Rad sile trenja se vezuje za intenzitet sile i dužinu puta na kom deluje i uvek je negativan.
Rad sile zemljine teže je pozitivan ako telo ide sa više na nižu visinsku tačku, i obrnuto.

ZADATAK 9: Prilikom lansiranja rakete mase $m = 200kg$, trenutno sagori $\frac{1}{4}$ njene sadržine i izbaci se u suprotnom smeru od smera kretanja rakete brzinom $v_2 = 1800\frac{m}{s}$. Kolika je početna brzina rakete?

Rešenje:

Pišemo jednačinu za održanje količine impulsa:

$$m\vec{v} = \frac{3}{4}m\vec{v}_1 + \frac{1}{4}m\vec{v}_2$$

Projektovanjem na izabranu osu po kojoj se odvija kretanje, na osnovu teksta zadatka dobijamo:

$$0 = \frac{3}{4}mv_1 - \frac{1}{4}mv_2,$$

pa je zato:

$$3v_1 = v_2$$

Odavde je :$v_1 = \frac{v_2}{3} = \frac{1200}{3} = 600\frac{m}{s}$.

ZADATAK 10: Telo se nalazi na visini od 10 m i pusti se da pada bez početne brzine. Kojom brzinom telo udara u tle?

Rešenje:

Promena kinetičke energije jednaka je izvršenom radu. U ovom slučaju rad vrši sila zemljine teže, pa jednačina o promeni kinetičke energije glasi:

$$E_{k1} - E_{k0} = mgh$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

$$v_1^2 - v_0^2 = gh$$

$v_1^2 = gh$, pa je $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10} = 14{,}007\,\frac{m}{s}$
Ovom brzinom telo pada na tlo.

ZADATAK 11: Kuglica M mase m i krutosti c je postavljena u vertikalnu cev, u kojoj je sabijena opruga za veličinu h (slika 14.11). Odrediti:

a.) intenzitet brzine kojom kuglica napušta cev,
b.) uslov koji mora biti zadovoljen da bi kuglica napustila cev,
c.) visinu H do koje će se kuglica popeti.

Rešenje:
Iskoristićemo zakon o priraštaju kinetičke energije za rešavanje zadatka. Poslatrajući sliku 14.11 , možemo napisati jednačinu:

$$E_{k1} - E_{k0} = \sum A_i^{F_i}$$

Početna kinetička energija je jednaka nuli, a od radova imamo rad elastične sile i rad sile zemljine teže (u ovom slučaju negativan jer kuglica ide sa manje na višu visinu). Potrebno je pažljivo posmatrati slike: promena visine je *h*.

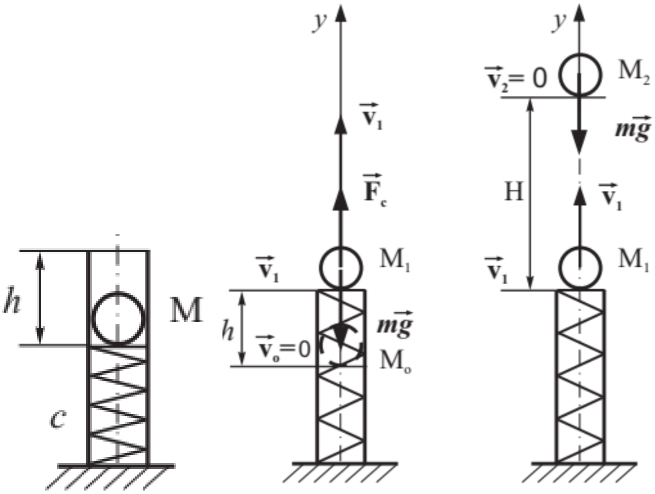
$$\frac{mv_1^2}{2} - 0 = A_{mg} + A_{el}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = -mgh + \frac{ch^2}{2}$$

a.) Brzina kuglice se sada izračunava: $v_1 = \sqrt{\frac{ch^2}{m} - 2gh}$

b.) Uslov koji treba zadovoljiti je: $\frac{ch^2}{m} > 2gh$, odnosno $c > \frac{2mg}{h}$

c.) Da bismo odredili visinu h poći ćemo od sledećih činjenica: kada kuglica izleti iz cevi, ima brzinu v_1, kada kuglica dođe do maksimalne visine njena brzina je tada nula ($v_2 = 0$), elastična sila više nema uticaja na to kretanje, i rad vrši samo sile zemljine teže (na putu H).



Slika 14.11

Tako je:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{mg} \text{ odnosno: } 0 - \frac{mv_1^2}{2} = -mgH.$$

Sređivanjem dobijamo:

$$H = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\frac{ch^2}{m} - 2gh}{2g}$$

ZADATAK 12: Telo mase $m = 2kg$ je prikačeno na slobodni kraj opruge krutosti k=10N/m. Kuglica leži na hrapavoj horizontalnoj ravni čiji je koeficient trenja $\mu = 0{,}2$. U početnom (ravnotežnom) položaju telu je saopštena početna brzina $v_0 = 1\ \frac{m}{s}$. Naći brzinu tela u funkciji pomeraja x.

Rešenje:

Na osnovu slike 14.12 postavićemo jednačinu o priraštaju kinetičke energije:

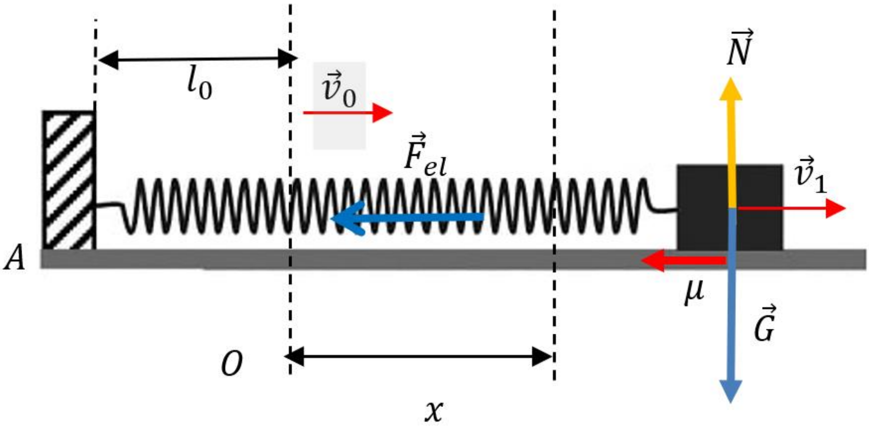
$$E_{k1} - E_{ko} = A_{tr} + A_{el}$$

Rad sile trenja je negativan i kako je reakcija podloge $N = G = mg$, rad sile trenja (uvek negativan) na putu dužine x je: $A_{tr} = -\mu mgx$. Rad elastične sile je negativan kada se udaljava od ravnotežnog položaja

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} - \mu mgx$$

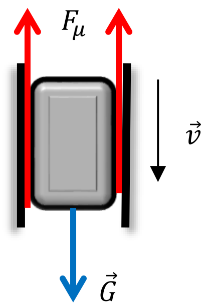
Zamenom vrednosti i sređivanjem izraza dobiiijamo:

$$v_1^2 = 1 - 5x^2 - 3{,}924x$$



Slika 14.12

ZADATAK 13: U rudarskom oknu se kreće dizalica, a u slučaju kidanja užeta postoji uređaj za hvatanje koji treba da obezbedi da se dizalica zaustavi nakon pređenog puta s =*10m*. Ukoliko je težina lifta G = *60kN*, brzina kretanja do $v = 12\frac{m}{s}$, odrediti silu trenja, pretpostavljajući da je ta sila trenja konstantna.



Slika 14.13

Rešenje:

Primenom zakona o promeni kinetičke energije, a na osnovu slike 14.13, dobijamo izraz:

$E_{k1} - E_{kp} = A_{mg} + A_{tr}$

Kinetička energija tela kada se zaustavi je nula (dakle E_{k1}=0), rad sile zemljine teže je pozitiva i $A_{mg} = G \cdot s$, a rad sile trenja je: $A_{tr} = -F_\mu \cdot s$.

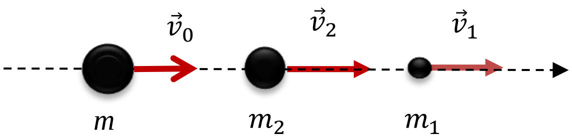
Sada gornji izraz poprima oblik:

$$0 - \frac{mv^2}{2} = G \cdot s - F_\mu \cdot s$$

Odavde je:

$$F_{\mu} = \frac{1}{s} \cdot \left(G \cdot s + \frac{mv^2}{2}\right) = \frac{1}{10} \cdot \left(60 \cdot 10 + \frac{60 \cdot 12^2}{9{,}81 \cdot 2}\right) = 104{,}04kN$$

ZADATAK 14: Granata leti u horizontalnom pravcu brzinom $v_0 = 15\frac{m}{s}$. Prilikom eksplozije, granata se raspadne na dva dela, čije su mase $m_1 = 0{,}5kg$ i $m_2 = 1\ kg$. Brzina većeg dela granate je $v_2 = 30\frac{m}{s}$. Kolika je brzina manjeg dela granate? Napomena: pravci kretanja delova granate se poklapaju sa prvobitnim pravcem kretanja granate.



Slika 14.14

Rešenje:

Šematski prikaz zadatka je dat na slici 14.14.

Primenićemo zakon o održanju količine kretanja:

$$m\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Kako se pravac kretanja zadržava, projektujemo jednačinu na pravac kretanja:

$$(m_1 + m_2) \cdot v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_0 - m_2 v_2}{m_1}$$

$v_1 = \frac{1{,}5 \cdot 15 - 1 \cdot 30}{0{,}5} = -15\frac{m}{s}$ (ovaj minus znači da je kretanje u suprotnom smeru)

ZADATAK 15: Tokom kretanja brzinom od $v = 400\frac{m}{s}$, granata se raspadne na dva jednaka dela, pri čemu delovi krenu po pravcima koji za horizontalom zauzimaju po 30°.Kolike su brzine kretanja delova granate?

Rešenje:

Jednačina o održanju količine kretanja
(na osnovu slike 14.15) glasi:

$$2m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

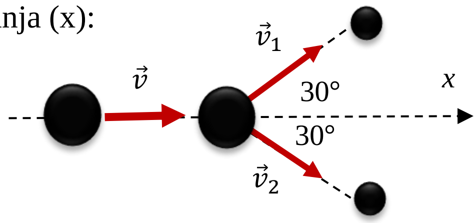
Projektovanjem na pravac inicijalnog kretanja (x):

$2mv_0 = m \cdot v_1 \cdot cos30° + m \cdot v_2 \cdot cos30°$

$2v_0 = 0{,}867 \cdot v_1 + 0{,}867 \cdot v_2$,

$(v_1 = v_2 = v)$

$2v_0 = 2 \cdot 0{,}867 \cdot v$, pa je: $v = \dfrac{400}{0{,}867} = 461{,}37\dfrac{m}{s}$



Slika 14.15

ZADATAK 16: Tokom nekog vremennskog intervala $\Delta t = 20s$, materijalna tačka težine *G = 3kN* uveća svoju početnu brzinu 3 puta. Ukoliko je tokom tog vremenskog intervala delovala sila F konstantnog pravca i intenziteta, i ukoliko je početna brzina bila $v_o = 2\frac{m}{s}$, izračunati vrednost te sile.

Rešenje:
Primenom zakona o promeni količine kretanja materijalne tačke, dobijamo:

$$\boldsymbol{K_x - K_{x0} = I_x}$$

Opšti oblik jednačine je:

$$\frac{G}{g} \cdot (n \cdot v_o - v_0) = F \cdot \Delta t,$$

gde je n=3 – broj puta uvećanja početne brzine. Odavde je:

$$F = \frac{G \cdot (n-1) \cdot v_o}{g \cdot \Delta t}$$

Zamenom vrednosti dobijamo:

$$F = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot (3-1) \cdot 2}{9{,}81 \cdot 20s} = 61{,}16N.$$

ZADATAK 17: Na telo **A**, mase m = 3kg koje se kreće pravolinijski translatornopod dejstvom promenljive sile $F = \frac{km}{1+t^2}$, gde je k – faktor proporcionalnosti, m – masa tela, a t – vreme.Početna brzina tačke je $v_o =$

$2\frac{m}{s}$. Ako je koeficient trenja klizanja između podloge i tela A $\mu = 0{,}2,\ k = 3$, odrediti brzinu tačke 2s od početka kretanja.

Rešenje:

Kako je kretanje pravolinijsko translatorno, a jednačina kretanja je:

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\mu} + \vec{F}^{in} = 0, \text{odnosno}\ m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\mu},$$

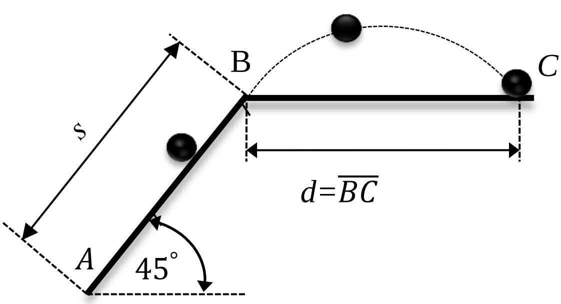
Na kretanje materijalne tačke duž x ose direktan uticaj imaju sile F_{μ} i F. Impuls sile, vodeći računa da sila F doprinosi kretanju, a F_{μ} deluje u suprotnom smeru je:

$$I_x = \int_0^t F dt - \int_0^t F_{\mu} dt = \int_0^t \frac{km}{1+t^2} dt - \int_0^t \mu m g dt = kmarctgt - \mu mgt$$

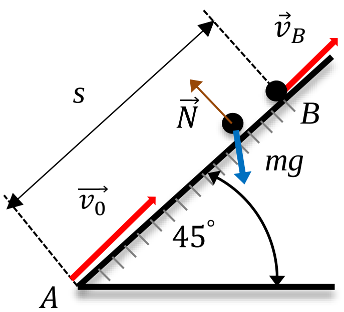
Sada je: $I_x = 3 \cdot 3 \cdot arctg\ 2 - 0{,}2 \cdot 3 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = 570{,}91 - 11{,}77 = 559{,}14Ns$

ZADATAK 18: Na delu između tačaka A i B (kao na slici 14.18.1) materijalna tačka mase $m = 1$ kg kreće se uz glatku strmu ravan, dok se od B do C kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Ako je brzina na početku kretanja iznosila $v_0 = 10\frac{m}{s}$ odrediti domet d (rastojanje $\overline{BC}$)? Dužina strme ravni $s = 5m$, *a* sile otpora pri kretanju su zanemarljive.

