P12 DIFERENCNE JEDNAČINE DISKRETNIH SISTEMA

Signali i sistemi

Diskretni sistemi

- Diskretni sistem se matematički definiše kao transformacija ili operator ***T*** koji mapira ulazni diskretni signal *x(n)* u izlazni diskretni signal *y(n)*

$$\boldsymbol{y(n) = T\,\{x(n)\}}$$

- Diskretni sistem najčešće predstavlja neki numerički algoritam koji obrađuje ulaznu sekvencu brojeva konačne dužine i generiše odgovarajuću izlaznu sekvencu brojeva
- Trenutna vrednost izlaznog diskretnog signala ***y(n)*** u opštem slučaju može zavisiti od svih ili samo dela vrednosti ulaznog diskretnog signala ***x(n)***

Diskretni sistemi

- Diskretni sistem kod koga trenutna vrednost izlaznog signala zavisi ne samo od trenutne vrednosti ulaznog signala, već i od prethodnih i/ili budućih vrednosti ulaznog signala predstavlja **diskretni sistem sa memorijom**
- Diskretni sistem sa memorijom mogao bi biti sistem kod koga se izlazni signal generiše koristeći sledeću transformaciju

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + x(n+2)$$

- **Diskretni sistem bez memorije** je sistem kod kojega trenutna vrednost izlaznog signala zavisi samo od trenutne vrednosti ulaznog signala

Kauzalni i nekauzalni sistemi

- Diskretni sistem je **kauzalan** ako tekuća vrednost izlaznog signala ne zavisi od budućih vrednosti ulaznog signala, odnosno $y(n_0)$ se određuje samo na osnovu vrednosti $x(n)$ za koje važi $n \leq n_0$
- Ukoliko tekuća vrednosti izlaza nekog sistema zavisi i od budućih vrednosti ulaznog signala, za takav sistem kazemo da je **nekauzalan**
- Kauzalni sistem ima važnu osobinu:

Ako je $x(n)=0$ za $n< n_0$, tada je i $y(n)=0$ za $n< n_0$

- Kauzalni sistem ne može generisati izlazni signal pre nego što mu se dovede ulazni signal

Kauzalni i nekauzalni sistemi

- Primer kauzalnog sistema opisan je relacijom ulaz-izlaz:

$$y(n)=\frac{1}{3}\left[x(n)+x(n-1)+x(n-2)\right]$$

- Primer nekauzalnog sistema opisan je relacijom ulaz-izlaz:

$$y(n)=\frac{1}{3}\left[x(n)+x(n-1)+x(n+2)\right]$$

- *U ovom primeru za računanje tekuće vrednosti izlaznog signala, potrebno je poznavati vrednost signala koji će se pojaviti dve periode kasnije $x(n+2)$*

Kauzalni i nekauzalni sistemi

- **Kauzalnost je neophodna** u slučaju realizacije diskretnih sistema koji moraju da rade u **realnom vremenu**
- U slučaju da diskretni sistem može da radi u takozvanom ***off-line*** režimu, kada je čitav ulazni signal već poznat, onda on može biti i nekauzalan
- U slučaju diskretnih sistema kod kojih nezavisna promenljiva ne predstavlja vreme, kao što je slučaj u sistemima za obradu slike, kauzalnost nije od interesa

Opis LTI sistema

- Fizičke veličine koje je neophodno poznavati kako bi se u potpunosti opisalo sistem nazivaju se *varijable stanja*.
- Za opis ponašanja nekog sistema dovoljno poznavanje N varijabli stanja.
- Sve ostale veličine u sistemu, izuzev ulaznih signala, predstavljaju *zavisne varijable*.
- U opštem slučaju, sistem može da bude pobuđen sa M ulaznih signala (*ulaznih varijabli*) i da ima L izlaznih signala, odnosno *izlaznih varijabli*.
- Zbog toga je pogodno sve varijable sistema zapisati u vektorskom obliku.

Opis LTI sistema

- Vektor varijabli stanja označen je kao $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n),]^T$
- Vektore ulaznih signala označen je kao $\boldsymbol{u}(n) = [e_1(n), e_2(n), \dots, e_M(n),]^T$
- Vektore izlaznih signala označen je kao $\boldsymbol{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_L(n),]^T$
- Svaki od vektora je funcija vremena nao nezavisne varijable
- Relacija koja povezuje varijable stanja i ulazne varijable opisuje se skupom diferencnih jednačina prvog reda – **sistem jednačina stanja**

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(n) + \mathbf{B}\boldsymbol{u}(n)$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \mathbf{C}\boldsymbol{x}(n) + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(n)$$

Diferencna jednačina sistema

- Pri analizi i obradi signala vrlo često se posmatra jedan izlazni signal kao odziv na jedan pobudni signal
- Ukoliko u LTI sistemu postoji više pobudnih signala, tada se koristi princip superpozicije.
- U takvim slučajevima se, umesto jednačinama stanja, LTI sistemi opisuju jednom diferencnom jednačinom višeg reda.
- Sistem od *N* simultanih DJ prvog reda svodimo na jednu diferencnu jednačinu *N* -tog reda, čiji je opšti oblik:

$$a_0 y(n)+ a_1 y(n-1)+ \dots + a_N y(n-N)= b_0 x(n)+ b_1 x(n-1)+ \dots + b_M x(n-M)$$

Kod LTI sistema konstante a_i i b_i imaju konstantne vrednosti

Nehomogena diferencna jednačina

- Nehomogena diferencna jednačina sistema ima oblik:
- $a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_N y(n-N) = x(n)$
- Potpuni odtiv sistema može se odretiti kao zbir homogenog i partikularnog rešenja
- $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$
- Homogeno rešenje $y_h(n)$ predstavlja rešenje homogene DJ

$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_N y(n-N) = 0$

Partikularno rešenje $y_p(n)$ dobija se iz početnih uslova sistema.

