P9 UVOD U DISKRETNE SIGNALE

Signali i sistemi

Uvod u diskretne signale

- Diskretni signal predstavlja se matematički kao realna funkcija funkcija jedne ili više promenljivih, pri čemu svaka od njih uzima vrednosti iz skupa celih brojeva Z
- Neformalno, diskretni signal predstavlja sekvencu brojeva
- Sekvenca brojeva ***x***, u kojoj je ***n-ti*** broj u sekvenci označen sa ***x(n)***, formalno se može predstaviti kao

$$x = \{x(n)\}, \ -\infty < n < \infty$$

- Diskretni signal nije definisan za necelobrojne vrednosti nezavisne promenljive **n**
- Na primer, vrednost ***x(3/2)*** nije jednaka nuli, već nije definisana

Reprezentacija diskretnih signala

- Najčešće forme reprezentacije koje se koriste u praksi su funkcionalna forma zapisa i grafička reprezentacija

Functional

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

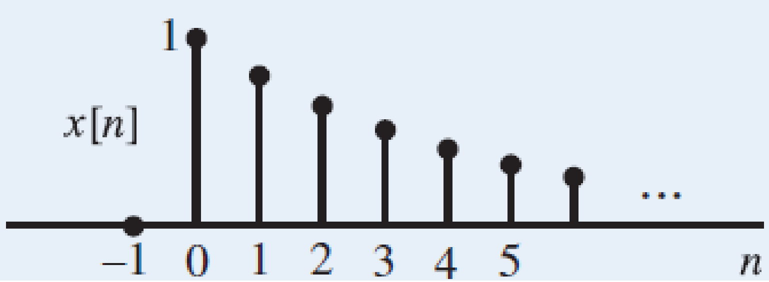
Tabular

n	…	-2	-1	0	1	2	3	…
$x[n]$	…	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

Sequence

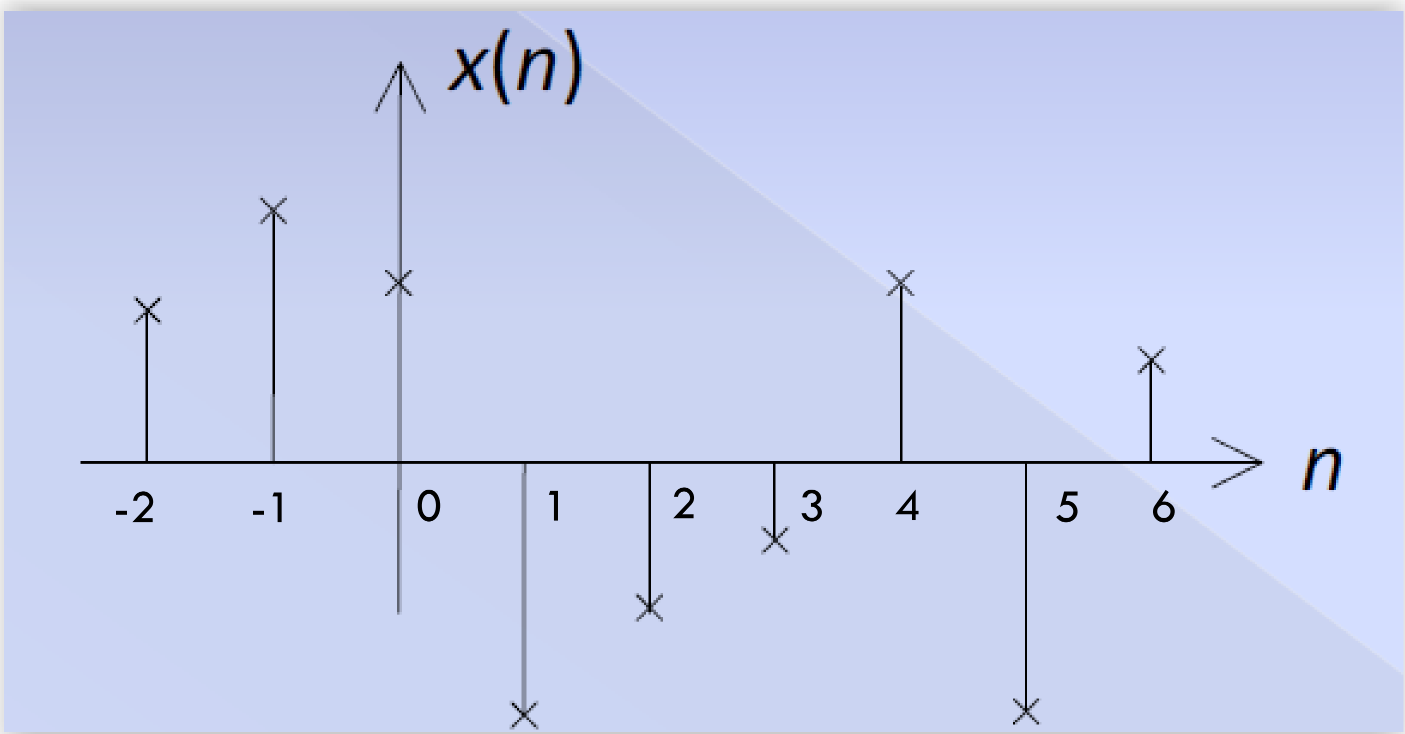
$$x[n] = \{ \ \ldots \ 0 \ \underset{\uparrow}{1} \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{1}{4} \ \tfrac{1}{8} \ \ldots \ \}$$

Pictorial



Reprezentacija diskretnih signala

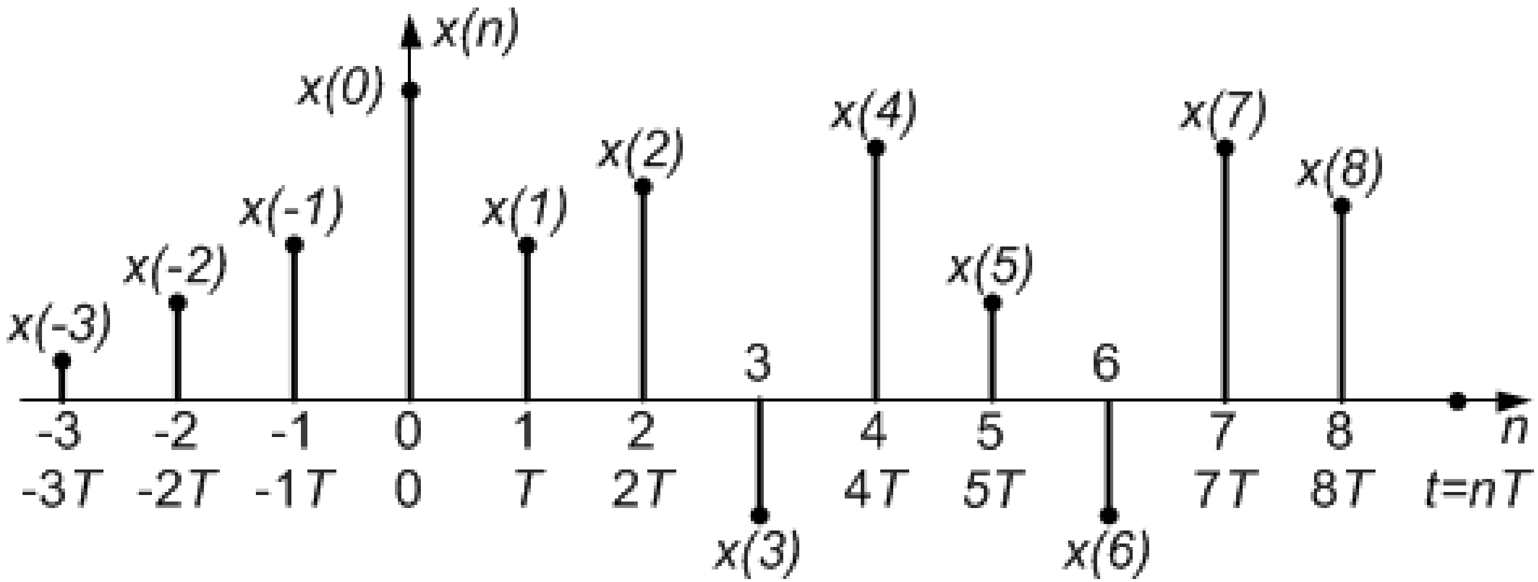
- Diskretni signali se matematički predstavljaju u obliku niza realnih ili kompleksnih brojeva



- $x(n)$ je definisano samo za celobrojne vrednosti n

Reprezentacija diskretnih signala

- Prilikom grafičke reprezentacije, uobičajeno je da se na apscisi navode celi brojevi, ređe trenuci odabiranja $t = nT$, kao što je prikazano na slici dole desno
- Iako se apscisa uvek crta kao neprekidna linija, bitno je primetiti da je diskretni signal $x(n)$ definisan samo u celobrojnim vrednostima nezavisne promenljive n



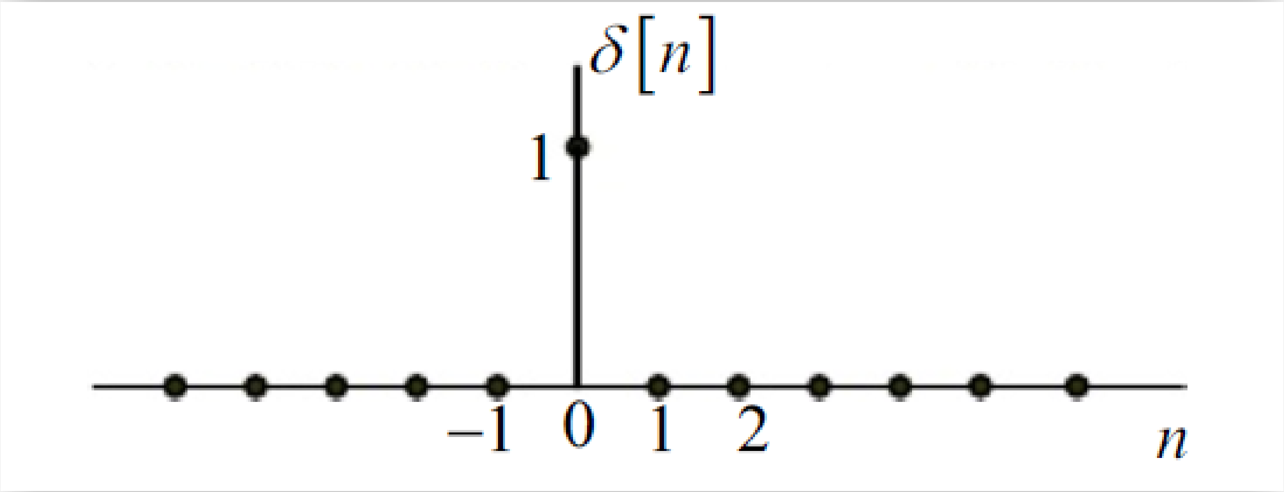
Elementarni diskretni signali

- Postoji čitava klasa signala diskretnih u vremenu koja je vrlo korisna u cilju analize signala i sistema.
- U najvećem broju slučajeva ovi signali su analogni elementarnim kontinualnim signalima, ali postoje i značajne razlike.
- Umesto do sada korišćene opšte oznake za signale **x(t)** , za signale diskretne u vremenu koristimo oznaku **x[n]**.
- Diskretni signali se vrlo često u literaturi označavaju i kao sekvence jer oni zaista i predstavljaju sekvencu, niz brojeva.