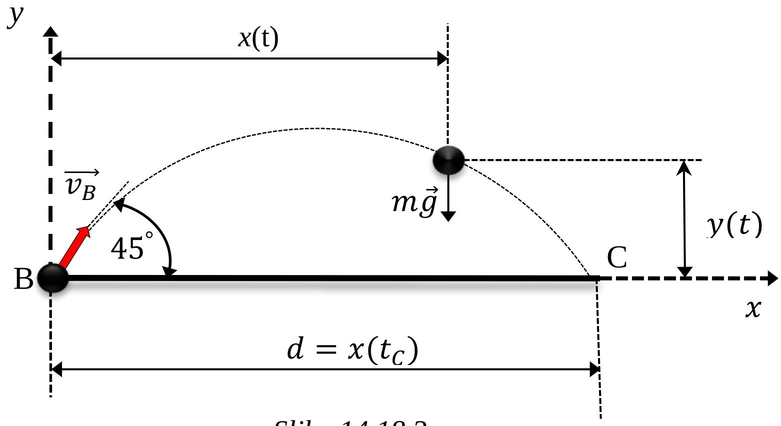
Rešenje:
Brzinu tačke na mestu *B* najlakše ćemo odrediti primenom teoreme o promeni kinetičke energije tačke pri njenom kretanju po glatkoj vezi (od tačke *A* do tačke *B*), pri čemu samo sila zemljine teže vrši rad (slika 14.18.2):



Slika 14.18.1



Slika 14.18.2



Slika 14.18.3

$E_{KC} - E_{KB} = A_{mgAB},$

$\frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = -mg \cdot s \cdot \sin 45^\circ$

$v_B^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ => $v_B = \sqrt{v_0^2 - \sqrt{2}gs} = \sqrt{10^2 - \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5}} = 1{,}38\,\frac{m}{s}$

U drugoj fazi kretanja postavljamo novi koordinatni sistem, u kome početni trenutak odgovara položaju tačke na mestu B. To znači da je $t_B = 0$, odnosno $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0) = v_B cos45° = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\dot{y}(0) = v_B sin45° = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Kretanje u ovoj fazi se obavlja po principu kosog hica, pa postavljamo jednačinu:

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

Projekcijom ove jednačine na ose i integracijom ćemo dobiti jednačine promene koordinata. Projektovanjem na y osu ćemo dobiiti:

$$m\ddot{y} = -mg,$$

Odavde je: $\frac{d\dot{y}}{dt} = -g$

$d\dot{y} = -gdt,$ pa je: $\int d\dot{y} = -g\int dt$. Tako dobijamo da je: $\dot{y} = -gt + C_1$

Konstanta $C_1 = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$, jer je $\dot{y}(0) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vraćanjem u početnu jednačinu koeficienta C_1, dobijamo:

$\dot{y}(t) = -gt + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sada treba odreditii jednačinu po kojoj se menja koordinata y.

$dy = \left(-gt + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt$, odakle je: $\int dy = \int\left(-gt + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt$.

Nakon integracije dobijamo: $y = -\frac{gt^2}{2} + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}t + C_2$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog početnih uslova ($y(0) = 0$) je nula, pa je:

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t\,.$$

Isti postupak ćemo ponoviti i za osu x.Prvo projektujemo jednačinu II Njutnovog zakona na x osu: $m\ddot{x} = 0$. Dalje je: $\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$, pa je: $\dot{x} = C_3$.

Konstanta $C_3 = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$, jer je: $\dot{x}(0) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sada je: $\dot{x}(t) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$ odnosno $\frac{dx}{dt} = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je: $dx = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot dt$.

Daljim integraljenjem dobijamo:

$\int dx = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\int dt$, odnosno $x = v_B\frac{\sqrt{2}}{2} + C_4$.

Konstanta $C_4 = 0$, jer je $x(0) = 0$, pa je tako: $x(t) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t$.

Domet d ćemo odrediti:

$$d = x(t_C) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t_C$$

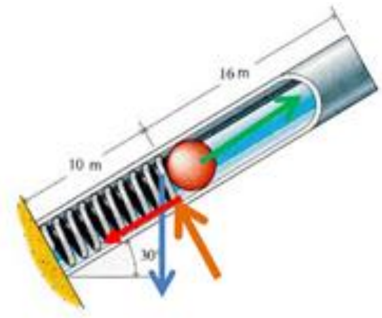
Kako je u trenutku pada na tlo: $y\ =\ y(t_C) = -g\frac{t_C{}^2}{2} + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t_C = 0$, sređivanjem dobijamo da je:

$$t_C = \sqrt{2}\frac{v_B}{g}\,.$$

Sada t_C menjamo u izraz za domet:

$$d = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\frac{v_B}{g} = \frac{v_B{}^2}{g} = \frac{v_0{}^2}{g} - \sqrt{2s} = \frac{1{,}38^2}{9{,}81} = 0{,}194\frac{m}{s}$$

ZADATAK 19: Lopta, teška 2N, se nalazi u cevi (kao na slici 14.19). U određenom trenutku, dolazi do otpuštanja opruge. Ukoliko je dužina neopterećene opruge 20 m, a koeficient krutosti je $k = 10\frac{N}{m}$, odrediti rad koji pri kretanju lopte izvrše sile na dužini od prikazanih 16 m. Pored težina kuglice, poznato je da je $l_0 = 2m$ i $v_1 = 0\frac{m}{s}$. Koeficient kinematskog trenja između lopte i cevi je $\mu = 0{,}15$.



Slika 14.19

- reakcija veze
- sila teže
- elastična sila
- sila trenja

Rešenje:

Projektovaćemo jednačinu kretanja na ose:

(1) $m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_{el}$
(2) $ma_y = 0 = N - Gcos30°$
(2) $F_\mu = \mu \cdot N$
Pr tome su:

- $N = Gcos30 = 3 \cdot 0{,}867 = 2{,}601N$
- $F_\mu = 0{,}15 \cdot 2{,}601 = 0{,}39N$
- $F_{el} = -k\Delta x = -10 \cdot (20 - 10) = -100N$

Sa slike 14.19, projekcija jednačine na x osu je:

(4) $ma_x = ma = F_{el} - Gcos60° - F_\mu$

Rad vrše elastična sila i sila zemljine teže.

Rad elastične sile: kako je opruga dužine 20 m u neopterećenom stanju sabijena na dužinu od 10 m, to je: $\Delta x = 20 - 10 = 10m$, pa je:

$$A_{el} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^2 = 50Nm$$

U ovom slučaju je rad sile pozitivan jer se opruga približava ravnotežnom položaju!

Rad sile zemljine teže: ova sila vrši rad zbog promene visine, pa je u ovom slučaju promena visine $\Delta h = 16 \cdot cos60° = 8m$. Rad u ovom slučaju je negativan jer se lopta sa manje penje na veću visinu.

$$A_{mg} = -g \cdot \Delta h = -2 \cdot 8 = -16Nm$$

Rad sile trenja je negativan uvek i na putu dužine 16m iznosi:

$$A_{F_\mu} = -F_\mu \cdot 16 = -0{,}39 \cdot 16 = -6{,}24Nm$$

Ukupan izvršen rad je: $A = A_{el} + A_{mg} + A_{F_\mu} = 50 - 16 - 6{,}24 = -27{,}76Nm$

ZADATAK 20: Sanduk mase $50kg$ se nalazi na strmoj ravni, a njegovo kretanje naniže je ograničeno gredom. Ako su koeficient statičkog i kinematskog trenja između podloge i sanduka $\mu_1 = 0{,}3$ i $\mu_2 = 0{,}2$ retrospektivno, odrediti vreme neophodno da sila F počne pomerati sanduk brzinom od 2 $\frac{m}{s}$. Sila je intenziteta $F = 300t\ N$, a t je u sekundama.

Rešenje:
Pre pokretanja sanduka, ubrzanje je nula i važe sledeće jednačine:
(1) $F = F_\mu + Gsin30°$
(2) $N = Gcos30° = mgcos30° = 50 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}867 = 425{,}26N$
(3) $F_{\mu 1} = \mu_1 \cdot N = 0{,}3 \cdot G \cdot cos30° = 0{,}3 \cdot 50 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}867 = 127{,}58N$
Iz jednačine (1) je: $F(t) = 127{,}58 + 50 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 372{,}83N$.

Kako je $F(t) = 372{,}83N = 300t$, dobijamo trenutak kada dolazi do pokretanja sanduka:

$$t = \frac{372{,}83}{300} = 1{,}24s$$

Za deo kada nastupi kretanje, primenićemo zakon o promeni količine kretanja:

$$mv_2 - mv_1 = \sum I_i$$

Kako je brzina na početku ove faze bila nula, onda je $v_1 = 0$.

Impuls sile ćemo izračunati integraljenjem: $I = \int F(t)dt = \int 300tdt$, kao i za ostale sile.

$$mv_2 = \int 300tdt - \int \mu_2 \cdot \int \mu_2 \cdot G \cdot cos30°G \cdot cos30°dt - \int Gsin30°dt$$

$$mv_2 = \int (300t - \mu_2 \cdot m \cdot g \cdot cos30° - mgsin30°)dt$$

Uključićemo granice jer II faza počinje sa $t = 1{,}24s$:

$$50 \cdot 2 = \int_{1{,}24}^{t} (300t - 85{,}05 - 245{,}25)dt$$

Sređivanjem izraza dobijamo:

$$150 \cdot t^2 - 330{,}3 \cdot t + 78{,}93 = 0$$

Kao rešenja se dobijaju:$t_1 = 0{,}2771s$ i $t_2 = 1{,}929s$. Prvo rešenje je nemoguće zato što je manje od 1,24s. Dakle, sanduk će dostići brzinu od $2\frac{m}{s}$ nakon $t = 1{,}929s$ od početka dejstva sile.

ZADATAK 21: Materijalna tačka M, mase $m = 2kg$, započinje kretanje iz tačke A (kaon a slici 14.21.1) početnom brzinom $v_0 = 8m/s$, po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 1m$ do tačke C, a zatim uz hrapavu strmu ravan $\overline{CB}$ (visine $h = 2m$, nagiba $\alpha = 60°$ i koeficijenta trenja klizanja μ=0,35) do tačke B. Iz tačke B tačka nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku D. Napisati jednačinu kretanja tačke po strmoj ravni. Odrediti rastojanje $\overline{BD}$ i reakciju N u tački C.

Rešenje:

Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i C, pošto nema visinske razlike ($A_{mg} = 0$), a kružna staza je glatka ($A_{tr} = 0$), brzina u položaju C će imati istu vrednost kao početna brzina tj. $v_c = v_0 = 8m/s$.

Kretanje po strmoj ravni se obavlja samo u pravcu strme ravni i to će nam biti x osa. Po y −osi nema kretanja.

$$(1) m\ddot{x} = -mgsin\alpha - F_\mu,$$

$$(2)\ m\ddot{y} = 0 = N - mgcos\alpha$$

$$(3) F_\mu = \mu F_N$$

Dobijamo da je: $F_\mu = \mu F_N = \mu mgcos\alpha$.

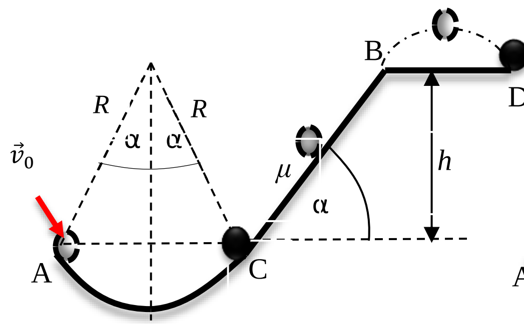
pa sledi:

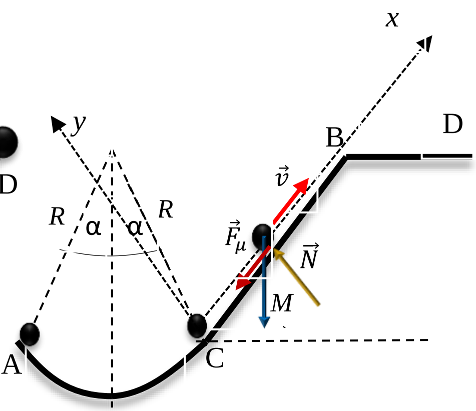
$$m\ddot{x} = -mgsin\alpha - mgcos\alpha,$$

$$\ddot{x} = -g \cdot sin\alpha - \mu \cdot g \cdot cos\alpha$$

a nakon zamene brojnih vrednosti se dobija:

$a = \ddot{x} = -9{,}81 \cdot sin60° - 0{,}35 \cdot 9{,}81cos60°$, $\quad \ddot{x} = -10{,}2$





Slika 14.21.1

Slika 14.21.2

Da bismo odredili zakon promene brzine kretanja po strmoj ravni, uradićemo integraciju, vodeći računa o početnim uslovima. Pocetni uslovi su: *t=0*, x_0*=0*, $v_0 = v_C$*=8m/s.*

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -10{,}2$$

$$\int d\dot{x} = -10{,}2 \cdot \int dt \rightarrow \dot{x} = -10.2t + C1$$

Koeficient C_1 određujemo iz početnih uslova. Za *t=0* i $\dot{x}_0 =$ *8m/s* dobija se $C_1 = 8$, pa je:

$$x = -10.2t + 8 \rightarrow \frac{dx}{dt} = 10.2t + 8$$

Dalje ćemo integraljenjem dobiti zakon puta.

$$\int dx = \int \left(-10{,}2t\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$x = -10{,}2\frac{t^2}{2} + 8t + C_2$$

pa je za t *=0*, $x_0 = 0$ i $C_2 = 0$.

Jednačina kretanja uz strumu ravan CB sada glasi: $x = -5{,}1t^2 + 8t$.

Da bi smo odredili brzinu v_B primenićemo zakon promene kinetičke energije između tačaka C i B:

$$E_{kB} - E_{kc} = A_{mg} + A_{tr}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -mgh - F_\mu \cdot s$$

Za određivanje rada sile trenja nam je potrebno da odredimo s. Kako je $\frac{h}{s} = sin\alpha$, onda je

$$s = CB = \frac{h}{sin\alpha} = \frac{2}{sin60} = 2{,}3m$$

pa je:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 = -2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 - 3{,}43 \cdot 2{,}3$$
$$v_B^2 = 64 - 39{,}24 - 7{,}9 = 16{,}86$$

Tako dobijamo da je: $v_B = \sqrt{16{,}86} = 4.1\frac{m}{s}$
Od tacke B sledi kosi hitac, sa pocetnom brzinom v_B, pod uglom od 60° prema horizontali.
Domet kosog hica se dobija po obrascu:

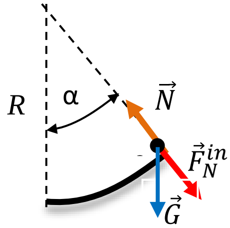
$$d = \overline{BD} = \frac{v_B \cdot sin(2 \cdot 60°)^2}{g} = \frac{16.86 \cdot 0.866}{9.81} = 1.49\ m$$

Normalnu reakciju u tacki C, odredićemo primenom jednačine:

$$m\vec{a}_C = \vec{N}_C + \vec{G}$$

Za određivanje normalne reakcije N u tački C projektovaćemo jednačinu na pravac normale (slika 14.21.3). Usled postojanja normalnog ubrzanja koje je uvek okrenuto ka centru kružnice, uvešćemo inercijalnu silu: F_N^{in}, koja je usmerena u suprotnu stranu od normalnog ubrzanja.

$$N = F_N^{in} + mgcos\alpha = ma_N + mgcos\alpha$$
$$N = m \cdot \frac{v_C^2}{R} + mgcos60°$$
$$N = 2 \cdot \frac{8^2}{1} + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 137{,}81N$$



