P13 **FURIJEOVA ANALIZA**

Signali i sistemi

Furijeova analiza

- Prilikom analize i obrade signala veoma je pogodno predstaviti složeni signal kao linearnu kombinaciju jednostavnijih signala.
- Ovaakav pristup daje bolji uvid u prirodu signala
- Prema osobini linearnosti, obradu složenog signala možemo pojednostaviti obradom jednostavnih signala
- Ideja razlaganja signala na prostoperiodične komponente e (kosinusnog, sinusnog) oblika potiče krajem18. veka
- Francuski matematičar, fizičar i istoričar Furije (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830), prilikom proučavanja oscilacija u fizici, tvrdio da se periodične kontinualne funkcije mogu razložiti na prostoperiodične komponente.

Furijeova analiza

- Rezultate istraživanja je Furije objavio 1822. g.
- Furijeova teorija priznata tek nakon formalnih dokaza koje je realizovao matematičar Dirihle1829. g.
- Furijeova teorija je našla veoma široku primenu u mnogim oblastima nauke:
  - Teorija brojeva
  - Kombinatorika
  - Numerička analiza, statistika, teorija vjerovatnoće
  - Kriptografija, optika, akustika, okeanografiji
  - Posebno u analizi i obradi signala.

Furijeova analiza

- Ispitivanje linearnih, dinamičkih sistema u vremenskom domenu se vrši na bazi analize realnih, direktno ili indirektno merljivih fizički realnih signala.
- Za analizu sistema u širokom opsegu rada potrebno je izvršiti dugotrajnu simulaciju sistema uz česta ponavljanja
- U nekim slučajevima je celishodno izvršiti takve funkcionalne transformacije koje polazne relacije između ulaza i izlaza zapisane u formi diferencijalnih jednačina transformišu u algebarske forme

Furijeova analiza

- Za ovu namenu veoma su povoljne frekventne transformacije
- U tehničkoj praksi teorijsku osnovu za frekventnu analizu i frekventne transformacije daje Furijeova transformacija.
- Osnovna ideja Furijeove transformacije zasniva se na činjenici da se svaka vremenska funkcija može predstaviti kao zbir harmoničnih funkcija različitih frekvencija, amplituda i faza.

Furijeova analiza

- Furijeova transformacija je jednoznačna
- Dobijaju se isti rezultati ako se analiza funkcije vrši na originalu ili na zbiru svih pripadajućih harmoničnih funkcija.
- Interesovanje za frekventnu analizu bitno je poraslo pojavom brze Furijeove transformacije (FFT) i brzih tzv. "signal„ procesora.

Furijeova analiza

- Predstavljanje signala u frekvencijskom domenu omogućava interpretaciju mnogih osobina signala koje se ne mogu sagledati u vremenskom domenu.

Opšti termin *Furijeova analiza* se odnosi na obradu:

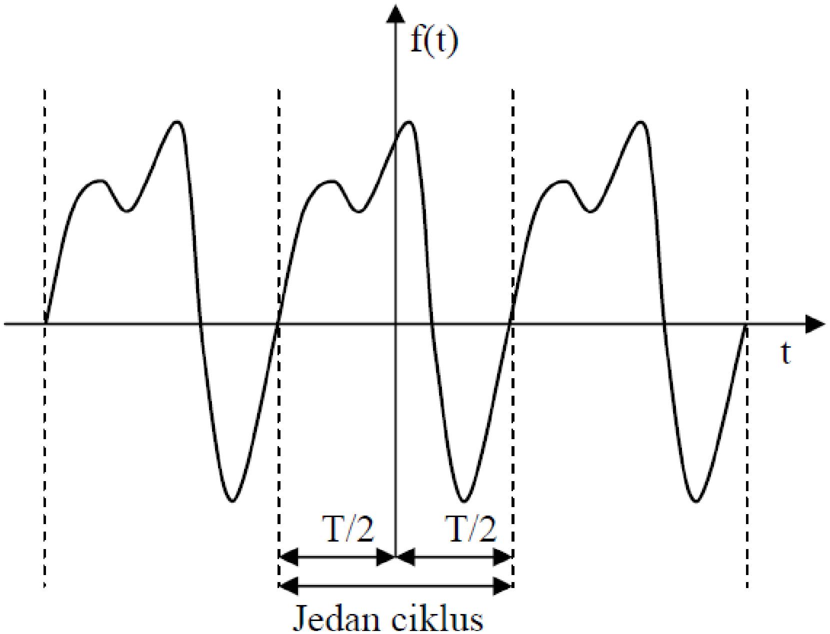
1. Kontinualnih i periodičnih signala (*Furijeov red*)
2. Kontinualnih i aperiodiĉnih signala (*Furijeova transformacija*)
3. Diskretnih signala (*Diskretna Furijeova transformacija*)

Furijeov red

- Svaka funkcija ***f(t,T)*** koja je neprekidna, diferencijabilna, ograničena i periodična u konačnom intervalu se može zapisati u vidu Furijeovog reda
- Furijeov red predstavlja zbir harmoničnih, sinusnih i kosinusnih oscilacija
- Promene harmonične funkcije određuju maksimum amplitude, kružna

učestanost ili perioda i početna faza.