Diskretna jedininična impulsna funkcija

- Diskretna jedinična impulsna funkcija (jedinični odbirak -unit-sample) se označava kao **δ[n]** i definiše se kao:

$$\delta[n]=\begin{cases}\mathbf{0}, n \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}, n = \mathbf{0}\end{cases}$$



- Diskretni delta impuls predstavlja analogon delta impulsu u diskretnom vremenu
- Postoji jednostavna veza između jedinične odskočne i impulsne funkcije:

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

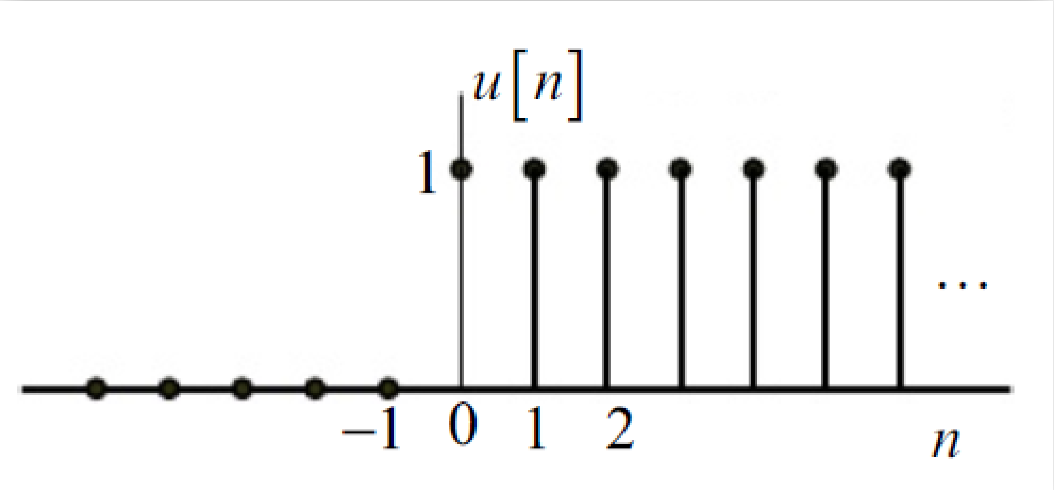
Diskretna jedininična impulsna funkcija - osobine

- Diskretna jedininična impulsna funkcija je parni diskretni signal **δ[n]=δ[- n]**
- Važi osobina odabiranja
- x(n). δ(n-k)=x(k). δ(n-k), k϶Z
- Proizvoljni diskretni signal x(n) može se predstaviti pomoću beskonačne sume vremenski pomerenih diskretnih jediničnih impulsa
- $\boldsymbol{x(n)} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x(k)\ \boldsymbol{\delta(n\text{-}k)}$

Diskretna jedininična odskočna funkcija

- Diskretna jedinična odskočna (Hevisajdova) funkcija se uobičajeno obeležava kao **u[n]** i definiše se na sledeći način:

$$\mathbf{u[n]}=\begin{cases}\mathbf{0}, \boldsymbol{n} < \mathbf{0} \\ \mathbf{1}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}\end{cases}$$



- Diskretna jedininična odskočna funkcija može se napisati u obliku sume jediničnih impulsnih signala

$$\boldsymbol{u(n)}=\sum_{-\infty}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\delta(k)}$$

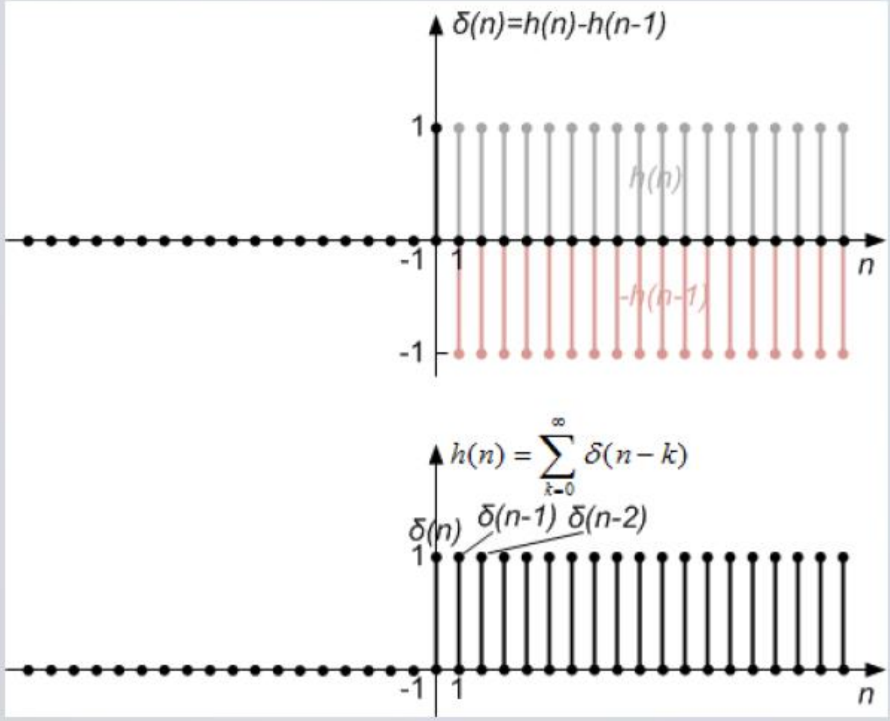
Diskretna jedininična odskočna funkcija

- Za diskretni delta impuls i deskretnu hevisajdovu funkciju važe sledeće veze
- Diskretni delta impuls može se reprezentovati pomoću diskretne hevisajdove funkcije na sledeći način

$$\delta(n)=h(n)-h(n-1)$$

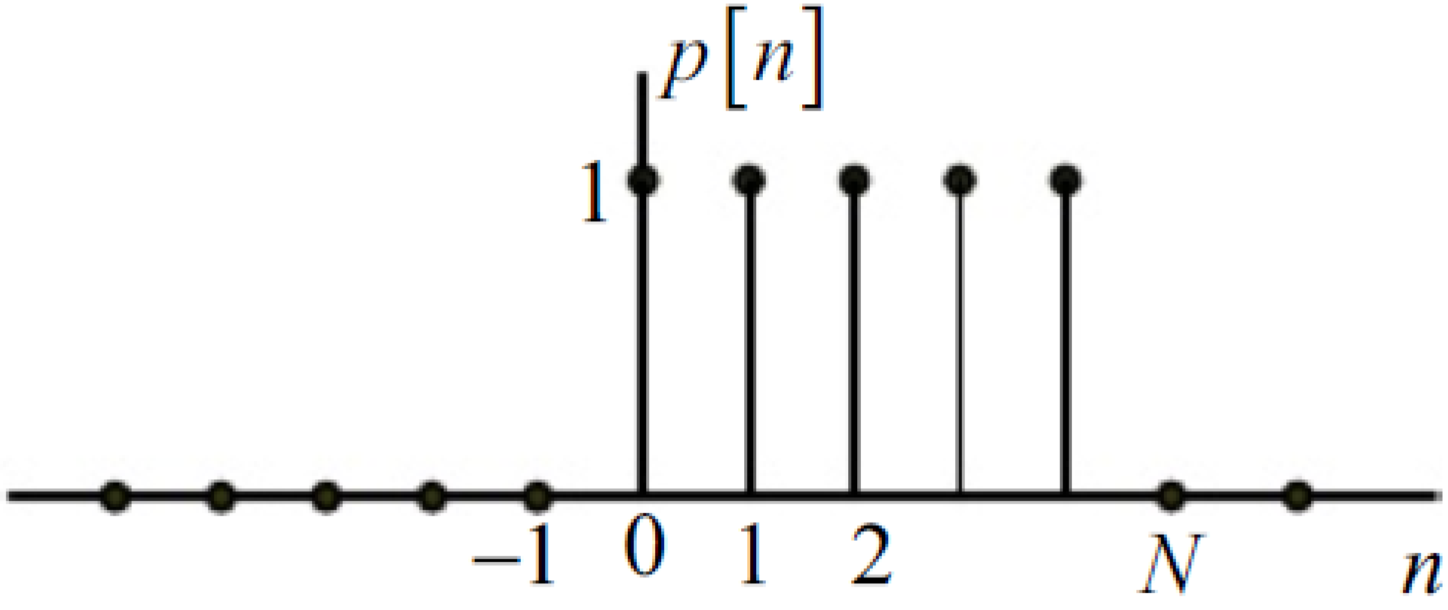
- Obrnuto, diskretna hevisajdova funkcija može se reprezentovati pomoću diskretnog delta impulsa na sledeći način

$$h(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$



Diskretna pravougaoni impuls (rectangular pulse)

- **p[n]= u[n]- u[n-N] =** $\begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{n < 0} \\ \mathbf{1}, & \mathbf{0 \le n \le N-1} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{n \ge N} \end{cases}$
- Signal u[n-N] označava signal u[n] zakašnjen za N



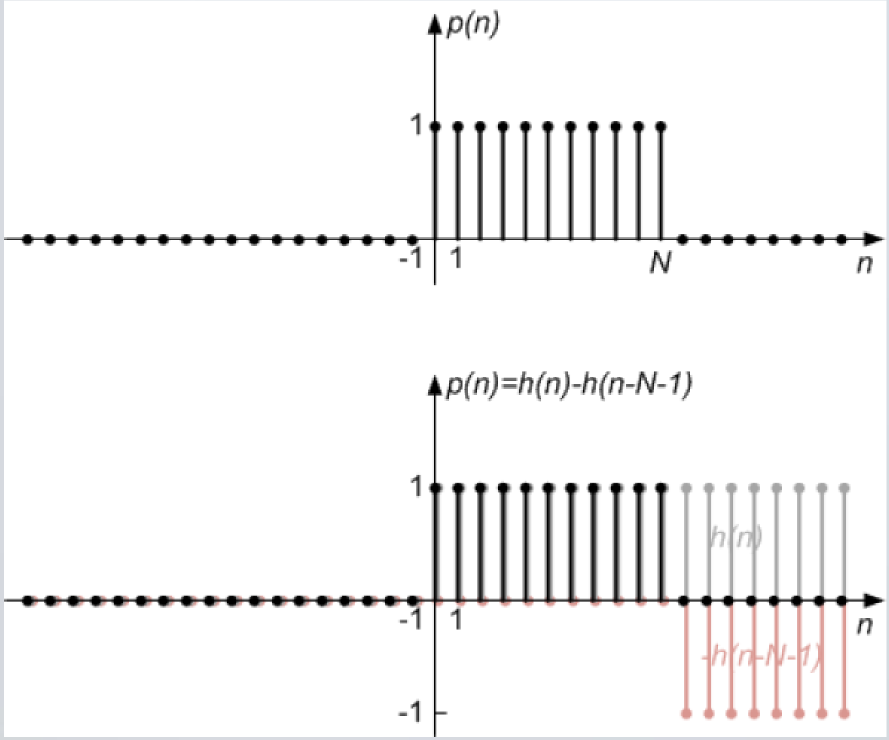
Diskretna pravougaoni impuls

- **Pravougaoni impuls** je diskretni signal definisan sledećom relacijom

$$p(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N \\ 0, & n < 0 \ i \ n > N \end{cases}$$

- Pravougani impuls može se reprezentovati pomoću diskretne hevisajdove funkcije na sledeći način

$$p(n) = h(n) - h(n - N - 1)$$



Elementarni diskretni signali – diskretna rampa

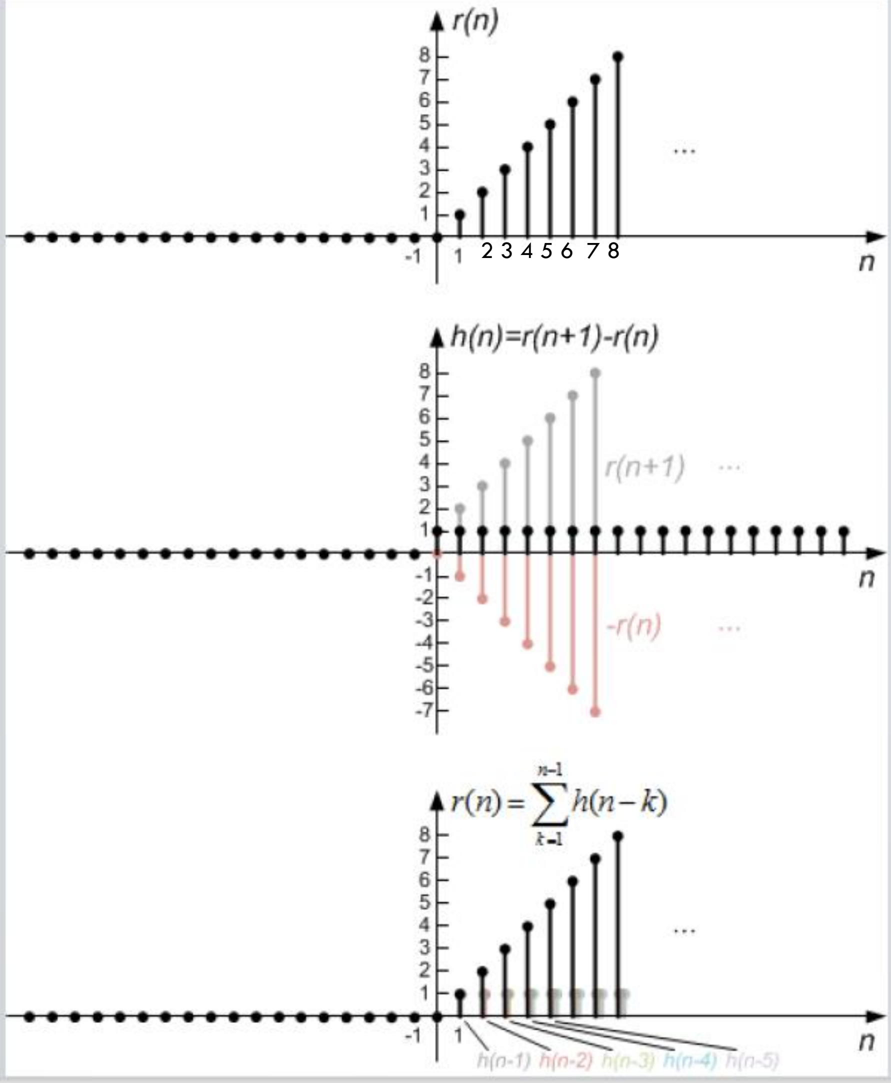
- **Diskretna rampa** je diskretni signal definisan sledećom relacijom

$$r(n)=\begin{cases} n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

- Veze između diskretne hevisajdove funkcije i diskretne rampe date su sledećim izrazima