Diferencna jednačina sistema

Diferencna jednačina sistema ima oblik:

$a_0 y(n)+a_1 y(n-1)+\ldots+a_N y(n-N)= b_0 x(n)+ b_1 x(n-1)+\ldots+ b_M x(n-M)$

Ova jednačina može se predstaviti u obliku suma proizvoda:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k]= \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

gde su sa x(n) označeni ulazni, a sa y(n) izlazni signali

Jednačina je negomogena, jer je njena desna strana različita od nule

U opštem slučaju, desna strana DJ je funkcija pobude x(n) i njegove prethodne vrednosti x(n-k), k=1,2,...,M

Diferencne jednačine i njihova primena

- Uloga diferencnih jednačina u domenu diskretnih sistema je potpuno analogna ulozi diferencijalnih jednačina u prostoru kontinualnih sistema.
- Svaki linearni vremenski nepromenljivi diskretni sistem se može opisati u vremenskom domenu diferencnom jednačinom

$$\boldsymbol{y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]}$$

- Realizacija sistema može se izvršiti pomoću digitalnih kola ili pomoću programa koji se izvršava na digitalnom računaru.
- Za prvi način realizacije koristi se termin hardverska implementacija, dok se za drugi koristi termin softverska implementacija.

Diferencne jednačine i njihova primena

- U oba slučaja se diskretni sistem može predstaviti pomoću blok dijagrama koji se sastoji od osnovnih realizacionih elemenata: množača, sabirača i elemenata za kašnjenje.
- Alternativni način predstavljanja je pomoću dijagrama toka (engl. *flow graph*)
- Blok dijagram ili dijagram toka ima znatan uticaj na konfiguraciju hardvera ili strukturu programa kojim se realizuje sistem.
- Kao i kod analognih sistema, problem sinteze kola koje zadovoljava tražene zahteve nema jedinstveno rešenje, tj. postoji više ekvivalentnih realizacija.

Reprezentacija diskretnih sistema

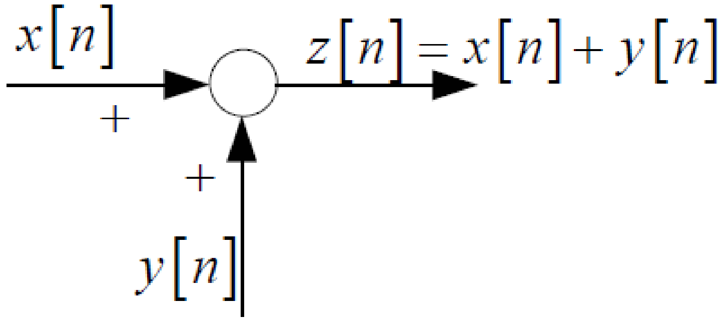
- Diskretni sistemi se mogu predstaviti pomoću različitih, ali međusobno ekvivalentnih reprezentacija:
  - Blok dijagram
  - Graf toka signala
  - Relacija ulaz izlaz
  - Jednačina stanja
- Prve dve reprezentacije predstavljaju grafički oblik strukturnog opisa diskretnih sistema i posebno su značajne u fazi implementacije diskretnih sistema
- Preostale dve reprezentacije predstavljaju analitički oblik funkcionalnog opisa diskretnih sistema i posebno su značajne u fazi analiza diskretnih sistema

Blok dijagram

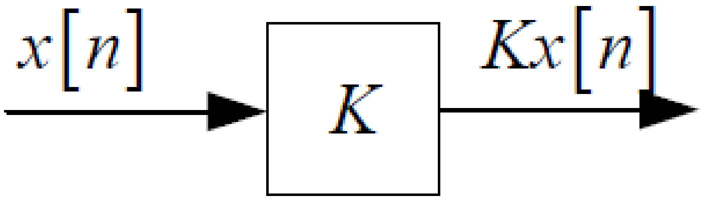
- Blok dijagram predstavlja grafički opis ponašanja diskretnog sistema, pomoću međusobno povezanih jednostavnih procesirajućih elemenata
- Blok dijagram predstavlja strukturni model diskretnog sistema, gde je funkcionalnost diskretnog sistema „sakrivena“ u opisu strukture diskretnog sistema
- U slučaju LVN DS pokazuje se da je potreban broj elemenata za strukturni opis proizvoljnog uključuje samo četiri osnovna elementa:
  - Sabirač
  - Množač sa realnom konstantom
  - Kolo za kašnjenje (*D* (*delay*))
  - Čvor

Elementi blok dijagrama

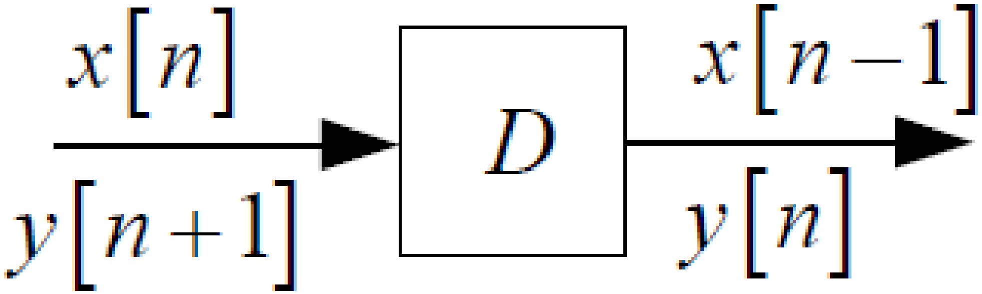
- Sabirač



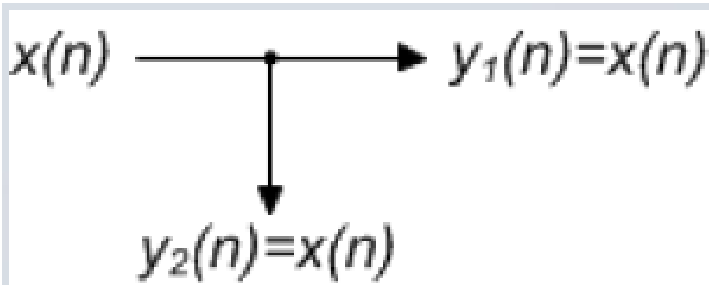
Množač sa realnom konstantom



- Kolo za kašnjenje (*D* (*delay*))