- $\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}$

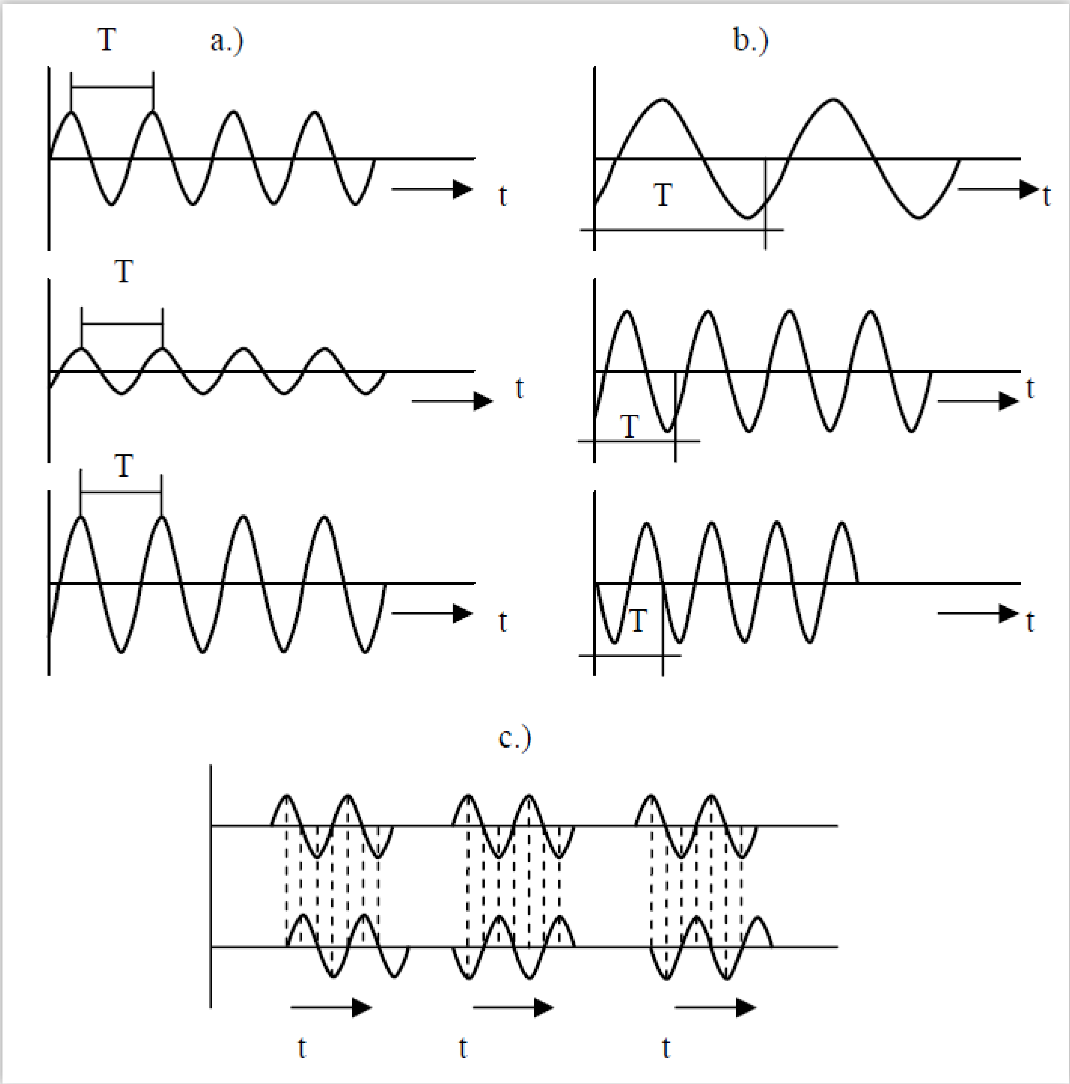


Periodična funkcija

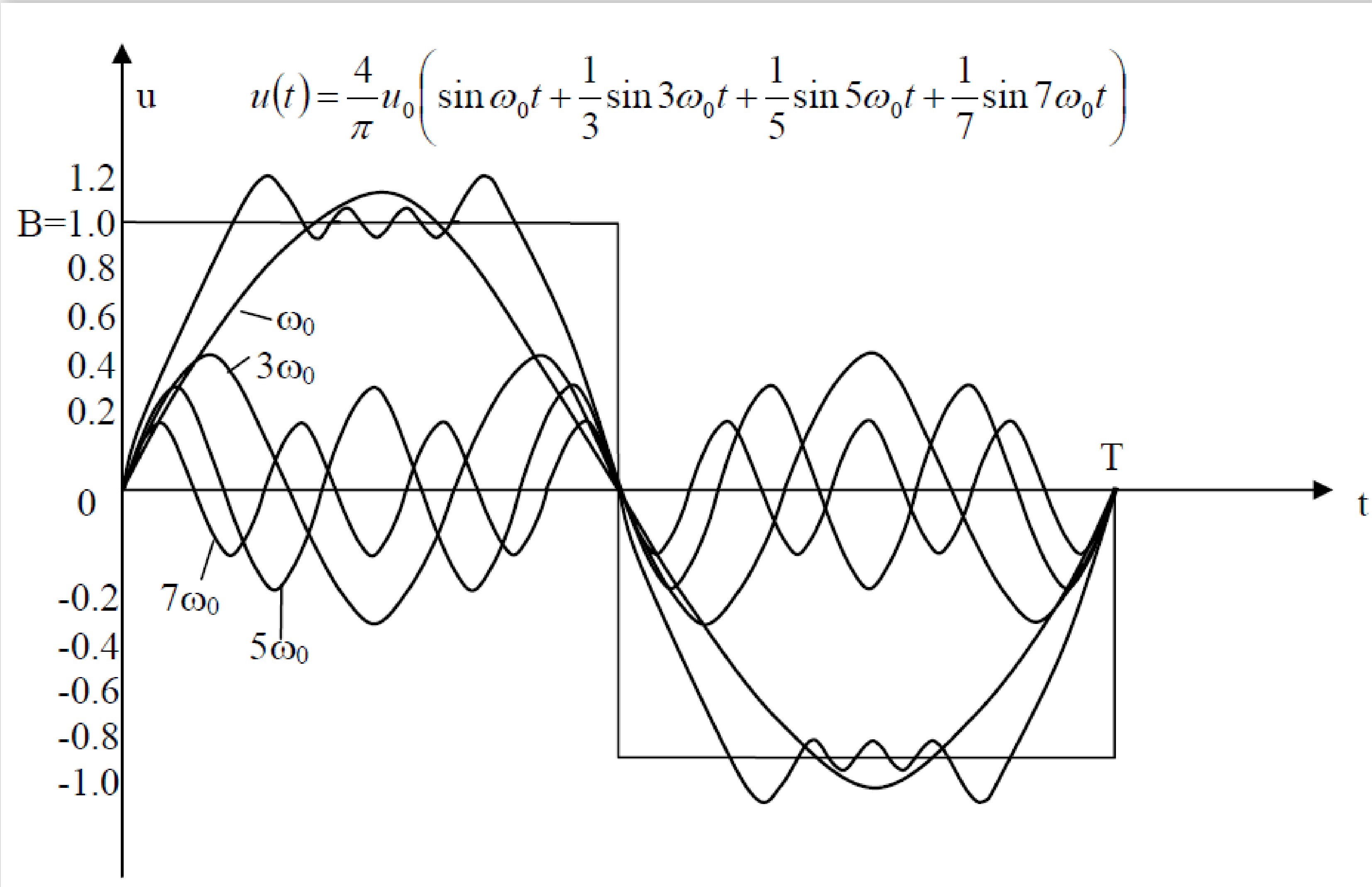
Furijeov red

- Furijeov red je idealna transformacija za signale koji izražavaju periodično ponašanje;
- Signal može sadržati složene obrasce koji se ponavljaju, a zapravo se sastojati od nekoliko sinusoida;
- Takav signal može biti opisan sa samo nekoliko parametara u frekvencijskom domenu.

Harmonične funkcije sa različitim a) amplitudama b) periodama c) početnim fazama



Članovi Furijeovog reda pravougaone periodične funkcije



Periodični signali i Furijeov red

- Kontinualni signal $x(t)$ je periodičan ukoliko zadovoljava sledeću relaciju:

$$x(t+T) = x(t)$$

za periodu T i za sve vrednosti vremenske promenljive t.

- Primer periodičnog signala je realna sinusoida gde je A realna konstanta i $\omega_0>0$,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

- ili kompleksna sinusoida gde je A kompleksni broj.

$$x(t) = A e^{j\omega_0 t}$$

- Oba ova signala su periodična sa periodom $T=2\pi/\omega_0$

Periodični signali i Furijeov red

- Periodični signal kompleksne sinusoide dat je kao:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

- Veoma često se u literaturi sreće takozvani harmonični signal definisan sledećom relacijom

$$x_k(t) = Ae^{jk\omega_0 t};$$

k - element skupa celih brojeva.

- Signal ima periodu $\mathbf{T=2\pi/|k|\,\omega_0}$

Furijeov red

- Svaki periodični signal može secpredstaviti harmoničnim ili trigonometrijskim redom u formi sa kompleksnim koeficijentima $\boldsymbol{a_k}$:
- Furijeov red za periodičnu funkciju x(t)

$$\boldsymbol{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}}$$

- Signali $\boldsymbol{a_k e^{jk\omega_0 t}}$se nazivaju harmonijske komponente signala ili harmonici,
- Razvoj signala u Furijeov red je harmonijska analiza
- Osnovni ili prvi harmonici su komponente $\boldsymbol{a_{\pm 1} e^{\pm j\omega_0 t}}$
- $\boldsymbol{a_0}$ predstavlja jednosmernu komponenta i predstavlja srednju vrednost signala.

Furijeov red

- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$
- Komponente ovog reda koje se dobijaju za **k=±1** se nazivaju osnovnim ili fundamentalnim komponentama reda
- Sabirci $|\mathbf{k}| \geq \mathbf{2}$ su harmonici višeg reda
- Perioda osnovne komponente ceo multipl periode *k*-tog harmonika, trigonometrijski red ima periodu
- $\mathbf{T} = \dfrac{2\pi}{|\mathbf{k}| \, \omega_0}$

Furijeov red

- Ovakav zapis signala nazivamo razvojem signala u Furijeov red (Fourier Series – FS).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

- Koedicijenti Furijeovog reda a_k računaju se prema formuli:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Prethodne dve relcije čine takozvani *Fourier-ov* transformacioni par za kontinualne periodične signale.

Furijeov red

- Prezentacija periodičnog signala trigonometrijskim redom:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(k\ \omega_0 t)+ b_k sin(k\ \omega_0 t))$$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

