P10 OSOBINE DISKRETNIH SIGNALA

Signali i sistemi

Pregled i osobine diskretnih sistema

- Sve osobine kontinualnih sistema imaju odgovarajuću interpretaciju u domenu diskretnih sistema
- ***Sistemi sa memorijom***
- Za diskretni sistem kažemo da ima memoriju ukoliko njegov odziv

$y\,[n]$ u nekom trenutku n=n_0 ne zavisi samo od ulaza u tom istom trenutku x $[n_0]$ već i od vrednosti ulaznog signala u nekim drugim vremenskim trenucima

$$y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]$$

- Ako odziv $y\,[n_0]$ zavisi samo od x $[n_0]$ predstavlja sistem bez memorije

$$y[n_0] = x^2[n_0]$$

Kauzalnost sistema

- Diskretni sistem je kauzalan ukoliko njegov odziv $y\,[n]$ u proizvoljnom trenutku n=n_0 zavisi od vrednosti x[n] za n≤ n_0 .
- Ako odziv sistema u sadašnjem trenutku zavisi od ulaza sistema u sadašnjem i prošlim trenucima, a ne od budućeg ulaza sistem je kauzalan.
- Realan sistem mora biti kauzalan, jer ga drugačije nije moguće realizovati.
- U obradi signala se često pojavljuje potreba za nekauzalnim sistemima,
- Oni se mogu primeniti isključivo u takozvanom *off-line* postupku, kada su svi odbirci signala već zabeleženi, i kada se nad njima naknadno vrši obrada.
- Jedan od takvih filtara je takozvano centrirano prozorsko usrednjavanje definisano sledećom relacijom:

$$y[n_0]=\sum_{n=n_0-2}^{n_0+2} x[n]$$

Linearni diskretni sistemi

- Diskretni sistem je linearan ukoliko zadovoljava dva svojstva: **aditivnost** i **homogenost**
- Sistem zadovoljava uslov **aditivnosti** ukoliko na pobudu $x_1[n]+ x_2[n]$ generiše odziv $y_1[n]+ y_2[n]$
- Sistem zadovoljava uslov **homogenosti** ukoliko za pobudu **a.x[n]** generiše odziv **a.y[*n*]**
- Svojstva aditivnosti i homogenosti su istovremeno sadržana u **principu superpozicije:**
- Sistem zadovoljava ovaj princip ukoliko za pobudu

$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$ generiše odziv $a_1y_1[n]+ a_2y_2[n]$

P: Date su sekvence signala x_1[n]={… , 0,[1], 2,3,0,0,2,2,0, … }

i x_2[n]= {… , 0, −2, −2,[2], 2,0, −2,0, … }

Odrediti i skicirati signale:

a) y_1[n] =x_1[n] +x_2[n]

b) y_2[n] =2x_1[n]

c) y_1[n] =x_1[n]. x_2[n]

- **Rešenje:**

a) y_1[n]= ={… , 0, −2, −2,[3], 4,3, −2,0,2,2,0, … }

b) y_2[n]={… , 0,[2], 4,6,0,4,4,0, … }

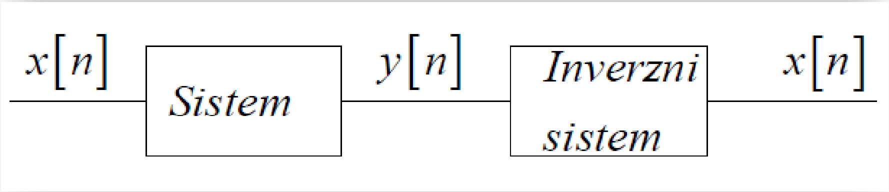
c) y_3[n] ={… , 0,[2], 4,0, … }

Vremenski invarijantni sistemi

- Vremenski invarijantni diskretni sistemi podrazumevaju da se pomeraj u ulaznom signalu direktno preslikava u pomeraj u odzivu sistema.
- Ako je odziv sistema na pobudu $x[n]$ bio $y[n]$, tada će odziv na pobudu $x[n-n_0]$ biti $y[n-n_0]$
- Ako je ovo tvrđenje tačno za bilo koji ulazni signal i bilo koji pomeraj, sistem je vremenski invarijantan.

Invertibilni sistemi

- Diskretni sistem je invertibilan ukoliko njegov ulazni signal x[n] jednoznačno može biti određen na osnovu njegovog izlaza y[n]
- Sistem je invertibilan ukoliko različiti ulazi generišu različite izlaze.
- Ako je sistem invertibilan može se odrediti njegov inverzni sistem koji za ulaz y[n] generiše odziv x[n]

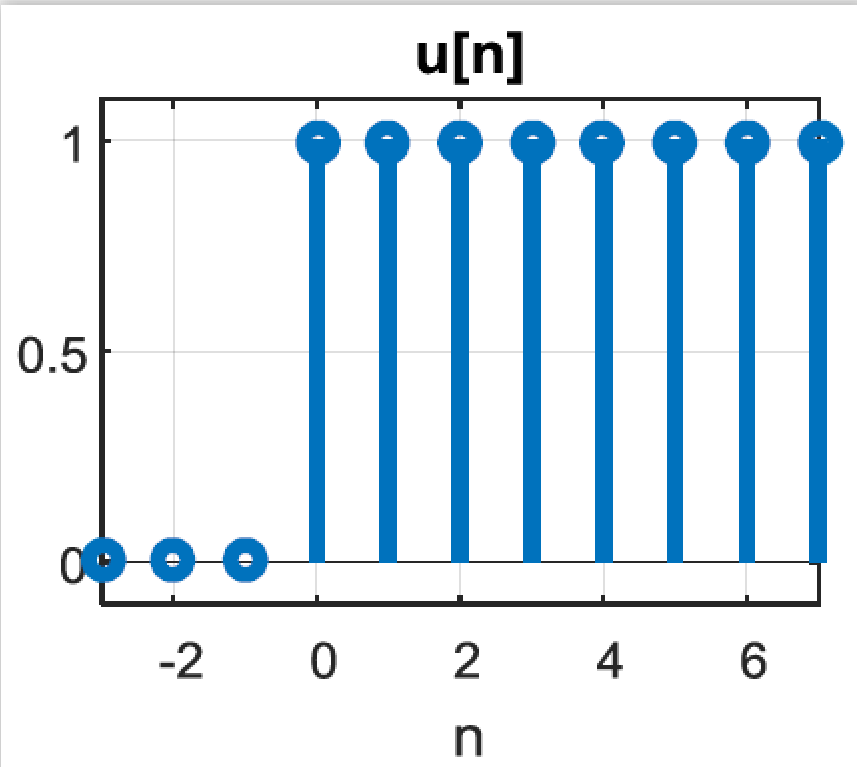


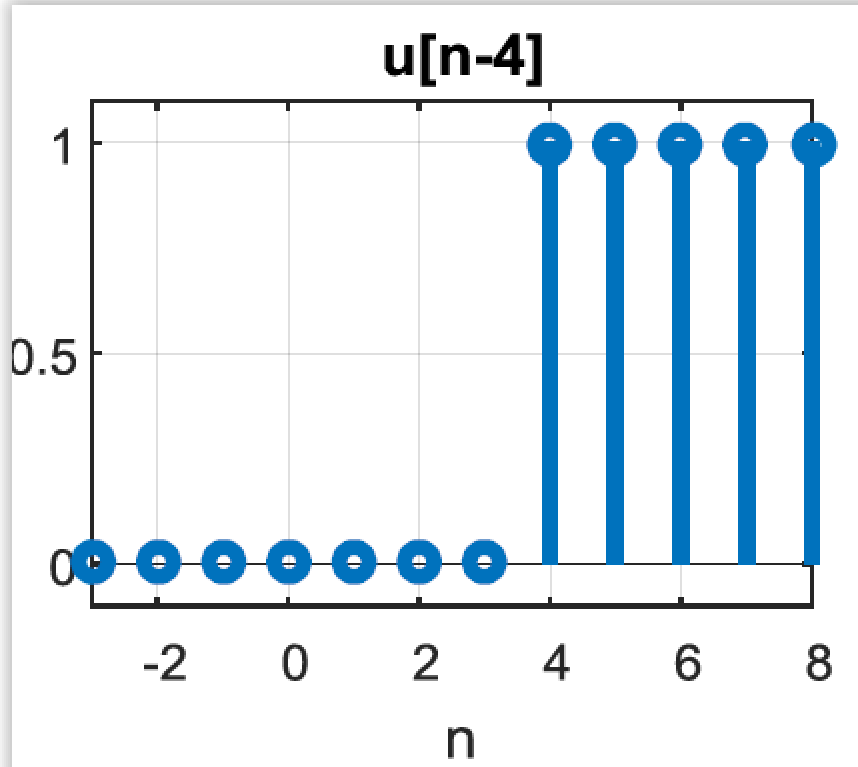
- Primer invertibilnog sistema je diskretni sabirač ili akumulator. Njegov inverzni sistem je opisan sledećom relacijom:

$$\mathbf{x[\mathit{n}] = y[\mathit{n}] - y[\mathit{n-1}]}$$

Primer 1: Skicirati diskretni usamljeni pravougaoni impuls pomoću diskretne jedinične odskočne funkcije i zakašnjene diskretne jedinične odskočne funkcije za četiri sekunde