Slika 14.21.3

OBRASCI ZA DINAMIKU SISTEMA

- Položaj središta mase sistema je određen sa: $\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$
- Ili koordinatama**:**
  - $\boldsymbol{x_C = \frac{1}{M}\sum m_i \cdot x_i}$
  - $\boldsymbol{y_C = \frac{1}{M}\sum m_i \cdot y_i}$
  - $\boldsymbol{z_C = \frac{1}{M}\sum m_i \cdot z_i}$
- Za telo koje rotira oko ose z, moment inercije, J_z zauzima mesto mase,
- Hajgens- Štajnerova teorema : kada telo, čija je osa z rotira oko ose z_1 koja je na rastojanju l od ose tela, moment inercije se izračunava:
  - $J_{z1} = J_z + m \cdot l^2$
- Zakon kretanja sistema materijalnih tela se definiše: $m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_C = \sum \vec{F}_i^s$

pri čemu je:

  - $\sum \boldsymbol{\vec{F}_i^s}$ – suma svih spoljašnjih sila,

- Projektovanjem prethodne jednačine na ose se dobijaju tri jednačine:
  - $m\ddot{x}_C = X_R^S$,
  - $m\ddot{y}_C = Y_R^S$,
  - $m\ddot{z}_C = Z_R^S$,
- Dalamberov princip se često koristi kod krivilinijskog kretanja materijalne tačke:
  - $\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N + \vec{F}^{in} = 0$
  - Projektovanjem na tangentu i normalu inercijalne sile imamo:
    - $F_T^{in} = -ma_T = -\frac{dv}{dt}$
    - $F_N^{in} = -ma_N = -m\frac{v^2}{R}$
- Količina kretanja se izračunava: $\vec{K} = m\vec{v}_C$
- Zakon o promeni količine kretanja: $\frac{d\vec{K}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_i$,
- Zakon o održanju količine kretanja:

  $\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \vec{I}_i^s$ a ako je $\sum \vec{I}_i^s = 0$, onda je: $\vec{K} = const$ i $\vec{v}_C = const$.
- Kod kružnog kretanja, javlja se moment količine kretanja:

$$\vec{M}_0 = \vec{L}_0 = \vec{r}_C x M \cdot \vec{v}_C$$

- Zakon o promeni momenta količine kretanja:$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_0^{\vec{F}_i^S}$,

- Zakon o promeni kinetičke energije: $\Delta E_k = \sum A_i, \frac{1}{2} M v_C^2 - \frac{1}{2} M v_{C0}^2$.
- Kod ravnog kretanja: $E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2$

15. DINAMIKA SISTEMA I - DINAMIKA TELA I MOMENT INERCIJE

ZADATAK 1: Iz topa, mase $m_1 = 1{,}8t$ ispali se granata $m_2 = 1$kg pod uglom od $\alpha = 30°$ prema horizontu početnom brzinom $v_2 = 360\frac{m}{s}$. Koliki su:

a) brzina trzaja topa,
b) srednje usporenje topa, ako on posle trzaja pređe put od $s = 2m$?

Rešenje:
Kako nema dodatnih spoljašnjih sila koje bi delovale na sistem tokom posmatranja sistema, postavljamo jednačinu za održanje količine kretanja:

$$K_0 = K_1 + K_2$$

$$(m_1 + m_2) \cdot v_0 = -m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \cdot cos\alpha$$

Znak (–) spred brzine v_1 se odnosi na smer trzaja – suprotan je smeru granate. Kako je $v_0 = 0$, sledi da je: $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot cos\alpha$. Odavde je:

$$v_1 = \frac{m_2 \cdot v_2 \cdot cos\alpha}{m_1} = \frac{1 \cdot 360 \cdot cos30°}{1800} = 0{,}173\frac{m}{s}.$$

ZADATAK 2: Lokomotiva mase $5t$ kreće se brzinom od $7m/s$ i sudara se sa vagonom koji miruje. Kolika je masa vagona, ako nakon sudara oni se kreću zajedno sa brzinom $4\ m/s$?

Rešenje:
Kako ne deluje neka sila, postavićemo jednačinu održanja količine kretanja:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_2$$

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot (v_1 - v_2)}{v_2} = \frac{5000 \cdot (7 - 4)}{4} = 3750\ kg$$

ZADATAK 3: Teret A težine $G_A = 70N$ postavljen je na strmu ravan nagiba α i težine G_2 =*250N* (kao na slici 15.3). Sistem je u početku bio u miru, a zatim je teretu A saopštena brzina $v_1 = 5\frac{m}{s}$, kojom nastavlja da se kreće niz strmu ravan. Odrediti kojom brzinom se kreće strma ravan. Trenje zanemariti.

Rešenje:

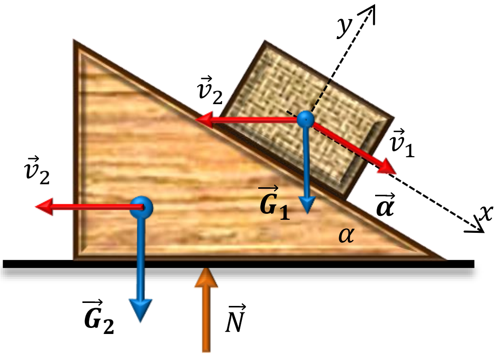
Ako postavimo koordinatni sistem kao na slici desno, projektovanjem svih sila na pravac x ose dobijamo: $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 = \dot{K}_x$, pa kako je $\dot{K}_x = 0$ onda je $K_x = const = K_{x0} = 0$ (sistem je bio u miru na početku). Kada počne kretanje, telo A se kreće naniže niz kosinu tela B brzinom v_1 a sa telom B ulevo brzinom v_2.

Projektovanjem jednačine $K_x = K_{x0} = 0$ na x osu, dobijamo:

$$\frac{G_1}{g} \cdot (v_1 cos\alpha - v_2) - \frac{G_2}{g} \cdot v_2 = 0$$

Sređivanjem dobijamo:

$$\boldsymbol{v_2 = v_1 \frac{G_1}{G_1 + G_2} cos\alpha}$$

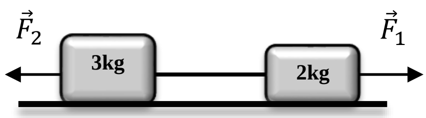


Slika 15.3

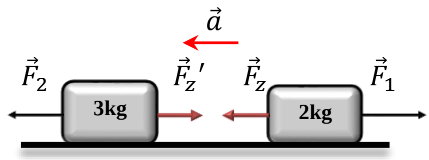
Zamenom zadatih vrednosti u dobijeni izraz, dobijamo da je:

$$v_2 = 5 \cdot \frac{70}{70 + 250} = 1{,}093 \frac{m}{s}$$

ZADATAK 4: Dva tela mase $m_1 = 2$ kg i $m_2 = 3\,kg$, povezana su međusobom (kao na slici 15.1.1) užetom koje može da izdrži maksimalnu silu zatezanja od $F_{max} = 350N$. Na telo deluju dve sile: $\vec{F}_1 = kt$ i $\vec{F}_2 = 2kt$ ($k = 10\frac{N}{s}$). Posle kog vremena od početka kretanja će doći do pucanja užeta? Trenje zanemariti.



Slika 15.1.1



Slika 15.1.2

Rešenje:

Pretpostavimo da se pod dejstvom sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ ceo sistem kreće sa desna na levo. Ukoliko presečemo uže između dva tela, pojaviće se sile zatezanja F_z i $F_z{}'$, koje su jednake po intenzitetu i pravcu, ali suprotnog smera.

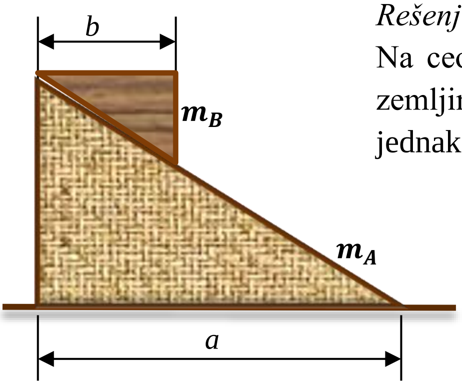
Napisaćemo jednačine kretanja za oba tela (na osnovu slike 15.1.2):

$$m_2a = F_2 - F_z{}' \qquad\qquad m_1a = F_z - F_1$$
$$F_z{}' = F_2 - m_2a \qquad\qquad F_z = m_1a + F_1$$

Odavde je:
$$F_2 - m_2a = m_1a + F_1$$
$$a(m_1 + m_2) = F_2 - F_1$$
Tako je:
$$a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2} = \frac{2kt - kt}{m_1 + m_2} = \frac{kt}{2+3} = \frac{10t}{5} = 2t$$

Vraćamo se na jednu od jednačina za granični uslov $F_z = 350N$, kako bismo izračunali posle kog vremena će ova sila biti dostignuta.
$$F_z = m_1a + F_1 = 350$$
$$2\cdot 2t + 10t = 350$$
$$14\cdot t = 350$$
$$t = \frac{350}{14} = 25s$$

ZADATAK 5: Na homogenu prizmu *A*, mase m_A = 2*m*, koja može da se kreće po horizontalnoj nepokretnoj ravni, položena je prizma *B*, mase m_B = *m*. Odrediti dužinu ℓ za koju se pomeri prizma *A* kada prizma *B*, spuštajući se po prizmi *A*, dode do horizontalne ravni. Trenje izmedu prizmi i nepokretne ravni zanemariti. Sistem je započeo kretanje iz stanja mirovanja, a *a* i *b* su poznate veličine.



Slika 15.5.1

Rešenje:

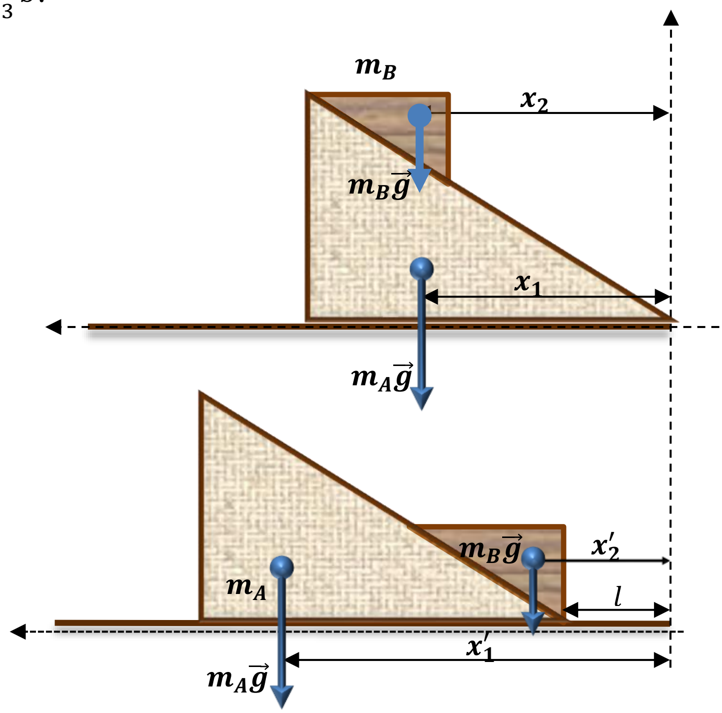
Na ceo sistem od spoljašnjih sila deluju samo sile zemljine teže, pa je zato suma svih sila po x osi jednaka nuli.
$$\sum X_i = 0$$

Po zakonu kretanja središta masa: $m\ddot{x}_C = \sum X_i = 0$ ($mx_C = \sum m_i x_i$), pa je $m\ddot{x}_C = 0$. Odavde je $\dot{x}_C = const = \dot{x}_{C0} = 0$, pa je kako je brzina po *x* osi nepromenljiva i jednaka nuli
$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = 0, \text{ odavde } dx_c = 0, \text{ odnosno } x_C = const.$$

Ovo znači da se koordinata *x* središta masa tokom kretanja ne menja.

Posmatrajmo sistem tela u dva karakteristična položaja: na početku kretanja i kada telo B dotakne horizontalnu podlogu (slika 15.5.2). Kako je koordinata *x* središta masa konstantna, onda možemo postaviti jednačine na osnovu zakona o kretanju središta masa.

$(m_A + m_B) \cdot x_C = m_A \cdot x_1 + m_B x_2$
$(2m + m)x_C = 2mx_1 + mx_2$
$3mx_C = m\,(2x_1 + x_2)$
Sa slike je: $x_1 = \frac{2}{3}a$, a $x_2 = a - \frac{2}{3}b$ (na osnovu poznatih pozicija težišta figura).
Sada se gornja jednačina, nakon skraćivanja sa m, može transformisati:
$3x_C = 2 \cdot \frac{2}{3}a + a - \frac{2}{3}b$
$3x_C = \frac{7}{3}a - \frac{2}{3}b.$



Slika 15.5.2

Kada se prizma A pomeri za *l*, jednačina ima oblik: $3x_C = 2x_1{}' + x_2{}'$
Sa slike je: $x_1{}' = l + \frac{2}{3}a$, a $x_2{}' = l + \frac{1}{3}b$. Zamenom u jednačini biće:

$$3x_C = 2 \cdot (\, l + \frac{2}{3}a) + l + \frac{1}{3}b$$

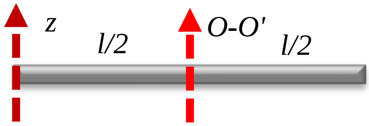
$$3x_C = 3l + \frac{4}{3}a + \frac{1}{3}b$$

$$\frac{7}{3}a - \frac{2}{3}b = 3l + \frac{4}{3}a + \frac{1}{3}b$$

$$3l = a - b$$
$$l = \frac{a - b}{3}$$

ZADATAK 6: Štap dužine $l = 1m$ i mase $m = 4kg$ rotira oko težišne ose O-O', koja je normalna na osu štapa. Koliki je moment inercije štapa za ovu osu? Koliki je moment inercije štapa za osu koja se nalazi na kraju štapa? Nacrtati šemu (*težišna osa je O-O'*).

<ins>*Rešenje*</ins>:



Slika 15.6

Skica problema je data na slici 15.6. Zamenom vrednosti u formulu za moment inercije za tanki homogeni pravolinijski štap koji se okreće oko ose koja se nalazi na kraju štapa dobijamo:

$$J_z = \frac{m \cdot l^2}{3} = \frac{4kg \cdot (1m)^2}{3} = \frac{4}{3} kg \cdot m^2$$

Težište štapa se nalazi na sredini ose štapa, na rastojanju $\frac{l}{2} = 0{,}5$m od kraja štapa, pa, prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi, moment inercije je manji za $m \cdot (\frac{l}{2})^2$:

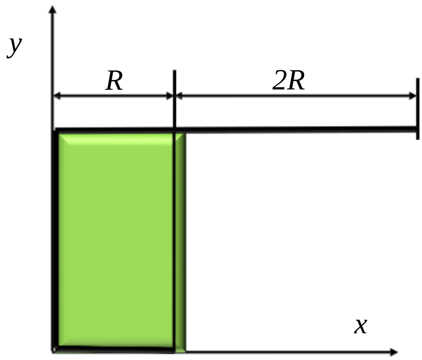
$$J_{O-0'} = \frac{m \cdot l^2}{3} - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m \cdot l^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{m \cdot l^2}{12} = \frac{1}{3} kg \cdot m^2$$

ZADATAK 7: Odrediti moment inercije za osu z koja prolazi kroz centar mase kroz tanku homogenu ploču oblika prikazanog na slici 15.7. Ukupna masa ploče je *m*.