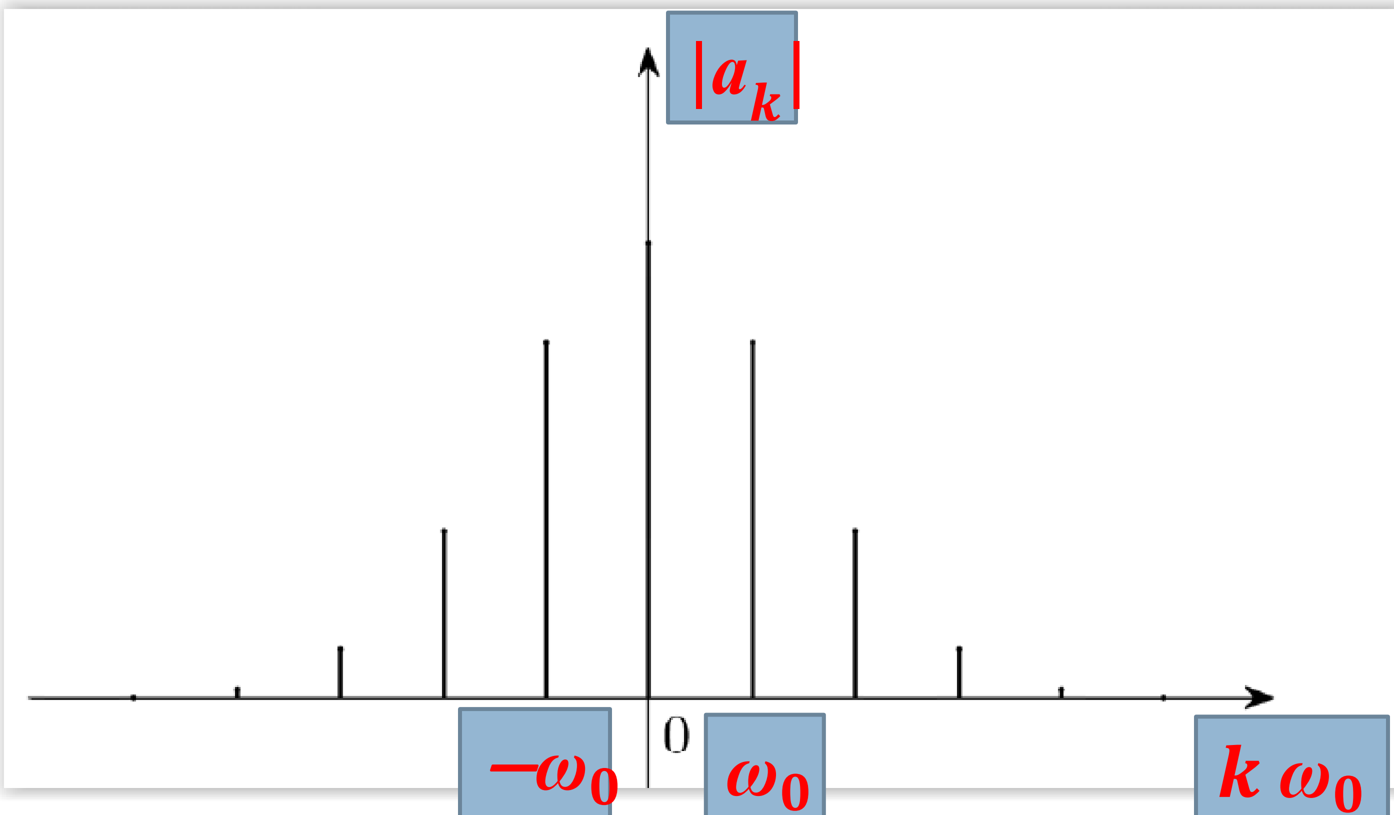
- a_k, b_k i c_k su Furijeovi koeficijenti
- $a_0=\frac{1}{T}\int_T\ x(t)$dt
- Za predstavljanje periodičnog signala kao suma prostoperiodičnih komponenata, potrebno je prvo odrediti Furijeove koeficijente:
- $a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\ cos(k\ \omega_0 t)dt$
- $b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\ sin(k\ \omega_0 t)dt,\ k=0,\ 1,2,...$

Periodični signali i Furijeov red

- $\boldsymbol{c_k} = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}$, $\boldsymbol{\theta_k}$=atctg($\frac{-b_k}{\boldsymbol{a_k}}$)
- Koeficijent c_k predstavlja amplitudu k-tog harmonika signala $x(t)$, dok je $\boldsymbol{\theta_k}$ njegovu fazu.
- Signal je u frekvencijskom domenu predstavljen preko svog *spektra*.
- *Amplitudski spektar* signala obrazuju amplitude, a *fazni spektar* signala faze harmonika.
- Spektri periodiĉnih signala su definisani samo za diskretne vrednosti uĉestanosti.
- Ovakvi spektri se nazivaju linijski ili diskretnii.