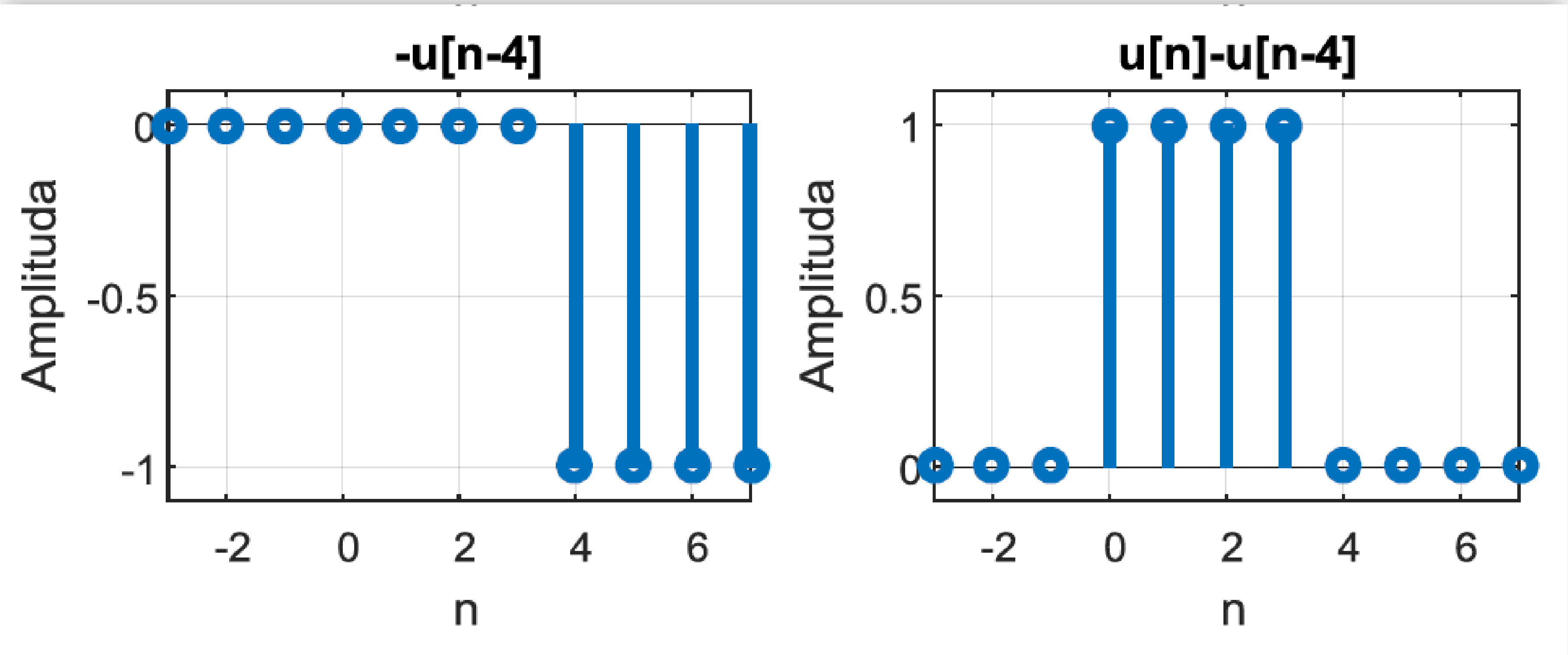
- $x[n] = u[n] - u[n-4]$



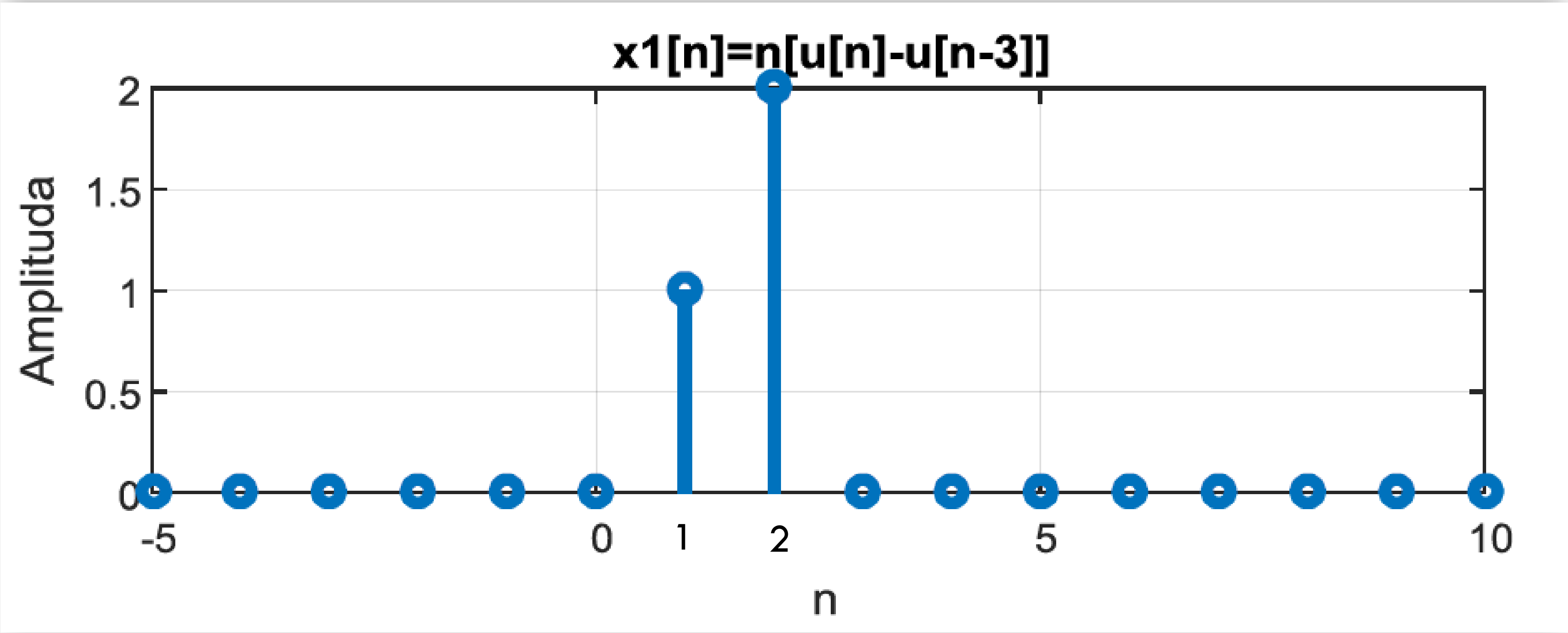


Primer 1: Skicirati diskretni usamljeni pravougaoni impuls pomoću diskretne jedinične odskočne funkcije i zakašnjene diskretne jedinične odskočne funkcije za četiri sekunde

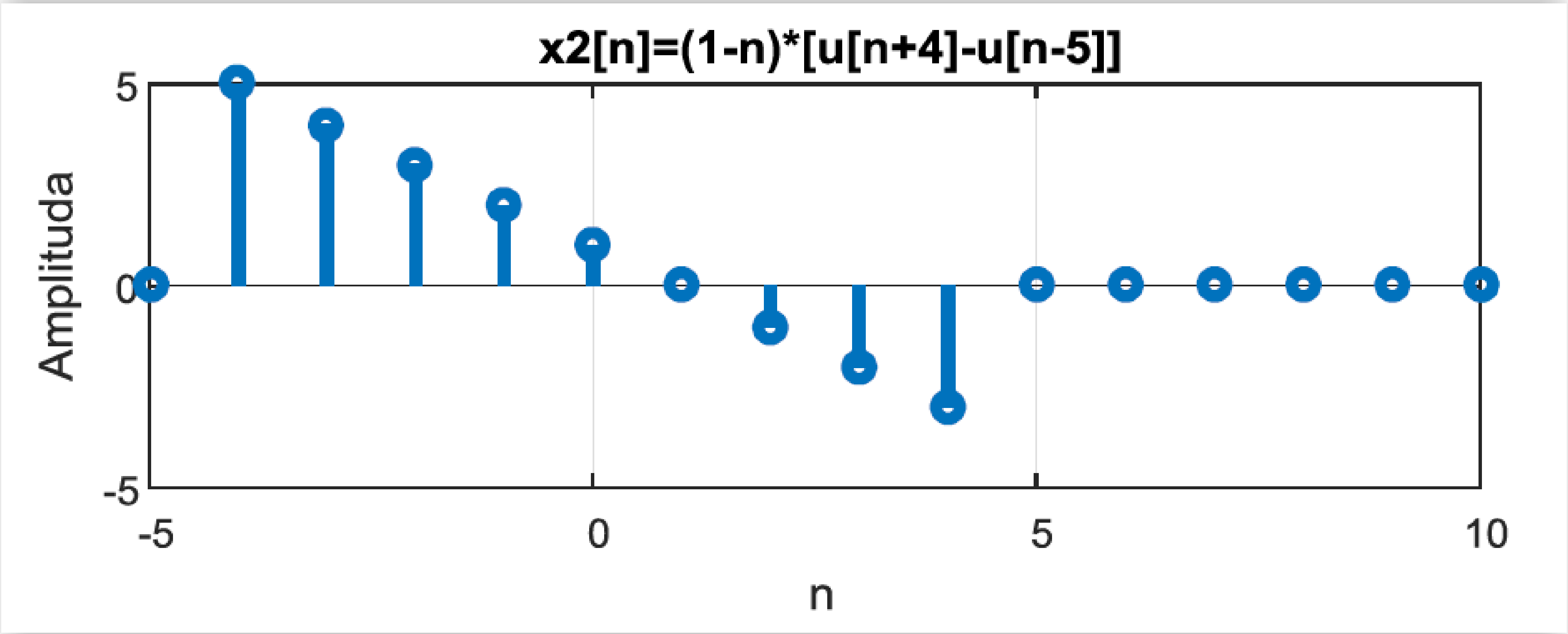
- $x[n] = u[n] - u[n-4]$



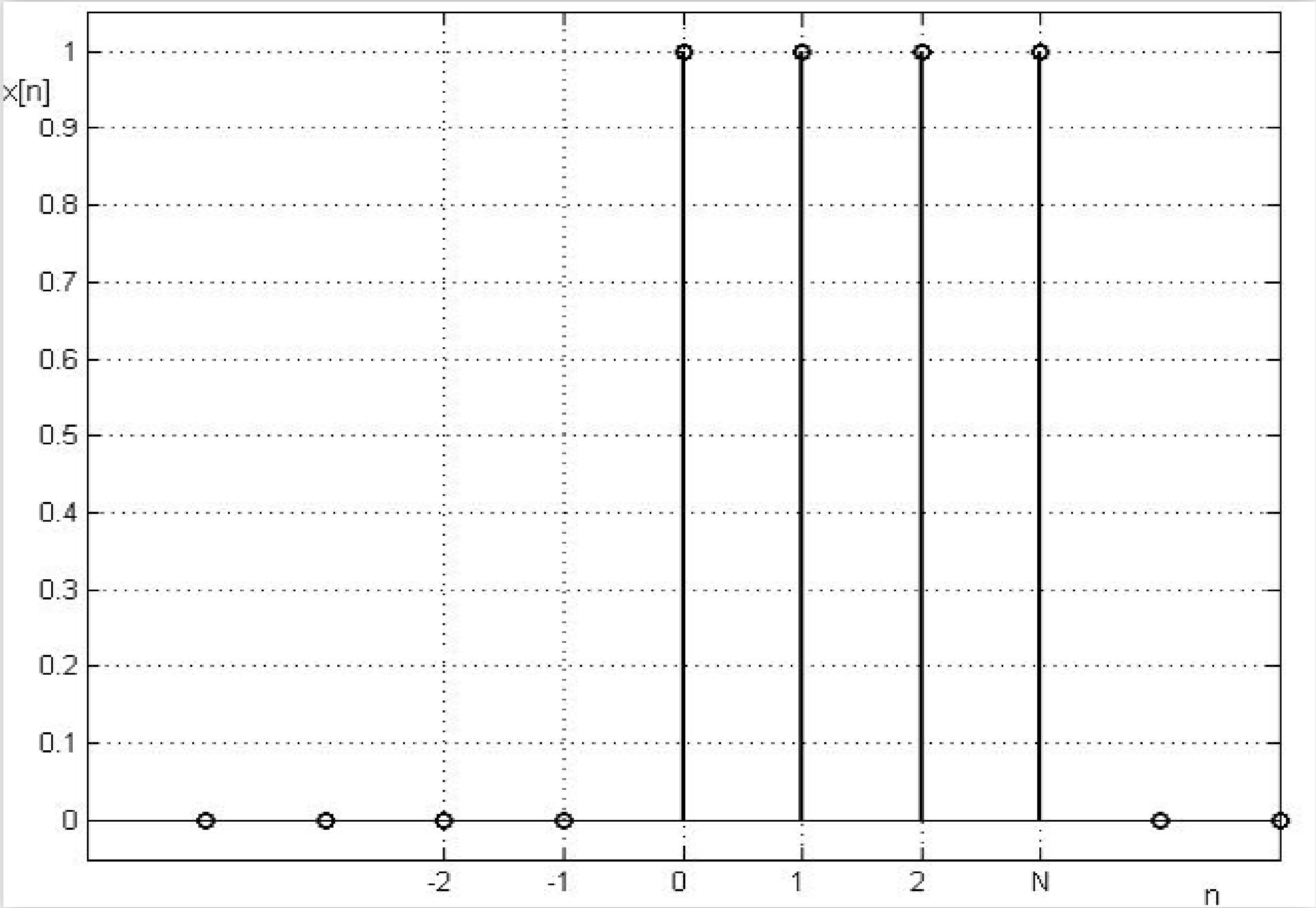
Primer 2: Skicirati signal $x_1[n]$ = n(u[n]-u[n-3])



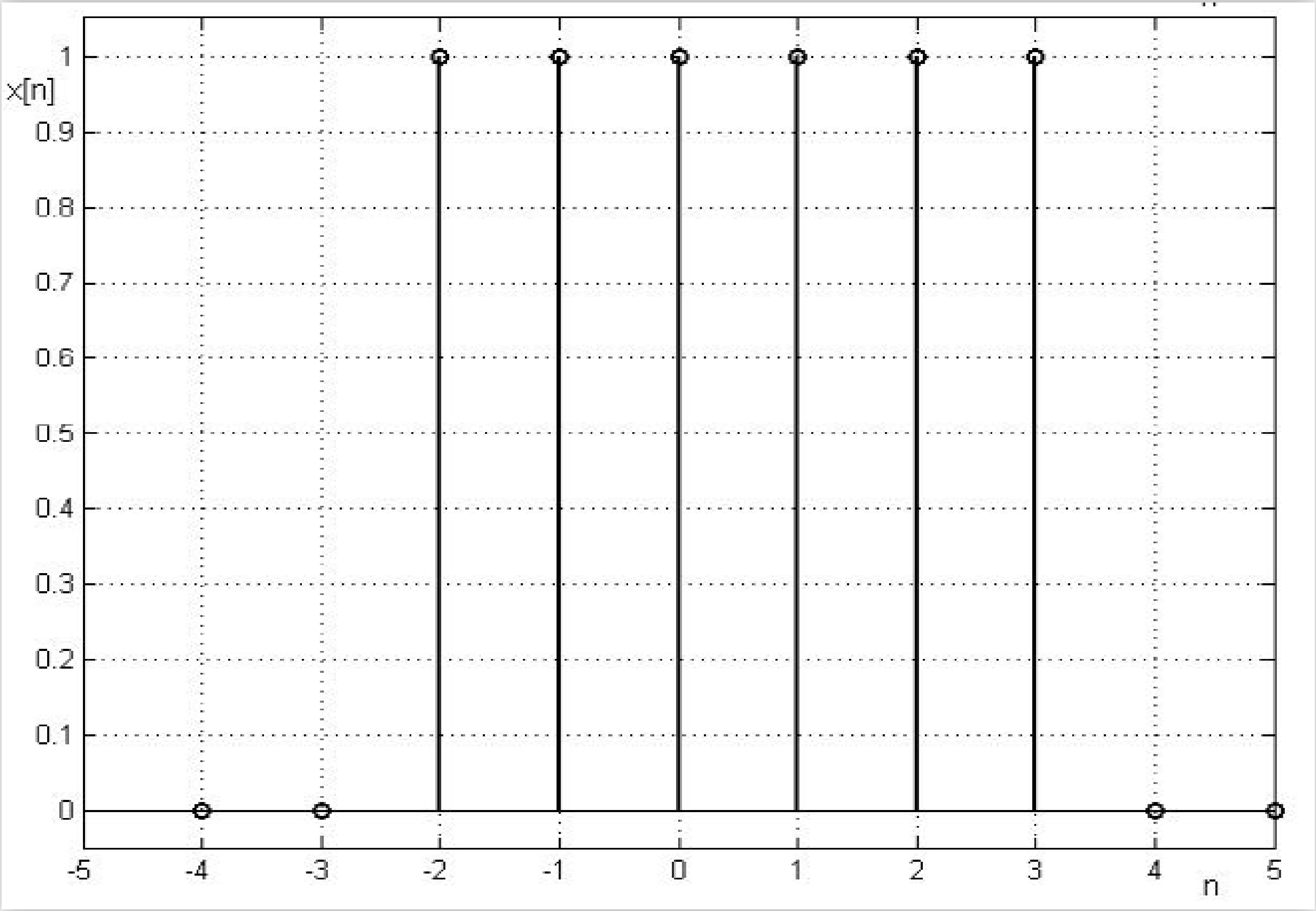
Primer 3: Skicirati signal $x_2[n] = (1\text{-}n)(u[n+4]\text{-}u[n\text{-}5])$