Rešenje:
Na slici se vidi da se ova zadata figura sastoji od dva dela: pravougaonika stranica *R i 2R*, i četvrtine kruga, poluprečnika *2R*. Ukupna masa *m* se raspodeljuje na masu ove dve figure.
Mase delova se izračunavaju:

$$m_P = \rho \cdot A_P = \frac{m}{A} \cdot A_P, \qquad m_K = \frac{m}{A} \cdot A_K$$

Pri čemu je $\rho - gustina$ i $\rho = \frac{m}{A}$, a A je ukupna površina. Pri tome je:



Slika 15.7

$$A = A_P + A_K = R \cdot 2R + \frac{(2R)^2\pi}{4} = 2R^2 + R^2\pi = R^2(2+\pi).$$

Odavde je:

- $m_P = \frac{m}{A} \cdot A_P = \frac{m}{R^2(2+\pi)} \cdot 2R^2 = \frac{2}{(2+\pi)} m,$

- $m_K = \frac{m}{A} \cdot A_K = \frac{m}{R^2(2+\pi)} \cdot R^2\pi = \frac{\pi}{(2+\pi)} \cdot m$

Koordinate težišta ove figure su:

- $x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{A_P \cdot x_P + A_K \cdot x_K}{A} = 1{,}354R$
- $y_C = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{A_P \cdot x_P + A_K \cdot x_K}{A} = 1{,}092R$

Pri tome je:

$x_P = 0{,}5R,\ y_P = R$

$$x_K = R + \frac{4 \cdot 2R}{3\pi} = 1{,}849\ R$$

$$y_K = 2\mathrm{R} - \frac{4 \cdot 2R}{3\pi} = 1{,}151R$$

Moment inercije za pravougaonu ploču, za osu koja prolazi kroz težište je:

$$J_{Cz} = J_{CzP} + J_{CzK}$$

Pri čemu su:

- $\boldsymbol{J_{CzP}}$ – *moment inercije pravougaonog dela za osu Cz*
- $\boldsymbol{J_{CzK}}$ – *moment inercije četvrtine kruga za osu Cz*

Prema Hajgens- Štajnerovoj teoremi je:

- $J_{CzP} = J_{TP} + m_P \cdot [(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2]$
- $J_{CzK} = J_{TK} + m_K \cdot [(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2]$

Ovde je:

- J_{TP} – moment inercije pravougaonog dela za sopstveno težište, a
- J_{TK} – moment inercije četvrtine kruga za sopstveno težište

Na osnovu obrazaca za pravougaonik imamo:

$$J_{TP} = \frac{1}{12} \cdot m_P \cdot \left(x_P + y_P\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{(2+\pi)} m \cdot \left(R^2 + (2R)^2\right) = = 0{,}162mR^2$$

Moment inercije pravougaonog dela za osu C_z je:

$$J_{CzP} = J_{TP} + m_P \cdot [(x_C - x_P)^2$$

$$J_{CzP} = 0{,}162mR^2 + \frac{2}{(2+\pi)} \cdot [(0{,}5R - 1{,}354R)^2 + (R - 1{,}092R)^2] = 0{,}429R^2$$

Na osnovu ovoga je**:**

$$J_{CzK} = J_{TK} + m_K \cdot [(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2] =$$

$$= 0{,}342mR^2 + \frac{\pi}{(2+\pi)} \cdot m\,[(1{,}354R - 1{,}849R)^2 + (1{,}092R - 1{,}151R)^2] = 0{,}513R^2$$

Konačno, moment inercije za obrtnu osu je:

$$J_{Cz} = J_{CzP} + J_{CzK} = 0{,}429R^2 + 0{,}513R^2 = 0{,}924R^2$$

ZADATAK 8: Odrediti moment inercije za telo koje je prikazamo na slici 15.8. za osu rotacije koja prolazi kroz središte valjka. Specifična težina kugle je $\gamma_1 = 8746\,\frac{N}{m}$, a specifične težine valjka i štapa su $\gamma_2 = 7849\,\frac{N}{m}$.

Rešenje:

Uradićemo neophodne proračune za svaki od sastavnih elemenata datog složenog tela. Telo se sastoji od: kugle. horizontalnog cilindra i vertikalnog cilindra. Za svaki od elemenata je potrebno izračunati: masu (što se može dobiti iz zapremine), koordinate težišta i moment inercije u odnosu na zadatu osu rotacije.

- Kugla (sfera)*:*

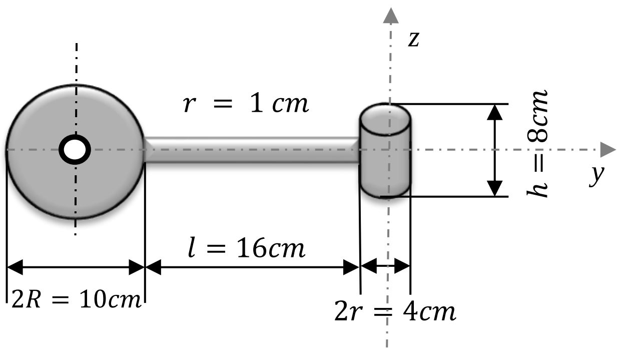
$$V_k = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot \pi = 418{,}67 \cdot 10^{-5}m^3$$

$$m_k = \frac{V_k \cdot \gamma_1}{g} = \frac{418{,}67 \cdot 10^{-5} \cdot 8746}{9{,}81} = 3{,}73kg$$

$$x_k = 0, y_k = -(2 + 16 + 5) = -23cm = -0{,}23m;\ z_k = 0$$

$$J_{zok} = \frac{2}{5}m_kR^2 = \frac{2}{5} \cdot 3{,}73 \cdot (0{,}05)^2 = 0{,}00373kgm^3$$

$$J_{zk} = J_{zok} + m_k \cdot {x_k}^2 = J_{zok} + m_k \cdot (0{,}23)^2 = 0{,}20kgm^3$$



Slika 15.8

- <u>Horizontalni cilindar 1:</u>

$$V_{C1} = r^2\pi \cdot 0{,}16 = (0{,}01)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}16 = 50{,}24 \cdot 10^{-6}m^3$$

$$m_{c1} = \frac{V_{c1} \cdot \gamma_2}{g} = \frac{50{,}24 \cdot 10^{-6} \cdot 7849}{9{,}81} = 0{,}040kg$$

$$x_{c1} = 0;\;\; y_{c1} = -(2+8) = -10cm = -0{,}1m;\; z_{c1} = 0$$

$$J_{z0c1} = \frac{1}{12} m_{c1} \cdot {x_{c1}}^2 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}040 \cdot (0{,}16)^2 = 0{,}000373kgm^3$$

$$J_{zc1} = J_{z0c1} + m_{c1} \cdot x_{c1}^2 = J_{z0c1} + m_{c1} \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}000773\; kgm^3$$

- <u>Vertikalni cilindar 2:</u>

$$V_{C2} = r^2\pi \cdot h = (0{,}02)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}08 = 100{,}48 \cdot 10^{-6}m^3$$

$$m_{c2} = \frac{V_{c2} \cdot \gamma_2}{g} = \frac{100{,}48 \cdot 10^{-6} \cdot 7849}{9{,}81} = 0{,}080kg$$

$$x_{c2} = 0, y_{c2} = -(2+16+5) = -23cm = -0{,}23m; z_{c2} = 0$$

$$x_{c2} = 0; y_{c2} = 0; z_{c2} = 0$$

$$J_{z0c1} = \frac{1}{12} m_{c1} l^2 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}040 \cdot (0{,}16)^2 = 0{,}000373kgm^3$$

$$J_{zc2} = J_{z0c2}$$

$$J_z = J_{zk} + J_{zc1} + J_{zc2} = 0{,}020 + 0{,}000773\; + 0{,}000373$$

$$J_z = 0{,}021146\; kgm^3$$

ZADATAK 9: Na slici 15.9 je dat točak, koji je satavljen od tankog prstena, čija je masa 10kg, i od četiri tanke šipke mase od 2 kg. Odrediti moment inercije točka za obrtanje oko ose normalne na sliku i trenutnu tačku dodira A.

Rešenje:

Moment inercije:

$J_B = J_p + 2 \cdot J_š$

$J_p = m_1 R^2$

$J_š = \frac{1}{12} m_2 \cdot l^2$

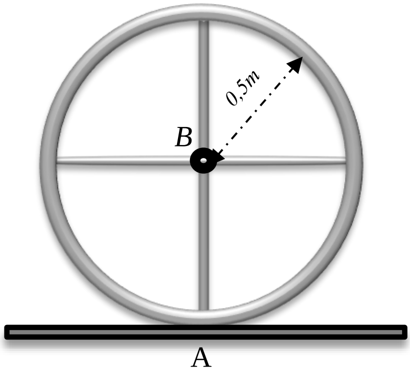
$J_B = m_1 R^2 + 2 \cdot \frac{1}{12} m_2 \cdot l^2$

$J_B = 10 \cdot (0{,}5)^2 + 0{,}167 \cdot 4 \cdot 1^2$

$J_B = 2{,}5 + 0{,}667 = 3{,}168\ kgm^2$

$J_A = J_B + \left(m_{prsten} + 2 \cdot m_{šipke}\right) \cdot (0{,}5)^2$

$J_A = 3{,}168 + 14 \cdot 0{,}25 = 7{,}668\ kgm^2$



Slika 15.9

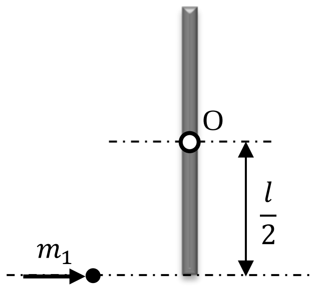
ZADATAK 10: Homogeni štap, dužine *l=1m*, i mase *m=2kg* se nalazi u horizontalnoj ravni, kao na slici 15.10, i može da rotira oko ose O, koja prolazi kroz centar mase, bez trenja. U jedan kraj ovog štapa udari metak, mase $m_1 = 0{,}2kg$, koji se kreće brzinom $v = 100\frac{m}{s}$. Metak udari u štap pod uglom od 90° i pri tome se zadrži u štapu, saopstišti mu ugaonu brzinu ω_0. Kolika je ova ugaona brzina?

Rešenje:

Pre udara metka u štap, kada je štap mirovao, moment količine kretanja sistema štap-metak je bio: $L_{O1} = m_1 \cdot v \cdot \frac{l}{2}$.

Posle udara, moment količine kretanja je:

$L_{O2} = L_{om} + L_{Oš} = (J_{om} + J_{Oš}) \cdot \omega_0$



Slika 15.10

Pri tome je:

$J_{om} = m_1 \cdot (\frac{l}{2})^2 = \frac{m_1 \cdot l^2}{4}$

$J_{Oš} = \frac{ml^2}{12}$

Jednačina zakona o održanju momenta količine kretanja konačno glasi:

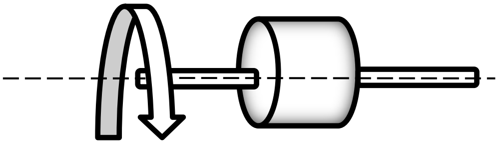
$$m_1 \cdot v \cdot \frac{l}{2} = \left(\frac{m_1 \cdot l^2}{4} + \frac{ml^2}{12}\right) \cdot \omega_0$$

pa je:

$$\omega_0 = \frac{6v}{l} \cdot \frac{m_1}{3m_1 + m} = \frac{6 \cdot 100 \cdot 0{,}2}{1 \cdot (3 \cdot 0{,}2 + 2)} = 46{,}15 \frac{rad}{s}$$

ZADATAK 11: Na osovini motora, koji razvija moment sprega intenziteta $\mathfrak{M} = 800Nm$, nalazi se cilindar, mase $m = 400kg$ i poluprečnika $R = 30cm$ (slika 15.11). Ako motor pođe iz mirovanja, za koje vreme će osovina da napravi prvi obrtaj? Kolika je energija predata cilindru za to vreme?

Rešenje:



Slika 15.11

Pošto je $\mathfrak{M} = J_z \cdot \varepsilon, a$ moment inercije za cilindar je: $J_z = \frac{mR^2}{2}$, to je: $\varepsilon = \frac{2 \cdot \mathfrak{M}}{mR^2}$.

Pošto znamo da je: $\theta = \theta_0 + \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$, a iz uslova zadatka su: $\theta_0 = 0$ i $\omega_0 = 0$, onda je:

$$\theta = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Zamenom $\varepsilon = \frac{2 \cdot \mathfrak{M}}{mR^2}$ u poslednju jednačinu, dobijamo:

$$\theta = 2\pi = \frac{2 \cdot \mathfrak{M}}{mR^2} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{\mathfrak{M} \cdot t^2}{mR^2}.$$

Kako se traži vreme tokom koga osovina napravi pun obrtaj ($\theta = 2\pi\ rad$), biće:

$$t^2 = \frac{\theta \cdot m \cdot R^2}{\mathfrak{M}} = \frac{2\pi \cdot 400 \cdot (0{,}3)^2}{800} = 0{,}2826 s^2$$

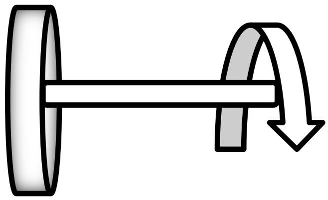
pa je: $t = 0{,}53s$.

Energija koja je predata cilindru je: $E_k = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}$. Kako je: $\omega = \varepsilon \cdot t$ jer je $\omega_0 = 0$, izraz za energiju će biti:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \mathfrak{M}}{mR^2} \cdot t\right)^2 = \frac{\mathfrak{M}^2}{m \cdot R^2} \cdot t^2 = 17{,}78kJ.$$

ZADATAK 12: Na osovini elektromotora se nalazi disk, poluprečnika $R = 50cm$ i mase $m = 900\ kg$. Elektromotor deluje na disk momentom sprega $\mathfrak{M} =$

$300\ Nm$. Nakon nekog vremena brzina tačke na obodu diska je $v = 20\frac{m}{s}$. Ukoliko je disk krenuo iz mirovanja, naći trenutak dostizanja te brzine i izračunati kinetičku energiju diska u tom trenutku.



Slika 15.12

Rešenje:

Kako je $\mathfrak{M} = J_z \cdot \varepsilon$, a a moment inercije za disk je: $J_z = \frac{mR^2}{2}$ to je:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J_z} = \frac{2\mathfrak{M}}{mR^2}$$

Kako je:

$$v = R \cdot \omega = R \cdot \varepsilon \cdot t = R \cdot \frac{2\mathfrak{M}}{mR^2} \cdot t$$

to je onda:

$$t = \frac{v \cdot m \cdot R}{2\mathfrak{M}} = \frac{20 \cdot 900 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 300} = 15s$$

Kinetička energija diska je tada:

$$E_k = \frac{J_z}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{mv^2}{4}.$$

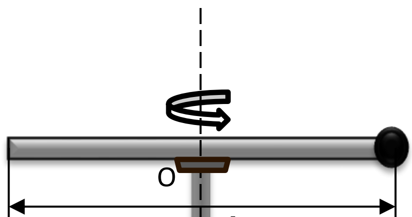
Zamenom zadatih vrednosti u poslednji izraz se dobija:

$$E_k = \frac{900 \cdot 20^2}{4} = 90kJ.$$

ZADATAK 13: Štap dužine $l = \ 50\ cm$ i mase $m = 1{,}2\ kg$ ima na svom jednom kraju materijalnu tačku mase $m = 2kg$. Kolika je energija ovog sistema, ako on rotira stalnom ugaonom brzinom $\omega = 6\frac{rad}{s}$ oko ose koja prolazi kroz sredinu štapa?