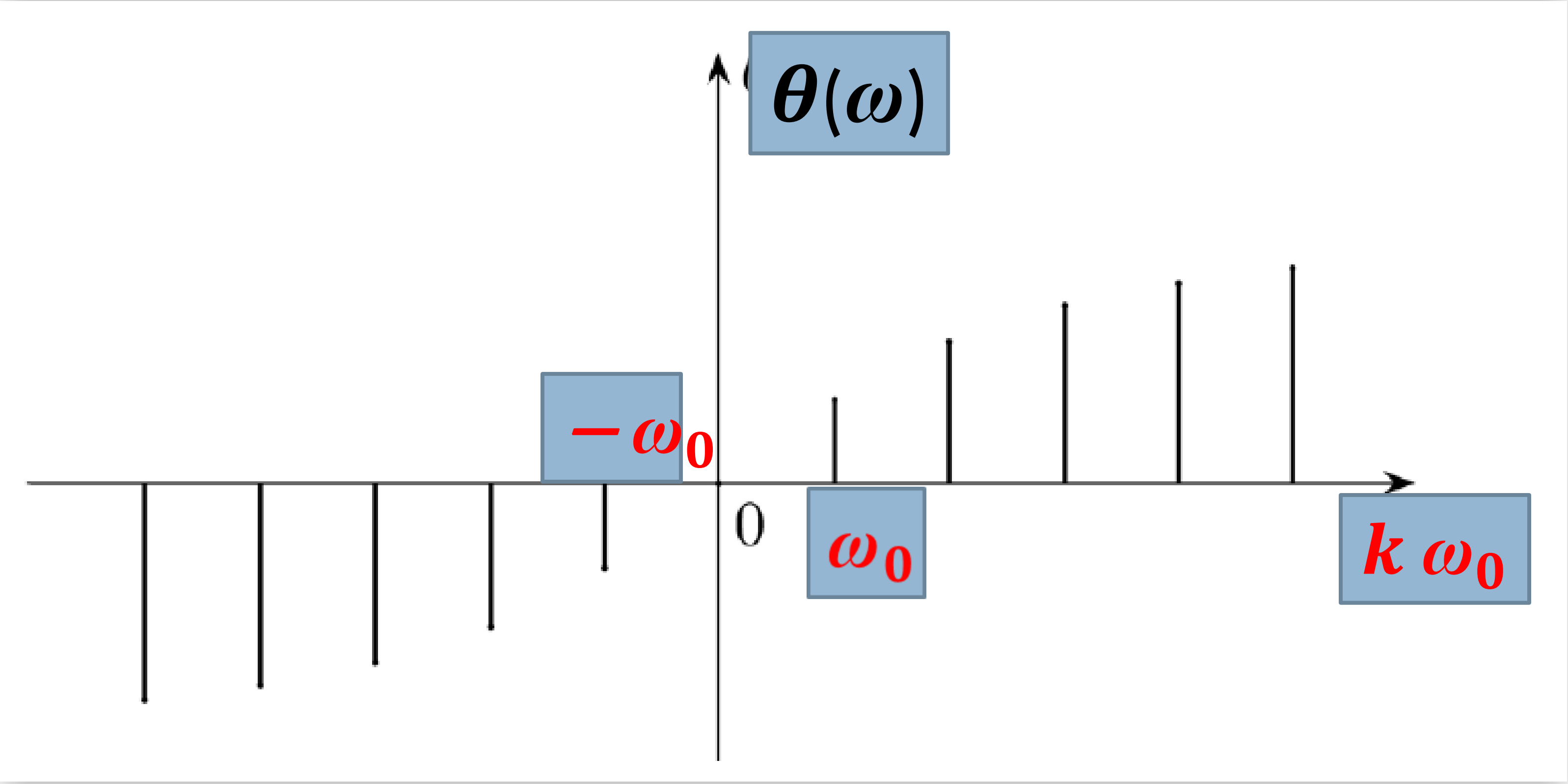
Spektar periodičnih signala

- Spektar periodičnih signala je linijski (diskretan) jer je definisan samo u diskretnim tačkama ω frekvencijske ose
- Moduli koeficijenata a_k predstavljaju amplitudni spektar signala