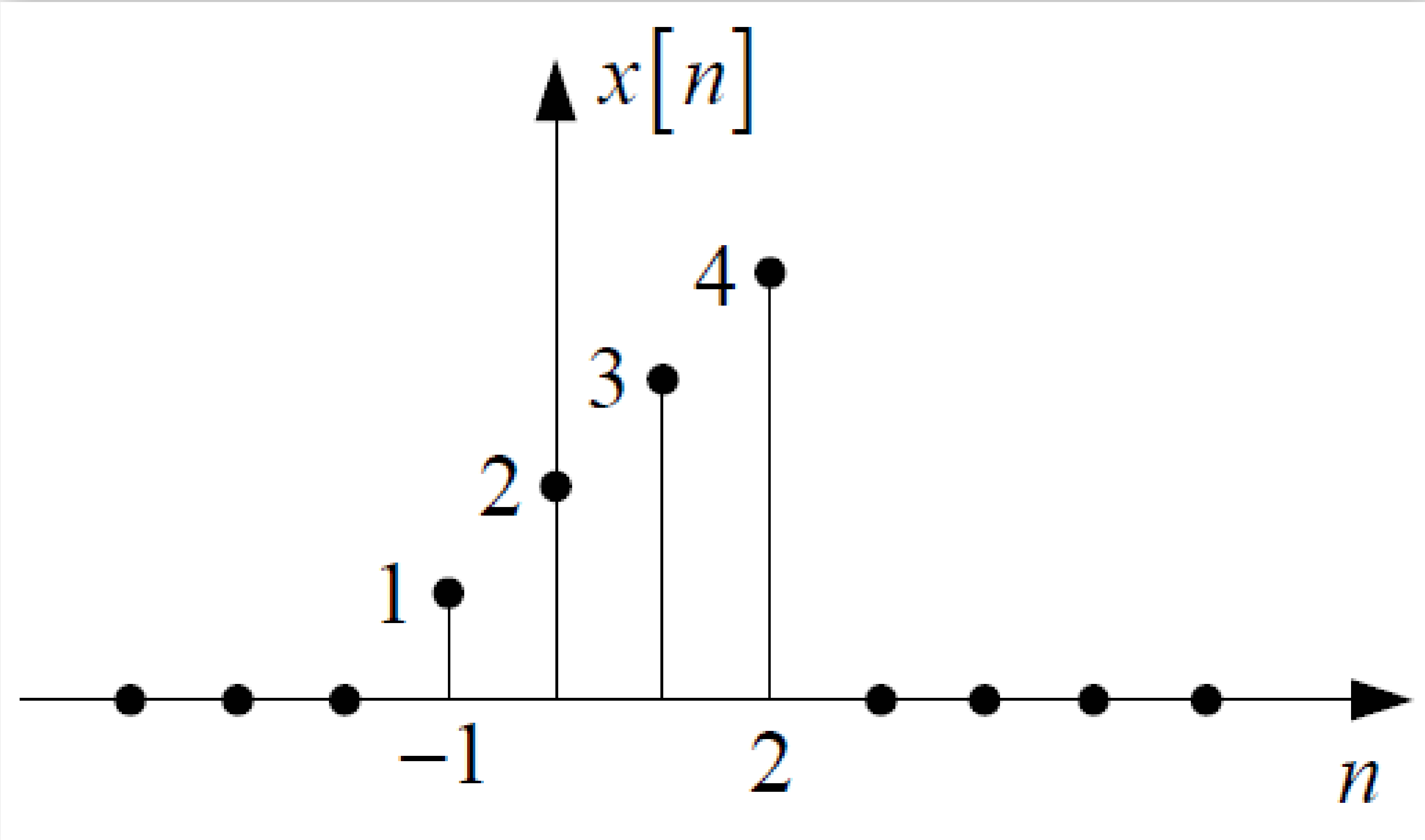
Primer 4a: Skicirati signal $x[n] = u[n]-u[n-(N+1)]$



Primer 4b: Skicirati signal $x[n] = u[n+2]-u[n-4]$

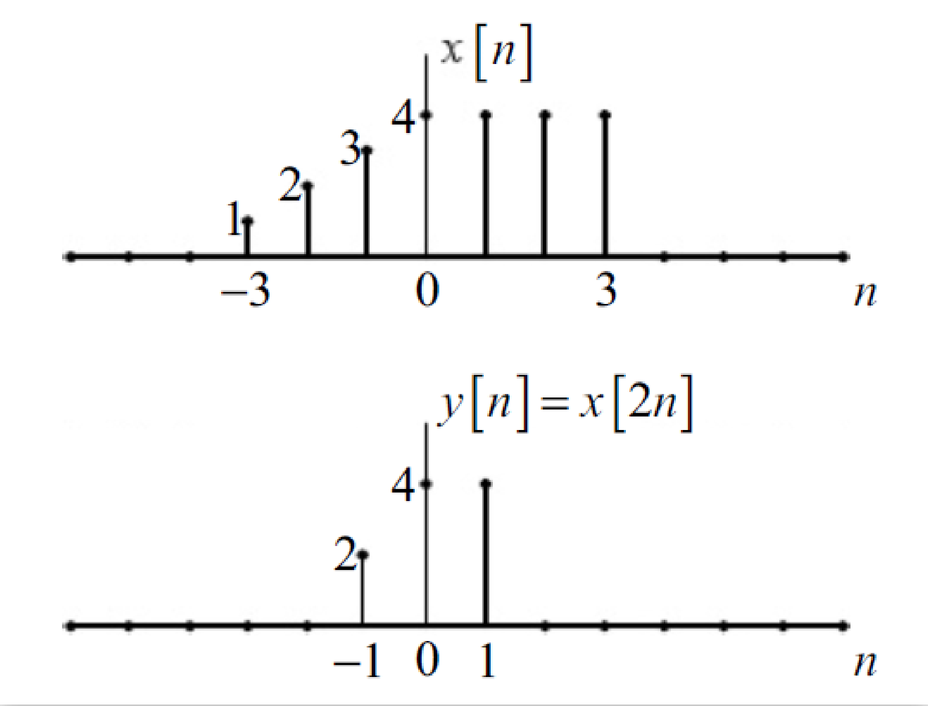


Primer 4c: Skicirati signal **x[n] =(n+2)(u[n+1]- u[n-3])**



Skaliranje vremena – parni odbirci

- Analogno kontinualnim signalima, diskretni signal definisan na sledeći naĉin: $\boldsymbol{y[n] = x[2n]}$
- je ubrzan dva puta u odnosu na signal $\boldsymbol{x[n]}$
- **y [0] = x [0], y [1] = x [2], y [2] = x[4], ...**



Skaliranje vremena - neparni odbirci

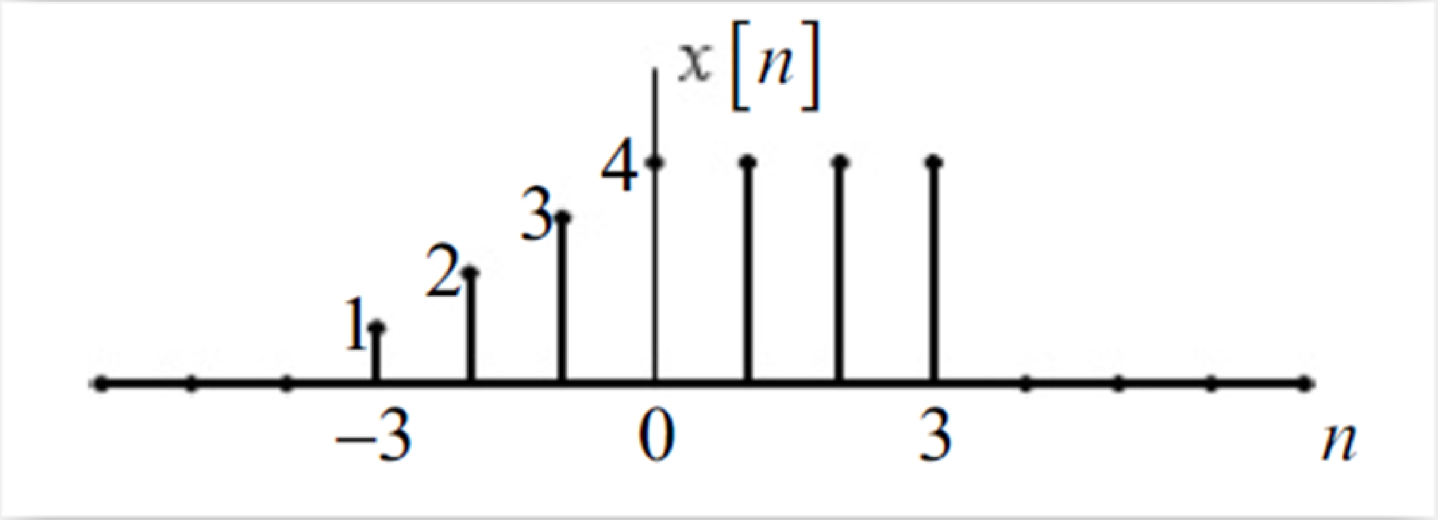
- U signalu ***x*[*n*]** se ne pojavljuju neparni odbirci signala

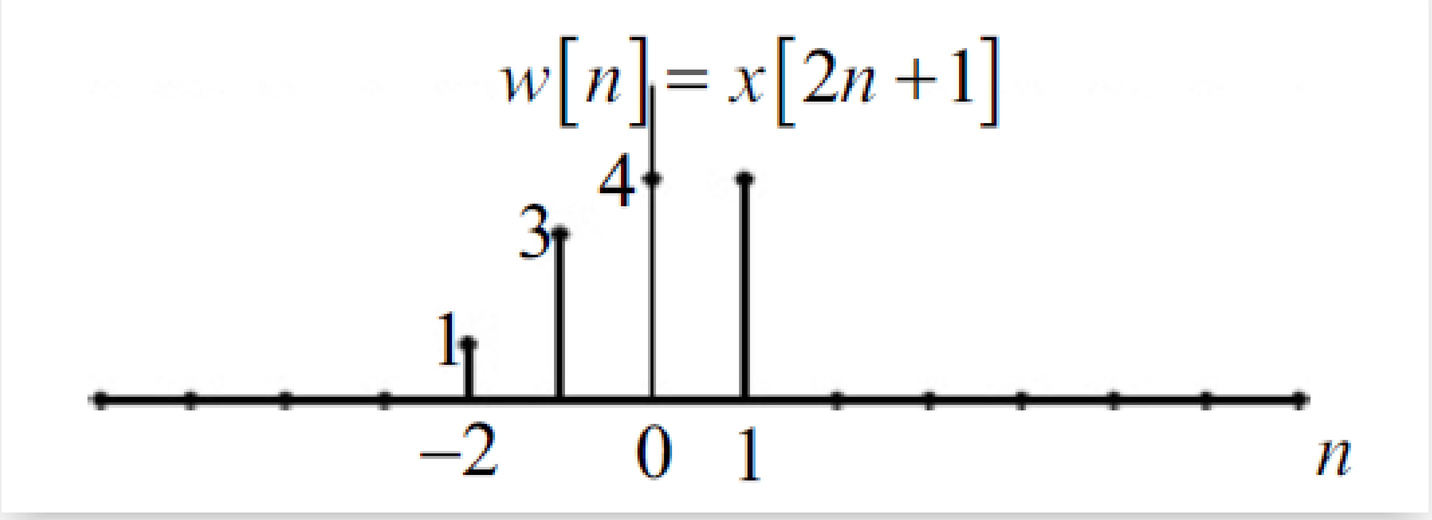
  x [1], x [3], x[5], ...
- Ova pojava se naziva ***decimacija*** signala.
- Ukoliko se žele zadržati samo neparni odbirci signala, može se definisati novi signal ***w*[*n*]** na sledeći naĉin:

$$\boldsymbol{w[n] = x[2n+1]}$$

- Dobijaju se neparni signali oblika:
- w[0] = x[1] , w[1] = x[3], w[2] = x[5] ...

Skaliranje vremena - neparni odbirci





Skaliranje vremena - Usporavanje signala (skaliranje vremena koeficijentom koji je manji od 1)

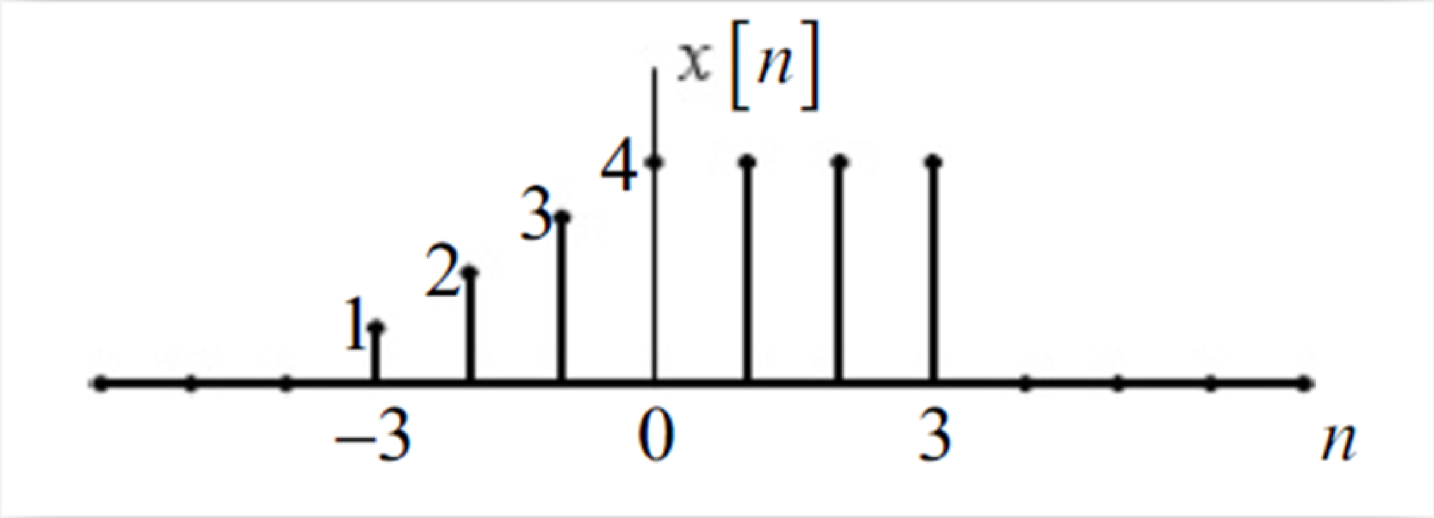
- Ukoliko je signal $\boldsymbol{z[n]}$ definisan na sledeći naĉin:

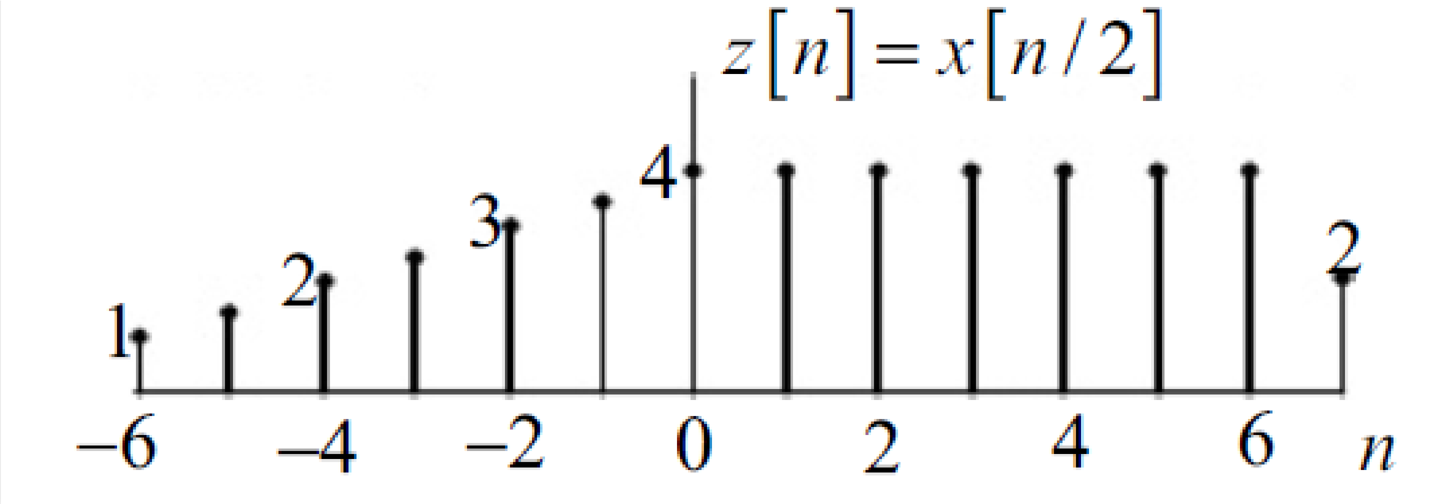
$$\boldsymbol{z[n] = x[n/2]}$$

- tada signal $z[n]$ nije definisan za neparne vrednosti argumenta n.
- Da bi signal $\boldsymbol{z[n]}$ ipak imao odbirke za svako $\boldsymbol{n}$, pristupa se interpolaciji signala:

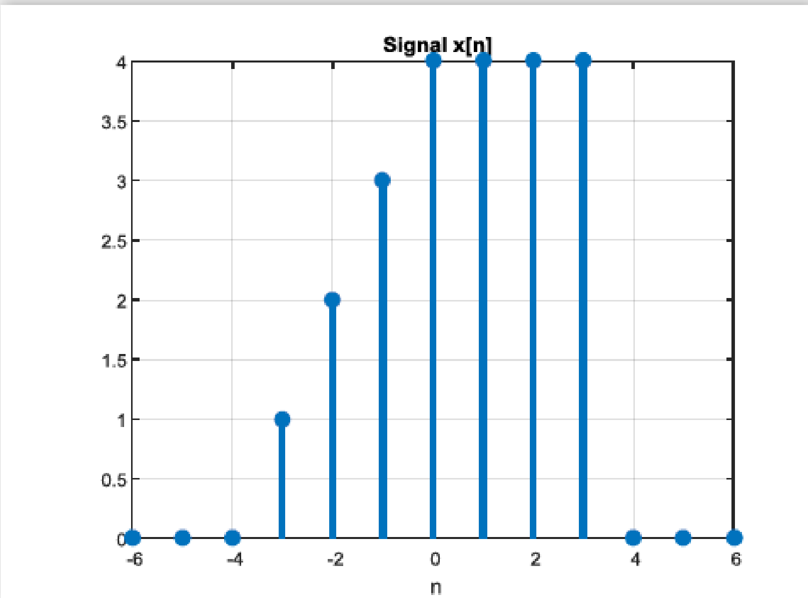
$$z[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \quad parno \\ \dfrac{x[(n-1)/2] + x[(n+1)/2]}{2}, & n \quad neparno \end{cases}$$

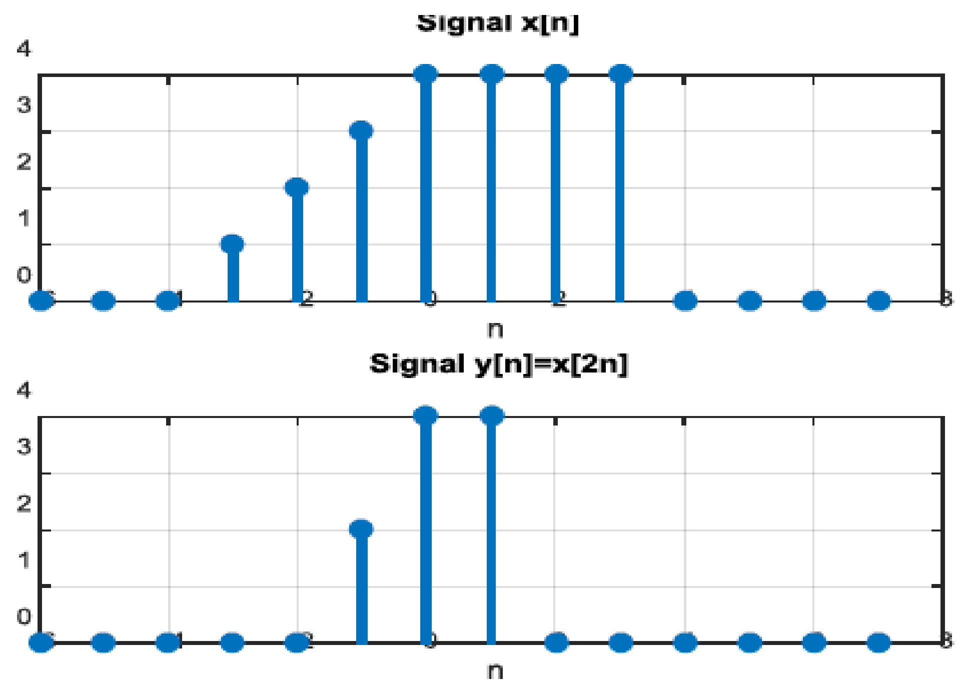
Skaliranje vremena - Usporavanje signala (skaliranje vremena koeficijentom koji je manji od 1)





Primer 5. Za dati signal $x[n]$ nacrtati signale $y[n]=x[2n]$, $w[n]=x[2n+1]$ i $z[n]=x[n/2]$.



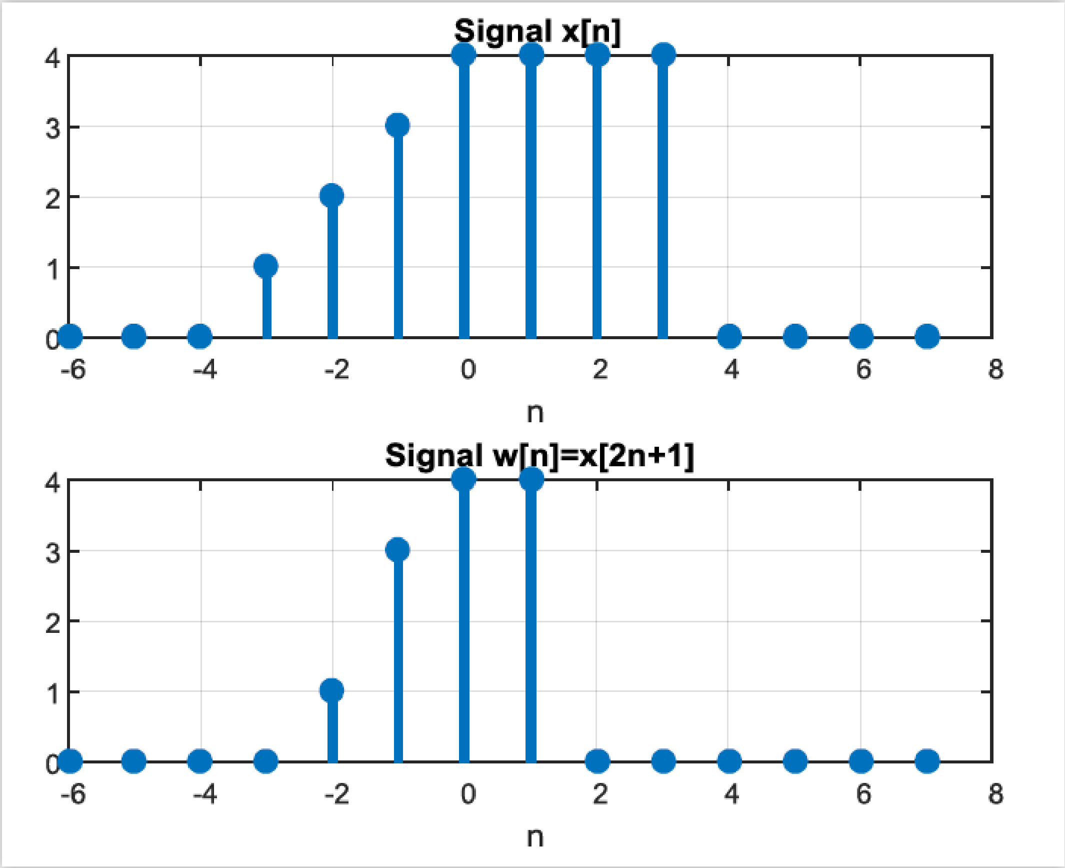


Na dobijenim slikama može se videti primena decimacije i interpolacije.

Kod signala ***y*[*n*] = *x*[2*n*]** vidi se da su uzeti samo parni odbirci originalnog signala,

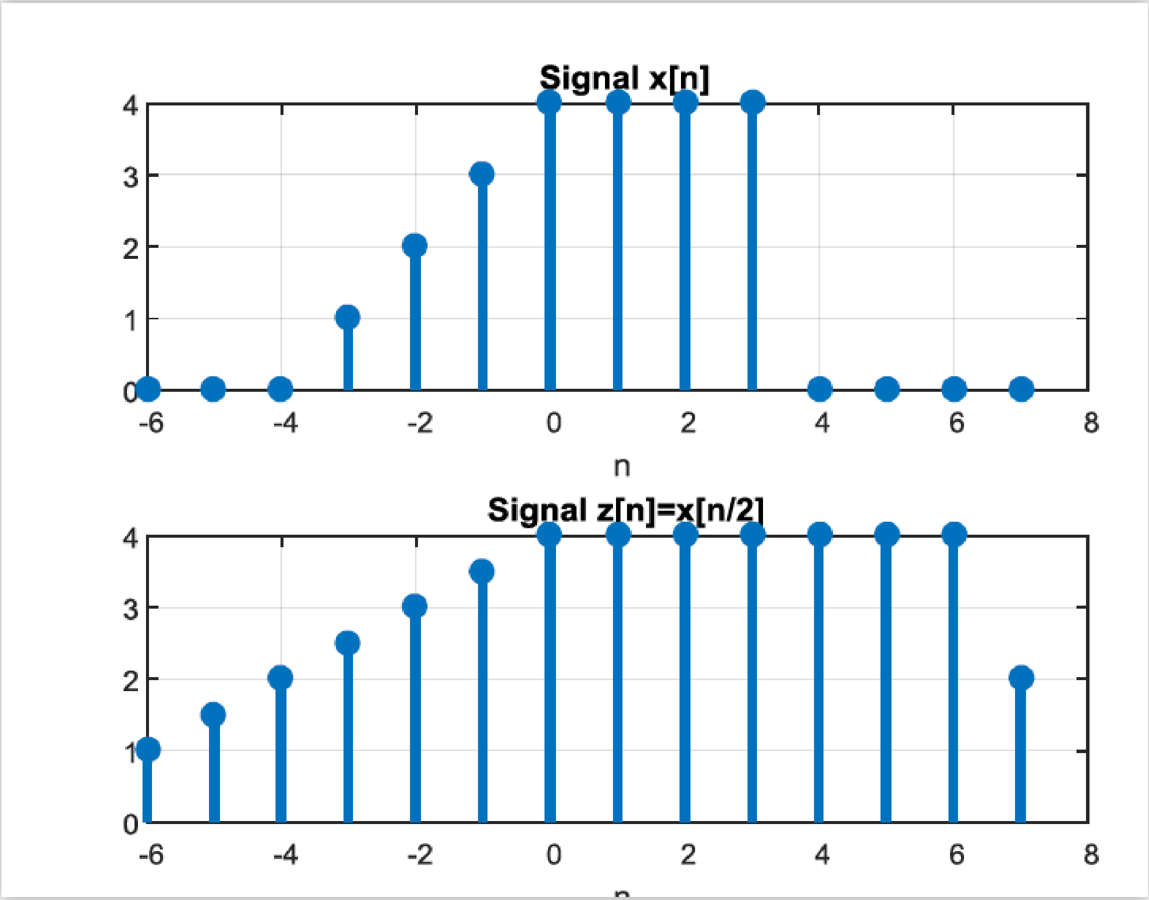
Primer 5. Za dati signal $x[n]$ nacrtati signale $y[n] = x[2n]$, $w[n] = x[2n+1]$ i $z[n] = x[n/2]$.