Rešenje:

Kako je $E_k = \frac{1}{2} \cdot J_{OO'} \cdot \omega^2$



potrebno je odrediti moment inercije sistema za osu OO'.

Moment inercije štapa za zadatu osu je:

$$J_{zš} = \frac{m_1 \cdot l^2}{12}$$

Što se kugle tiče, nisu nam date njene dimenzije, pa ne uračunavamo sopstveni moment moment inercije kugle, već samo položajni:

$$J_{zl} = m_2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_2 \cdot l^2}{4}$$

Sada je kinetička energija sistema:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_1 \cdot l^2}{12} + \frac{m_2 \cdot l^2}{4}\right) \cdot \omega^2 = \frac{l^2 \cdot \omega^2}{24} \; (m_1 + 3m_2)$$

$$E_k = \frac{0{,}5 \cdot 6^2}{24} \cdot (1{,}2 + 3 \cdot 2) = \; 5{,}4J$$

Napomena: U slučaju da se materijalna tačka smatra telom (sferom), u proračun treba ubaciti i sopstveni moment inercije kugle (sfere).

ZADATAK 14: Na periferiji diska, mase $m_1 = 30\ kg$ i poluprečnika $R = 50\ cm$ se nalazi telo mase $m_2 = 6kg$. Disk rotira sa konstantnim ugaonim ubzanjem. Ukoliko je koeficient trenja između diska i tela $\mu = 0{,}25$, odrediti:

a) Pri kojoj ugaonoj brzini će telo ispasti sa diska.
b) kolika će biti ugaona brzina neposredno po ispadanju tela sa diska.

Rešenje:

a) U trenutku pre nego što dođe do spadanja tela sa diska, dolazi do izjednačavanja centrifugalne sile i sile trenja, koja u stvari predstavlja silu otpora kretanju koje dovodi do ispadanja tela sa diska. To znači da je: $F_c = F_\mu$.

Kako je F_c sila koja je proporcionalna normalnom ubrzanju, a sila F_μ zavisi od normalne reakcije podloge, to važi jednakost:

$$m_2 \cdot a_N = \mu \cdot m_2 \cdot g$$

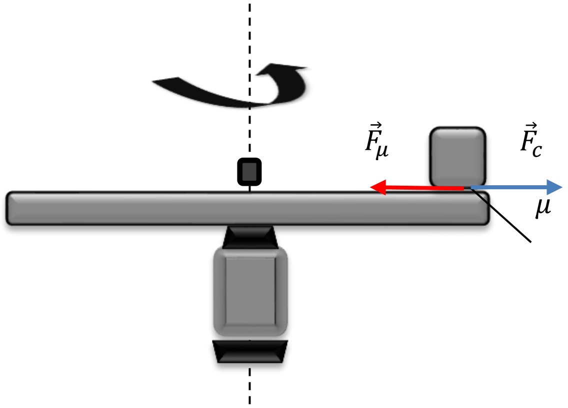
Odnosno, kako je:

$$:a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = R\omega^2,$$

to jednačina dobija oblik: $R{\omega_1}^2 = \; \mu \cdot g.$

Ugaona brzina je:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 9{,}81}{0{,}5}} = 2{,}21 \frac{rad}{s}.$$



Slika 15.14

b.) Količina kretanja pre ispadanja tela i posle ispadanja tela ostaje ista, pa ćemo to iskoristiti za postavljanje početne jednačine:

$$J_{zI} \cdot \omega_1 = J_{zII} \cdot \omega_2$$

Kako je pre ispadanja:

$$J_{zI} = \frac{m_1 \cdot R^2}{2} + m_2 \cdot R^2 = R^2 \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{2},$$

a nakon ispadanja tela sa diska:

$$J_{zII} = \frac{m_1 \cdot R^2}{2}, \text{i}$$

uz $\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{R}}$, vraćanjem u jednačinu dobijamo:

$$R^2 \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu g}{R}} = \frac{m_1 \cdot R^2}{2} \cdot \omega_2$$

Iz poslednje jednakosti je ugaona brzina:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu g}{R}} \cdot \left(1 + 2\frac{m_2}{m_1}\right) = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 9{,}81}{0{,}5}} \cdot \left(1 + 2\frac{30}{6}\right) = 53{,}96 \frac{rad}{s}$$

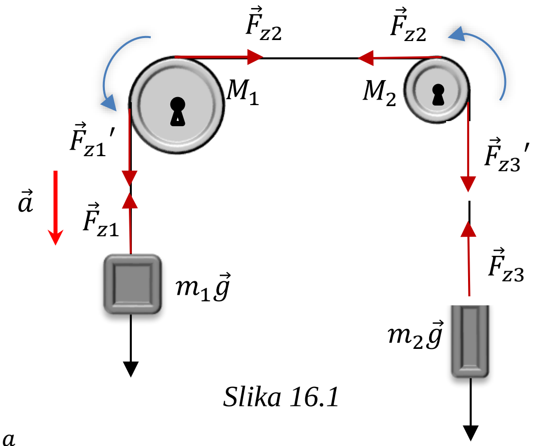
16. DINAMIKA SISTEMA II –ZAKONI ODRŽANJA

ZADATAK 1: Preko dva homogena valjka je prebačena nit na kojoj vise dva tega. Mase tegova su $m_1 = 2\,kg\ i\ m_2 = 1\,kg$, a mase valjaka su $M_1 = 1\,kg\ i\ M_2 = 5\,kg$. Odrediti ubrzanje sistema, pod pretpostavkom da nema klizanja.

Rešenje:
Za svako telo pišemo jednačinu kretanja posebno.
Jednačina kretanja za telo 1 je:
$m_1 a = m_1 g - F_{z1}$
A za valjak 1 je: $\frac{M_1}{R} = F_{z1} - F_{z2}$

Kako je $M_1 = J_1 \cdot \varepsilon$, a $J_1 = \frac{M_1 {R_1}^2}{2}$,

a $\varepsilon_1 = \frac{a}{R_1}$, onda je: $F_{z1} - F_{z2} = \frac{M_1 \cdot a}{2}$



Slika 16.1

Analogno prethodnom, za valjak 2 važi jednačina:

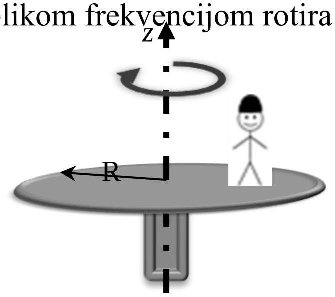
$$F_{z2} - F_{z3} = \frac{M_2}{R_2} = \frac{M_2 a}{2}$$

Jednačina kretanja tela 2, je analogno jednačini kretanja tela 1:

$$m_2 a = -m_2 g + F_{z3}$$

Sređivanjem jednačina, dobija se**:** $a = \frac{2(m_1 - m_2)g}{2(m_1 + m_2) + M_1 + M_2} = 1{,}635\,\frac{m}{s^2}$

ZADATAK 2: Platforma oblika diska mase 90 kg rotira frekvencijom 0,5 s^{-1} oko ose koja prolazi kroz centar mase. Na ivici platforme stoji dečak mase m = 30kg. Kolikom frekvencijom rotira platforma ako se dečak pomeri ka sredini platforma.



Slika 16.2

Rešenje:
Zakon dinamike za rotaciono kretanje je:
M= $\frac{dL}{dt} = \frac{J_z \dot{\varphi}}{dt}$
Kako nema spoljnih sila, *M=0*, pa je $J_z \cdot \omega = const$

$$J_{zI} \cdot \omega_1 = J_{zII} \cdot \omega_2$$

$J_{zI} = J_{zd} + J_{zdč} = m_1\frac{R^2}{2} + m_2R^2$

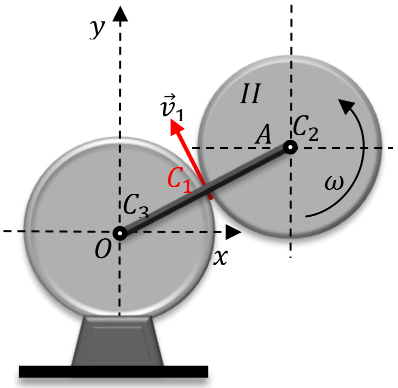
$J_{zII} = m_1\frac{R^2}{2}$ – jer je dečak u liniji ose rotacije

$(m_1\frac{R^2}{2} + m_2R^2)\cdot\omega_1 = m_1\frac{R^2}{2}\cdot\omega_2$

Kako je $\nu = \frac{1}{T}$, a $T = 2\pi\omega$, dobijamo da je: $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi\cdot 0{,}5 = \pi$.Tako je:

$\omega_2 = \frac{m_1\frac{R^2}{2} + m_2R^2}{m_1\frac{R^2}{2}} = 5{,}23 s^{-1}$, a $\nu_2 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0{,}833 s^{-1}$.

ZADATAK 3: Homogeni zupčanik II, poluprečnika *r*, kotrlja se po nepokretnom zupčaniku, istog poluprečnika, pomoću poluge *OA* , koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω (slika 16.3). Odrediti količinu kretanja sistema ako je težina zupčanika II, G_2, a poluge G_1.



Slika 16.3

Rešenje:

Količina kretanja posmatranog pokretnog sistema u vektorskom obliku je:

$$\vec{K} = M\dot{\vec{r}}_C = M\dot{x}_C\vec{i} + M\dot{y}_C\vec{j}$$

pri čemu je: *M*-masa sistema, x_C i y_C – koordinate težišta sistema za koordinatni sistem Oxy prema slici.

Prema definiciji središta masa imamo:

$Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2$

$My_C = m_1y_1 + m_2y_2$

Za određivanje količine kretanja, potrebne su nam komponente brzine po x i y osi, a znamo da je:

$M\dot{x}_C = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$

$M\dot{y}_C = m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_2$

Sa slike su koordinate i prvi izvodi ($\varphi = \omega t$):

$x_1 = r\cos\varphi = r\cos\omega t, \quad \dot{x}_1 = -\omega\cdot r\cdot\sin\omega t$

$x_2 = 2r\cos\varphi = 2r\cos\omega t, \quad \dot{x}_2 = -2\omega\cdot r\cdot\sin\omega t$

$y_1 = r\sin\varphi = r\cdot\sin\omega t, \quad \dot{y}_1 = \omega\cdot r\cdot\cos\omega t$

$y_2 = 2r\sin\varphi = 2r\cdot\sin\omega t, \quad \dot{y}_2 = 2\omega\cdot r\cdot\cos\omega t$

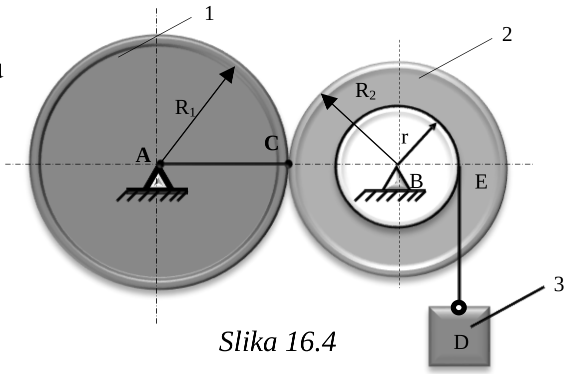
Zamenom ovih vrednosti u početnu jednačinu, dobija se:
$M\dot{x}_C = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = m_1 \cdot (-\omega \cdot r \cdot sin\omega t\ ) + m_2(-2\omega \cdot r \cdot sin\omega t)$
$M\dot{y}_C = m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_2 = m_1 \cdot = \ \omega \cdot r \cdot cos\omega t + m_2 \cdot 2\omega \cdot r \cdot cos\omega t,$

Tako je na kraju: $\vec{K} = \ -\omega \cdot r\ (2m_2 + m_1) sin\omega t \cdot \vec{\imath} + \omega \cdot r\ (2m_2 + m_1) cos\omega \cdot \vec{\jmath}$

Intenzitet vektora je: $|\vec{\boldsymbol{K}}| = \boldsymbol{(2m_2 + m_1)\omega r.}$

ZADATAK 4: Ukoliko je ugaona brzina velikog diska $\omega_1 = 2t^2[s^{-1}]$, njegov poluprečnik $R_1 = 1[m]$, a spregnut je sa koaksijalnim kalemom sa poluprečnicima $R_2 = 0{,}8[m]$ i $r = 0{,}4[m]$, a o slobodni kraj kanapa je obešeno telo D mase *m= 10kg.* Odrediti ubrzanje tela D i kinetičku energiju nakon $t_1 = 2[s]$.

Rešenje:
Potrebno je odrediti brzinu tačke C u dodiru dva diska, a potom odrediti brzinu tačke E, a u slučaju neistegljivog užeta,
to će biti ujedno i brzina tačke D.



Slika 16.4

Poći ćemo od zakona promene ugaone brzine velikog diska:
$\omega_1 = \omega_1(t).$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \qquad\qquad v_C(t) = r \cdot dv(t)$$
$$d\varphi_1 = \omega_1 \cdot dt$$
$$d\varphi_1 = 2t^2 dt$$
$v_C(t = 2s) = R_1 \cdot \omega(t = 2s) = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 = 8\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$v_C(t) = R_2 \cdot \omega_2,$

$$\omega_2(t) = \frac{v_C(t)}{R_2} \Rightarrow \omega_2(t = 2s) = \frac{v_C(t = 2s)}{R_2} = \frac{8}{0{,}8} = 10[s^{-1}]$$
$$v_E = R \cdot \omega_2(t)$$
$$v_E(t = 2s) = r \cdot 10 = 0{,}4 \cdot 10 = 4\left[\frac{m}{s}\right]$$
Kako je $v_D = v_E$, onda je:
$v_C = R_1 \cdot \omega_1 = R_1 \cdot 2 \cdot t^2$
$\omega_2 = \frac{v_C}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot 2t^2$, a $\qquad v_E = r \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot 2t^2$
$a_{ET} = a_D = \frac{dv_E}{dt} = r \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot 2 \cdot 2t$

Nakon 2 s, $v_E = v_D = r \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot 2 \cdot t^2 = 0{,}4 \cdot \frac{1}{0{,}8} \cdot 2 \cdot 4 = 4\frac{m}{s}$

Kinetička energija tela: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 = 80J$.

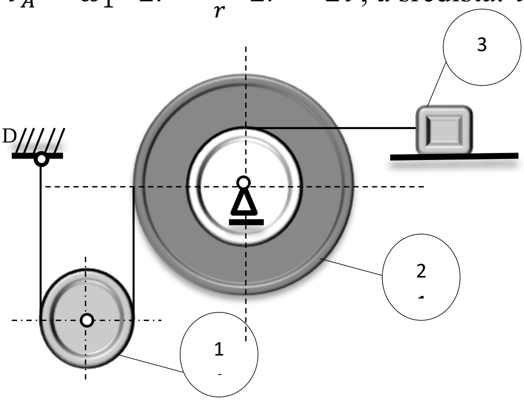
ZADATAK 5: Materijalni sistem čine 3 tela. Telo 1 je homogeni kotur poluprečnika *r=0,5m* i mase $m_1 = 4$kg. Telo 2 je koaksijalni kalem , poluprečnika r i 2r, mase $m_2 = 8kg$, poluprečnik inercije za osu rotacije je $i_2 = 0{,}07m$. Teret 3, mase $m_1 = 2kg$, klizi po hrapavoj horizontalnoj, ravni koeficient trenja klizanja $\mu = 0{,}20$. Tela povezuje lako neistegljivo uže. Ceo sistem se kreće u vertikalnoj ravni, bez početne brzine , pri čemu je brzina centra tela1 jednaka $v = v(t)$. Naći ubrzanje tela 1.