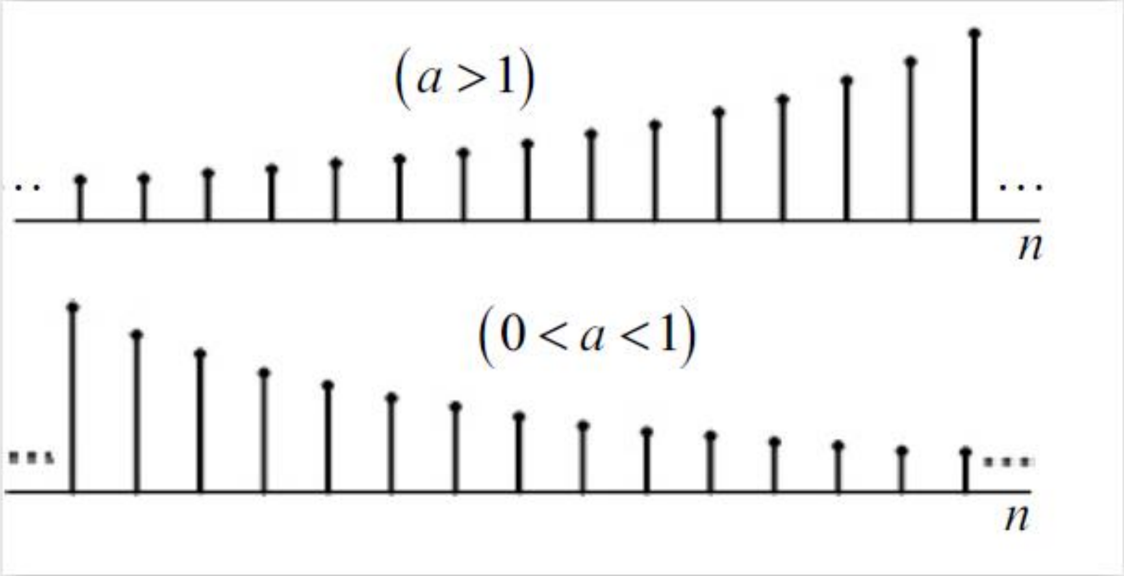
$$h(n)=r(n+1)-r(n)$$

$$r(n)=\sum_{k=-\infty}^{n-1} h(k)$$



Eksponencijalni signali

- Diskretni eksponencijalni kompleksni signal se definiše kao:
- $\mathbf{x[n] = C}\boldsymbol{a^n}$
- gde su u opštem slučaju konstante C i a kompleksni brojevi.
- Ukoliko su i C i a realni brojevi, dobija se takozvana realna eksponencijalna funkcija (signal)



Eksponencijalni signali

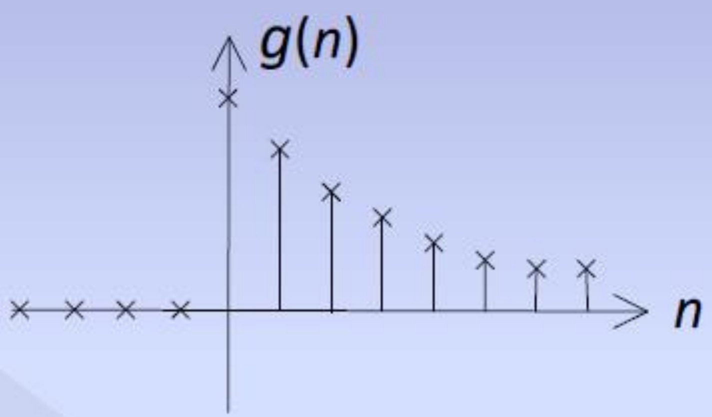
- Diskretni eksponencijalni kompleksni signal se definiše kao:

$$\mathbf{x[n] = C}\boldsymbol{a^n}$$

- gde su u opštem slučaju konstante C i a kompleksni brojevi.

Realni eksponencijalni signal (niz)

$$g(n)=\begin{cases} a^n, & n\geq 0, \quad a<1 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$



Eksponencijalni signali

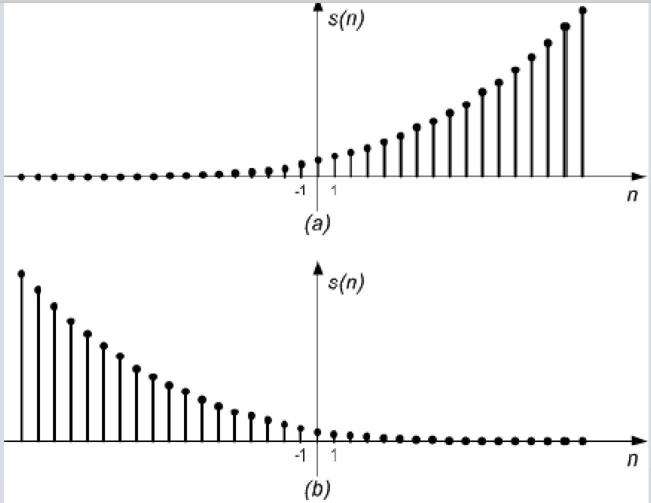
- **Diskretni stepeni signal** definisan je sledećom relacijom

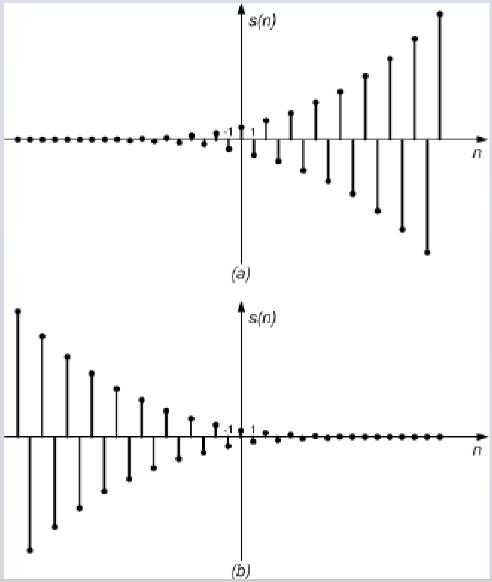
$$s(n) = A \cdot a^n, \quad A, a \in R, n \in Z$$

- Talasni oblik diskretnog stepenog signala zavisi od znaka parametra *A* i znaka i veličine parametra *a*

- U slučaju da je *a>1*, tada je *s(n)* monotono rastuća ili opadajuća funkcija diskretnog vremena *n*, u zavisnosti da li je *A>0* ili *A<0*. U slučaju da je *0<a<1*, važi obrnuto.

- U slučaju da parametar *a* ima negativnu vrednost, tada je *s(n)* monotono rastuća funkcija ako je a<-*1*, odnosno monotono opadajuća funkcija, ako je *-1<a<0*, bez obzira na znak parametra *A*

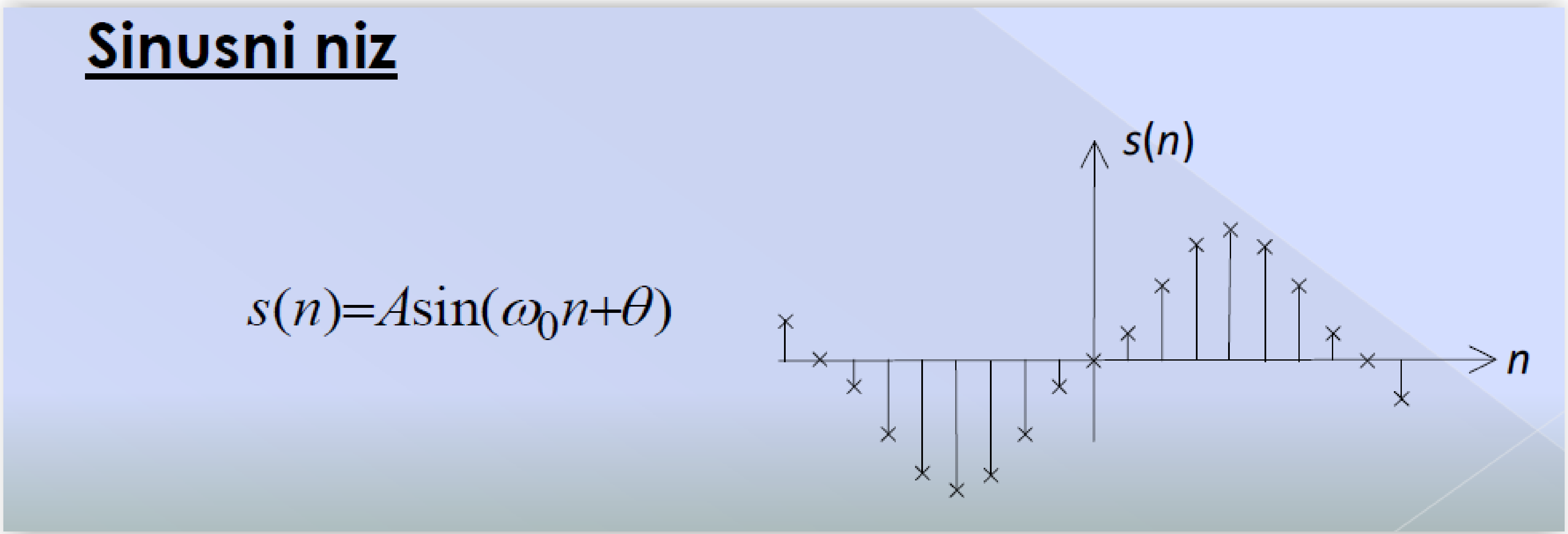




Sinusoidalni signali

- Kompleksna sinusoida dobija se iz eksponencijalnog signala

$\mathbf{x[n] = C}\boldsymbol{a^n}$ **,** ako paramtar **a** ima oblik: $\boldsymbol{a=e^{j\Omega_0}}$, gde je kružna učestalost $\boldsymbol{\Omega_0}$ realan broj izražen u radijanima



Sinusoidalni signali

Ako je parametar C kompleksan $C=|C|e^{j\varphi}$ kompleksna sinusoida ima oblik:

$$\mathbf{x[n] = C}e^{j\Omega_0 n} = |C|e^{j(\Omega_0 n+\varphi)}$$

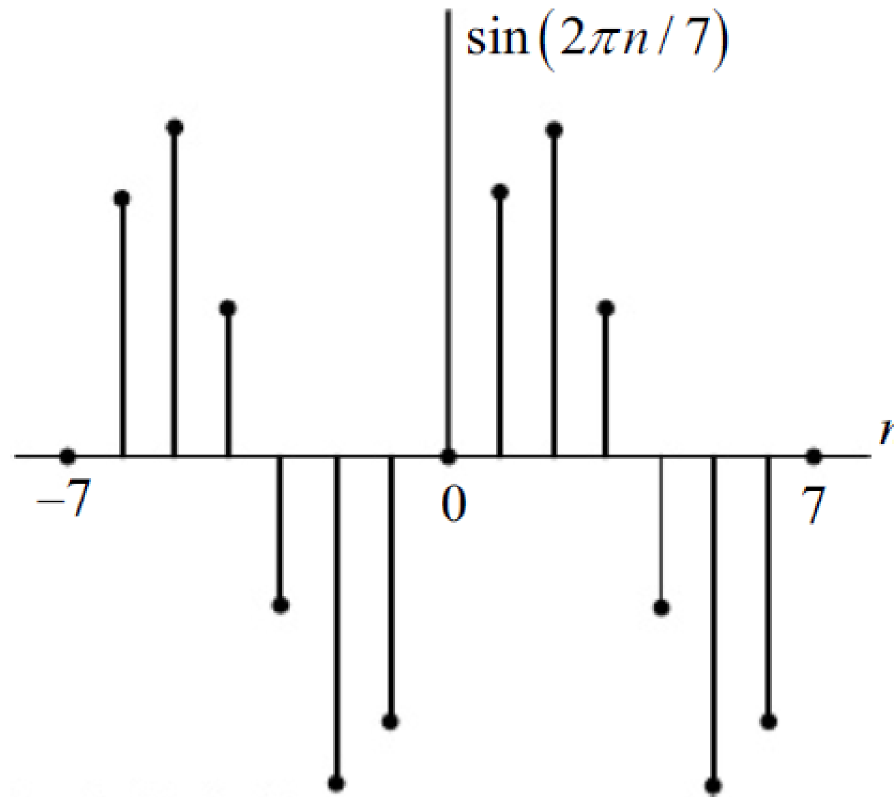
$$\mathbf{x[n]} = |C|\cos(\Omega_0 n + \varphi) + j|C|\sin(\Omega_0 n + \varphi)$$

Ako je A= =$|C|$, realna sinusoida ima

$$\mathbf{x[n]} = A\cos(\Omega_0 n + \varphi)$$

Diskretna sinusoida sa parametrima

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{7}$ **i** $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ prikazana je na slici



Sinusoidalni signali

- Po analogiji sa kontinualnim sinsoidalnim signalima, i logično je očekivati da je diskretna sinusoida periodična:

$x[n+N] = x[n]$, za svako n i neku periodu N > 0

U slučaju diskretnih signala to ne mora da znači, već periodičnost zavisi od učestanosti Ω_0

$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$, sledi da je $e^{j\Omega_0 N} = 0$

Eksponent $\Omega_0 N$ mora biti ceo multipl od 2π:

$$\Omega_0 N = k.2\pi$$

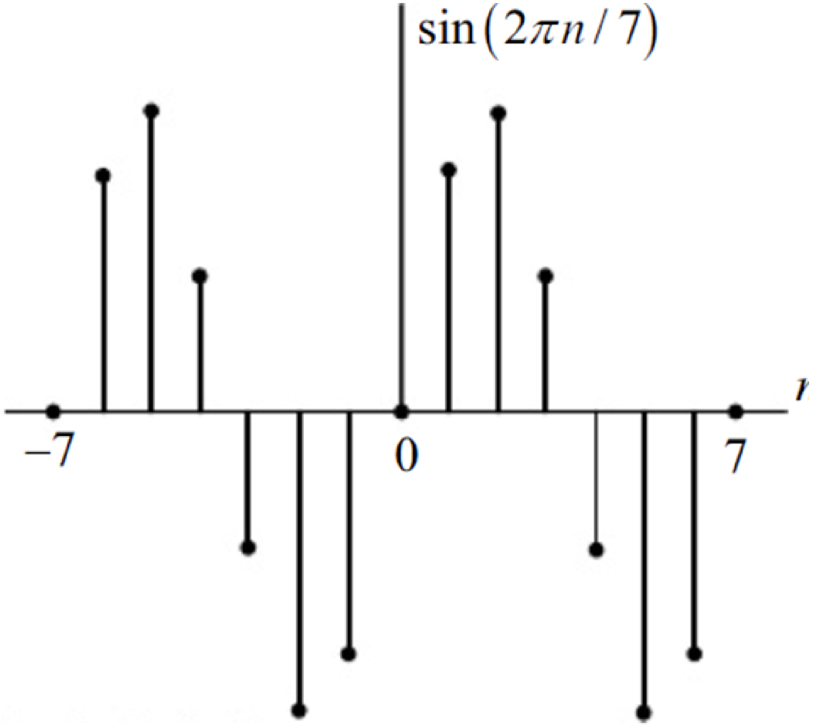
$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$$

Sinusoidalni signali

- Uslov da kompleksna sinusoida bude periodični signal je da takozvana normalizovana učestanost $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ bude racionalan broj
- Opšti uslov periodičnosti je: $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$
- ***U jednoj periodi od N odbiraka ima***

k ciklusa sinusoide.