Čvor



Direktna relaizacija

- Direktni postupak je vrlo jednostavan u smislu dobijanja blok dijagrama diskretnog sistema, ali ima veliki broj elemenata za kašnjenje.
- **Primer:** Diskretni sistem opisan je diferencnom jednačinom:

$$y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=3x[n-1]-2x[n-2]$$

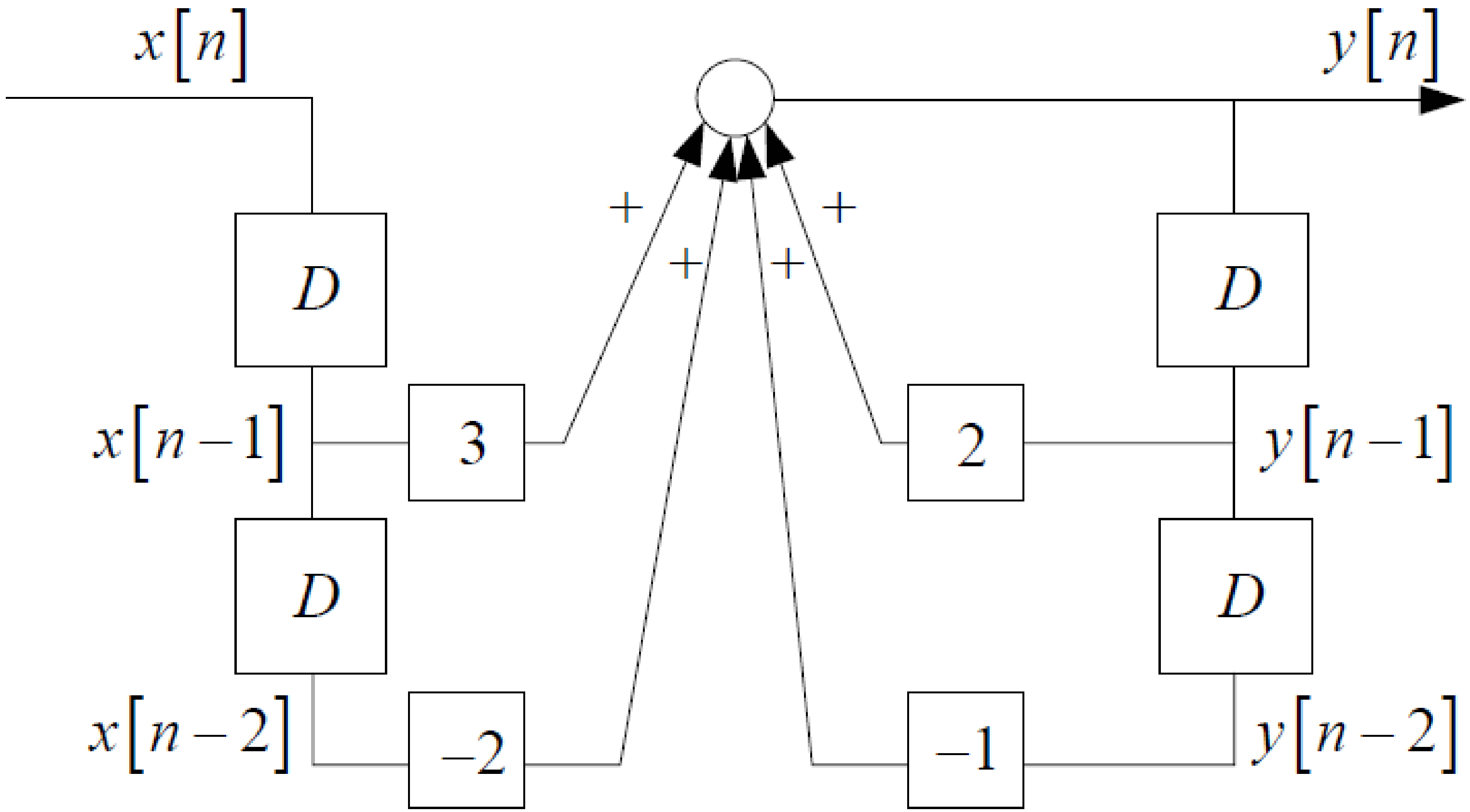
Formirati blok dijagram sistema direktnim postupkom.

Rešenje:

$$\mathbf{y}[\boldsymbol{n}]\mathbf{=2y}[\mathbf{n-1}]\mathbf{-y}[\mathbf{n-2}]\mathbf{+3x}[\mathbf{n-1}]\mathbf{-2x}[\mathbf{n-2}]$$

Direktna relaizacija

$y[n]$=2y[n − 1]-y[n − 2]+3x[n − 1]- 2x[n − 2]