Rešenje:

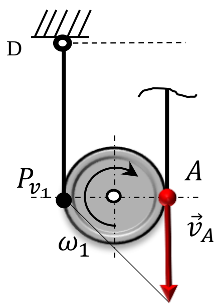
Na početku je važno odrediti kakvo kretanje vrši svako telo.
Telo 1 (slika 16.5.2) vrši ravno kretanje (trenutni pol brzina je u tački dodira nepokretnog užeta i diska 1, tačka P_{v_1}), pa je:

$$\omega_1(t) = \frac{v(t)}{r} = \omega_1 \ (kraći\ zapis\ i\ za\ v\ i\ za\ \omega).$$

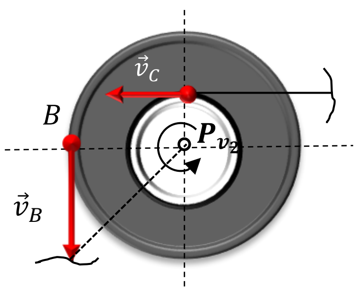
Zato je brzina tačke A na obodu diska 1:
$v_A = \omega_1 \cdot 2r = \frac{v}{r} \cdot 2r = 2v$, a središta: v.



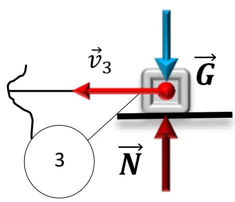
Slika 16.5.1



Slika 16.5.2



Slika 16.5.3



$N=G,$
$F_\mu = \mu N = \mu G$
$F_\mu = \mu m_3 g$

Slika 16.5.4

Ovo je ujedno i brzina tačke B (slika 16.5.3), odnosno: $v_B = 2v$.
Da bismo našli ω_2, polazimo od trenutnog pola brzina za telo 2 (slika 16.5.3).To je centar kalema, tačka P_{v_2}. Kako je:$v_A = v_B$
$v_B = 2v = \omega_2 \cdot 2r$, pa je $\omega_2 = \frac{v_B}{2r} = \frac{2v}{2r} = \frac{v}{r}$.
Sada je brzina tačke C, a na osnovu slika 16.5.3 i 16.5.4, ujedno i brzina tela 3:

$$v_C = v_3 = \omega_2 \cdot r = \frac{v}{r} \cdot r = v.$$

Da bismo našli ubrzanje tela 1, iskoristićemo zakon o promeni kinetičke energije, odnosno posmatraćemo početni trenutak i trenutak *t* za ceo sistem.

$$E_k - E_{k0} = \sum A_i$$

Kinetička energija tela 1, koje izvodi ravno kretanje je:
$E_{k1} = \frac{1}{2}J_{z1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2$, a kako je $J_{z1} = \frac{m_1 r^2}{2}$, izraz dobija oblik:
$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 r^2}{2} \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}m_1 \cdot v^2 = \frac{3}{4}m_1 \cdot v^2 = 3v^2$
Telo 2 vrši rotaciono kretanje i stoga je:
$E_{k2} = \frac{1}{2}J_{2z} \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2}m_2 \cdot i^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}$ $=0{,}3136v^2$
Telo 3 se kreće pravolinijski, pa je:
$E_{k3} = \frac{1}{2}m_3 \cdot v_3^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 = v^2$
Tokom kretanja sistema, rad vrše sila trenja (telo 3) i sila zemljine teže (telo 1).
$A_{tr} = -F_\mu \cdot s = -\mu \cdot m_3 \cdot g \cdot s = -0{,}2 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \cdot s = -3{,}924\, s$
(a s je pređeni put, *s=s(t)*).
$A_{mg} = +m_1 \cdot g \cdot \Delta h$ - a kako je uže neistegljivo: $\Delta h = s$, pa je:
$A_{mg} = 4 \cdot 9{,}81s = 39{,}24s$
Sada možemo izjednačiti levu i desnu stranu:
$3v^2 + 0{,}3136v^2 + v^2 = -3{,}924s + 39{,}24s$
$4{,}3136v^2 = 35{,}316s$
Sada ćemo diferencirati dobijeni izraz:
$4{,}3136 \cdot 2v\frac{dv}{dt} = 35{,}316 \cdot \frac{ds}{dt}$, odnosno $0{,}244v \cdot a = v$, pa je, nakon skraćivanja:

$$a = 4{,}1\ \frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 6: Kolica se kreću bez klizanja po strmoj ravni, nagiba α. Neistegljivo uže, CA, je prebačeno preko kotura B i vezano jednim krajem za kolica C, a drugim za teret A. U početnom trenutku, brzina tereta A je $v_0 = 1\frac{m}{s}$. Masa kolica $m_C = 80kg$,masa jednog točka je $m_D = 20kg$, a masa tereta A je $m_A = 120kg$. Masu kotura i užeta zanemariti. Odrediti visinu h za koju se teret A spustio u trenutku kada je intenzitet njegove brzine $v = 5{,}9\frac{m}{s}$.

Rešenje:

Primenićemo zakon o promeni kinetičke energije sistema: promena kinetčke energije jednaka je zbiru radova svih sila koje su delovale. Tokom kretanja, prikolica ima translatorno kretanje (C), točkovi (D) imaju i translatorno i rotaciono kretanje, a telo A samo translatorno kretanje. Od sila deluje samo sila zemljine teže.

Dakle: $dEk = dA$, odnosno $A = E_{K1} - E_{Ko}$.

$E_{k1} = E_{KC} + 4E_{KD} + E_{KA}$

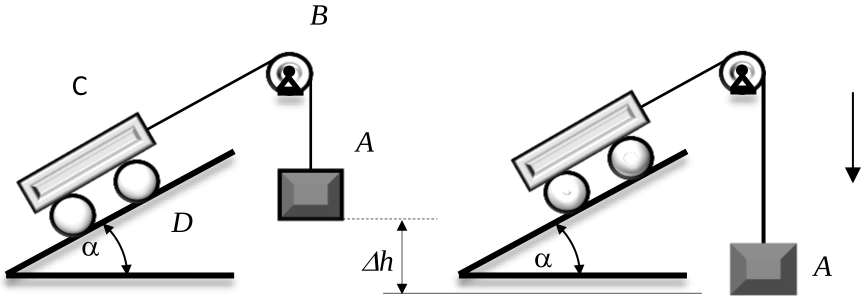
$$A = A_{mgA} + A_{mgC} + 4A_{mgD}$$

$$E_{KC} + 4E_{KD} + E_{KA} = A_{mgA} + A_{mgC} + 4A_{mgD}$$

Pri tome je:

$E_{KA} = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m_A v^2}{2}$; $E_{KC} = \frac{m_C v_C^2}{2} = \frac{m_C v^2}{2}$, $v_A = v_C = v_D = r \cdot \omega$, $\mathcal{J}_z = \frac{1}{2} m_D r^2$

$$E_{KD} = \frac{1}{2} m_D v_{SD}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_z \omega^2 = \frac{1}{2} m_D v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_D r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_D v^2 + \frac{1}{4} m_D v^2 = \frac{3}{4} m_D v^2$$



Slika 16.6

$E_{K1} = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_C v^2 + \frac{3}{4} m_D v^2 \cdot 4$

$E_{K1} = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_C v^2 + 3 m_D v^2$

$E_{K1} = v^2 \left(\frac{m_A + m_C}{2} + 3m_D \right)$

$E_{K1} - E_{K0} = \sum A_i$

$A_{mg_{kos}} = -(m_C + 4m_D) \cdot g \cdot h \cdot sin\alpha + m_A g h = -(80 + 4 \cdot 20) \cdot 9{,}8 \cdot h \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot 9{,}8 \cdot h$

$v^2 \left(\frac{m_A + m_C}{2} + 3m_D \right) - v_0 \left(\frac{m_A + m_C}{2} + 3m_D \right) = \sum A_i$

$v^2 \left(\frac{120+80}{2} + 3 \cdot 20 \right) - v_0 \left(\frac{120+80}{2} + 3 \cdot 20 \right) = \sum A_i$

$(v^2 - 1)(100 + 60) = -160 \cdot 9{,}8h + 120 \cdot 9{,}8h$

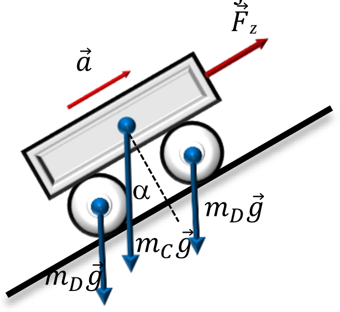
$$160(v^2 - v_0^2) = 9{,}8 \cdot h \cdot (120 - 80)$$

$$4 \cdot (v^2 - v_0^2) = gh$$

$$h = \frac{4 \cdot (v^2 - v_0^2)}{g} = 13{,}8m$$

ZADATAK 8: Za zadatak broj 5, odreditii ubrzanje sistema.

Presećićemo uže između kolica i tega i posmatrati svako telo posebno. Treba uzeti u obzir da kolica imaju 4 točka.



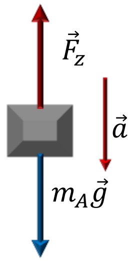
Slika 16.8.1

Za telo A (slika 16.8.2) j-na kretanja glasi:

$$m_A a_y = -F_z + m_A g$$

$$F_z = m_A g - m_A a_A$$

$$F_z = m_A(g - a_A)$$



Slika 16.8.2

Za kolica ćemo postaviti jednačinu kretanja, koristeći centar mase (kreće se ubrzanjem *a*), koristeći sliku 16.8.1:

$$(m_C + 4 \cdot m_D) \cdot a_B = -(m_C + 4 \cdot m_D) \cdot g \cdot sin\alpha + F_z$$

$$F_z = m_A(g - a_A)$$

$$(m_C + 4 \cdot m_D) \cdot a_B = -(m_C + 4 \cdot m_D) \cdot g \cdot sin\alpha + m_A(g - a_A)$$

Kako je $a_A = a_B = a$

$$a(m_C + 4 \cdot m_D + m_A) = m_A g - m_C g sin\alpha - 4 m_D g sin\alpha$$

$$a = \frac{m_A g - m_C g sin\alpha - 4 m_D sin\alpha}{(m_C + 4 \cdot m_D + m_A)}$$

$$a = \frac{120 \cdot 9{,}81 - 80 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}{80 + 80 + 120} = 1{,}40\,\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 9: Dva tela mase $m_1 = 2kg$ i $m_2 = 6kg$ su povezana neistegljivim užetom zanemarljive mase, kao na slici 16.9.1. Nagib strme ravni (po kojoj klizi telo mase m_1) zaklapa ugao od 30° sa horizontalom. Odrediti ubrzanje tela mase m_2. Trenje zanemariti.

Rešenje:

Pogledajmo sliku i uočimo sve elemente na njoj.

Da bismo rešili ovaj zadatak, treba posebno posmatrati šta se dešava.
sa telima 1 i 2.

Postavićemo jednačine kretanja.

TELO 2:

$$m_2 a_2 = m_2 g - S \ldots\ldots (1)$$

KOTUR 4:

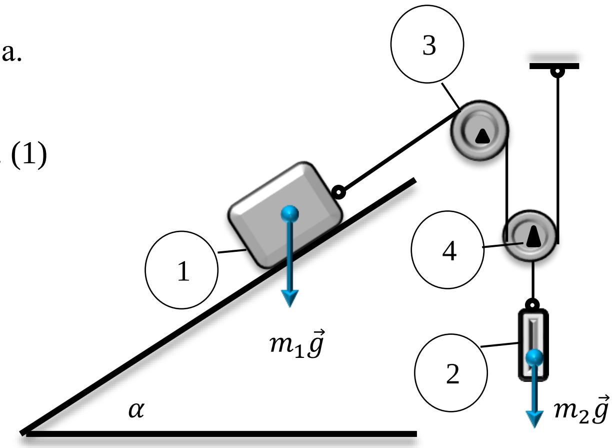
$$S = S_1 + S_2$$

a kako nema proklizavanja,

$$S_1 = S_2,$$

pa je:

$$S_1 = \frac{S}{2}$$



Slika 16.9.1

TELO 1:

$$m_1 a_1 = S_1 - m_1 g sin\alpha$$

$$m_1 a_1 = \frac{S}{2} - m_1 g sin\alpha \ldots.(2)$$

Iz jednačine (1): $S = m_2 g - m_2 a_2$

Iz jednačine (2) je:

$$S = 2 \cdot m_1 a_1 + 2 \cdot m_1 g sin\alpha$$

$$m_2 g - m_2 a_2 = 2 \cdot m_1 a_1 + 2 \cdot m_1 g sin\alpha$$

Kako je put koji pređe telo 1 za vreme t :

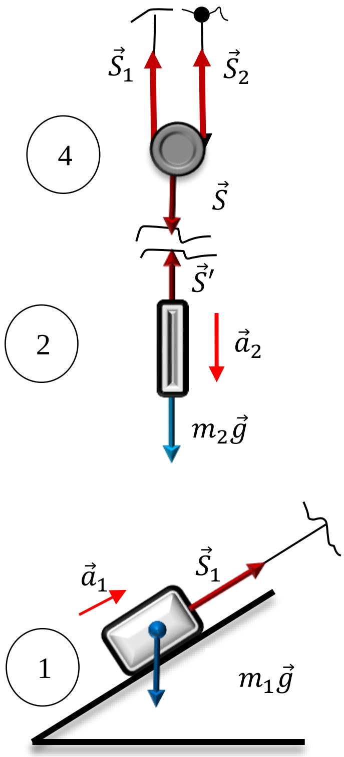
$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 ,$$

a telo 2 za isto vreme t:

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2,$$

a pri tome se pomeraj tačke do kotura 2 deli na 2 kraka pa je onda, onda je:

$$s_1 = 2 \cdot s_2.$$



Slika 16.9.2

Tako dobijamo da je:$a_1 = 2a_2$. Jednačina tako postaje:

$$m_2 a_2 + 4m_1 a_2 = m_2 g - 2 \cdot m_1 g sin\alpha$$

$$a_2 = g \cdot \frac{m_2 - 2m_1 sin\alpha}{4m_1 + m_2} = 9{,}81 \cdot \frac{6 - 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5}{4 \cdot 2 + 6} = 2{,}8 \frac{m}{s^2}$$

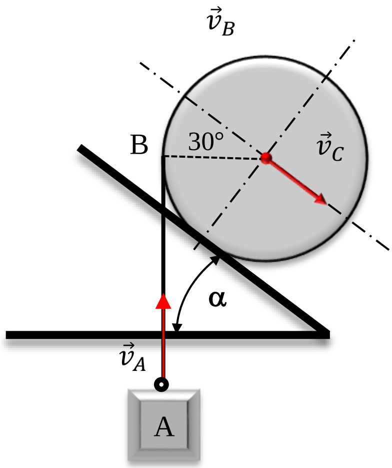
ZADATAK 10: Oko homogenog cilindra tankih zidova, mase $m_C = 10kg$ koji se kotrlja niz strmu ravan, namotano je gipko neistegljivo uže, o čiji kraj je obešeno telo mase $m_A = 2kg$. Ugao $\alpha = 30°$. Odrediti brzinu centra C u funkciji od promene koordinate centra cilindra.