- Za primer $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} = \frac{1}{7}$,
- perioda **N=7** ima **7** odbirka



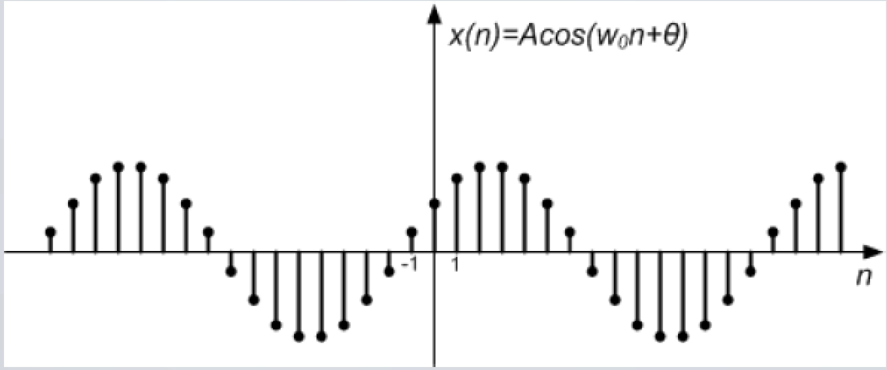
Elementarni diskretni signali – diskretni trigonometrijski signal

- **Diskretni trigonometrijski signal** definisan je sledećim izrazima

$$x(n) = A \cdot \cos(\omega n + \theta), \quad \omega, \theta \in R, n \in Z$$

$$x(n) = A \cdot \sin(\omega n + \theta), \quad \omega, \theta \in R, n \in Z$$

- Činjenica da diskretno vreme *n* može da uzima samo celobrojne vrednosti, dovodi do bitnih razlika u svojstvima kontinualnih i diskretnih trigonometrijskih signala



- Diskretni trigonometrijski signali sa frekvencijama oblika $\omega + 2\pi \cdot r, r \in Z$, ne mogu se međusobno razlikovati!

- Ovo se lako može potvrditi jer važi sledeće

$$x(n) = A \cdot \cos[(\omega + 2\pi \cdot r)n + \theta] = A \cdot \cos(\omega n + \theta)$$

Elementarni diskretni signali – diskretni trigonometrijski signal

- Posledica ove osobine je da prilikom rada sa diskretnim trigonometrijskim signalima treba posmatrati samo signale čija frekvencija uzima vrednosti iz nekog intervala dužine 2π !
- U praksi se obično razmatraju frekvencije iz intervala $-\pi < \omega \leq \pi$ ili $0 \leq \omega < 2\pi$
- Sledeća razlika između kontinualnih i diskretnih trigonometrijskih signala ogleda se u njihovoj periodičnosti
- Kontinualni trigonometrijski signal je periodičan za svaku moguću vrednost parametra ω
- U slučaju diskretnog trigonometrijskog signala to nije uvek slučaj!

Elementarni diskretni signali – diskretni trigonometrijski signal

- Da bi diskretni trigonometrijski signal bio periodičan, sa periodom *N*, mora važiti sledeća jednakost

$$A\cdot\cos(\omega n+\theta)=A\cdot\cos(\omega n+\omega N+\theta)$$

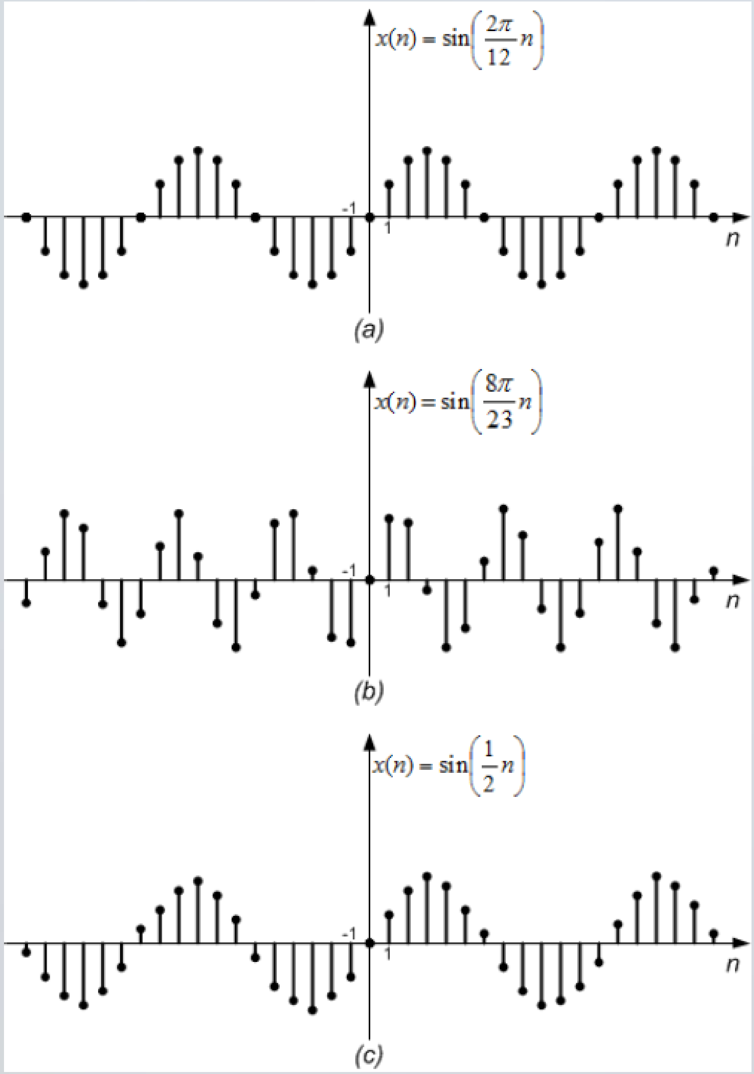
- Da bi ova jednakost važila za svako *n*, mora važiti sledeće

$$\omega N=2\pi k,\quad k\in Z$$

- Odavde možemo videti da bi diskretni trigonometrijski signal zaista bio periodičan, kružna učestanost ω mora biti racionalni umnožak vrednosti 2π !

$$\omega=2\pi\frac{k}{N},\quad k\in Z$$

- Na primer, diskretni trigonometrijski signali sa kružnom učestanošću $\omega=2\pi/12$ i $\omega=8\pi/23$ su periodični, dok signal sa kružnom učestanošću $\omega=1/2$ nije!



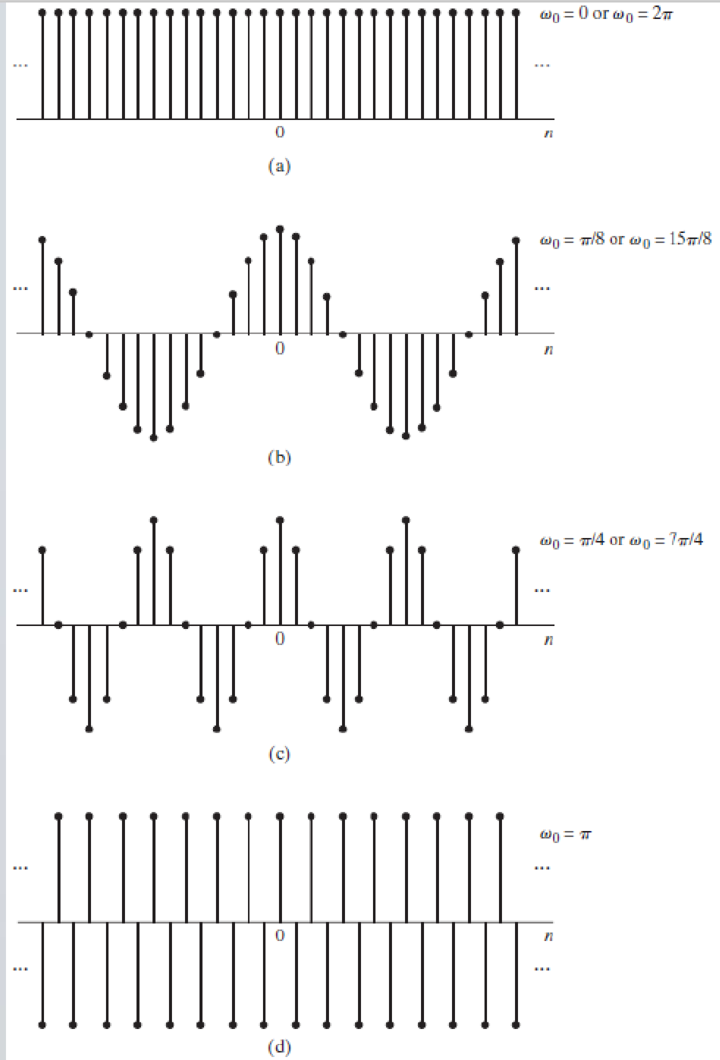
Elementarni diskretni signali – diskretni trigonometrijski

- Interpretacija visokih i niskih učestanosti kod periodičnih diskretnih trigonometrijskih signala takođe se razlikuje

- Kod kontinualnih trigonometrijskih signala, sa porastom kružne učestanosti raste i brzina promene samog signala

- U slučaju diskretnih signala kako ω raste od 0 do π, raste i brzina promene signala

- Međutim, kako ω nastavlja da raste od π *do* 2π, brzina promene signala opada!



Modifikacija nezavisne vremenske promenljive *n* u diskretnim signalima - pomeranje signala u vremenu

- **Pomeranje signala u vremenu**
- Slično kao u kontinualnom domenu, i u diskretnom domenu imamo signale koji kasne, odnosno prednjače u odnosu na originalan signal.
- Za signal **$y[n] = x[n-n_0]$** kažemo da kasni n_0 odbiraka u odnosu na originalni signal $x[n]$
- Za signal **$y[n] = x[n+n_0]$** kaţemo da prednjači za n_0 odbiraka u odnosu na originalni signal $x[n]$.