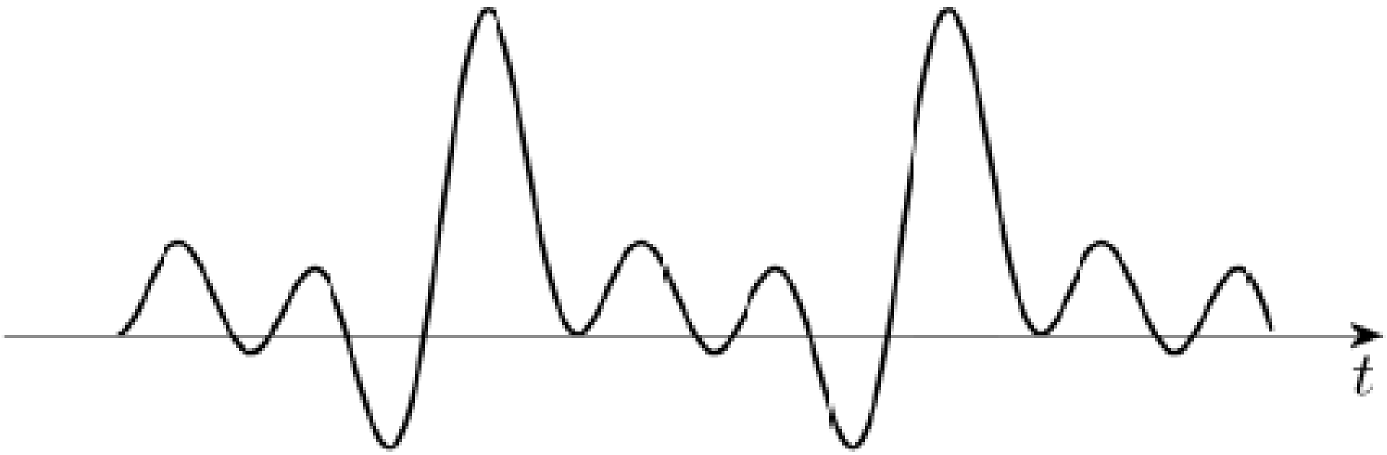


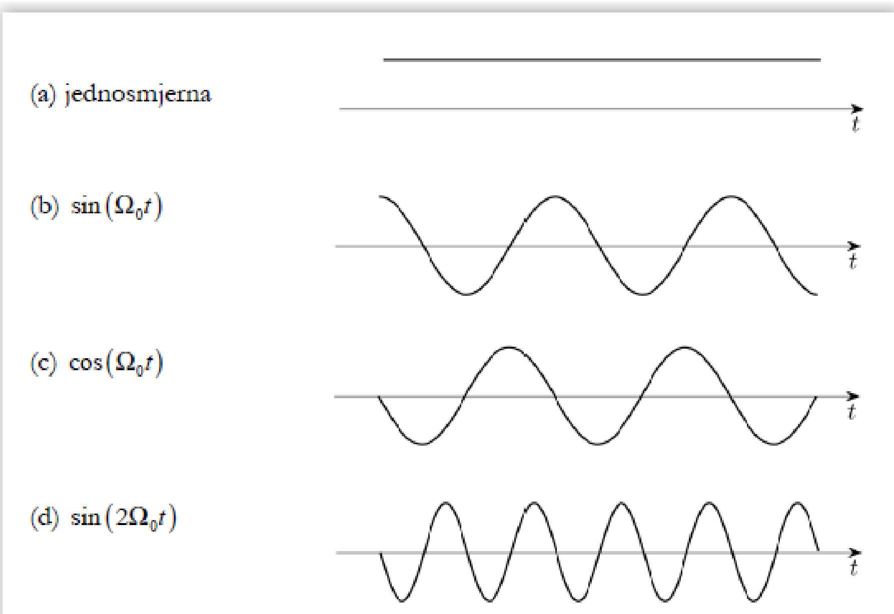
Spektar periodičnih signala

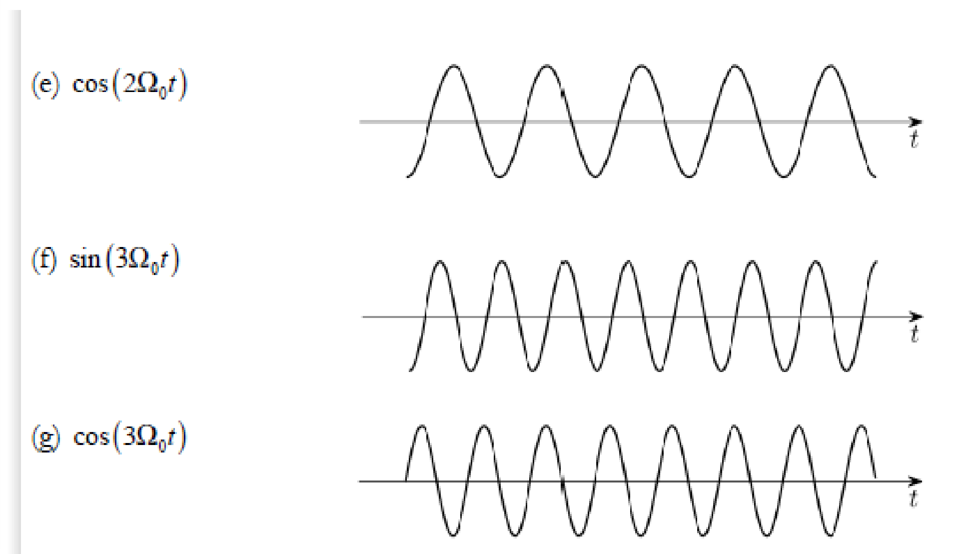
- Argument koeficijenta Furijeovog reda θ_k naziva se fazni spektar signala



Prikaz signala preko linearne kombinacije prostoperiodičnih funcija

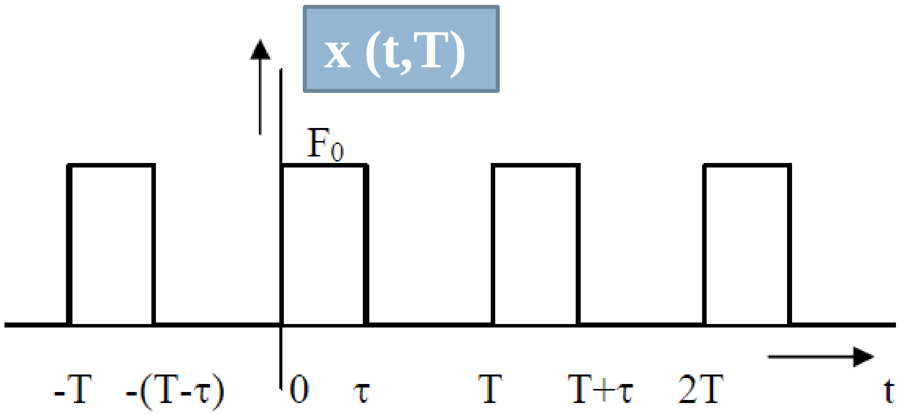






Furijeov integral

- Furijeov red po definiciji može se odrediti samo za periodične funkcije x(t,T).
- Funciju sa slike čini povorka impulsa trajanja τ.
- Ova funkcija se može predstaviti Furijeovim redom.



- Ako se poveća perioda T (a da pri tom trajanje impulsa τ ostaje isto), razmak između impulsa u povorci će biti sve veći.
- Za T→∞ od povorke će nastati samo jedan impuls tj. neperiodična funkcija.

Furijeov integral

- Na osnovu ove logike može se reći da se svaka neperiodična funkcija može predstaviti kao periodična funkcija sa beskonačnim trajanjem (periodom).
- Pomoću Furijeovog integrala predstavlja se neperiodična funkcija ***x(t)*** preko zbira beskonačno mnogo harmonijskih oscilacija, kontinualno promenljive učestalosti $\boldsymbol{\omega}$
- Kada T→ ∞ $zbir\ u\ izrazu\ za\ Furijeov\ red\ postaje$ *integral*
- $\mathbf{x(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X(j\omega)e^{j\omega t}}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$

gde je $\boldsymbol{X(j\omega)}= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x(t)e^{-j\omega t}}\mathbf{dt}$

Furijeova transformacija

- Furijeov integral predstavlja razvoj funkcije ***x(t)*** u kontinualnom spektru učestalosti, pri čemu ovde učestalosti ***ω*** odgovara gustina spektra,
- Kompleksni spektar $X(j\omega)$ predstavlja Furijeovu transformaciju (FT) funcije x(t) i označava se kao $\mathcal{F}$(x(t))

$$\boldsymbol{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{dt}}$$

- Za formiiranje FTmora biti zadovljen uslov:

$$\int_{0}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

- Amplitudnni spektar |X(j**ω**)| aperiodične funcije je neprekidna funcija
- Vrednost dobijena iz proizvoda $|X(j\boldsymbol{\omega})|^2 \Delta\omega$ je srazmerna energiji komponenti signala smeštenih u intervalu Δ ω