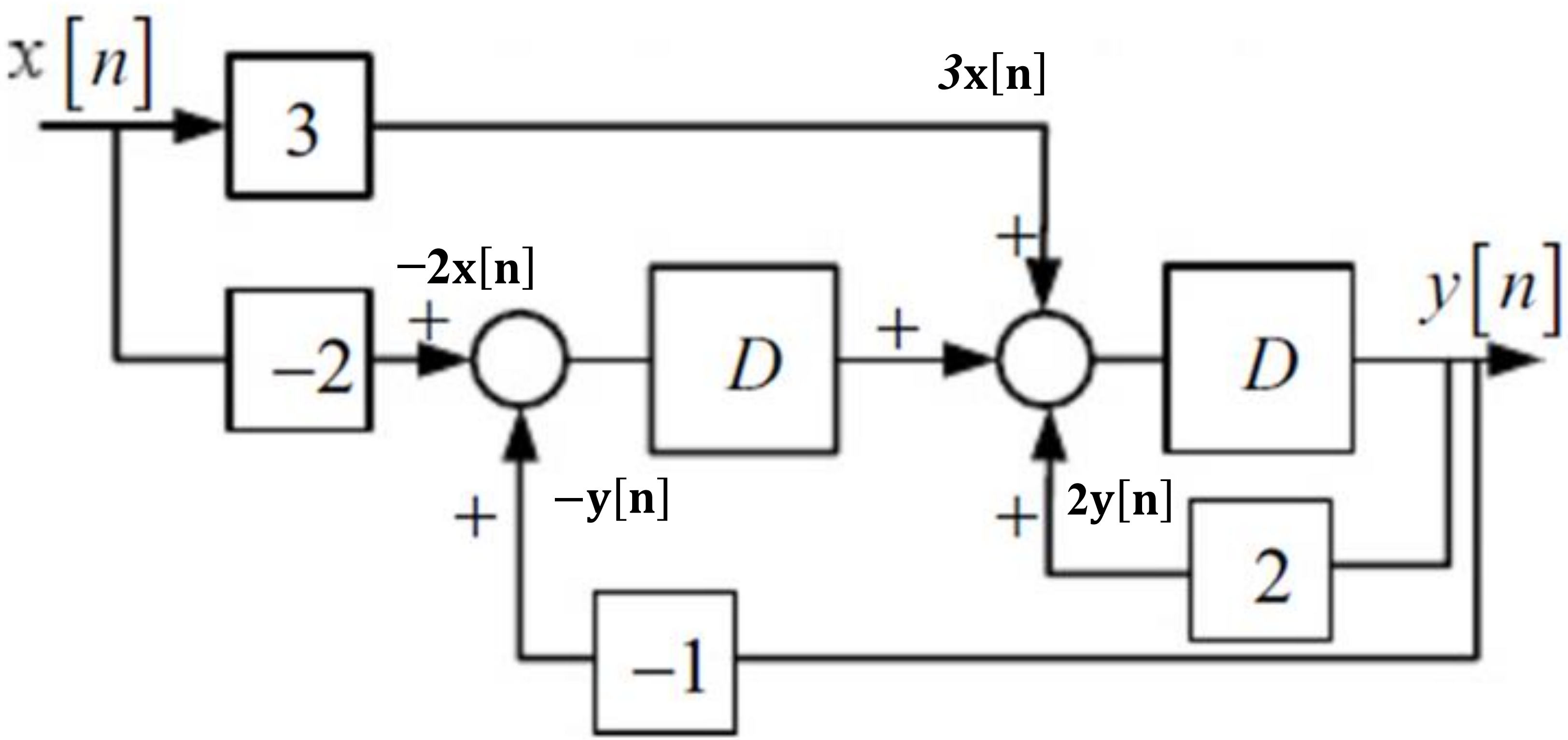
Kanonična realizacija

Koraci u postupku kanonične realizacije

- Uvesti oznaku $\mathbf{D}\{y[n]\}=\mathrm{y}[n-1]$
- D je operator kašnjenja za jedan period odabiranja
- Primer: $\mathbf{y}[n]=2\mathbf{y}[\mathbf{n}-1]-\mathbf{y}[\mathbf{n}-2]+3\mathbf{x}[\mathbf{n}-1]-2\mathbf{x}[\mathbf{n}-2]$
- $\mathbf{y}[n]=\mathbf{D}\{2\mathbf{y}[\mathbf{n}]-\mathbf{y}[\mathbf{n}-1]+3\mathbf{x}[\mathbf{n}]-2\mathbf{x}[\mathbf{n}-1]\}$
- $\mathbf{y}[n]=\mathbf{D}\{2\mathbf{y}[\mathbf{n}]+3\mathbf{x}[\mathbf{n}]+\mathbf{D}\{-\mathbf{y}[\mathbf{n}]-2\mathbf{x}[\mathbf{n}]\}\}$
- Signal $\mathbf{y}[n]$ se dobija kao izlaz iz elementa kašnjenja, ako se na ulaz tog elementa dovede zvir tri signala
- Prvi signal je $\mathbf{2y}[\mathbf{n}]$, drugi signal je $\mathbf{3x}[\mathbf{n}]$
- Treći signal je izlaz drugog elementa za kašnjenje na čiji je učlaz doveden zbir signala $\{-\mathbf{y}[\mathbf{n}]-2\mathbf{x}[\mathbf{n}]\}$

Kanonična realizacija

- $y[n]=\color{red}{D}\{2y[n]+3x[n]+\color{blue}{D\{-y[n]-2x[n]\}}\}$



Analitičko rešavanje diferencne jednačine

- Posmatrajmo diferencnu jednačinu kauzalnog sistema prvog reda:

$y[n]$-a$y[n-1]$=$x[n]$, gde je $x[n]$=b^n $u[n]$

Rešenje diferencne jednačine traži se posebno za n≥ 0 i za $n<0$

a) Pretpostaviti partikularno rešenje $y_p[n]$ za n≥ 0

$$y_p[n] = Ab^n$$

Smenom u diferencnu jednačinu dovija se

Ab^n- a$Ab^{n-1} = b^n$

Ab- aA =b; A=$\frac{b}{b-a}$

Analitičko rešavanje diferencne jednačine

- $y_p[n] = Ab^n$, $A = \frac{b}{b-a}$
- $y_p[n] = \frac{b^{n+1}}{b-a}$; za n≥ 0
- Homogeno rešenje $y_h[n]$ treba da zadovolji relaciju:
- $y_h[n]$-a$y_h[n-1]$=0
- Ako se usvoji ovo rešenje u obliku:
- $y_h[n] = Kc^n$; dobija se jednačina
- Kc^n-aKc^{n-1}=0,
- Kc-aK=0; C=a

Analitičko rešavanje diferencne jednačine

- $y_h[n] = Kc^n$; c=a
- Homogeno rešenje je: $y_h[n] = Ka^n$
- Kombinujući partikularno i homogeno za n≥ 0 dobija se:

$$y[n] = \frac{b^{n+1}}{b-a} + Ka^n \ ;$$

- Za određivanje nepoznate konstante K potreban je početni uslov, npr. $y[-1]$=Y_1
- y[0]-a$y[-1]$=1,
- y[0]=a$Y_1 + 1$= $\frac{b}{b-a}$ + K
- K= aY_1- $\frac{b}{b-a}$