- Kod signala $w[n] = x[2n+1]$ uzeti samo neparni odbirci originalnog signala.



Primer 5. Za dati signal $x[n]$ nacrtati signale $y[n] = x[2n]$, $w[n] = x[2n+1]$ i $z[n] = x[n/2]$.

- Kod signala $z[n] = x[n/2]$ su na mestu neparnih odbiraka interpolacijom umetnute vrednosti koje nedostaju.



Periodični niz

- Niz ***x*(*n*)** je periodičan ako je $\mathbf{x[n] = x[n+N]}$**,**
  za svako *n* i $N > 0$
- Najmanja vrednost ***N*** za koju važi ova jednakost se naziva **periodom**.
- ***N*** mora biti ceo broj
- Ako *N* nije ceo broj, onda signal nije periodičan.

Ako je diskretan signal periodičan sa periodom ***N***, onda je periodiĉan i sa periodom **k**N, gde je k ceo broj:

$$\mathbf{x[n] = x[n+kN]}$$

Signal koji ne zadovoljova uslov periodiĉnosti naziva se *aperiodičan* ili *neperiodičan* signal.

Periodični niz

- Ako definišemo diskretnu sinusoidu kao:
- **$x[n] = \boldsymbol{sin}[\Omega_0 n]$** ,gde je Ω_0 diskretna ulestanost
- Uslov da diskretna sinusoida bude periodičan signal je da takozvana normalizovana učestanost bude racionalan broj:

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$$

- U jednoj periodi od N odbiraka ima k ciklusa sinusoide

$$x[n] = \sin(2\pi n/16)$$

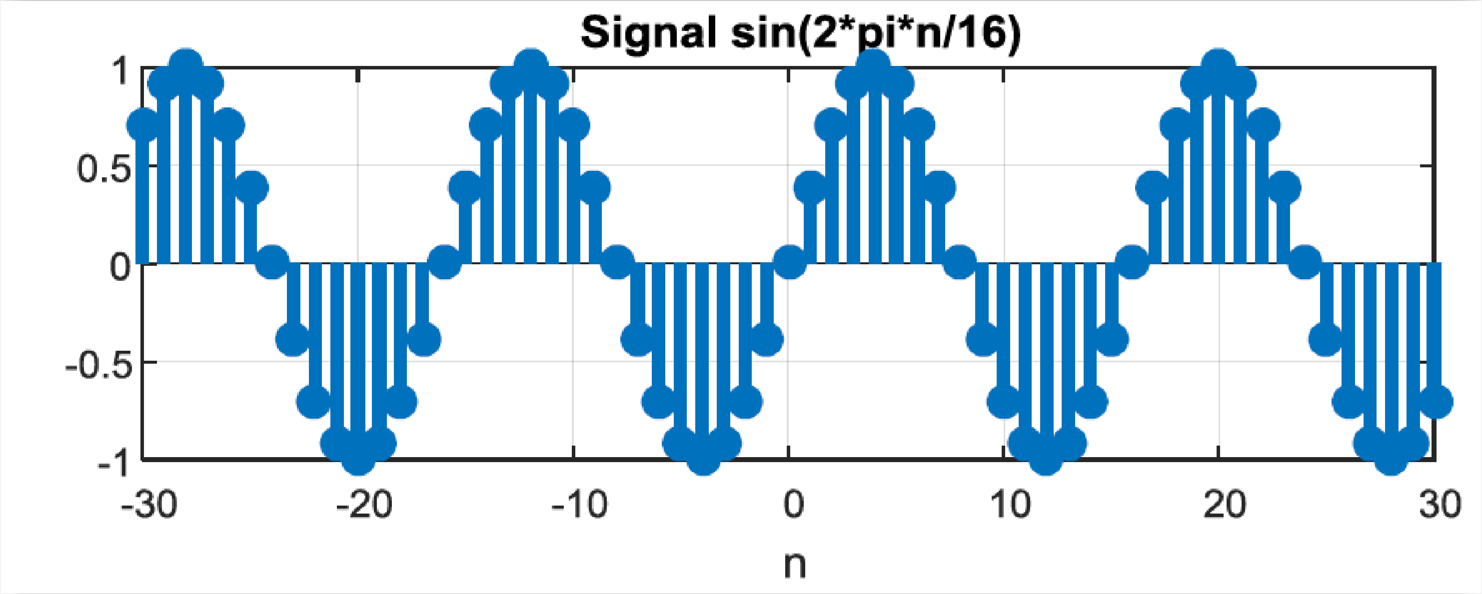
Periodični niz

$$x[n] = \sin(\frac{2\pi}{\mathbf{16}}\boldsymbol{n})\ ;\ x[n] = \boldsymbol{sin(\Omega_0 n)}$$

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N},$$

$$\frac{2\pi/16}{2\pi} = \frac{k}{N},$$

$$\frac{1}{16} = \frac{k}{N}$$



Osnovna perioda ima N=16 odbiraka,

Primer 6:

Ispitati periodičnost i odrediti periodu signala

a) $x(n) = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$ b) $x(n) = \cos\frac{2\pi}{6/7}n$ c) $x(n) = \sin 3n$

a) $x(n) = x(n+N) \Leftrightarrow e^{j\frac{2\pi}{3}(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{3}n}$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}n} e^{j\frac{2\pi}{3}N} = e^{j\frac{2\pi}{3}n} \; / : \; e^{j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}N} = 1 \quad \Rightarrow važi\ za\ \frac{2\pi}{3}N = 2k\pi$$

$$\Rightarrow N = 3k \Rightarrow \; Perioda\ N = 3 \;\; za \;\; k = 1$$

Primer 6:
Ispitati periodičnost i odrediti periodu signala

b) $x(n)=x(n+N) \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{6/7}n=\cos\frac{2\pi}{6/7}(n+N)$

$$\frac{2\pi}{6/7}N=2k\pi \quad \Rightarrow N=\frac{6}{7}k \;\Rightarrow Perioda\ N=6\ za\ k=7$$

c) $x(n)=x(n+N) \Leftrightarrow \sin 3n=\sin 3(n+N)$

$$3N=2k\pi \;\Rightarrow\; N=\frac{2k\pi}{3}$$

c)Nije periodičan signal pošto N nije ceo broj

Generisanje diskretnog signala

- Većina realnih signala koji se sreću u prirodi su vremenski kontinualni signali
- U cilju njihove obrade korišćenjem digitalnih sistema oni se moraju prevesti u digitalne signale
- Prilikom prevođenja obavljaju se dva procesa diskretizacije:
  - Diskretizacija po vremenu (odabiranje)
  - Diskretizacija po amplitudi (kvantovanje)
- Nakon odabiranja dobijamo diskretni signal
- Nakon kvantovanja dobijamo digitalni signal

Generisanje diskretnog signala

- Obično se ova dva procesa odvijaju istovremeno i obavljaju se korišćenjem **A/D** konvertora
- Čitav proces se naziva analogno-digitalna (**A/D**) konverzija
- Značajan je i obrnuti postupak prevođenja digitalnog signala u kontinualni signal
- Ovaj proces se naziva digitalno-analogna konverzija i ostvaruje se korišćenjem **D/A** konvertora

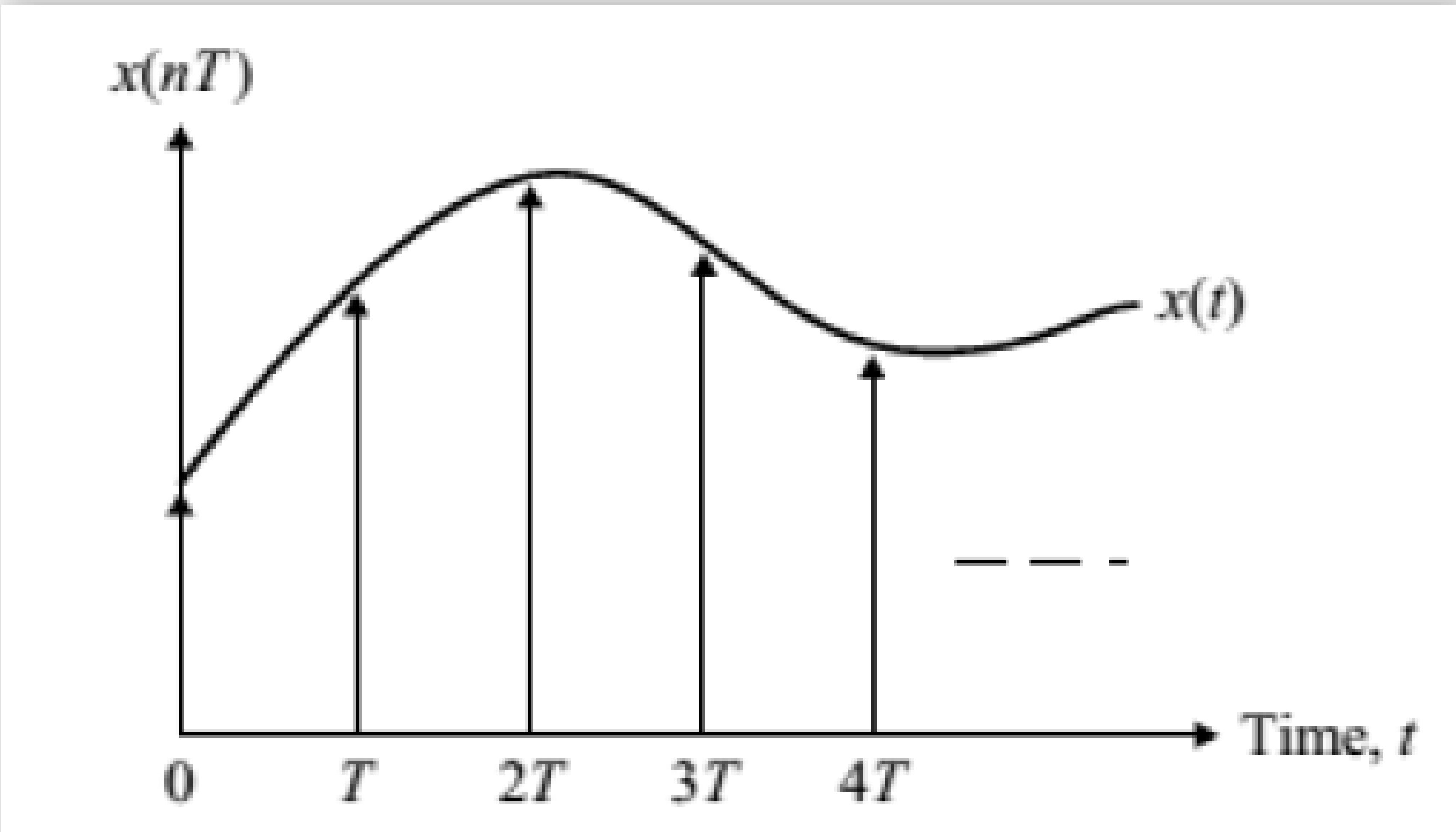
Diskretizacija po vremenu

- Proces diskretizacije po vremenu kontinualnog signala dovodi do degradacije signala jer se od kontinualnog signala zadržavaju samo vrednosti koje se nalaze na ekvidistantnom rastojanju na vremenskoj osi, a sve ostale vrednosti se gube
- Postavlja se pitanje, koliko često treba uzimati vrednosti kontinualnog signala, a da se pri tome očuvaju sve informacije koje taj signal nosi
- Drugim rečima, kolika je frekvencija odabiranja kontinualnog signala potrebna da se garantuje očuvanje informacija koje taj signal nosi?

Teorema odabiranja

- Diskretizacija po vremenu je proces koji omogućava da se jedan kontinualni signal x(t) predstavi sekvencom digitalnih vrednosti x[n]
- Odbirci x[n] predstavljaju vrednosti signala u zadatim trenutcima vremena
- x[n]=x[nT_s] , $gde\ je\ T_s$ perioda odabiranja
- Perioda odabiranja
- $\boldsymbol{T_s = \frac{1}{f_s}}$
- $\boldsymbol{f_s}$ - predstavlja frekvenciju odabiranja
- Frekvencija odabiranja $\boldsymbol{f_s}$ određuje broj odbiraka u jednoj sekundi signala u diskretnom domenu.