Furijeova transformacija

- Vremenska funcija x(t) može se predstaviti Furijeovom funcijom X(jω) relane promenjive ω

$$X(j\omega)= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathbf{dt}$$

- Kompleksna funcija X(jω) može se razložiti na realnu i imaginarnu komponentu
- $X(j\omega)= A(\omega)+\mathrm{j}\ \mathrm{B}(\omega)= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathbf{dt}$
- $X(j\omega)= A(\omega)+\mathrm{j}\ \mathrm{B}(\omega)= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(cos(\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}+\mathrm{j}\ sin(\omega \mathrm{t}))\mathrm{dt}$
- **Realna komponenta:** $A(\omega)= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}$
- **Imaginarna komponenta:** $\mathrm{B}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ sin(\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}$

Primena Furijeove transformacije

- Kompleksni spektar X(jω) može se odrediti i svojom amplitudnom vrednošću i fazom:
- $X(j\omega) = \mathrm{K}\ (\omega)\ e^{j\varphi(\omega)}$
- $A(\omega) = \mathrm{K}\ (\omega)\cos\varphi(\omega)$
- $B(\omega) = \mathrm{K}\ (\omega)\sin\varphi(\omega)$
- $\mathrm{K}\ (\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$
- $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$

Aperiodični signali i Furijeova transformacija

- Furijeova transformacija je generalizacija za neperiodične funkcije.
- Frekvencijska reprezentacija signala je dobijena integracijom signala kroz vremenski domen
- Za aperiodični signal $x(t)$, Furijeova transformacija ovog signala data je izrazom:

$$\boldsymbol{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x(t)e^{-j\omega t}}\,\mathbf{dt}$$

Inverzna Furijeova transformacija

- Vremenski oblik signala je dobijen integracijom po frekvenciji predstavlja Inverznu Furijeovu transformaciju:

$$\boldsymbol{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega}$$

$$\boldsymbol{X(j\omega)} = |\mathbf{X}\ (\boldsymbol{j\omega})|\ \boldsymbol{e^{-j\varphi(\omega)}}$$

- $\boldsymbol{X(j\omega)}$ predstavlja *kompleksni spektar*
- Signal $x(t)$ i funkcija $X(j\boldsymbol{\omega})$ se nazivaju *Fourier*-ov transformacioni par.
- Moduo $|\mathbf{X}\ (\boldsymbol{j\omega})|$ kompleksnog spektra predstavlja spektralnu gustinu amplituda
- Argument $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ kompleksnog spektra predstavlja spektralnu gustinu faza signala $x(t)$

Primena Furijeove transformacije – Energija signala

- Funkcija f(t) kod realnih sistema je uvek neka fizička veličina (sila, pomeraj, napon, pritisak, itd)
- Integral kvadrata ove funkcije je uvek na neki način srazmeran energiji signala.
- Energija signala ***f(t)*** je određena integralom:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$$

- U slučaju da su ispunjeni uslovi konvergencije, energija se može odrediti i na osnovu spektra

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} K^2(\omega)d\omega$$

- Funkcija $K^2(\omega)$ je funkcija energije spektra realne funkcije f(t)

Diskretna Furijeova transformacija (DFT)

- Izračunavanje Furijeove transformacije diskretnih signala predstavlja sumu beskonačnog broja članova.
- Za praktično izračunavanje na digitalnom računaru obično se koristi tzv. Diskretna Furijeova transformacija (DFT) koja se dobija diskretizacijom Furijeove transformacije.
- Primena Diskretne Furijeove transformacije u digitalnoj obradi signala je velika.
- DFT se koristi t u spektralnoj analizi signala.
- DFT omogućava efikasno izvođenje filtriranja u frekvencijskom domenu.
- Značaj DFT u digitalnoj obradi signala potiče od toga što postoje veoma efikasni algoritmi za izračunavanje DFT.

Diskretna Furijeova transformacija (DFT)

- Svaki diskretni signal se može predstaviti kao linearna kombinacija nekih baričnih signala.
- Najjednostavniji bazični signali su vremenski pomereni jedinični impulsi
- Svaki signal može predstaviti kao suma skaliranih jediničnih impulsa (linearna kombinacija):

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m].$$

Diskretna Furijeova transformacija (DFT)

- Bazični signali ne moraju nužno da budu jedinični impulsi.
- Sve dok je moguće signal zapisati kao linearnu kombinaciju nekih drugih signala, ti drugi signali se mogu smatrati bazičnim signalima.
- Ako je signal periodičan, onda se on može predstaviti linearnom kombinacijom konačnog broja kompleksnih sinusoida
- Njihove relativne učestanosti su celobrojni umnožak osnovne relativne učestanosti periodičnog signala.
- Broj kompleksnih sinusoida odgovara broju odbiraka u jednoj periodi signala, kao u sledećem izrazu

Diskretni Furijeov red

- Broj kompleksnih sinusoida odgovara broju odbiraka u jednoj periodi signala, kao u sledećem izrazu

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n},$$

gde je $\Omega = 2\pi k/N$

Diskretni Furijeov red (*Discrete Time Fourier Series – DTFS*) ima oblik

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}.$$

Definicija diskretne Furijeove transformacije

- U digitalnoj obradi signala, signal beskonačnog ili veoma velikog trajanja se na ulazu u digitalni sistem za frekvencijsku analizu deli na signale konačnog trajanja
- Svaki od pojedinačnih delova signala se analizira nezavisno.
- Odsecanjem delova signala koji je možda i bio periodičan, kreiraju se aperiodični signali
- Zbog toga je neophodno korišćenje Furijeove transformacije za frevencijsku analizu.