Analitičko rešavanje diferencne jednačine

- Konačno rešenje za n≥ 0 je:

$$y[n] = Y_1 a^{n+1} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$$

- Za $n < 0$, orginalna DJ postaje homogena jer je $x[n] = 0$
- Rešenje je: $y[n] = y_h\,[n] = Ka^n$, za K=aY_1
- $y[n]$= $Y_1 a^{n+1}$ za $n < 0$
- Ukupno rešenje je:
- $y[n] = Y_1 a^{n+1} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}\,\mathrm{u}[n]$

Impulsni odzivi karakterističnih diskretnih sistema

- **Jedinično kašnjenje**

Rad sistema sa jediničnim kašnjenjem opisan je relacijom:

$$y[n]=x[n-1]$$

Impulsni odziv sistema sa jediničnim kašnjenjem je:

$$h[n]=b[n-1]$$

- **Jedinično prednjačenje**

Rad sistema sa jediničnim prednjačenjem opisan je relacijom:

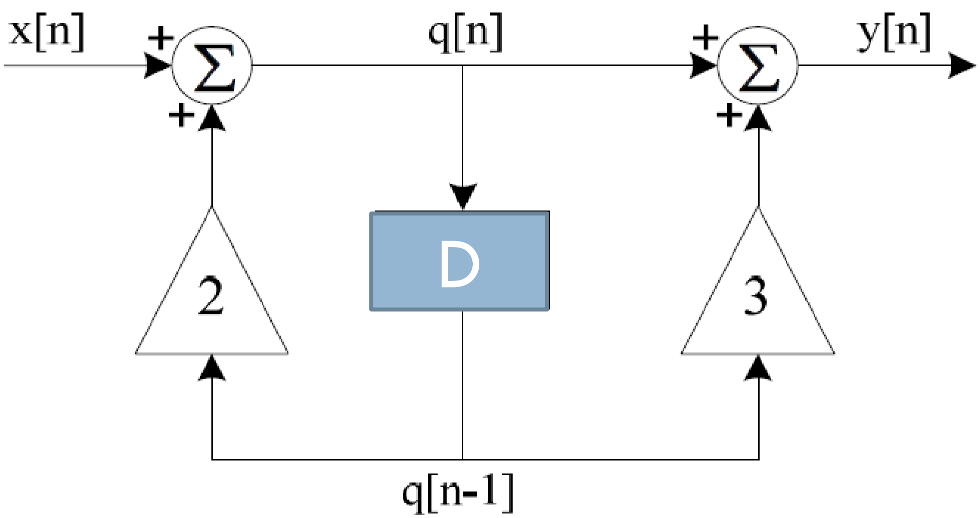
$$y[n]=x[n+1]$$

Impulsni odziv sistema sa jediničnim prednjačenjem je:

$$h[n]=b[n+1]$$

Ovaj sistem je nekauzalan

Primer 2: Blok dijagram vremenski diskretnog sistema prikazan je na slici. Odrediti diferencnu jednačinu zavisnosti izlaznog od ulaznog signala



- Rešenje:

$y[n] = q[n] + 3q[n-1]$

$q[n] = x[n] + 2q[n-1]$

$y[n] = x[n] + 2q[n-1] + 3q[n-1]$

$y[n] = x[n] + 5q[n-1]$

$q[n-1] = \frac{1}{5}(y[n] - x[n])$

Primer 2: Blok dijagram vremenski diskretnog sistema prikazan je na slici. Odrediti diferencnu jednačinu zavisnosti izlaznog od ulaznog signala

$y[n] = q[n] + 3q[n-1]$

$q[n-1] = \frac{1}{5}(y[n] - x[n])$

$y[n] = q[n] + \frac{3}{5}y[n] - \frac{3}{5}x[n])$

$q[n] = \frac{2}{5}y[n] + \frac{3}{5}x[n])$

Kako $q[n-1]$ predstavlja signal $q[n]$ zakašnjen za jedan odbirak

$q[n-1] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1])$

$\frac{1}{5}(y[n] - x[n]) = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1])$