Primer analognog signala *x(t)* i njegove diskretne prezentacije *x(nT)*



Teorema odabiranja

- Prilikom izbora frekvencije odabiranja postoji kriterijum koji se mora ispoštovati.
- Ovaj kriterijum opisan je teoremom o odabiranju koja glasi:
- *Frekvencija odabiranja signala treba da je dva puta veća od najveće frekvencije prisutne u signalu da bi se taj signal mogao rekonstruisati bez izobličenja iz signala dobijenog odabiranjem signala x(t).*

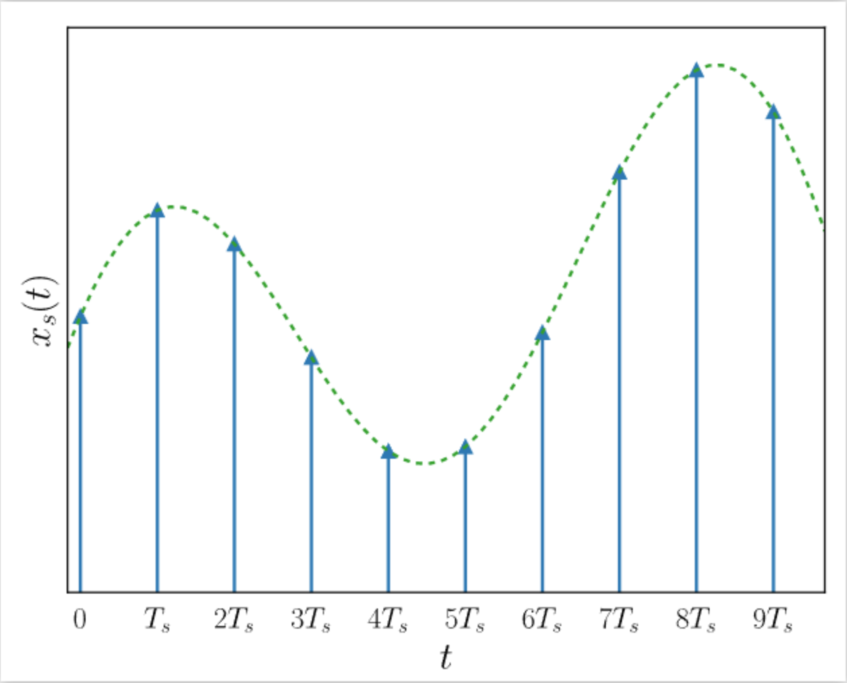
$$f_s \geq 2 f_M$$

- Granična frekvencija određena frekvencijom odabiranja

$f_N = \frac{f_s}{2}$ - naziva se Nikvistova frekvencija.

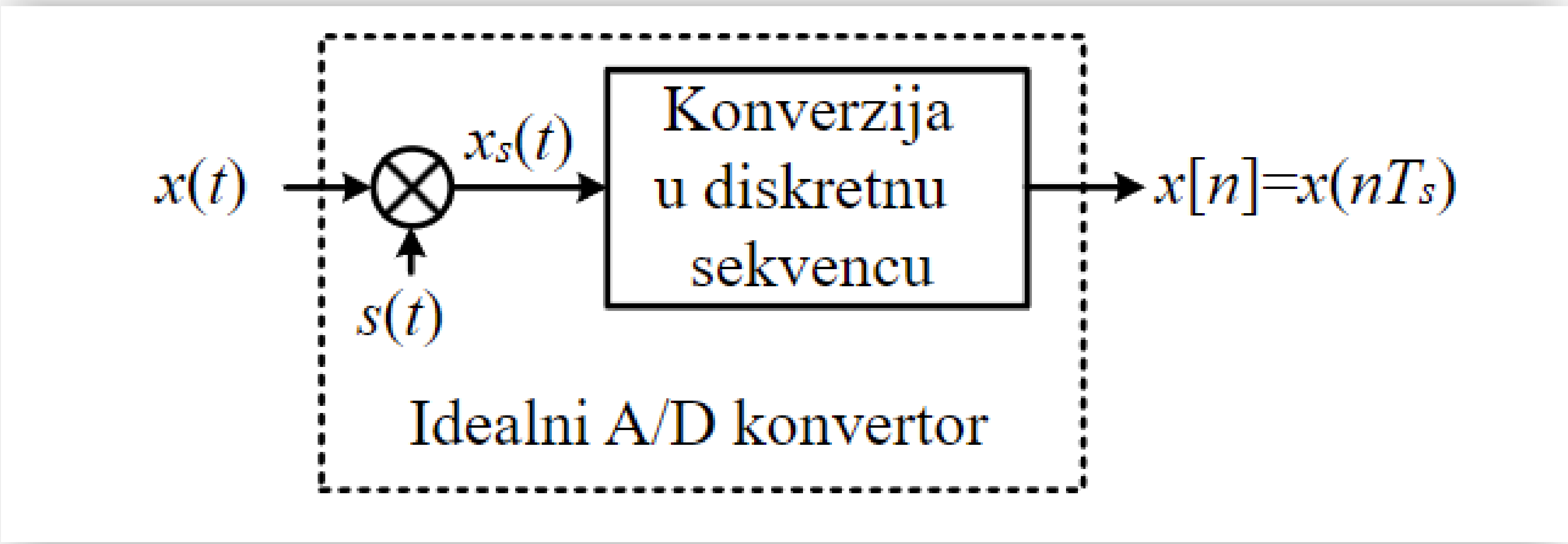
Teorema odabiranja

- Matematički, odabiranje signala i teorema o odabiranju se može pokazati preko odabiranja povorkom Dirakovih impulsa
- x_s(t)=$x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT_s)$
- x_s(t)=$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$

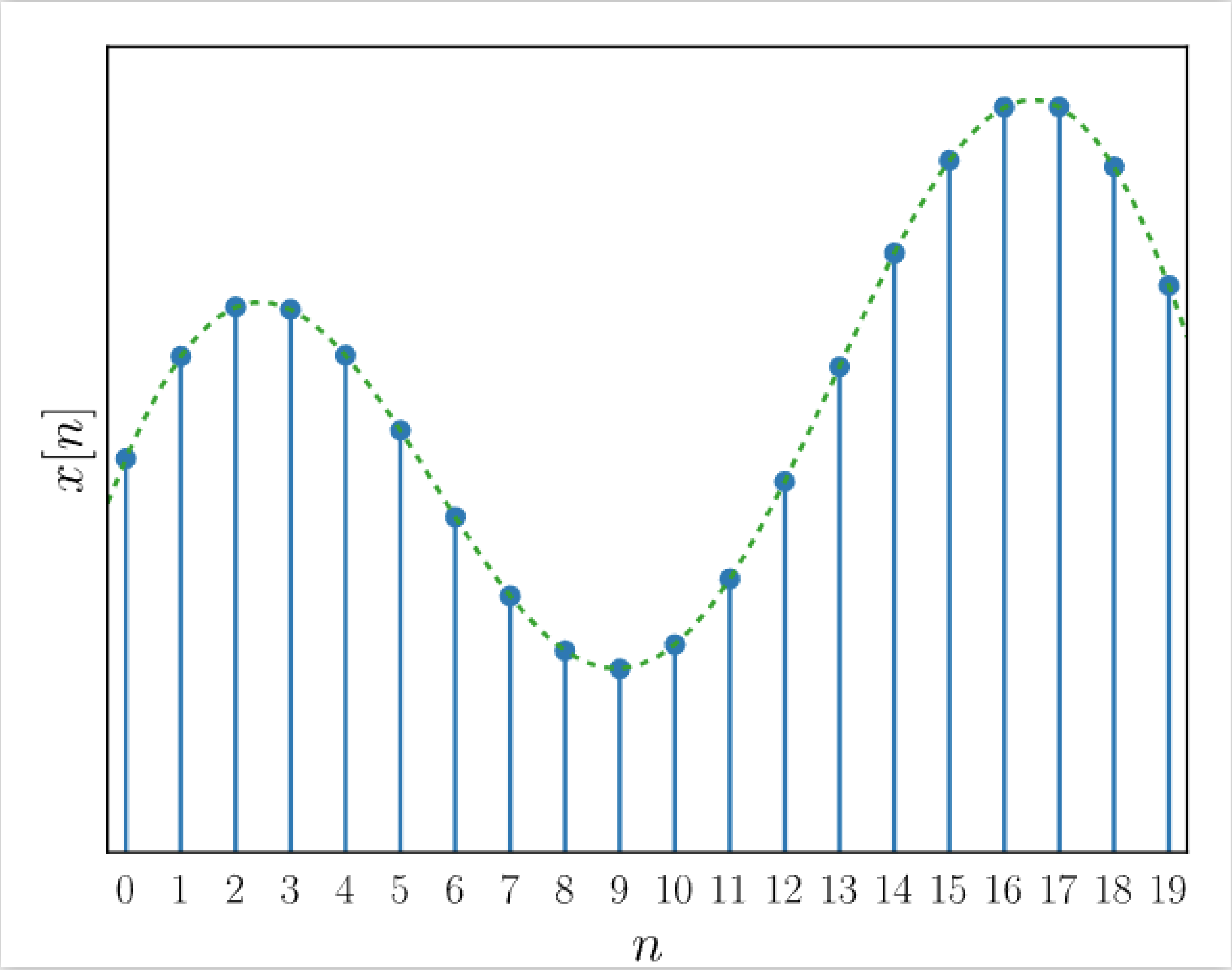


Diskretizacija signala

- Signal $x_s(\mathrm{t})$ je i dalje analogni signal.
- Diskretni signal x[n] predstavlja niz vrednosti odabiranih u trenucima nT_s



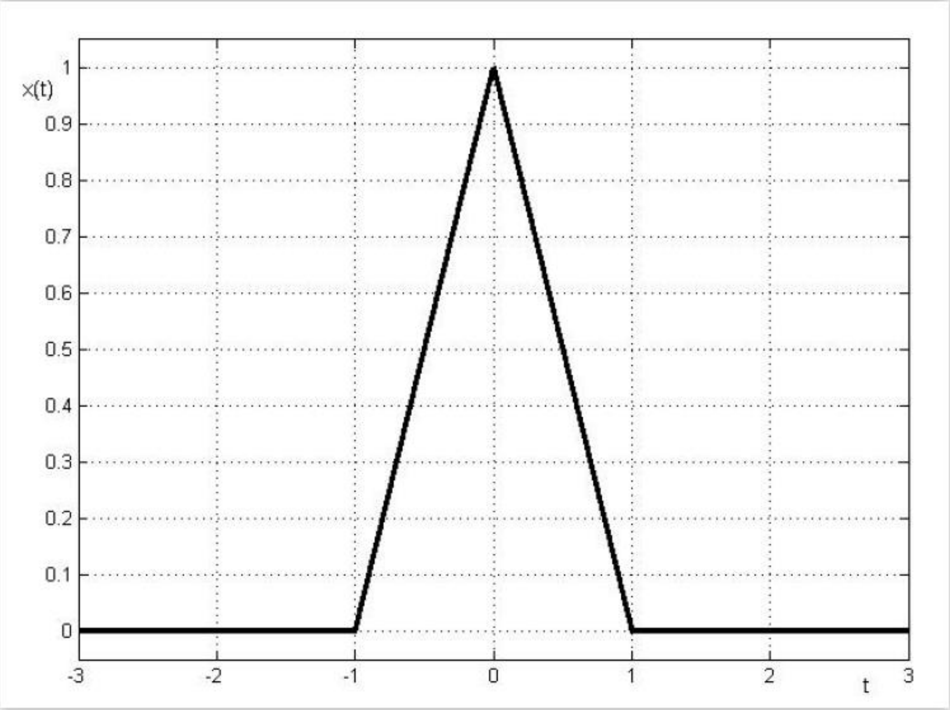
Diskretizacija signala



Primer 7: Vremenski signal x(t) opisan je relacijom:

$$x(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 \le t \le 1 \\ 0 & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

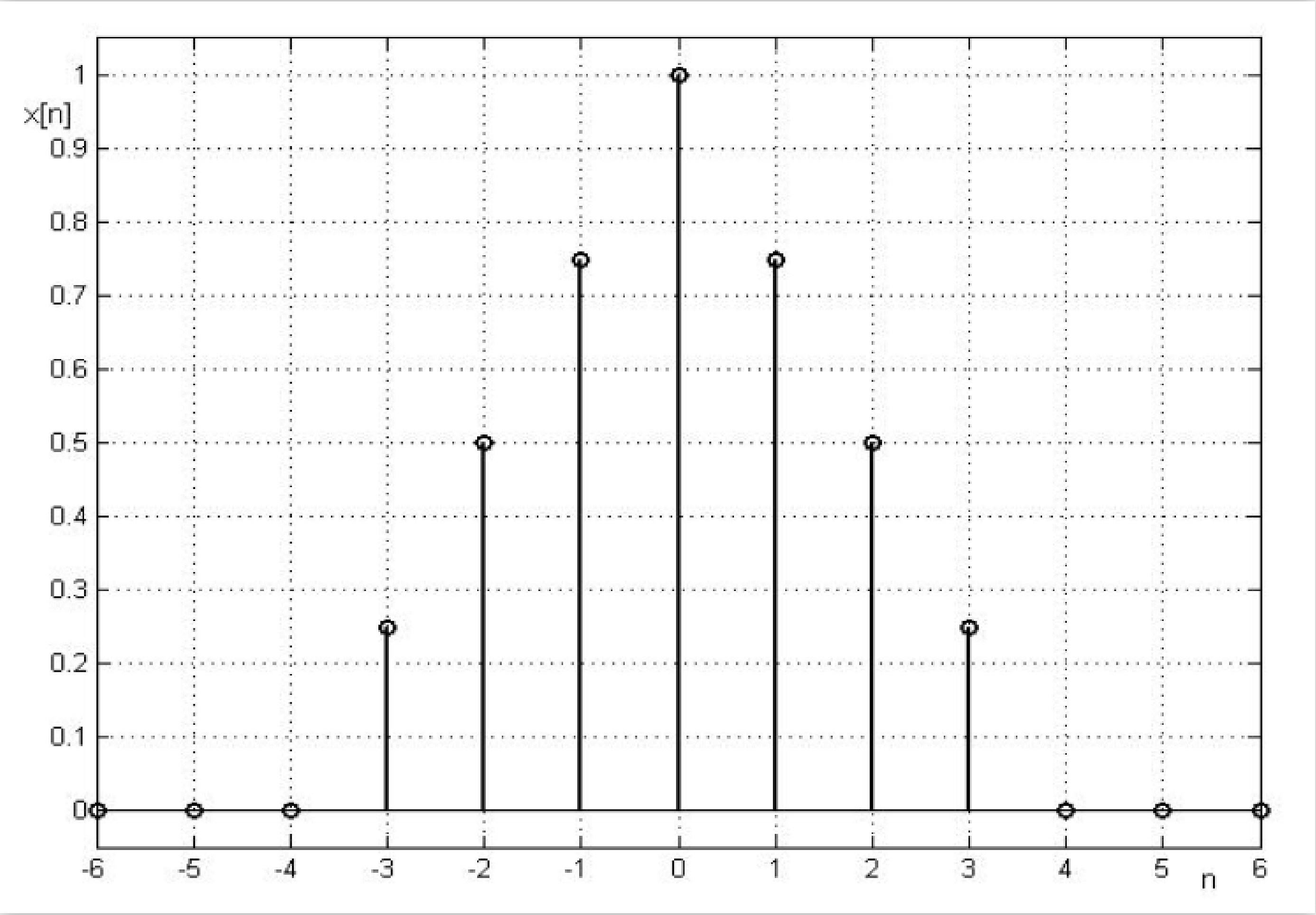
- Skicirati sekvencu signala koji se dobija ako je perioda odabiranja: a) 0.25 s; b) 0,5 s; c) 1 s
- **Rešenje:**



$$x(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 \le t \le 1 \\ 0 & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