Definicija diskretne Furijeove transformacije

- Mogu se izračunati Furijeove transformacije signala samo na nekim relativnim učestanostima i taj ograničen broj odbiraka Furijeove transformacije smestiti u memoriju.
- Iz tih odbiraka mogu da se dobiju zaključci tokom analize signala.
- Diskretna Furijeova transformacija (*Discrete Fourier Transform* - *DFT*) nije ništa drugo do Furijeova transformacija izračunata u onoliko ekvidistantnih tačaka koliko je i odbiraka diskretnog signala..

Diskretna Furijeova transformacija (DFT)

- Spektar diskretnog signala x[n] može se predstaviti kao:
- $\boldsymbol{X(\Omega)=X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}}$; $\Omega = 2\pi k/N$
- Spektar $X(e^{j\Omega})$ je periodična funcija učestanosti sa periodom 2π
- Diskretizacijom spektra na osnovnom opsegu (0, 2π) sa N odbiraka sa frekventnim razmakom ΔΩ= 2π/N dobija se **DFT** :

$$X(\frac{2\pi}{N}\boldsymbol{k})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi kn/N}$$

- $k=0,1,2,...,N-1$

DISKRETNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA KONAČNE SEKVENCE

- DFT koja transformiše senvencu $x[n]$ konačne dužine u spektralno domenu $\mathrm{X}\,[k]$ naziva se *Diskretna Furijeova transformacija sekvence* $x[n]$
- $X[k]=X\left[\frac{2\pi}{N}k\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j2\pi kn/N}$
- $k=0,1,2,...,N\text{-}1$

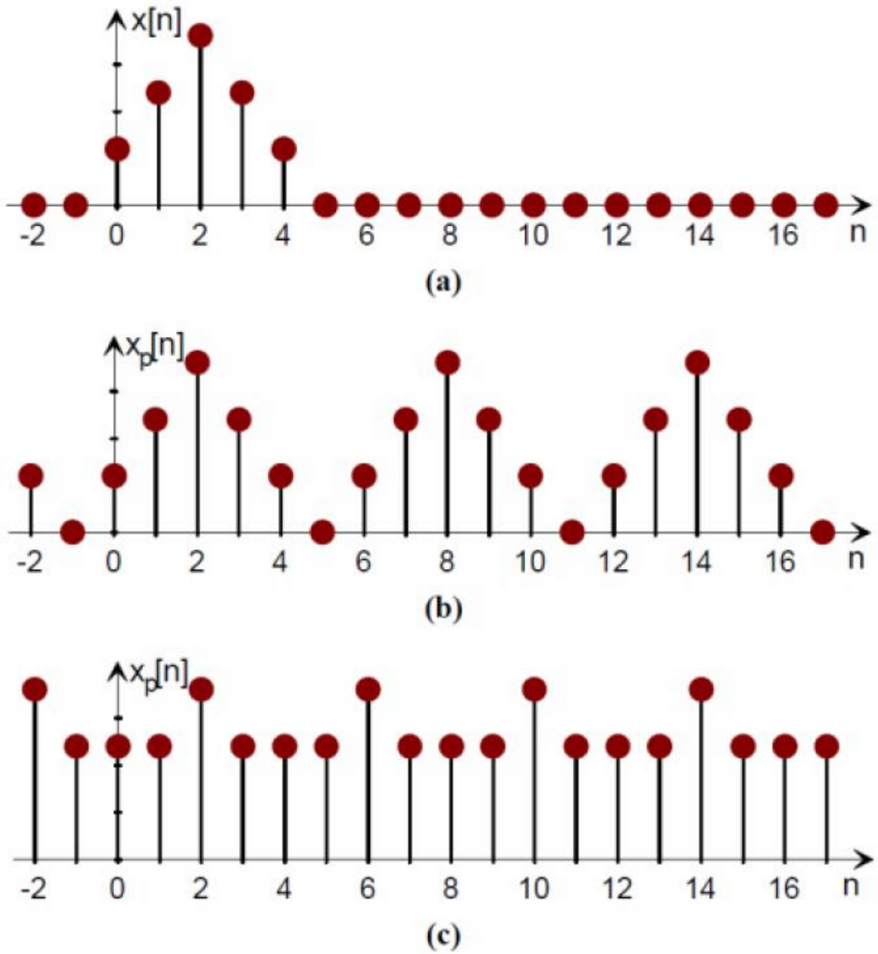
Inverzna Diskretna Furijeova transformacija

- Inverzna Diskretna Furijeova transformacija ima oblik
- $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X\left[\frac{2\pi}{N} k\right] e^{j2\pi kn/N}$

$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

- Moguće je rekonstruisati periodičnu sekvencu i njen spektar iz ekvidistantnih odbiraka u spektralnom domenu

Periodično produženje konačne sekvence



Periodično produženje konačne sekvence: (a) originalna sekvenca, $L = 5$, (b) produženje bez preklapanja, $L < N = 6$, (c) produženje sa preklapanjem, $L > N = 4$.

DISKRETNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

- Broj elemenata u jednoj periodi N može biti i veći od dužine orginalne sekvence $x[n]$
- Da bi se dobio povećani broj tačaka u spektru, orginalna sekvenca se može dopuniti (eng. zero padding)
- Ako je sekvenca nekauzalna, može se periodično produžiti kao i kauzalna sekvenca