Pomeranje diskretnih signala u vremenu

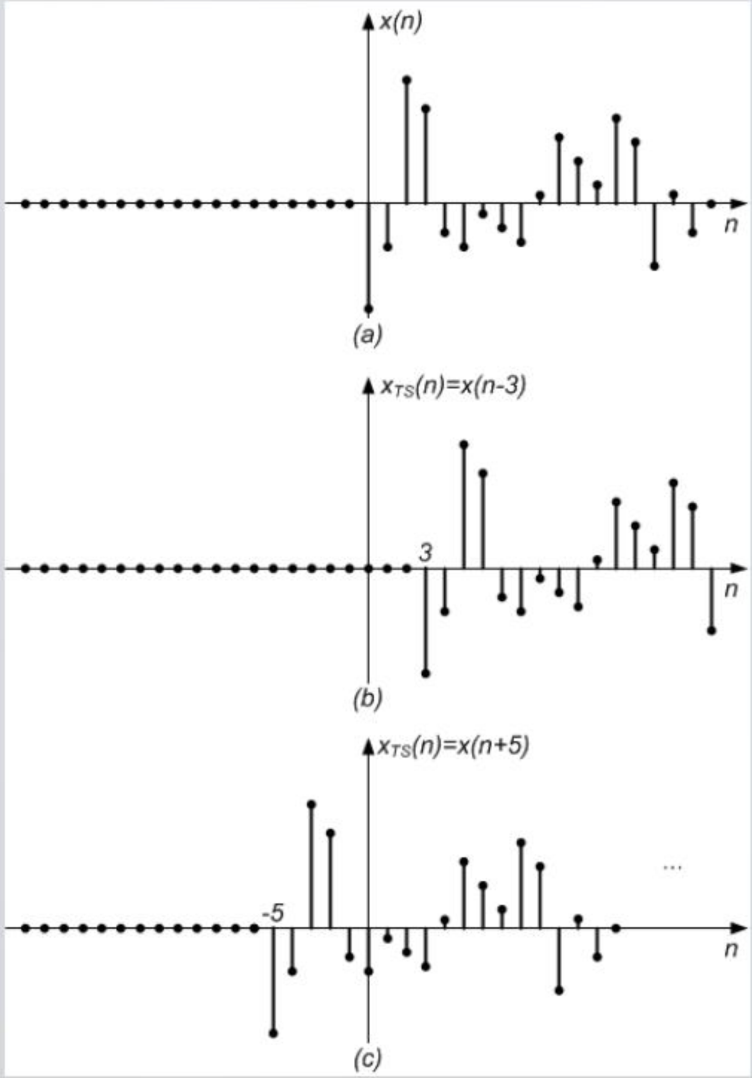
$x[\, n-n_0 \,]$

- Diskretni signal $x_{TS}(n)$ predstavlja vremenski pomereni signal $x(n)$ za n_0 mesta, ako važi sledeća veza

$$x_{TS}(n) = x(n-n_0), \quad n_0 \in Z$$

- U slučaju da je vrednost pomeraja $n_0>0$, signal $x_{TS}(n)$ kasni u odnosu na signal $x(n)$ za n_0 mesta, odnosno pomeren je u desno za n_0 mesta

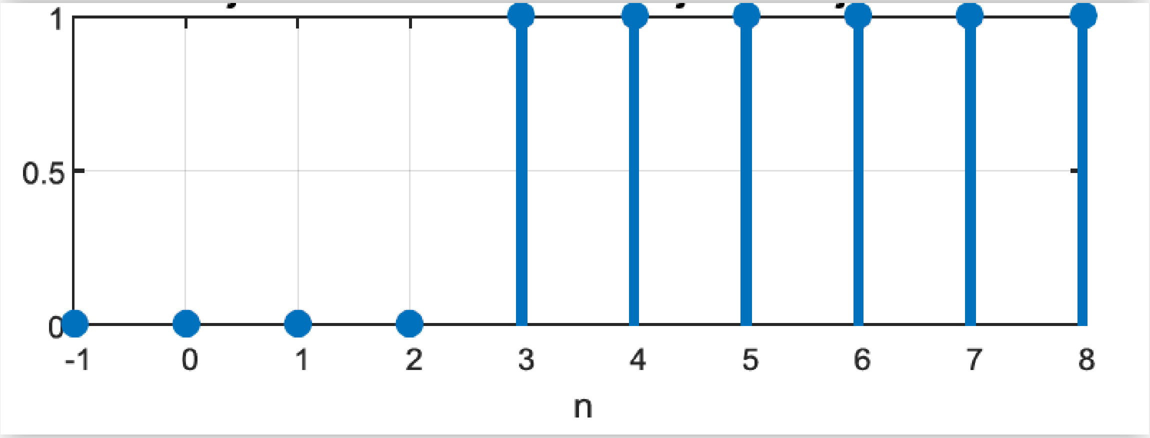
- U slučaju da je vrednost pomeraja $n_0<0$, signal $x_{TS}(n)$ prednjači u odnosu na signal $x(n)$ za n_0 mesta, odnosno pomeren je u levo za n_0 mesta



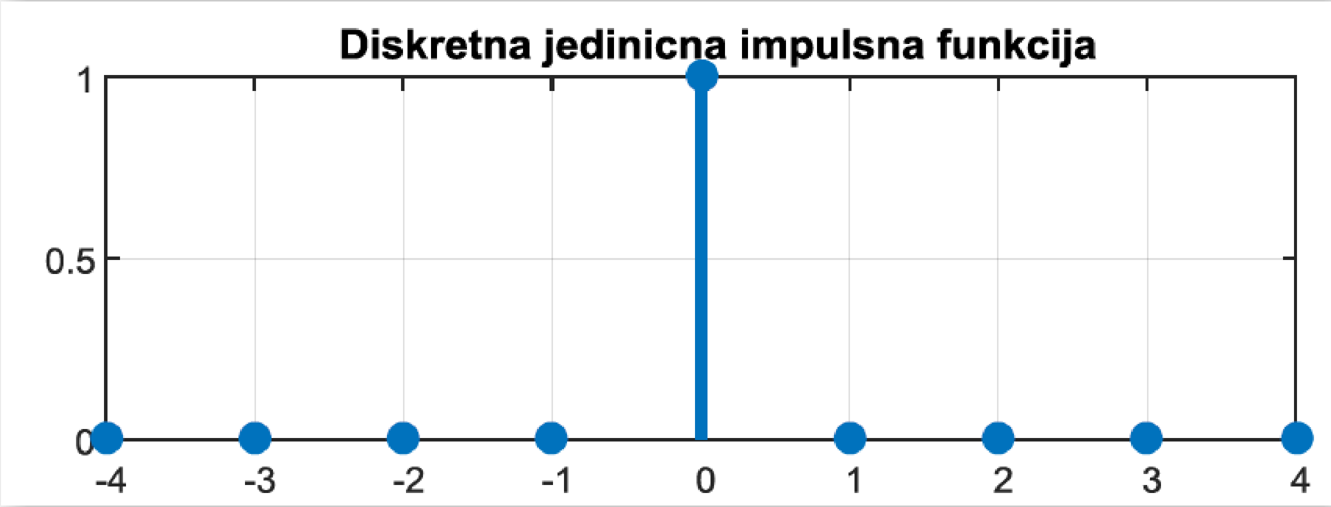
Primer 1. Nacrtati diskretnu jediničnu odskočnu funkciju, a zatim u okviru iste slike ispod nje nacrtati zakašnjenu jediničnu odskočnu funkciju za 3 odbirka.

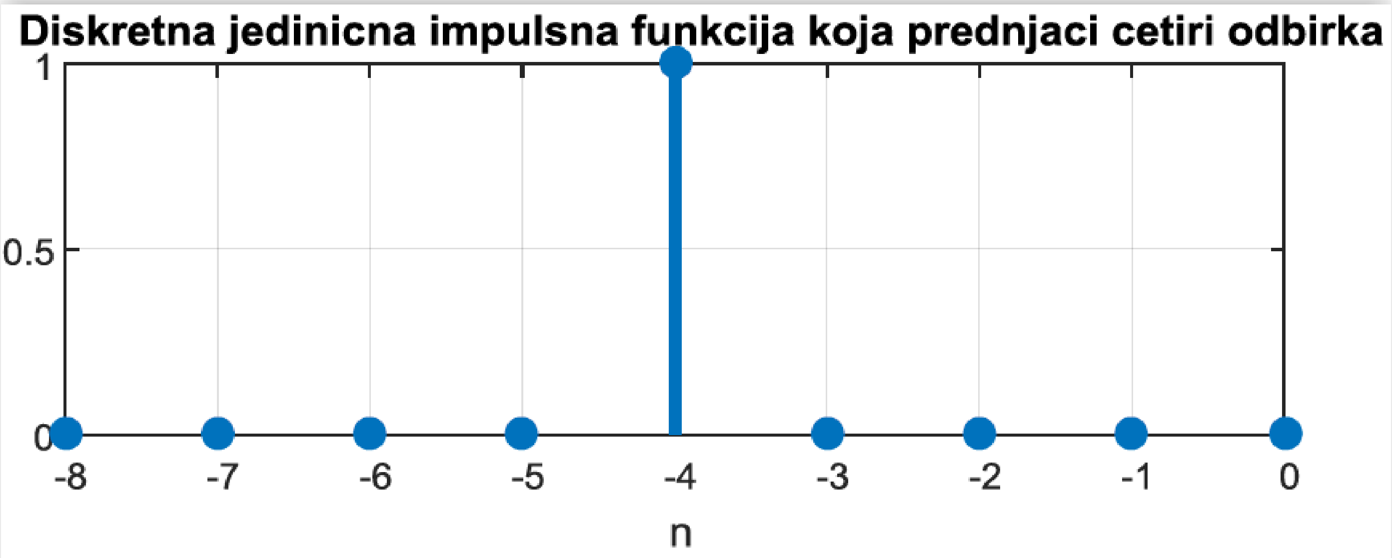
- Diskretna jedinična odskočna funkcija ima vrednost nula do nule, zatim u nuli ima vrednost jedan, kao i u odbircima većih od nule.

- Zakašnjena jedinična odskočna funkcija za tri odbirka

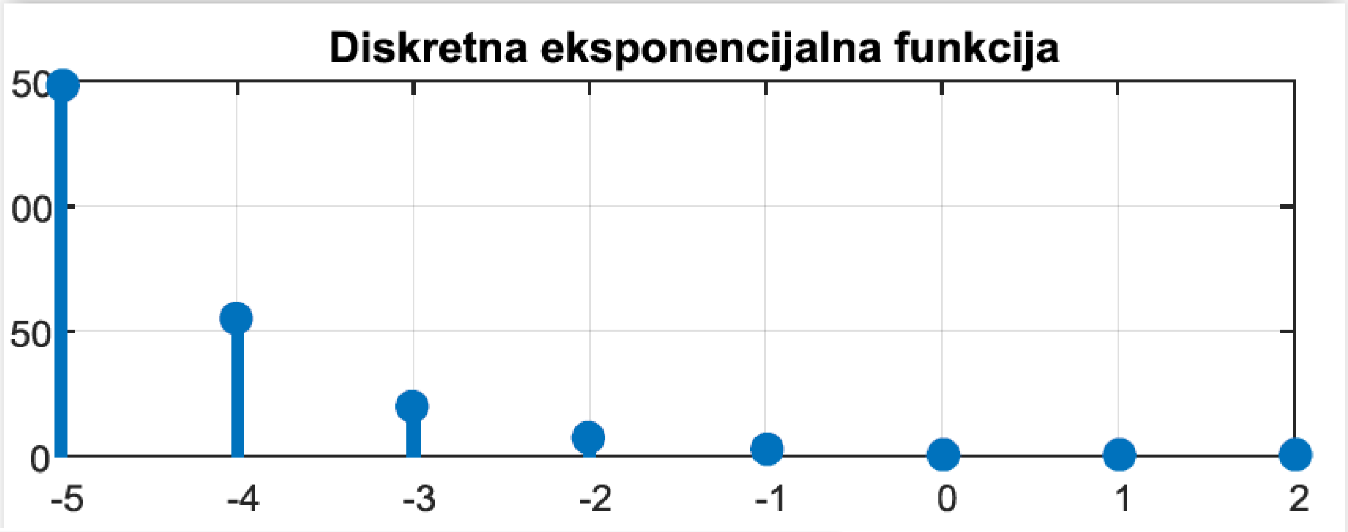


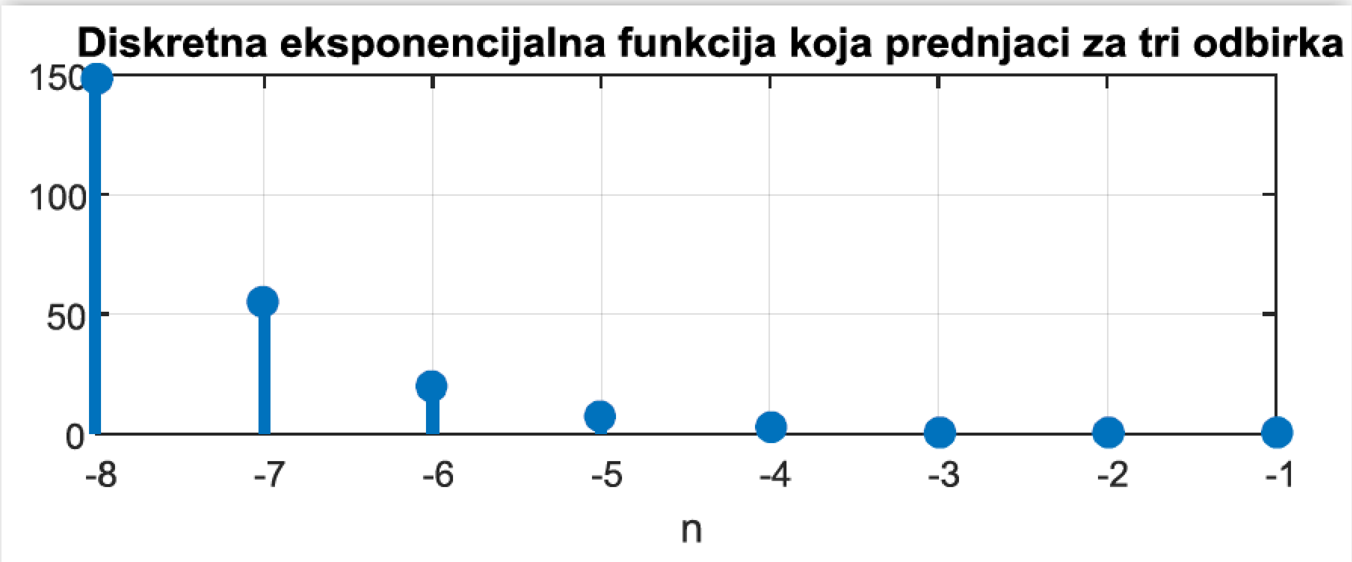
Primer 2. Nacrtati diskretnu jediničnu **impulsnu** funkciju, a zatim u okviru iste slike ispod nje nacrtati diskretnu jediničnu impulsnu funkciju koja prednjači za 4 odbirka.