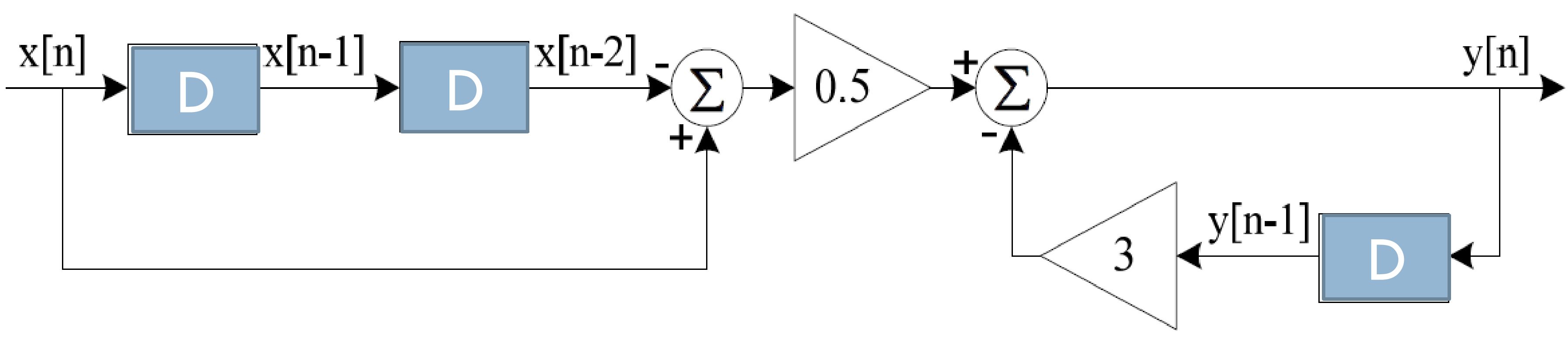
$y[n] - x[n] = 2y[n-1] + 3x[n-1])$

$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1])$

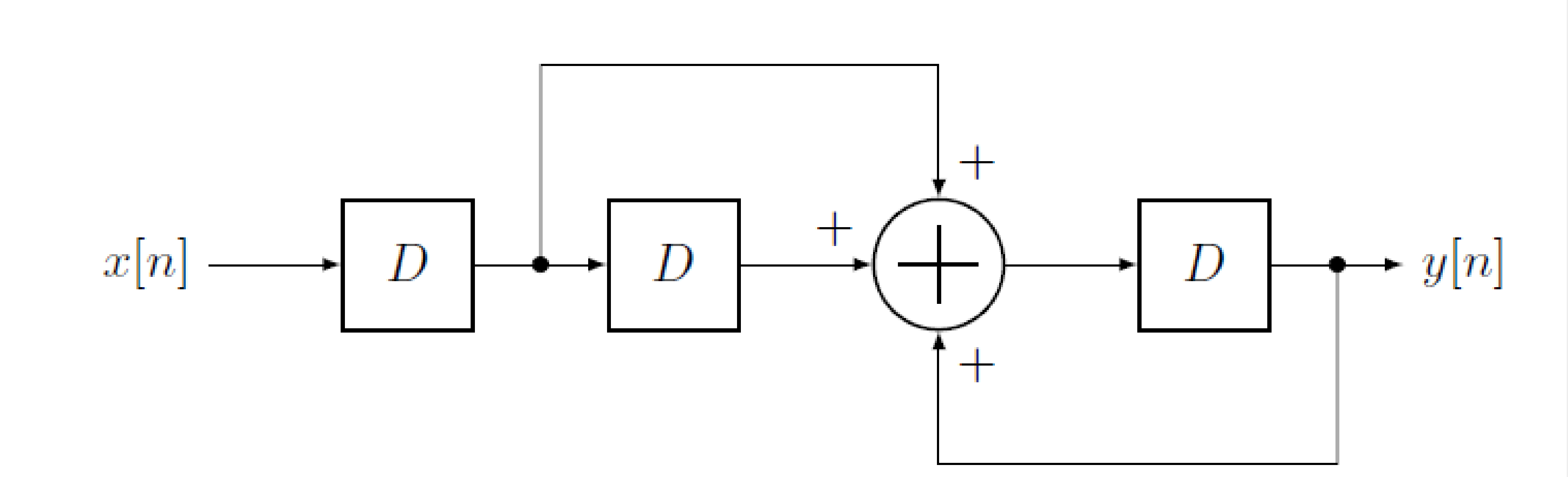
Primer 3: Nacrtati blok dojagram vremenski diskretnog sistema opisan diferencnom jednačinom

$$\mathbf{2y}[n]\mathbf{+6y}[n-1]\mathbf{=x}[n]\mathbf{\text{-}x}[n-2]$$

- Rešenje:
- $2y[n]+6y[n-1]=x[n]\text{-}x[n-2]$
- $2y[n] = x[n]\text{-}x[n-2] - 6y[n-1]$
- $y[n] = \frac{1}{2}(x[n]\text{-}x[n-2]) - 3y[n-1]$

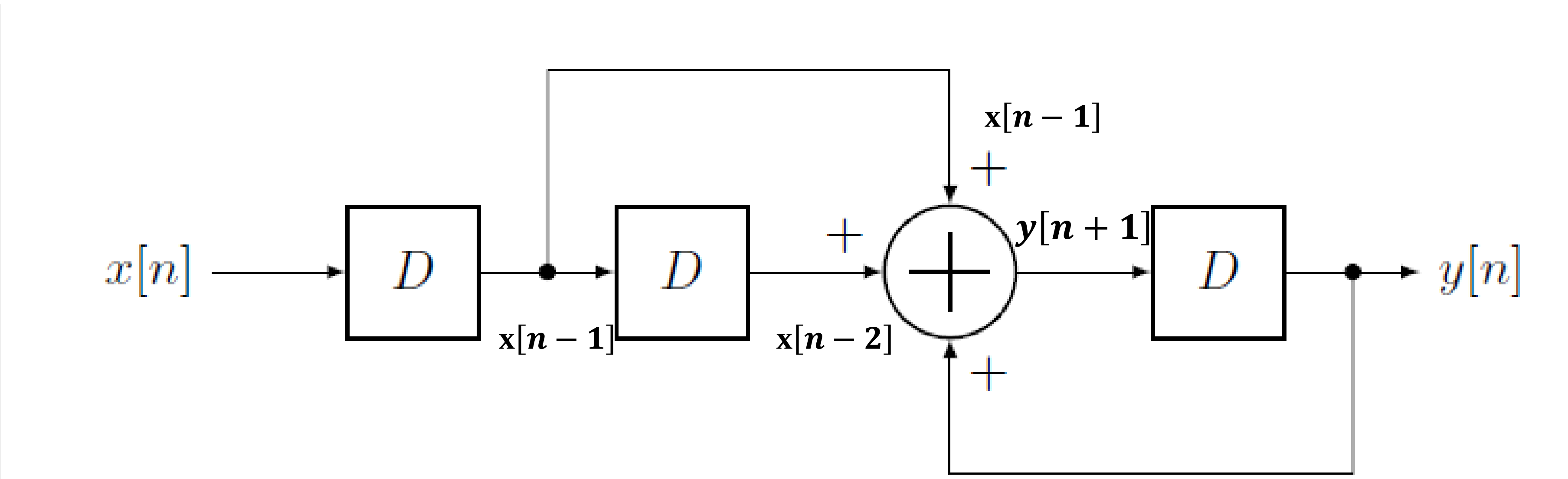


P4: Koristeci osnovne blokove izračunati funkcionalnu zavisnost kojom se opisuju sistemi sa slike



P4: Koristeci osnovne blokove izračunati funkcionalnu zavisnost kojom se opisuju sistemi sa slike