Primer 7: Vremenski signal x(t) opisan je relacijom: $x(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 \le t \le 1 \\ 0 & t < -1, t > 1 \end{cases}$

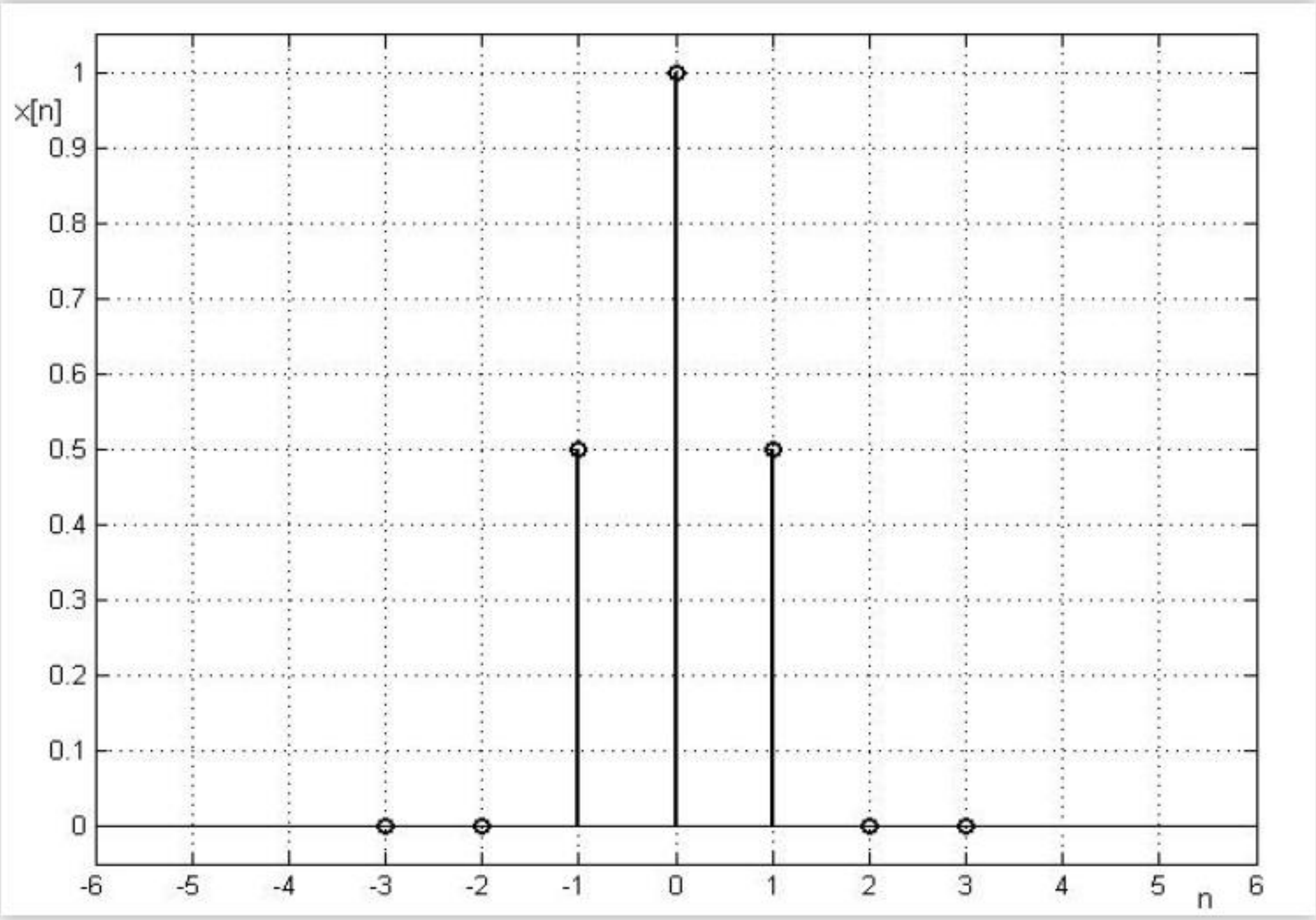
- a) T_S= 0.25 s; x[n] = {...,0,0.25,0.5,0,75,[1],0,75, 0.5,0.25,0,...}



Primer 7: Vremenski signal x(t) opisan je relacijom:

$$x(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 \le t \le 1 \\ 0 & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

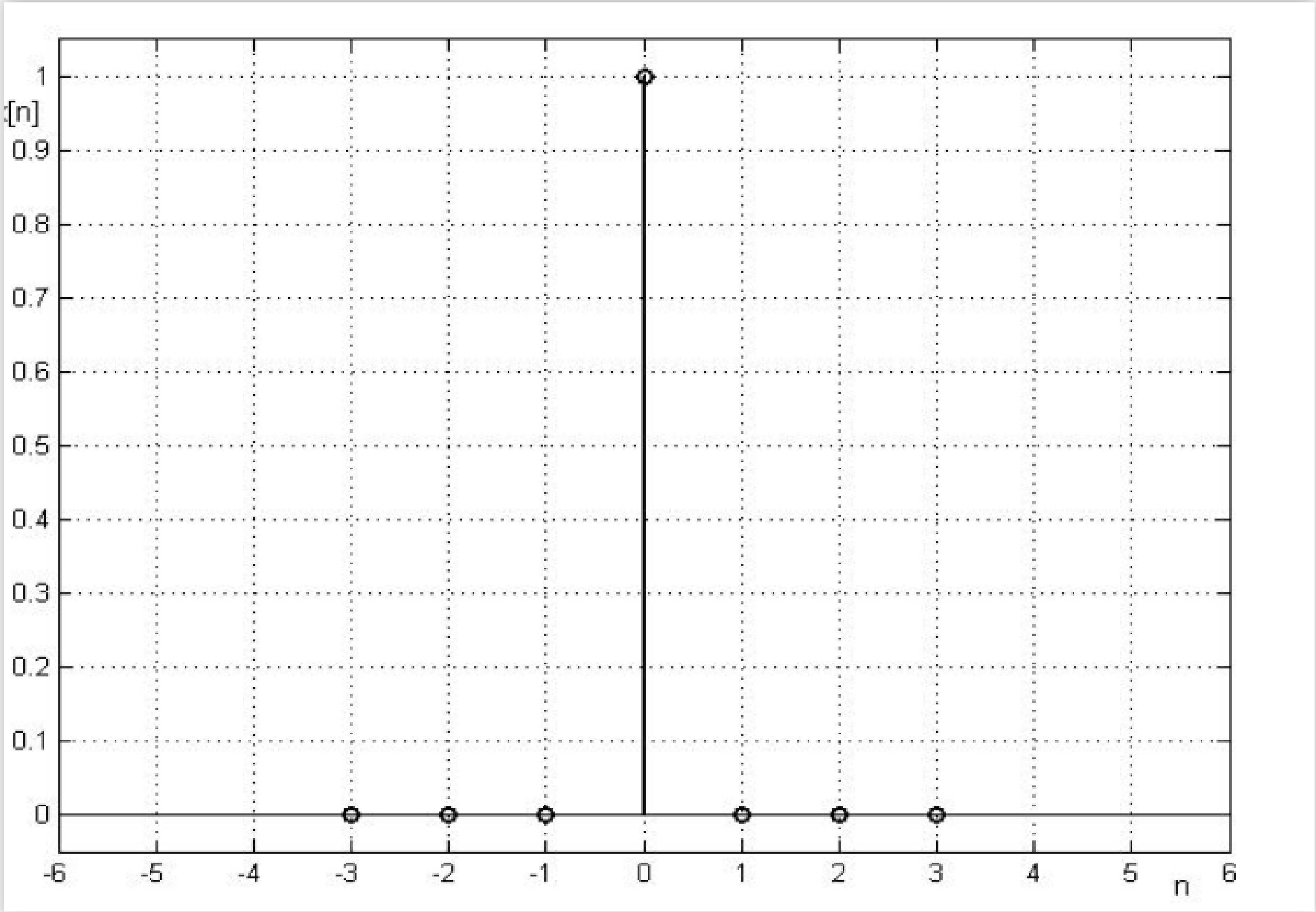
- b) T_s= 0.5 s; x[n] = {...,0,0.5,,[1], 0.5,0,...}



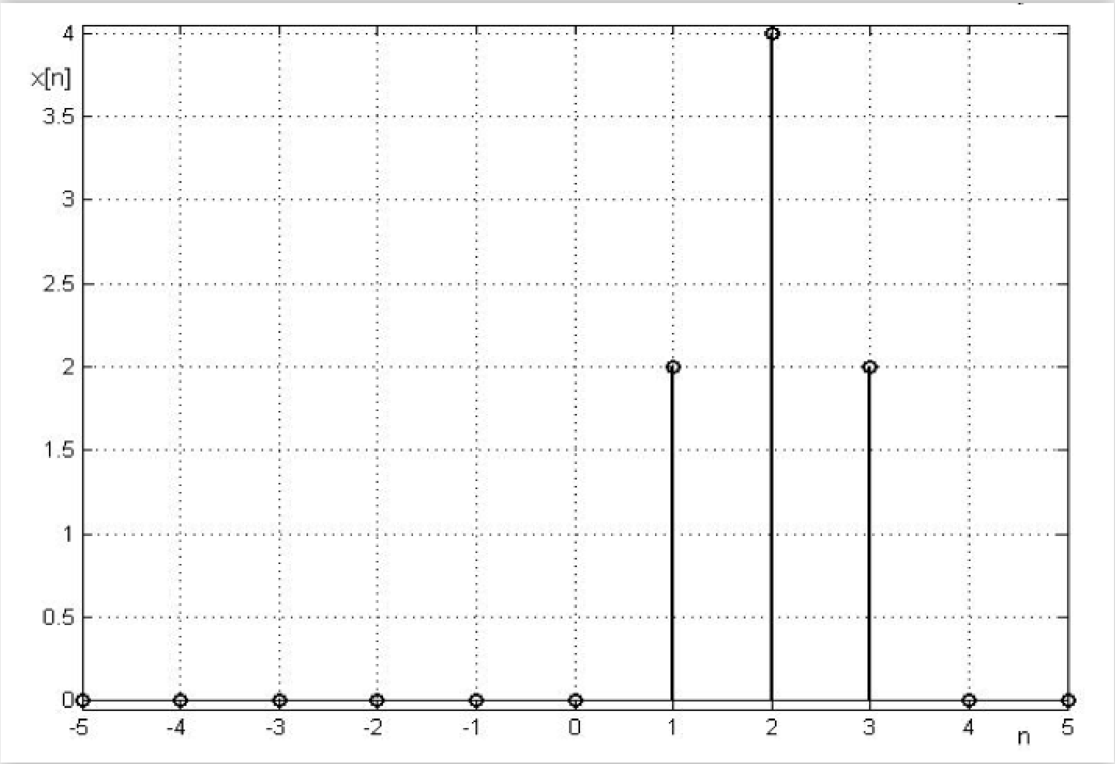
Primer 7: Vremenski signal x(t) opisan je relacijom:

$$x(t)=\begin{cases}1-|t| & -1\le t\le 1\\ 0 & t<-1, t>1\end{cases}$$

- c) T_s= 1 s; x[n] = {...,0, [1], 0,...}



P8: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.



- $x[n] = \{\ldots,0,0,0,0,[0],2,4,2,0,\ldots\}$
- $x[-n] = \{\ldots,0,2,4,2,[0],0,0,0,0,---\}.$

P8: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.