Primer 3. Nacrtati diskretnu eksponencijalnu funkciju, a zatim u okviru iste slike ispod nje nacrtati diskretnu eksponencijalnu funkciju koja prednjaĉi za 3 odbirka.





Inverzija vremena

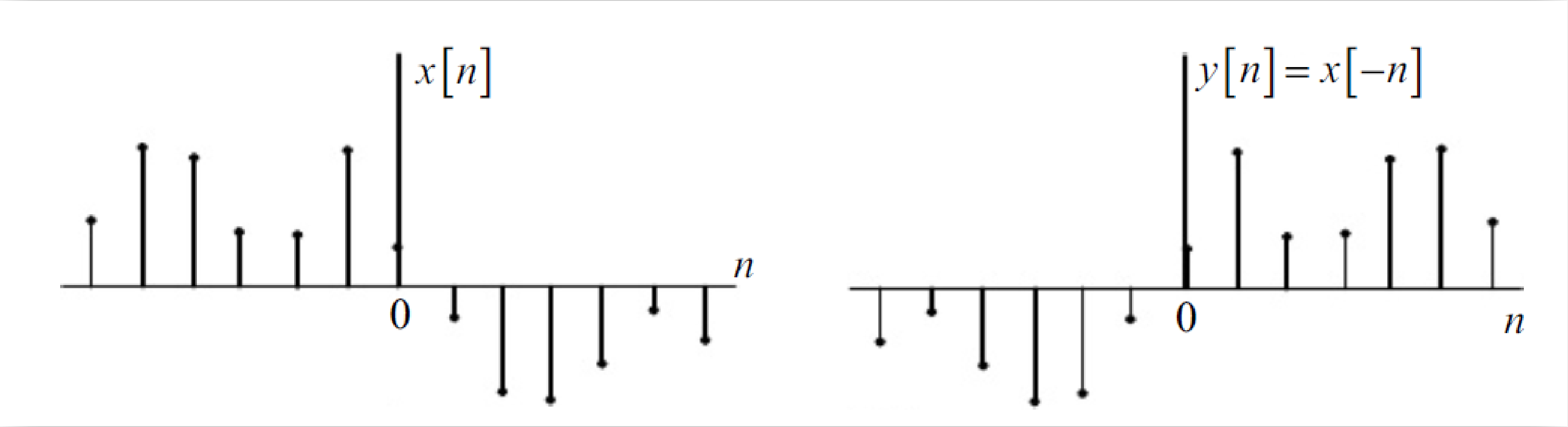
- Diskretni signal $y[n]$ predstavlja ***inverziju signala*** $x[n]$:

$$\mathbf{y[n] = x[-n]}$$

- Odbirci jednog i drugog signala zadovoljavaju relacije:
- $x[0] = y[0]$
- $x[1] = y[-1]$
- $x[2] = y[-2]$,...
- Signali $x[n]$ i $y[n]$, kao i u kontinualnom domenu, odnose se kao likovi u ogledalu u odnosu na oordinatu (y-osa).

Inverzija vremena

- $y[n] = x[-n]$
- Signali **x** i **y** odnose kao likovi u ogledalu, u odnosu na oordinatu



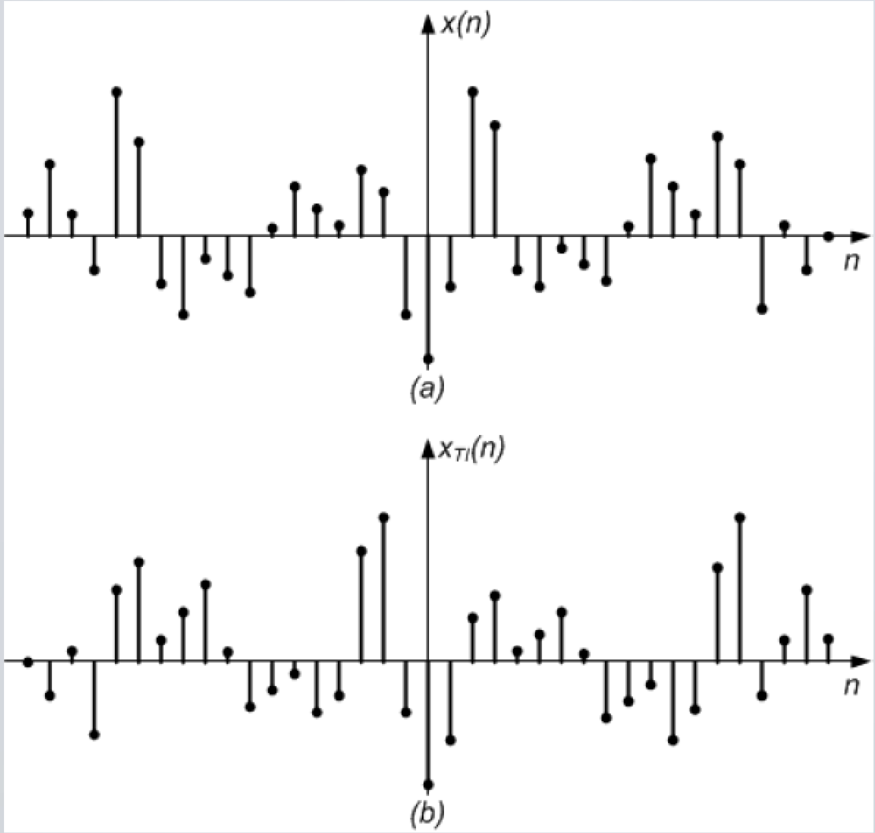
Osnovne operacije na diskretnim signalima – inverzija u vremenu

- Diskretni signal $x_{TI}(n)$ predstavlja vremenski invertovani signal $x(n)$ ako važi sledeća veza

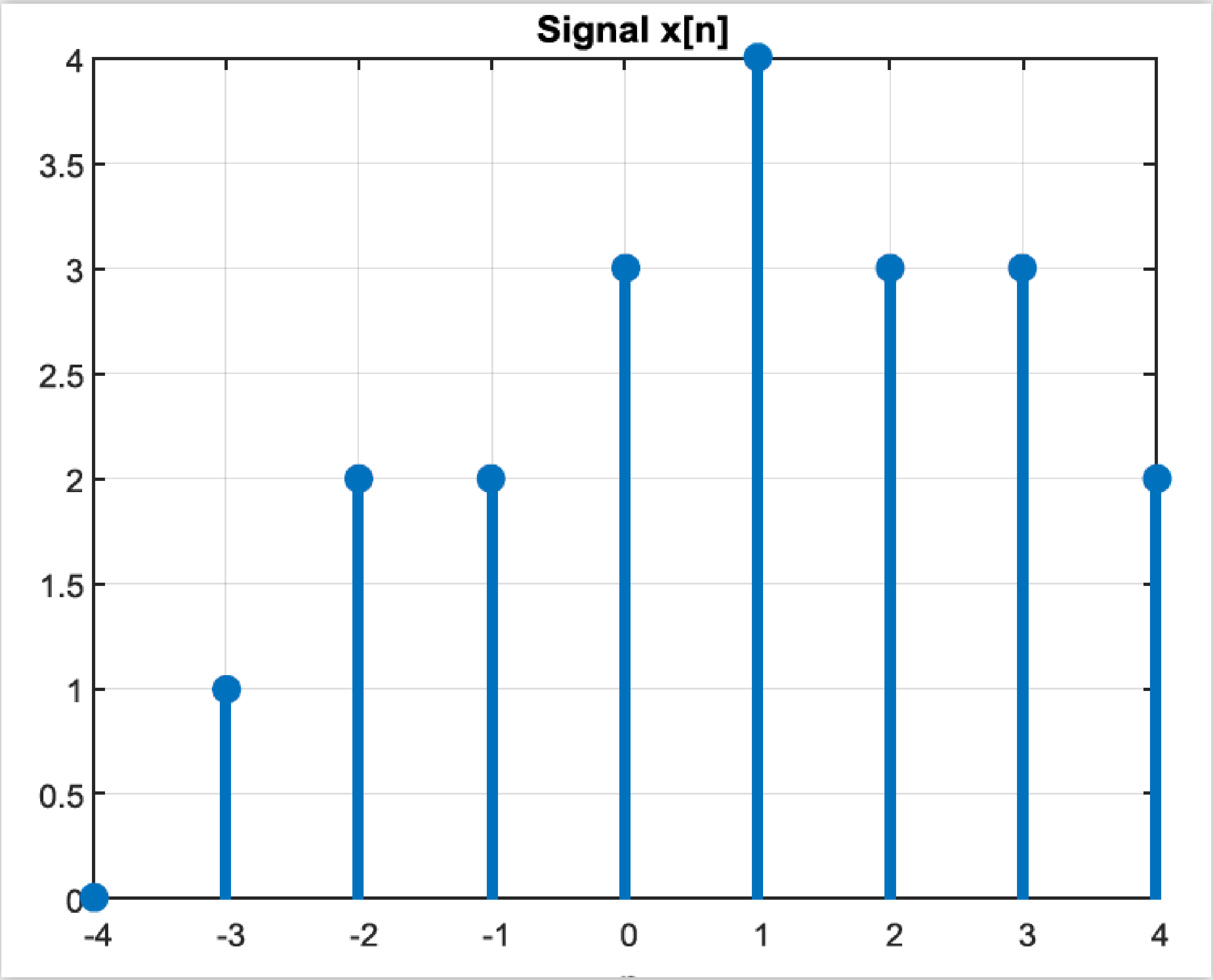
$$x_{TI}(n) = x(-n)$$

- Inverzija diskretnog signala u vremenu postiže se kao refleksija tog signala oko tačke $n=0$, odnosno refleksijom signala oko verikalne ose

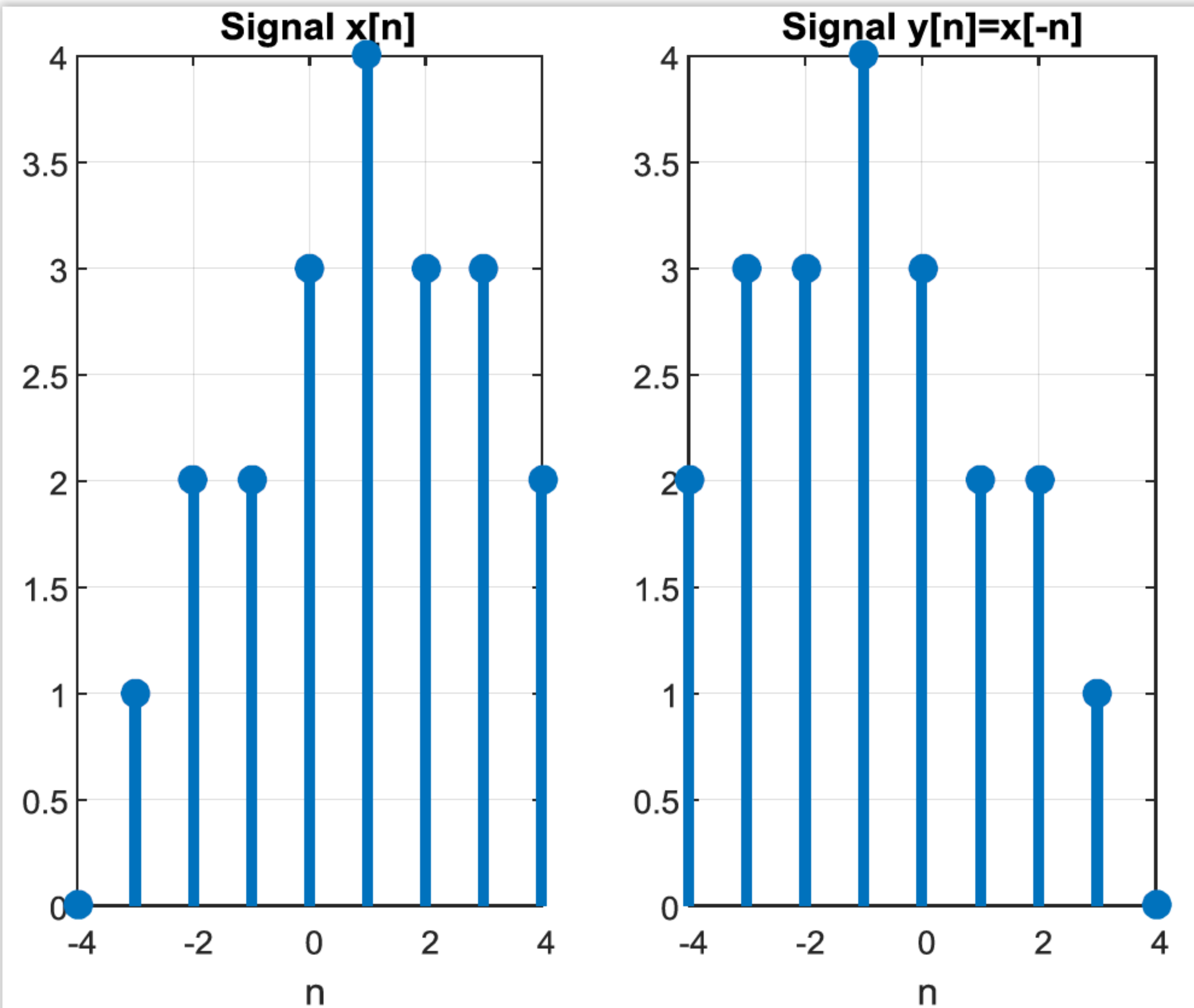
- Analitički, inverzija signala $x(n)$ u vremenu postiže se zamenom nezavisne promenljive n u definicionom izrazu signala $x(n)$ sa nezavisnom promenljivom $-n$