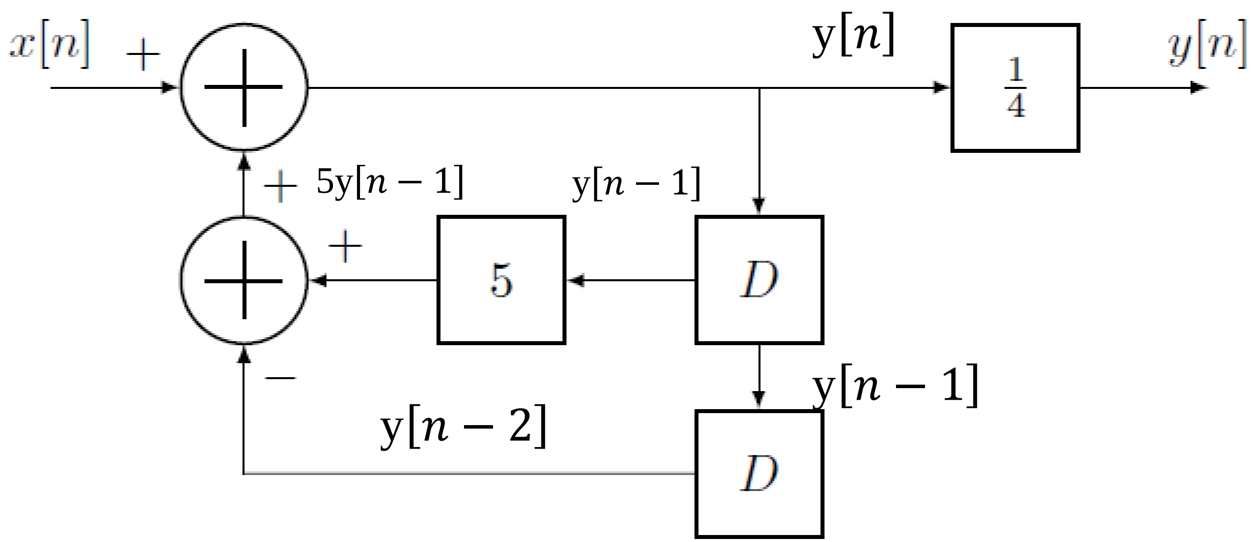
- Rešenje:



$$y[n+1] = y[n] + x[n-2] + x[n-1]$$
$$y[n] = y[n-1] + x[n-3] + x[n-2]$$

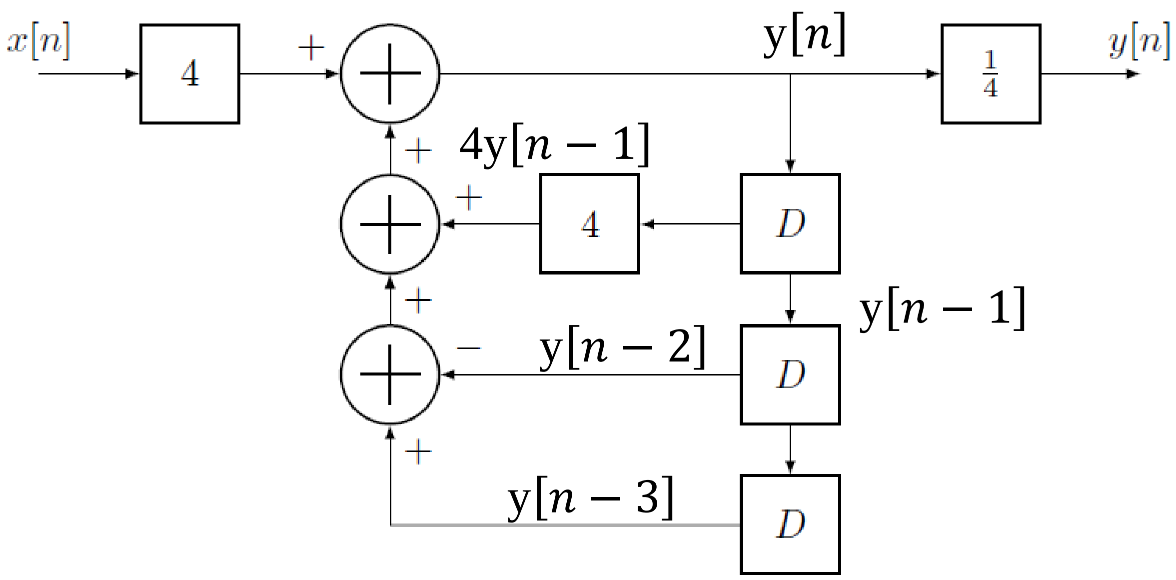
P5: Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom $4y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=x[n]$. Nacrtati blok dijagram sistema.

- $4y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=x[n]$
- $4y[n]=5y[n-1]-y[n-2]+x[n]$
- $y[n]=\frac{1}{4}(5y[n-1]-y[n-2]+x[n])$