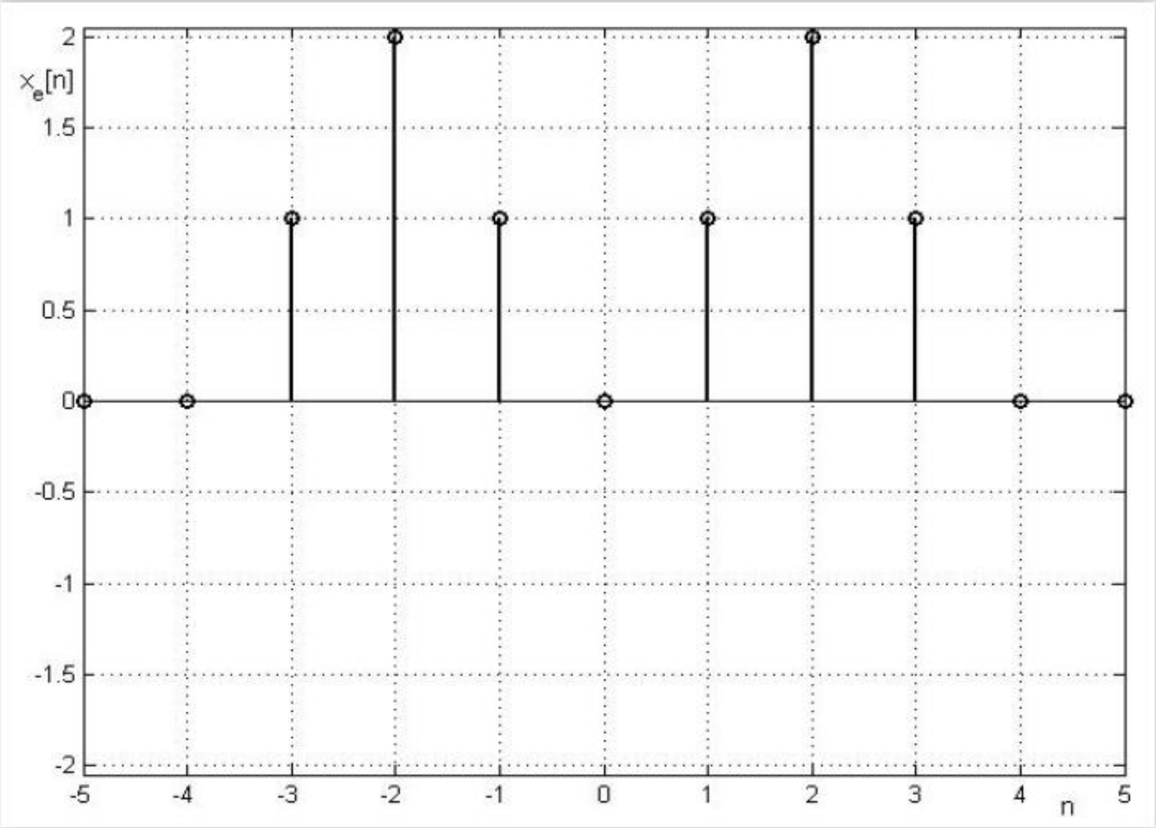
- $x[n] \quad = \{...,0,0,0,0,[0],2,4,2,0,...\}$
- $x[-n] = \{...,0,2,4,2,[0],0,0,0,0,---\}$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_e[n] = \{\ldots,0,1,2,1,[0],1,2,1,0,\ldots\},$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_o[n] = \{\ldots,0,-1,-2,-1,[0],1,2,1,0,\ldots\}$$

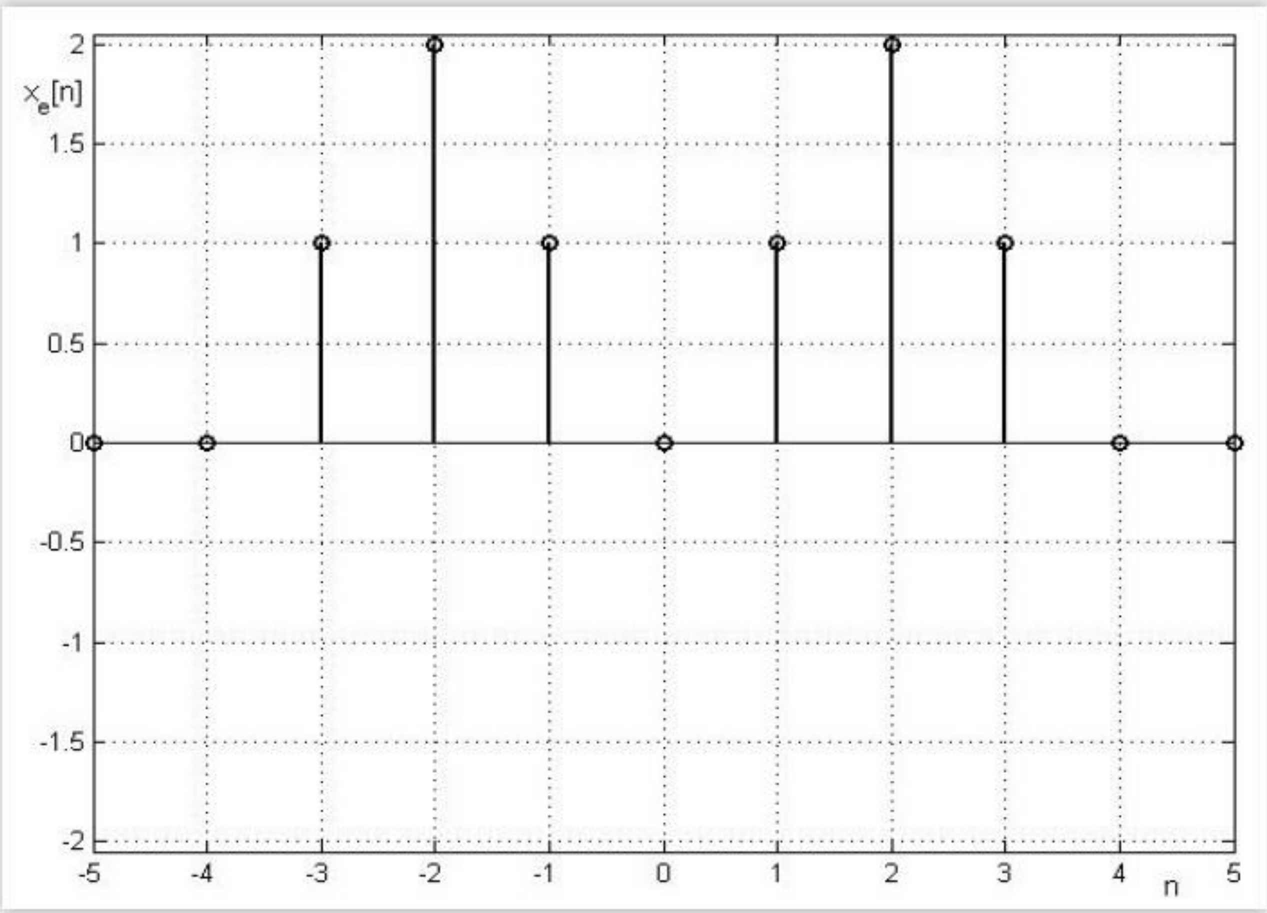
P8: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.

$$x_e[n] = \{\ldots, 0, 1, 2, 1, \boxed{0}, 1, 2, 1, 0, \ldots\},$$

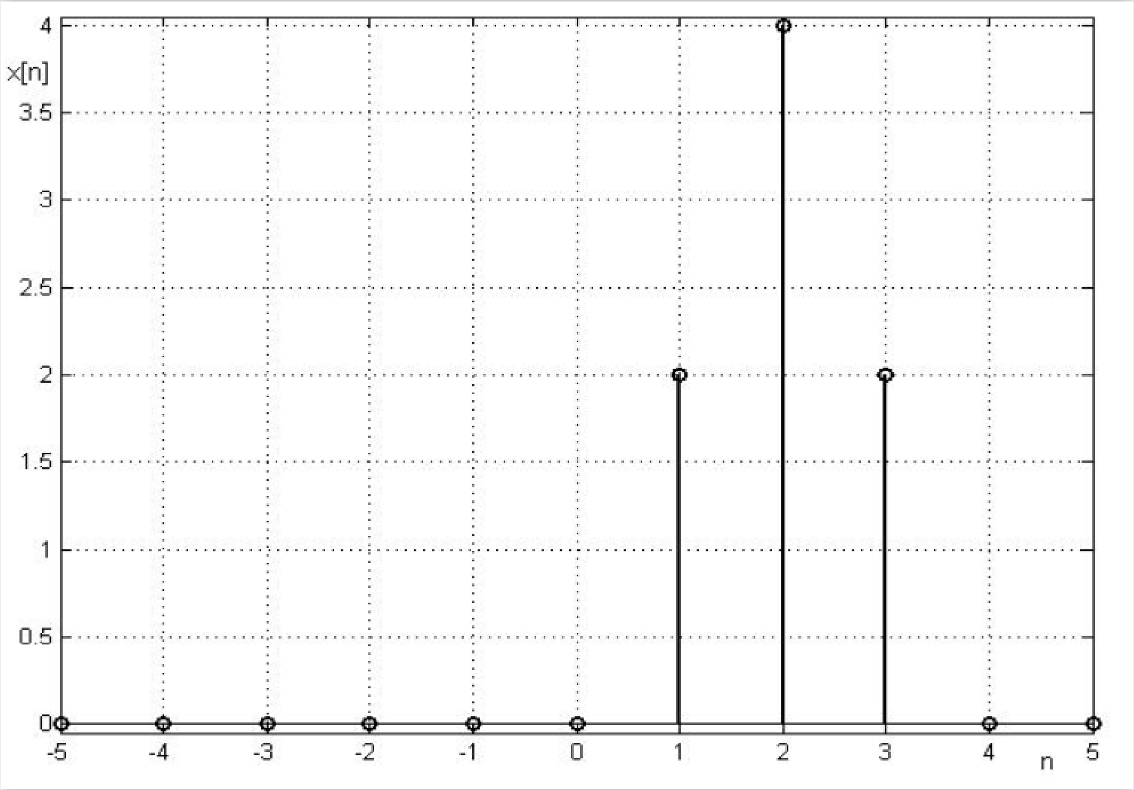


P8: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.

$$x_o[n] = \{\ldots, 0, -1, -2, -1, \boxed{0}, 1, 2, 1, 0, \ldots\}$$



P9: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.



$$x[n]=\{\ldots,0,0,0,0,\boxed{0},2,4,2,0,\ldots\},$$

P9: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.

$$x[n] = \{\ldots,0,0,0,0,\boxed{0},2,4,2,0,\ldots\},$$

$$x[-n] = \{\ldots,0,2,4,2,\boxed{0},0,0,0,0,\ldots\}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

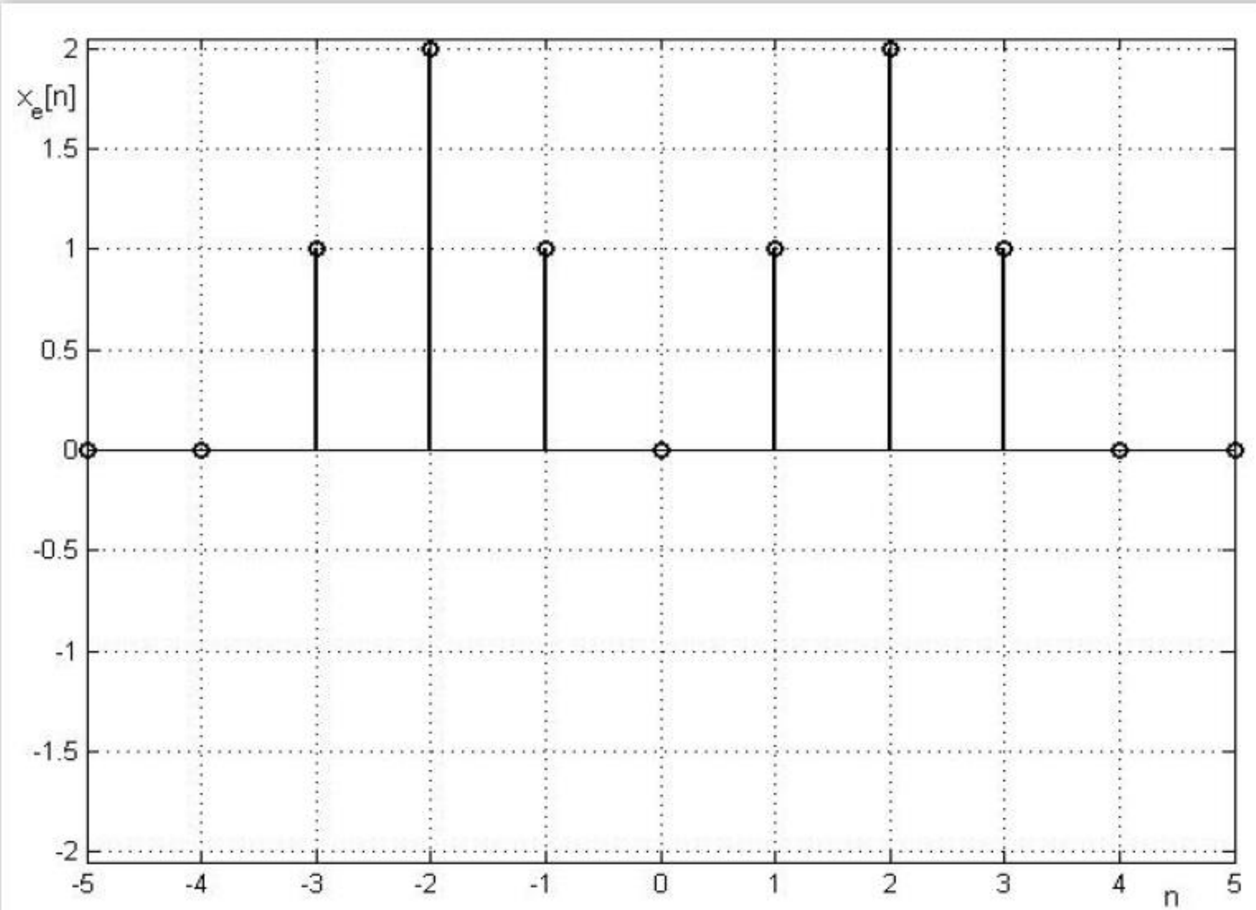
$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

$$x_e[n] = \{\ldots,0,1,2,1,\boxed{0},1,2,1,0,\ldots\},$$

$$x_o[n] = \{\ldots,0,-1,-2,-1,\boxed{0},1,2,1,0,\ldots\}$$

P9: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.

$$x_e[n] = \{\ldots,0,1,2,1,[0],1,2,1,0,\ldots\},$$



P9: Za signal sa slike izračunati i skicirati parnu i neparnu komponentu signala.

$$x_o[n] = \{\ldots,0,-1,-2,-1,\boxed{0},1,2,1,0,\ldots\}$$