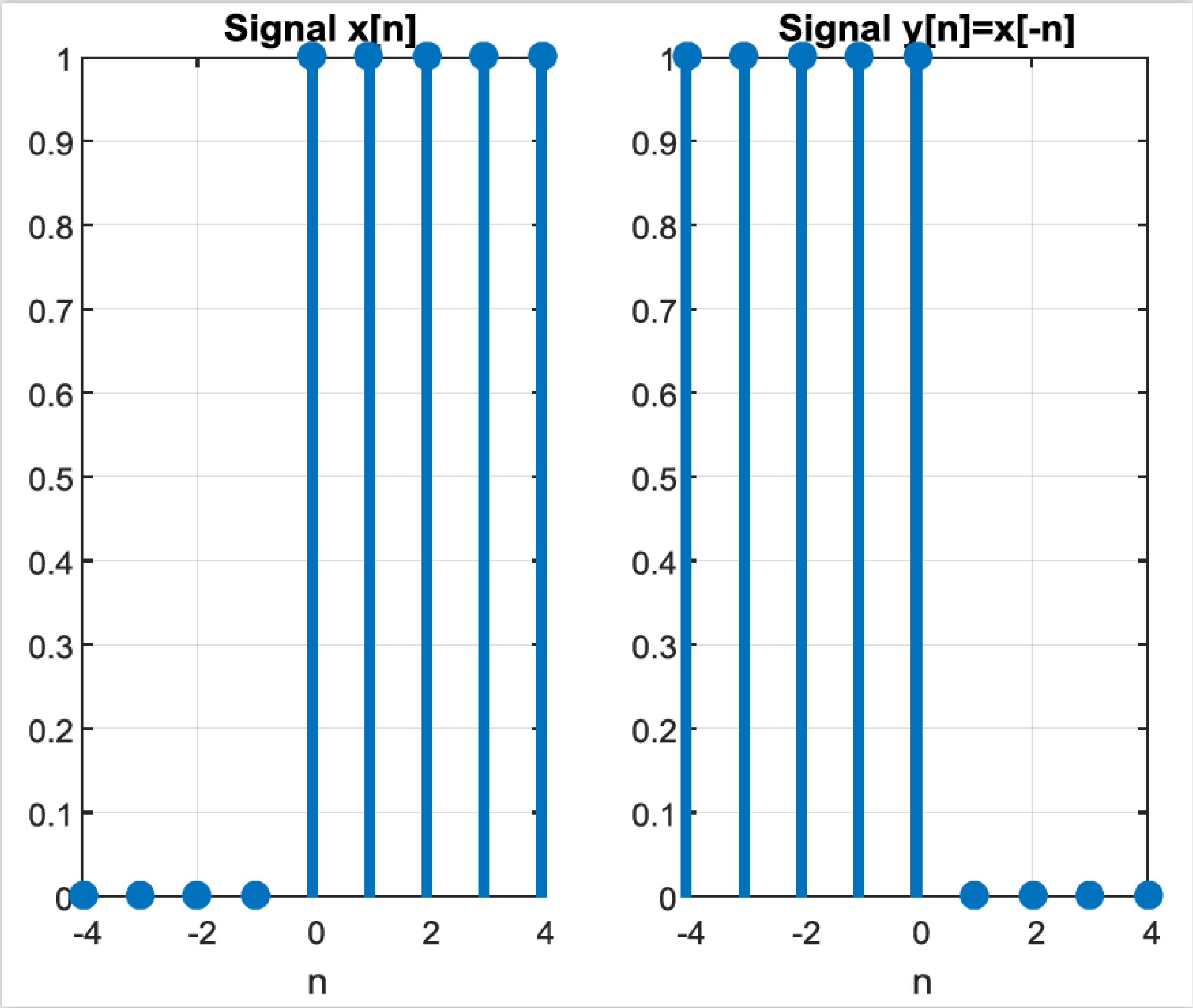
Primer 4. Za dati signal $x[n]$ nacrtati signal $y[n] = x[-n]$



Primer 4. Za dati signal $x[n]$ nacrtati signal $y[n] = x[-n]$



Primer 5. Nacrtati inverziju jedinične odskočne funkcije



Kauzalni, nekauzalni i ko-kauzalni diskretni signali

- Za diskretni signal *x(n)* kažemo da je **kauzalan**, ako važi

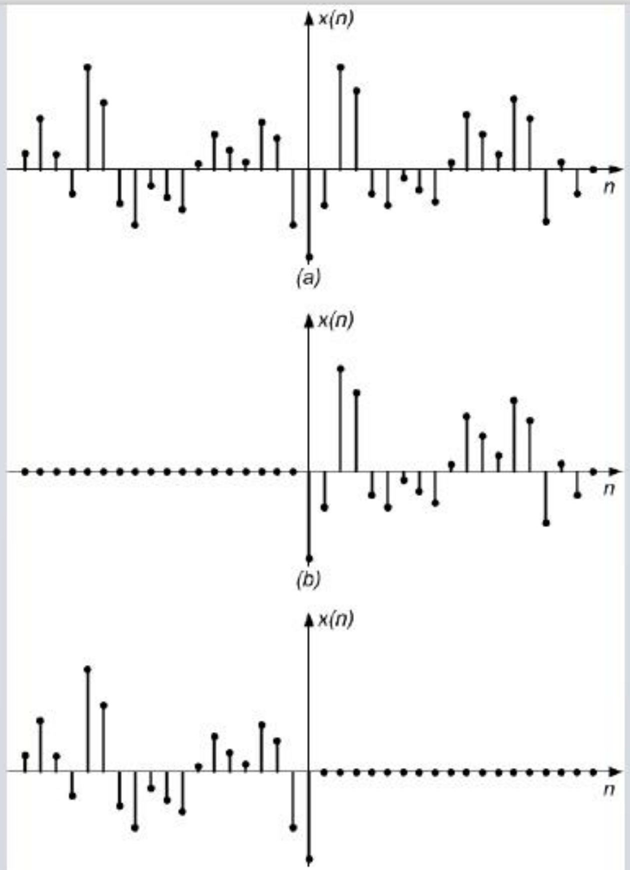
$$x(n)=0, n < 0$$

- Za diskretni signal *x(n)* kažemo da je **nekauzalan**, ako važi

$$x(n)\neq 0, \text{ za neko } n < 0$$

- Za diskretni signal *x(n)* kažemo da je **ko-kauzalan**, ako važi

$$x(n)=0, n > 0$$



Periodični i aperiodični diskretni signali

- Za diskretni signal *x(n)* kažemo da je **periodičan**, ako važi

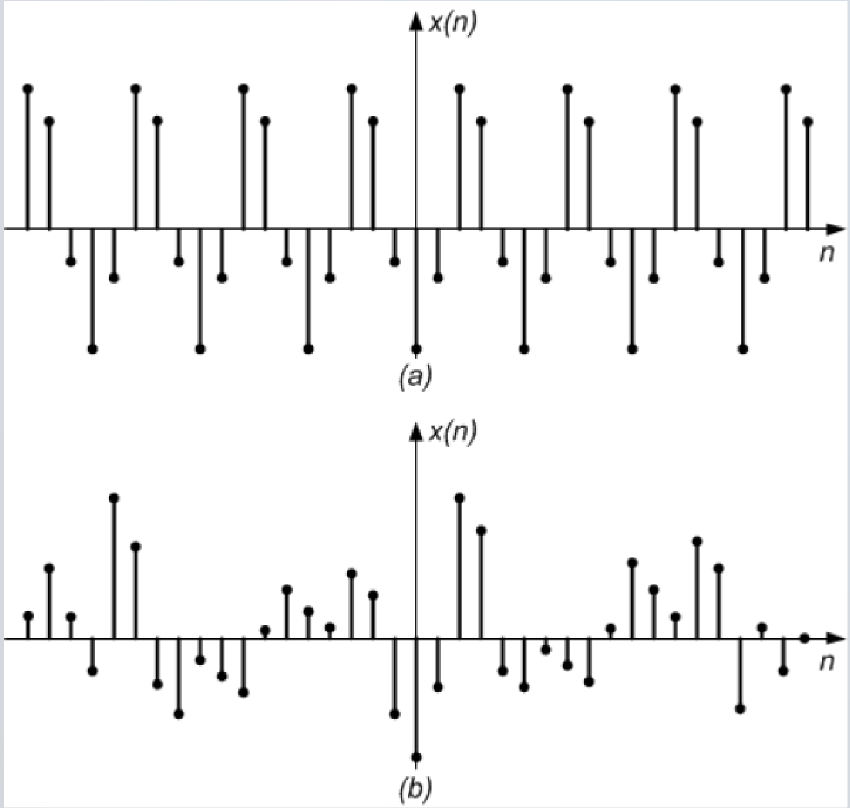
$$x(n)=x(n+N),\ za\ svako\ n$$

- gde *N* predstavlja **periodu** periodičnog diskretnog signala *x(n)*

- Ako je diskretni signal periodičan sa periodom *N*, onda je periodičan i sa periodom $m \cdot N$, $m \in Z$

- Minimalna vrednost *N*, za koju važi uslov periodičnosti prestavlja fundamentalnu periodu diskretnog signala *x(n)*

- Za diskretni signal *x(n)* kažemo da je aperiodičan, ako uslov **periodičnosti** ne važi



Parni i neparni diskretni signali I

- Za diskretni signal $x(n)$ kažemo da je **paran**, ako važi

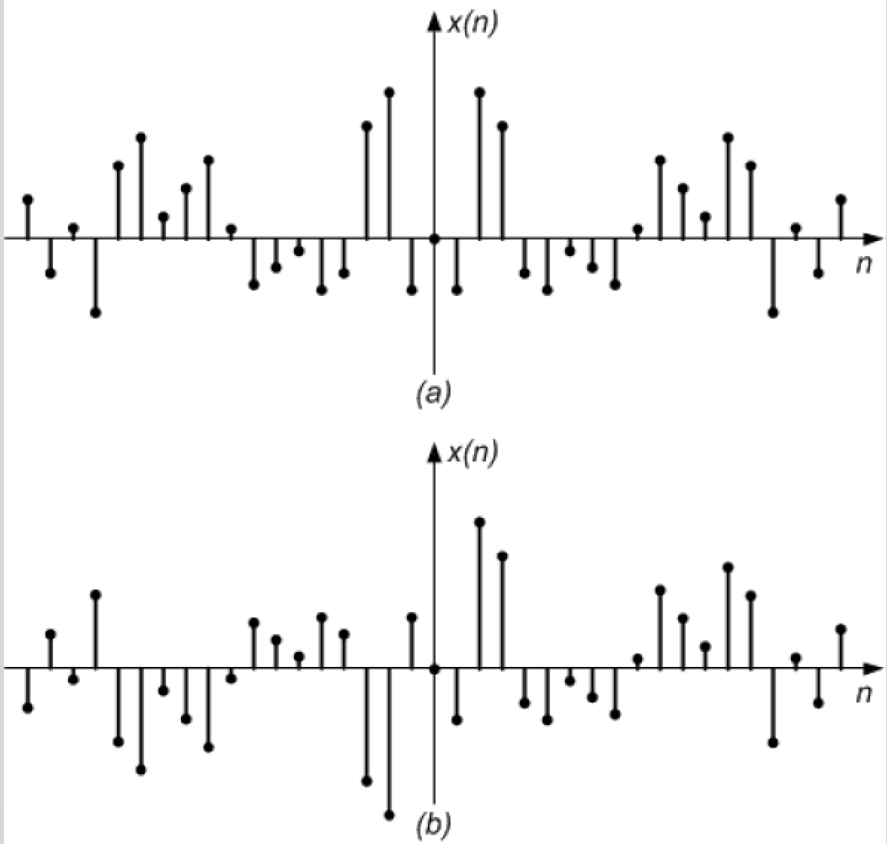
$$x(-n)=x(n), \text{ za svako } n$$

- Prilikom grafičkog prikaza parnog signala, on je simetričan u odnosu na vertikalnu osu, odnosno komponenta signala za $n<0$ predstavlja sliku u ogledalu komponente signala za $n>0$