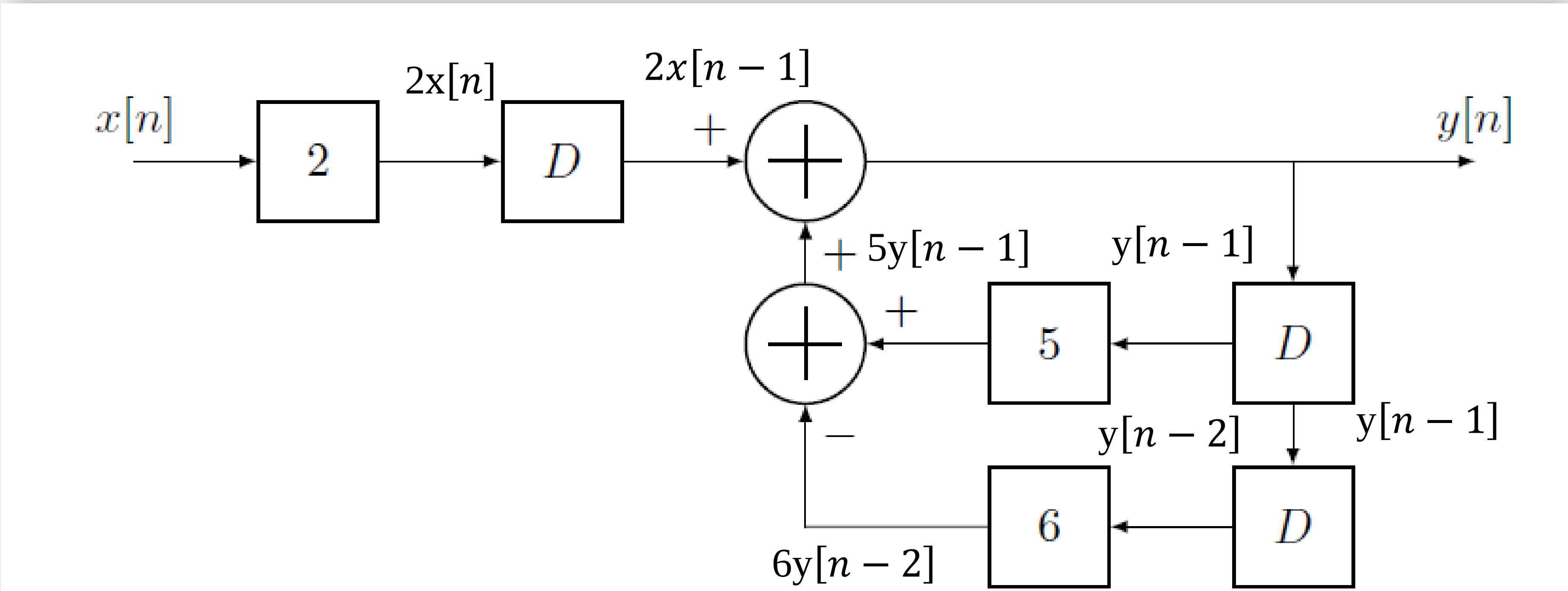


P5: Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom $y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]+\frac{1}{4}y[n-3]=x[n]$. Nacrtati blok dijagram sistema.

- $y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]+\frac{1}{4}y[n-3]=x[n]$
- $y[n]=y[n-1]-\frac{1}{4}y[n-2]-\frac{1}{4}y[n-3]+x[n]$
- $4y[n]=4y[n-1]-y[n-2]-y[n-3]+4x[n]$
- $y[n]=\frac{1}{4}(4y[n-1]-y[n-2]-y[n-3]+4x[n])$



P6: Kauzalni vremenski invarijantni sistem opisan je diferencnom jednačinom: y[n]-5y[n-1]+6y[$n-2$]=2x[n-1]. Nacrtati blok dijagram sistema.

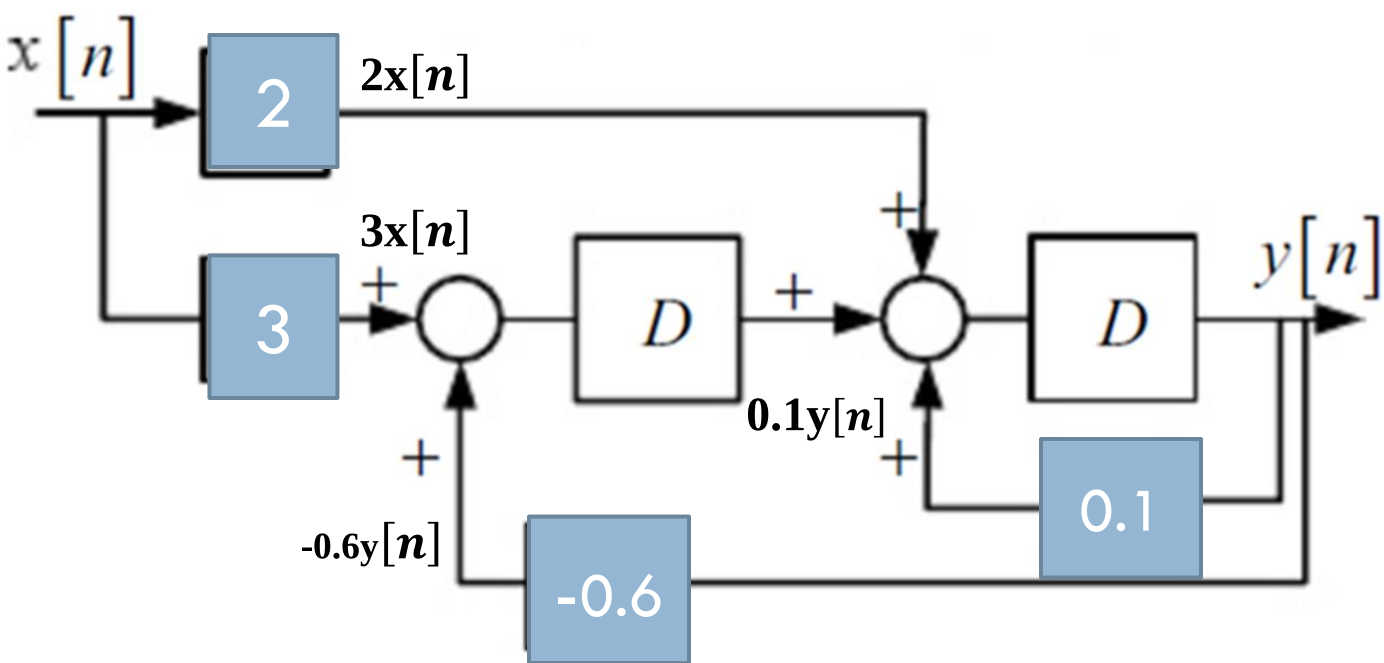


P7. Sistem opisan diferencnom jednačinom prikazati blok dijagramom u kanoničnoj formi.

$y(n) - 0.1y(n-1) + 0.6y(n-2) = 2x(n-1) + 3x(n-2)$

Uvesti oznaku **D{*y*[*n*]}=y[*n* – 1]**

- $y(n) = 0.1y(n-1) - 0.6y(n-2) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$
- $y(n)=D\{0.1y(n) - 0.6y(n-1) + 2x(n) + 3x(n-1)\}$
- $\mathbf{y(n)=D\{0.1y(n) + 2x(n) + D\{-0.6y(n) + 3x(n)\}\}}$



P8: Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom $2y[n]+6y[n-1]=x[n]-x[n-2]$. Nacrtati blok dijagram sistema.

- $2y[n]=-6y[n-1]+x[n]-x[n-2]$
- $y[n]=-3y[n-1]+\frac{1}{2}(x[n]-x[n-2])$