Rešenje:

Na sistem ćemo primeniti zakon o održanju energije:

$$E_k - E_{k0} = \sum A_i$$

pri čemu je ukupna E_k zbir kinetičkih energija cilindra C i tela A, odnosno: $E_k = E_{kA} + E_{kC}$. Kinetčka energija cilndra ma dve komponente: jednu od translacje i drugu od rotaciije:



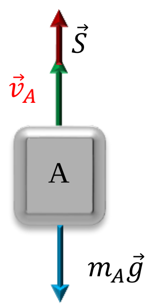
Slika 16.10.1

$$E_{kC} = E_{kct} + E_{kCr}$$

$$E_{kCt} = \frac{1}{2} m_C v_C^2; \quad E_{kCr} = \frac{1}{2} J_C \omega_C^2$$

$$E_{kA} = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

Da bismo, dakle, rešil problem, potrebne su nam brzine u ugaona brizna cilindra.



Slika 16.10.2

Kako je dodirna tačka diska sa podlogom trenutni pol brzina (slika 16.10.3), brzina tačke C je:

$$v_C = R \cdot \omega_c$$

a brzina tačke B je ista kao i brzina tela A.

Brzina tačke C je:$v_C = \dot{x}_C = R\omega_C$

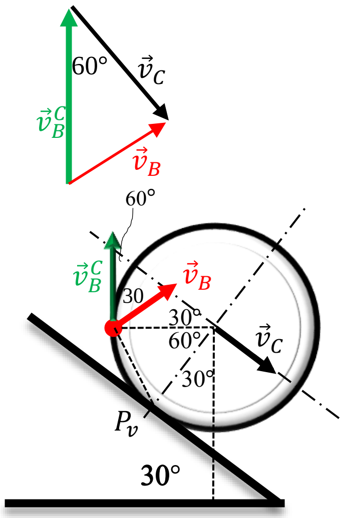
Brzina tačke B se može izračunati:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_B^C$$

Pravci i smerovi su ucrtani na slici 16.10.3, a intenzitet ćemo izračunati:

$$v_B^C = R\cdot\omega_C = R\frac{\dot{x}_C}{R} = \dot{x}_C$$

a ugao koji zaklapa sa x-osom je 30°



Slika 16.10.3

Primenom kosinusne teoreme dobiijamo:

$$v_B^2 = v_C^2 + {v_B^C}^2\text{-}2\cdot v_C\cdot v_B^C\cdot cos60°$$

$$v_B^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{x}_C^2 - 2\cdot\dot{x}_C^2\cdot 0{,}5 = \dot{x}_C^2$$

Do istog zaključka smo mogli doći i na osnovu geometrije na slici 16.10.3. Naime, trougao P_vCB je jednakostranični, sa stranicom R, pa je $v_B = R\cdot\omega_C$.
Kako je moment inercije za tanki cilindar:

$$J_Z = m\cdot R^2$$

i kako je $E_{k0} = 0$, izraz za promenu kinetičke energije je:

$$E_k = \frac{1}{2}m_C\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2 + \frac{1}{2}m_A\cdot v_A^2$$

pa zamenom poznatih vrednosti, ovaj izraz postaje:

$$E_k = \frac{1}{2}m_C\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}\cdot m_C\cdot R^2\cdot\left(\frac{\dot{x}_C}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m_A\cdot\dot{x}_C^2 = m_C\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}m_A\cdot\dot{x}_C^2$$

Od sila deluje samo sila zemljine teže na oba tela. Rad sile zemljine teže na ciilindar je:

$$A_{mgC} = m_C\cdot g\cdot x_C\cdot sin30°$$

Telo A se istovremeno:

- spušta za $x_C\cdot sin30°$ zbog kotrljanja cili8ndra niz strmu ravan (pozitivan rad sile zemljine teže) ii
- podiže za $y_1 = x_C$ zbog namotavanja konca oko cilndra (negativan rad sile zemljine teže).

Ukupan rad za telo A je:

$$A_{mgA} = m_A\cdot g\cdot(x_C\cdot sin30° - x_C)$$

Ukupni izvršeni rad je:

$$A_{mg} = m_C \cdot g \cdot x_C \cdot sin30° + m_A \cdot g \cdot (x_C \cdot sin30° - x_C)$$

Izjednačavanjem leve i desne strane dobijamo:

$$m_C \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} m_A \cdot \dot{x}_C^2 = m_C \cdot g \cdot x_C \cdot sin30° + m_A \cdot g \cdot (x_C \cdot sin30° - x_C)$$

Sređivanjem dobijamo da je brzina centra C:

$$v_C = \dot{x}_C = \sqrt{\frac{g \cdot x_C \cdot [(m_C + m_A) \cdot sin\alpha - m_C]}{m_C \cdot (1 - sin\alpha) + m_A}}$$

$$\dot{x}_C = \sqrt{3{,}567 x_C}$$

ZADATAK 11: Kružna ploča, mase *M* i poluprečnika *R*,rotira oko vertikalne ose, ugaonom brzinom ω_0. Tačka mase *m* pada na rub ploče,a zatim se lagano kreće ka centru *C* ploče. Odrediti:

a) ugaonu brzinu ω_1 ploče u trenutku pada tačke,

b) ugaonu brzinu ω_2 ploče u trenutku kada se tačka našla na rastojanju *r* od centra (*M* = 2*m*, *R* = 2*r*).

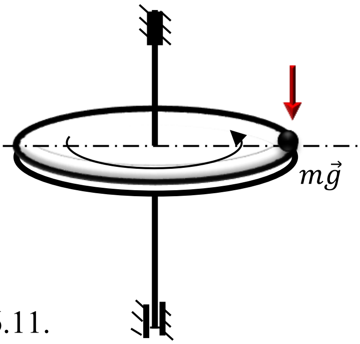
Relativno kretanje tačke u odnosu na ploču zanemariri.

Rešenje:

Razlikujemo III trenutka:

- I -pre nego što je tačka pala na ploču,
- II -kada je tačka pala na ploču i
- III - kada tačka dođe u položaj r od centra

Uradićemo analizu tih trenutaka, koristeći sliku 16.11.



Slika 16.11

I trenutak:

$$L_{Oz_I} = \mathcal{J}_z \cdot \omega_0 \qquad \mathcal{J}_z = \frac{1}{2} MR^2 \text{(valjak)}$$

$$L_{Oz_I} = \frac{1}{2} MR^2 \omega_0$$

II trenutak:

$$L_{Oz_{II}} = L_{OzD} + L_{OzT}$$

$$\mathcal{J}_{zD} = \frac{1}{2} MR^2 \quad L_{OzD} = \mathcal{J}_{zD} \cdot \omega_1$$

$\mathcal{J}_{zT} = mR^2 \qquad L_{OzT} = \mathcal{J}_{zT} \cdot \omega_1$

$$L_{OzII} = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega_1 + mR^2 \cdot \omega_1 = \frac{1}{2}R^2(M + 2m)\omega_1$$

III trenutak:

$$L_{Oz_{III}} = L_{OzD_{III}} + L_{OzT_{III}}$$

$$L_{Oz_{III}} = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega_2 + mr^2 \cdot \omega_2$$

$L_{Oz} = \sum M_O$

$\frac{dl_{Oz}}{dt} = \sum M_O^{\overrightarrow{F_i^S}} = 0$

$L_{Oz} = const$

Kako je sada: $L_{Oz_I} = L_{Oz_{II}} = L_{Oz_{III}}$, možemo izjednačiti izraze za $L_{Oz_I}\ i\ L_{OzII}$.
Tako je:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_O = \frac{1}{2}MR^2\omega_1 + mR^2\omega_1,$$

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_O = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \cdot \omega_1$$

$$\omega_O = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\omega_1$$

$$\omega_1 = \omega_O \frac{1}{1 + \frac{2m}{M}} = \omega_O \frac{M}{M + 2m}$$

što uz $uslov\ \ M = 2m$ daje:

$$\omega_1 = \omega_O \frac{2m}{4m} \text{ odnosno: } \qquad \omega_1 = \frac{\omega_O}{2}$$

Izjednačimo sada: $L_O^I = L_O^{III}$.

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_O = \frac{1}{2}MR^2\omega_2 + mr^2\omega_2$$

$$\frac{1}{2}2mR^2\omega_O = \frac{1}{2}2mR^2\omega_2 + m\frac{R^2}{4}\omega_2$$

$$\omega_O = \omega_2 + \frac{1}{4}\omega_2$$

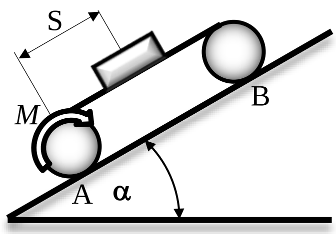
$$\omega_O = \frac{5}{4}\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{4}{5}\omega_O$$

ZADATAK 12: Uz strmu ravan (ugao α) se kreće transporter iz stanja mirovanja pomoću spojnice na vratilu točka A, na koji deluje obrtni moment, intenziteta *M*. Odrediti brzinu v trake transportera u zavisnosti od njenog pomeraja s, ako je težina tereta C, koji se podiže jednak G, a točkovi A i B , svaki težine Q, su homogeni kružni cilindri.Traka pri kotrljanju ne klizi po točkovima.

Rešenje:

Poćićemo od toga da je promena kinetičke energije jednaka izvršenom radu.



Slika 16.12

$$\mathcal{J}_z = \frac{1}{2} mR^2$$

U ovom slučaju rad vrši sila zemljine teže i rad vrši obrtni moment.

$$E_K = dA$$

$$A = E_{K1} - E_{Ko}$$

$$A = A^M + A^{mg}$$

$$A^M = M \cdot \varphi(dt) = Md\varphi = M\frac{ds}{r} \qquad A^M = M\frac{s}{r}$$

$$A^{mg} = -6s \cdot sin\alpha$$

$$E_{KO} = 0$$

$$E_{K1} = E_{KA} + E_{KB} + E_{KC}$$

$$E_{KA} = E_{KB} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_z \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{Q}{g} r^2 \frac{\dot{S}^2}{R^2} = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}\dot{S}^2$$

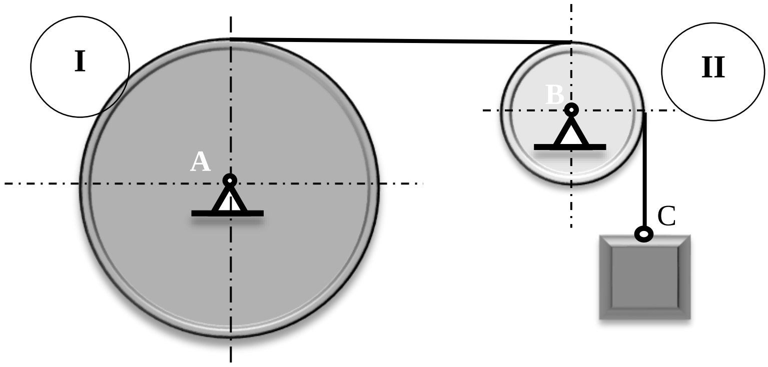
$$E_{KC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot \dot{s}^2$$

$$2 \cdot \frac{1}{4}\frac{Q}{g}\dot{S}^2 + \frac{1}{2}\frac{6}{g}\dot{S}^2 = M\frac{s}{r} - 6s \cdot sin\alpha$$

$$\frac{1}{2g}\dot{s}^2(Q+6) = M\frac{s}{r} - 6 \cdot s \cdot sin\alpha\frac{r}{r}$$

$$\dot{s}^2 = 2g \cdot s \cdot \frac{M - 6 \cdot sin\alpha \cdot r}{r(Q+6)} = v^2$$

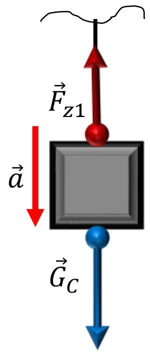
ZADATAK 113: Preko diska I težine *15N* i diska II težine 5N prebačeno je uže zanemarljive mase. Za kraj užeta u tački C je zakačen uteg težine *3N*. Odrediti brzinu utega nakon spuštanja utega za 3m. Naći i sile u užetu, ukoliko nema klizanja užeta preko diska B i nema trenja u ležajevima A i B.



Slika 16.13.1

Rešenje:

Rastavićemo sistem na komponente: veliki disk I, mali disk II i telo C.Postavićemo jednačine kretanja za sva tri tela sistema.



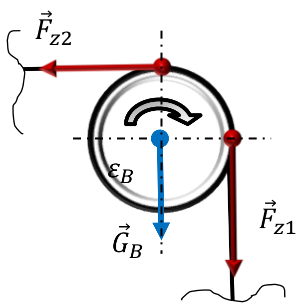
Slika 16.13.2

TELO C:

Na osnovu slike 16.13.2 pišemo jednačinu:

$$m_C a_C = G_C - F_{z1} \text{ .... } (1)$$

MALI DISKI (DISK II):



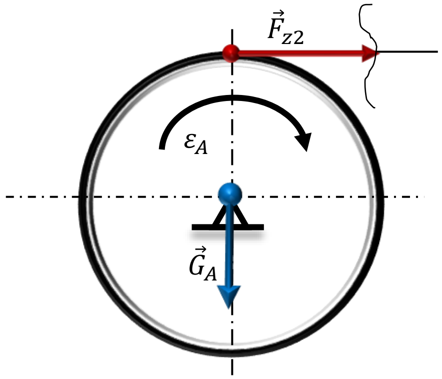
Slika 16.13.3

Na slici 16.13.3 se vidi da sile F_{z1} i F_{z2} prave razliku momenata u odnosu na tačku B, pa možemo zapisati:

$$F_{z1} \cdot r - F_{z2} \cdot r = J_B \cdot \varepsilon_B$$

$$(F_{z1} - F_{z2}) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot r^2 \cdot \varepsilon_B \text{.......}(2)$$

$$a_c = r \cdot \boldsymbol{\varepsilon_B}$$



Slika 16.13.4

VELIKI DISK (DISK I):

Na osnovu slike 16.13.4 se mogu napisati sledeće jednačine:

$$J_A \cdot \varepsilon_A = F_{z2} \cdot R$$

$$\frac{1}{2} m_A R^2 \cdot \varepsilon_A = F_{z2} \cdot R \text{ ....(3)}$$

Kako je uže neistegljivo, uočimo i sledeće:

$$a_C = r \cdot \boldsymbol{\varepsilon_B}$$
$$a_C = R \cdot \boldsymbol{\varepsilon_A}$$

Iz jednačine (1) dobijamo da je: $F_{z1} = G_C - m_C \cdot a_C$. Koristeći ovo, kao i da je $r \cdot \varepsilon_B = a_C$, sada je iz jednačine (2):

$$F_{z2} = G_C - m_C \cdot a_C - \frac{1}{2} m_B \cdot a_C$$

Iz jednačine (3) je: $\frac{1}{2} m_A R \cdot \varepsilon_A = F_{z2}$

A kako je $a_C = R \cdot \boldsymbol{\varepsilon_A}$ dobijamo: $\frac{1}{2} m_A a_C = F_{z2}$. Izjednačavanjem izraza za F_{z2} dobijamo:

$$G_C - m_C \cdot a_C - \frac{1}{2} m_B \cdot a_C = \frac{1}{2} m_A \cdot a_C$$
$$a_C = \frac{2 \cdot G_C}{m_A + 2 \cdot m_C + m_B} = \frac{2 \cdot G_C \cdot g}{G_A + 2 \cdot G_C + G_B} = 2{,}27 \frac{m}{s^2}$$

Da bismo dobili brzinu u trenutku kada teg C pređe put od 3 m, moramo naći izraz za promenu puta: $v_c = \int 2{,}27 dt = 2{,}27t + C_1$. Iz početnih uslova je $C_1 = 0$, pa je izraz za promenu puta:

$$s = \int 2{,}27 t dt = 1{,}135 t^2 + C_2$$

a iz početnih uslova je $C_2 = 0$.