- Za diskretni signal $x(n)$ kažemo da je **neparan**, ako važi

$$x(-n)=-x(n), \text{ za svako } n$$

- Grafički prikaz neparnog signala je antisimetričan u odnosu na vertikalnu osu



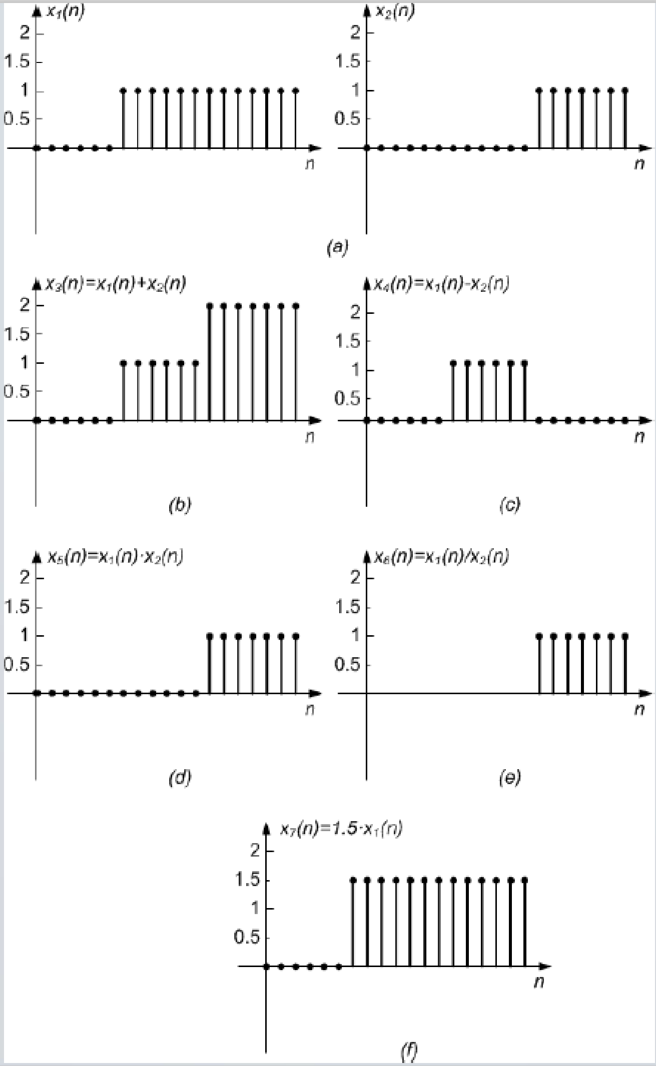
Aritmetičke operacije

- Nad diskretnim signalima moguće je definisati različite aritmetičke operacije

- Bez obzira na izabranu aritmetičku operaciju ona se uvek primenjuje nad pojedinačnim odbircima diskretnih signala

- Najčešće korišćene aritmetičke operacije su

	Operacija
$y(n)=x_1(n)+x_2(n)$	sabiranje signala
$y(n)=x_1(n)-x_2(n)$	oduzimanje signala
$y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$	množenje signala
$y(n)=x_1(n)/x_2(n)$	delenje signala
$y(n)=a\cdot x(n),\ a\in R$	množenje signala realnom konstantom



Simetričnost signala

- Analogno kontinualnim vremenskim signalima, i za diskretne vremenske signale uvode se osobine parnosti i neparnosti.
- Diskretni signal $x[n]$ je paran ako je:

$$x[-n] = x[n]$$

Diskretni signal $x[n]$ je neparan ako je:

$$x[-n] = -x[n]$$

Simetričnost signala

- Kao i u kontinualnom domenu, vaţi da se svaki realni diskretni signal moţe napisati kao zbir svog parnog i neparnog dela, gde se parni deo definiše kao:

$$Ev\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

- Neparni deo signala definiše se kao:

$$Od\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

Parni i neparni diskretni signali II

- Svaki diskretni signal *x(n)* može se predstaviti kao suma odgovarajuće parne i neparne komponente diskretnog signala *x(n)*

$$x(n)=x_p(n)+x_n(n)$$

- gde je sa $x_p(n)$ označen parni signal, a sa $x_n(n)$ neparni signal

- Uzimajući u obzir definicije parnog i neparnog signala, važi sledeće

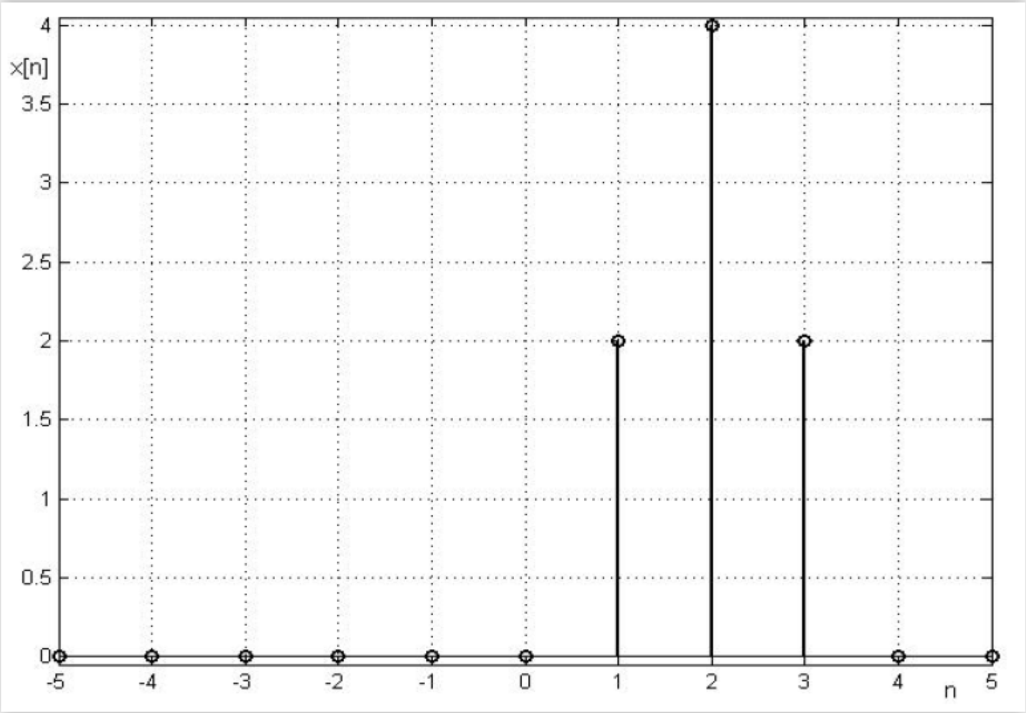
$$x(-n)=x_p(-n)+x_n(-n)=x_p(n)-x_n(n)$$

- Parna i neparna komponenta proizvoljnog signala *x(n)* mogu se odrediti na sledeći način

$$x_p(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x(-n)\right]$$

$$x_n(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x(-n)\right]$$

Primer 6: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala

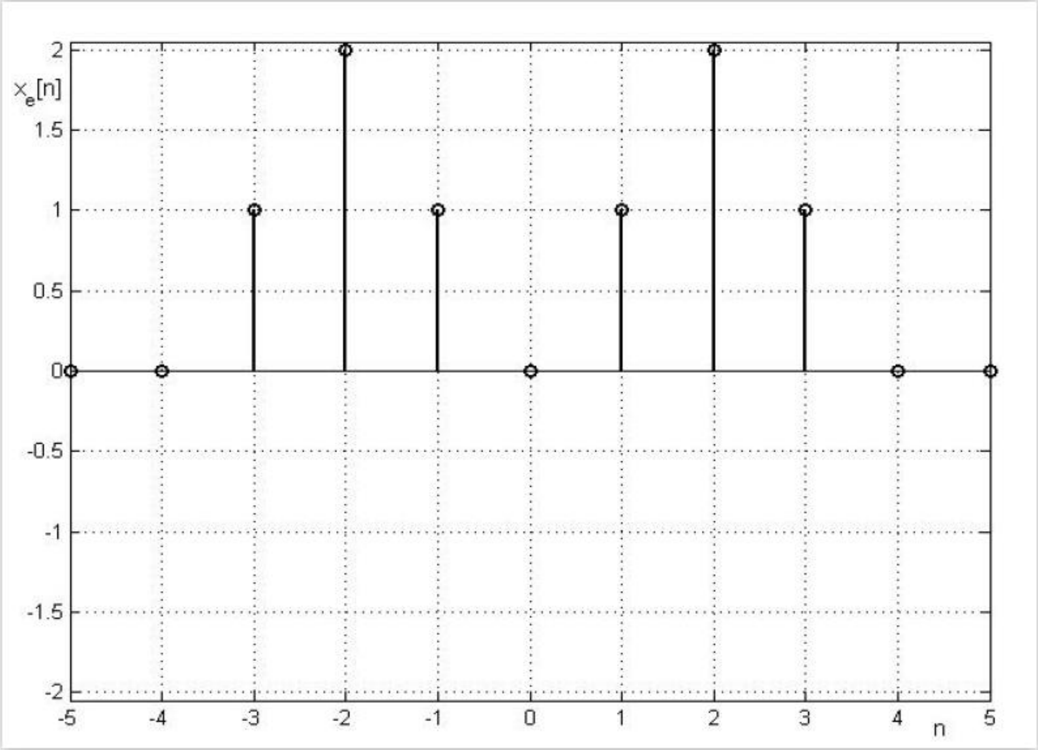


$x[n] = \{\dots,0,0,0,0,[0],2,4,2,0,\dots\},$

$x[-n] = \{\dots,0,2,4,2,[0],0,0,0,0,\dots\}.$

Primer 6: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala

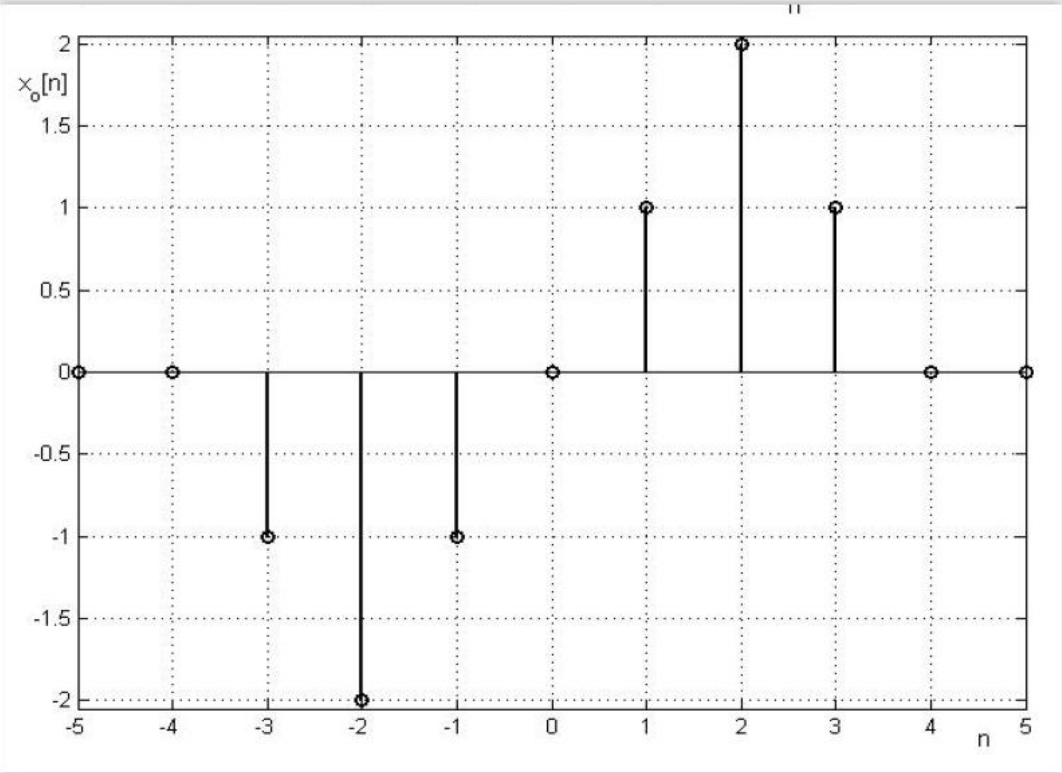
- $x[n]$ = {...,0,0,0,0,[0],2,4,2,0,...},
- x[-n] = {...,0,2,4,2,[0],0,0,0,0,...}
- ***Parna komponenta***
- $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$



- $x_e[n]$={...,0,1,2,1,[0],1,2,1,0,...}

Primer 6: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala

- Neparna komponenta
- **x[n] = {…,0,0,0,0,[0],2,4,2,0,…},**
- **x[-n] = {…,0,2,4,2,[0],0,0,0,0,…}**



$x_o[n] = \frac{1}{2}$ (x[n]- x[-n]); $x_o[n]$={…,0,-1,-2,-1,[0],1,2,1,0,…}

Primer 7:izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala jedinične odskočne funcije

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(u[n] + u[-n])$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(u[n] - u[-n])$$

u[n] = {...,0,0,0,0,[1],1,1,1,1,...},

u[-n] = {...,1,1,1,1,[1],0,0,0,0,...}

Ev{u[n]}= {...,0.5,0.5,0.5,0.5,[1],0.5,0.5,0.5,0.5,...},

Od{u[n]}= {...,-0.5,-0.5,-0.5,-0.5,[0],0.5,0.5,0.5,0.5,...}