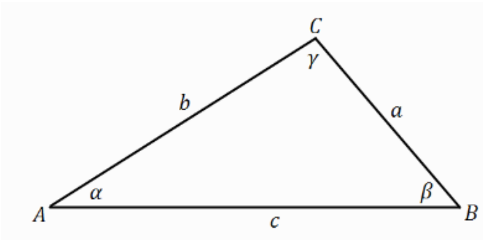
Telo pređe put od 3m za: $1{,}135 t^2 = 3$, pa je $t = \sqrt{\frac{3}{1{,}135}} = 1{,}625 s$, a brzina je tada: $v = 2{,}27 \cdot 1{,}625 = 3{,}69 \frac{m}{s}$.

PRILOG 1 – NEOPHODNE MATEMATIČKE FORMULE

1. TRIGONOMETRIJA

SINUSNA TEOREMA GLASI:

Stranice trougla proporcionalne su sinusima njima naspramnih uglova (slika 1).



Slika 1

Odnos dužine stranica i sinusa naspramnog ugla trougla je konstanta i jednak je dužini prečnika (2R) kružnice opisane oko trougla (slika 2).

MATEMATIČKI ZAPIS SINUSNE TEOREME:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{\gamma}}$$

Sinusna teorema se primenjuje**:**

1) **kada su data dva ugla i jedna stranica i**
2) **kada se date dve stranice i ugao naspram jedne od tih stranica.**

KOSINUSNA TEOREMA GLASI:

Neka su *a,b,c* dužine stranica i α, β *i* γ veličine odgovarajućih unutrašnjih uglova trougla ABC.

Matematički zapis kosinusne teoreme glasi:

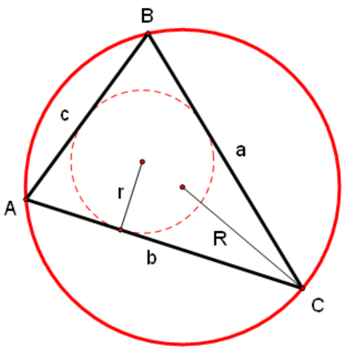
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

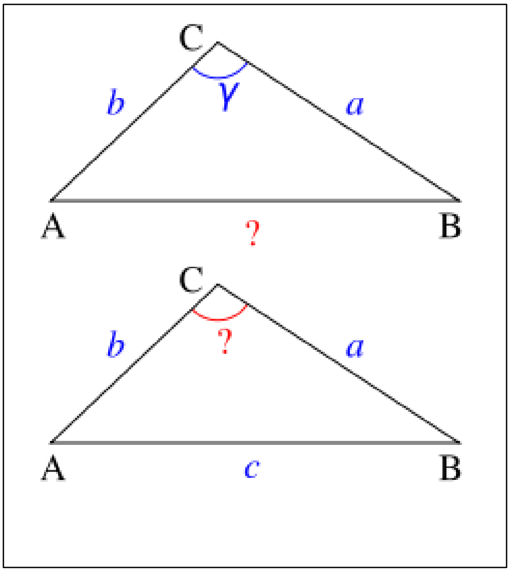
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Kosinusna teorema se primenjuje:

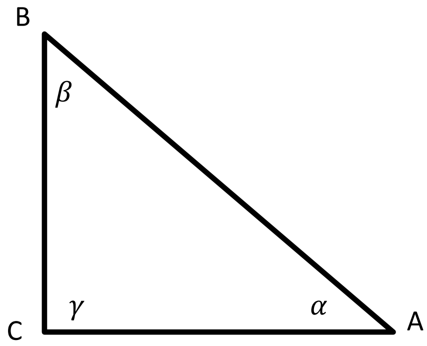
1) **Kad su date dve stranice i ugao izmedju njih**
2) **Kad su date sve tri stranice trougla**





Slika 2

PRAVOUGLI TROUGAO



$$\sin\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

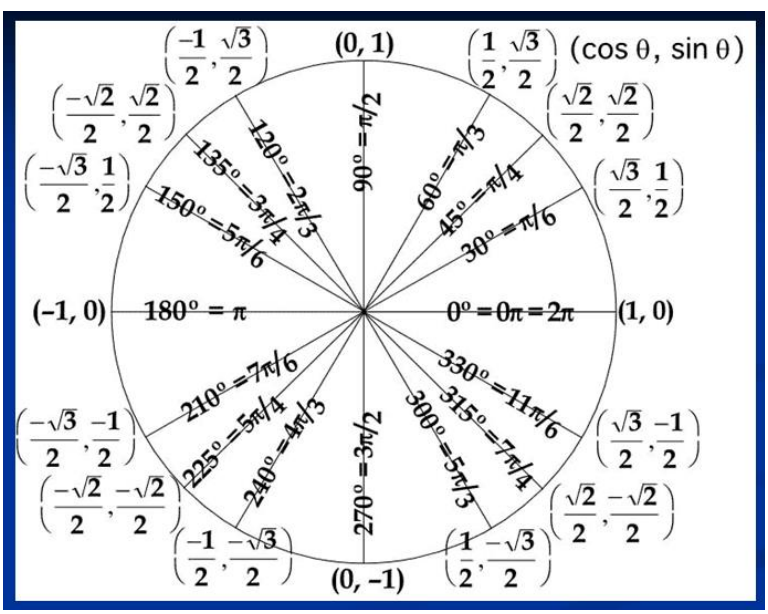
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

TRIGONOMETRIJSKA TABLICA

Vrednost ugla α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$



ADICIONE FORMULE

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

2. ALGEBRA

$a^2 + b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$ax^2 + bx + c = 0;\ x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. TABLICA IZVODA

$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a^x$	$y' = a^x lna$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = log_a x$	$y' = \dfrac{1}{xlna}$
$y = lnx$	$y' = \dfrac{1}{2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{1}{x^2}$
$y = sinx$	$y' = cosx$
$y = cosx$	$y' = -sinx$
$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = \dfrac{-1}{sin^2 x}$

4. TABLICA INTEGRALA

1. $$\int dx = = x + C$$

2. $$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ (a \neq -1)$$

3. $$\int e^x dx = e^x + C$$

4. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0)$$

5. $$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

6. $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7. $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8. $$\int tgx \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

9. $$\int ctgx \, dx = \ln|\sin x| + C$$

10. $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

11. $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$$

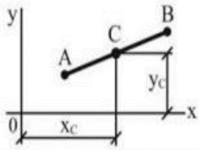
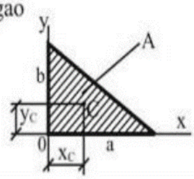
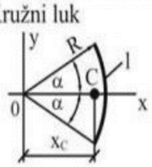
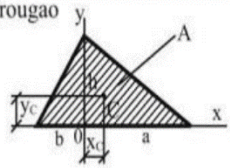
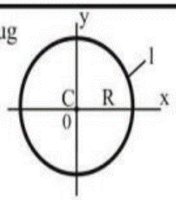
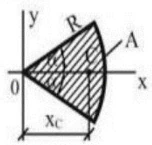
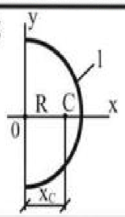
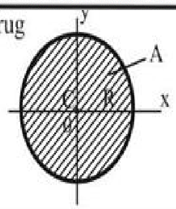
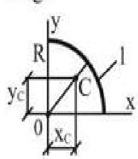
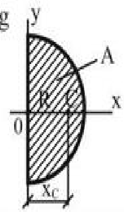
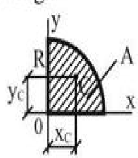
12. $$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = arctg\, x + C$$

13. $$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

14. $$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$$

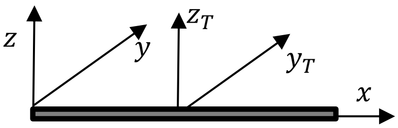
15. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

PRILOG 2 – POLOŽAJ TEŽIŠTA LINIJA I FIGURA

① Duž  $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}$ $y_C=\frac{y_A+y_B}{2}$ $l=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	① Trougao  $A=(a\cdot b)/2$ $x_C=a/3$ $y_C=b/3$
② Kružni luk  $x_C=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ $y_C=0$ $\alpha=[\mathrm{rad}]$ $l=2R\pi/180$ $\alpha=[^\circ]$	② Trougao  $x_C=(a-b)/3$ $y_C=h/3$ $A=(a+b)\cdot h/2$
③ Krug  $x_C=0$ $y_C=0$ $l=2R\pi$	③ Kružni isečak  $x_C=\frac{2R}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $y_C=0$ $\alpha=[\mathrm{rad}]$ $A=R^2\alpha$
④ Polukrug  $x_C=\frac{2R}{\pi}$ $y_C=0$ $l=R\pi$	④ Krug  $x_C=0$ $y_C=0$ $A=R^2\pi$
⑤ Četvrt kruga  $x_C=\frac{2R}{\pi}$ $y_C=\frac{2R}{\pi}$ $l=R\pi/2$	⑤ Polukrug  $x_C=4R/3\pi$ $y_C=0$ $A=R^2\pi/2$
	⑥ Četvrt kruga  $x_C=4R/3\pi$ $y_C=4R/3\pi$ $A=R^2\pi/4$

PRILOG 3 - MOMENTI INERCIJE TELA

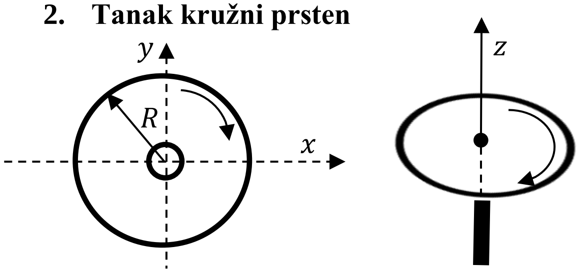
1. ŠTAP



$$I_x = 0,\ I_y = I_z = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_{xT} = 0,\ I_{yT} = I_{zT} = \frac{ml^2}{12}$$

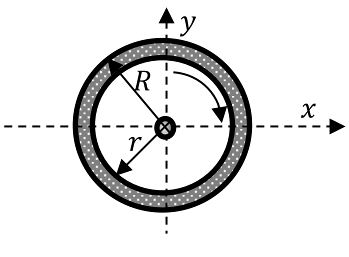
2. Tanak kružni prsten



$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_z = mR^2$$

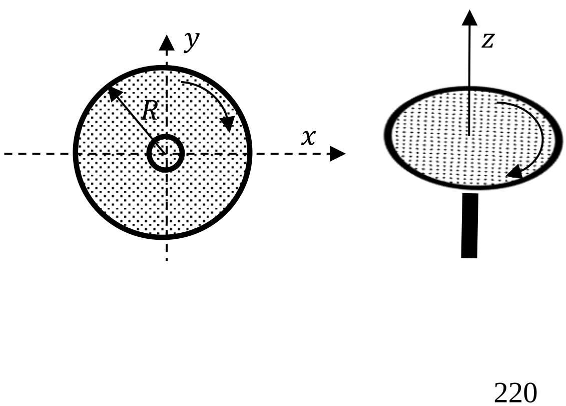
3. Ploča oblika kružnog prstena



$$I_x = I_y = \frac{m(R^2+r^2)}{4}$$

$$I_z = \frac{m(R^2+r^2)}{2}$$

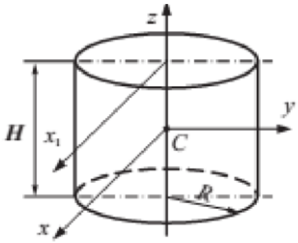
4. Kružna ploča



$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

5. Prav kružni cilindar (valjak)

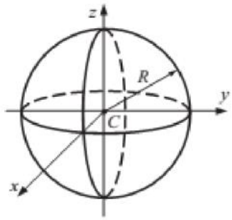


$$I_x = I_y = \frac{m}{12}(3R^2 + H^2)$$

$$I_z = mR^2$$

$$I_{x1} = \frac{m}{12}(3R^2 + 4H^2)$$

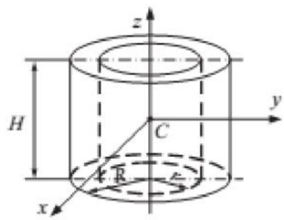
6. Sfera (lopta)



$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$$

$$I_C = \frac{3}{5}mR^2$$

7. Cilindrična cev

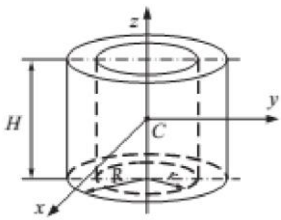


$$I_x = I_y = \frac{m}{2}(3R^2 + 3r^2 + H^2)$$

$$I_z = \frac{m}{2}(R^2 - r^2)$$

$$I_{x1} = \frac{m}{12}(3R^2 + 4H^2)$$

8. Cilindar tankih zidova



$$I_x = I_y = \frac{m}{12}(6R^2 + H^2)$$

$$I_z = \frac{m}{2}R^2$$

LITERATURA:

1. Dimić, G., Žegarac, S., Zbirka zadataka iz fizike C, IRO Građevinska knjiga, Beograd,1989
2. Dimić, G., Mitrinović, M., Zbirka zadataka iz fizike D, IRO Građevinska knjiga, Beograd,1990,
3. Golubović - Bugarski, V., Tehnička mehanika – skripta, Tehnološki fakultet Univerziteta u Banja Luci,
4. Igić, T., Mijalković, M., Trajković, M., Zbirka zadataka za prijemni ispit iz mehanike, Građevinsko-arhitetkonski fakultet Uiverzitata Niš, 2007
5. Karić, M., Todorović, M. Tehnička mehanika I, radni materijal, 2013,
6. Meščerski, I.V., Zbirka zadataka iz teorijske mehanike, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
7. Plazibat, B., Matokovic, A., Vetma, V., Tehnička mehanika I, Sveučilišni odjel za strukovne studije, skripta, 2018,
8. Plazibat, B., Matokovic, A., Vetma, V., Tehnička mehanika II, Sveučilišni odjel za strukovne studije, skripta, 2016,
9. Rusov, L, Mehanika II – Kinematika, Naučna knjiga, Beograd, 1990
10. Rusov, L, Mehanika – Dinamika, Naučna knjiga, Beograd, 1990,
11. Targ, S. M. Teorijska mehanika, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
12. Todorović, M., Tehnička mehanika II (kinematika i dinamika), radni materijal, 2017
13. Zaimović - Uzunović, N., Vukojević, D., Hodžić, N., Žiga, A., Statika, Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici, Zenica, 2007,
14. Zaimović-Uzunović, N., Vukojević, D., Hodžić, N., Žiga, A., Statika, Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici, 2007
15. Batj, M., I., Džanelidze, G., J., Rešeni zadaci iz teorijske mehanike sa izvodima iz teorije, Mašinski fakultet, Beograd, 1992.