P8 MODEL SISTEMA U PROSTORU STANJA

Predmet. Signali i sistemi

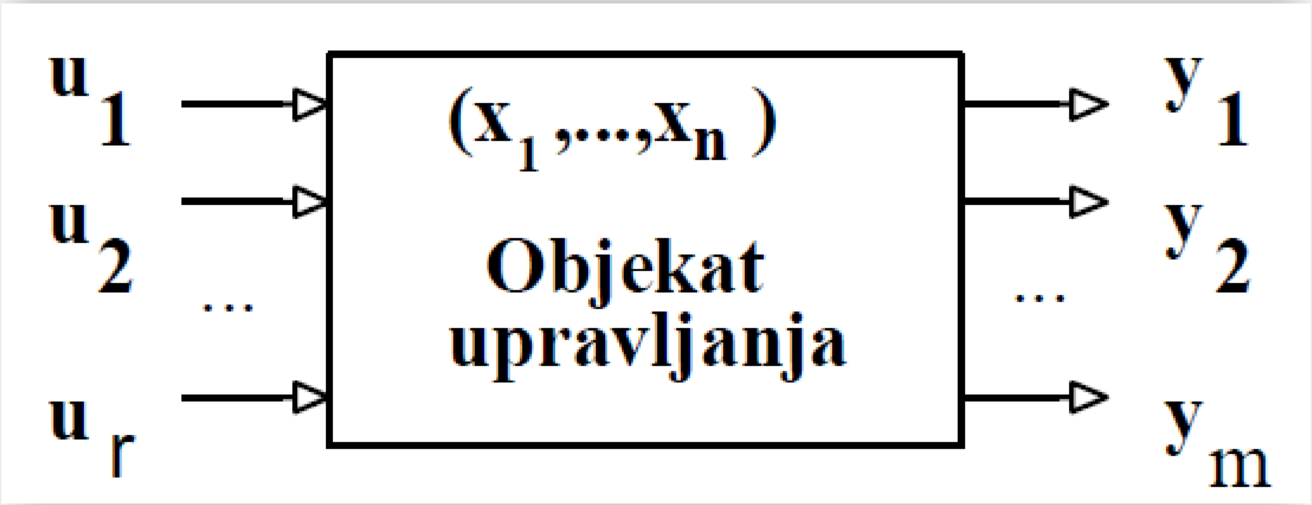
Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Matematički model sistema u prostoru stanja se predstavlja u vidu skupa diferencijalnih ili diferencnih jednačina **prvog** reda.
- Jednačine opisuju prošlo, sadašnje i buduće ponašanje sistema.
- U jednačinama figurišu promenljive stanja koje se definišu kao minimalan skup promenljivih $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ posmatrano od vremena $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$, koji zajedno sa zadatim ulazom $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_r}$ određuje stanje sistema u budućem vremenu $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0}$

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Koncept prostora stanja ima nekoliko prednosti u odnosu na klasični pristup, posebno ako se posmatra sa aspekta korišćenja digitalnih računara:
  1. Određivanje rešenja sistema diferencijalnih jednačina prvog reda je brže na digitalnom računaru, nego rešavanje odgovarajuće diferencijalne jednačine višeg reda.
  2. Uprošćeno je matematičko opisivanje korišćenjem vektorske notacije.
  3. Uključivanje početnih uslova sistema je jednostavno.
  4. Može da se primeni i na vremenski promenljive, nelinearne, stohastičke i diskretne sisteme.

Model u prostoru stanja
Blok šema multivarijabilnog sistema



- Ulazne promenljive $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_r}$ se mogu predstaviti u obliku ulaznog vektora **u**
- Izlazne veličine $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_m}$ se mogu predstaviti sa izlaznim vektorom **y**
- Izlazni vektor **y** je funkcija ulaza **u** i početnih uslova.

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Model sistema u prostoru stanja (**MUPS**). predstavlja sistem diferencijalnih jednačina prvog reda kojima se opisuje dinamika sistema.
- **Za kontinualne sisteme:**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

- Promenljive stanja predstavljaju minimilan skup linearno nezavisnih promenljivih, pri čemu one mogu, ali ne moraju da imaju fizički smisao.
- U opšem obliku sistemi su nelinearni sa vremenski promjenljivim koeficijentima.

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Za kontinualne linearne vremenski invarijante sisteme **(LTI)**:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}}$$

- jednačine stanja

- izlazne jednačine

$\dot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor stanja,

$\mathbf{u}(t)$ je ulaz sistema,

$\mathbf{y}(t)$ je izlaz sistema.

Matrice ***A*, *B*, *C* i *D*** sadrže koeficijente koji određuju dinamiku sistema

Analitičkim putem se određuju vremenski oblici promjenljivih stanja $x(t)$ i izlaza sistema $y(t)$, za zadate početne uslove i pobudu sistema $u(t)$.

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Model sistema u prostoru stanja omogućava da se sistem opisan linearnom diferencijalnom jednačinom višeg reda dobije u vidu sistema diferencijalnih jednačina prvog reda.
- Koncept prostora stanja se odnosi na opisivanje dinamike sistema minimalnim brojem varijabli koje se zovu *promjenljive stanja*
- Na takav način da odziv sistema u poptunosti definisan za bilo koji ulazni signal.
- Za razliku od funkcije prenosa, ovaj način modelovanja daje mogućnost uvid u sve promjenljive sistema, a ne samo u izlaz sistema.

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Generalna forma LTI sistema u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$ - jednačine stanja

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$ - izlazne jednačine

- Jednačine stanja i izlazne jednačine se zapisuju u matričnom obliku.
- Matrični zapis je pogodiniji za matematičku analizu i simulaciju sistema.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{np} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}$$

SS model

Dimenzije matrica

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$ - jednačine stanja

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$ - izlazne jednačine

- Dimenzije ovih matrica sa konstantnim koeficijentima su sledeće:

matrica stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrica upravljanja

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

matrica izlaza

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

matrica ulaza/izlaza

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Svaki sistem čije je ponašanje moguće opisati sa konačnim brojem promenljivih stanja naziva se sistem sa koncentrisanim parametrima.
- Svaka tačka u prostoru stanja definiše stanje sistema u toj tački i u njenoj neposrednoj blizini.
- Dinamičko ponašanje ovakvih sistema je moguće opisati sistemom običnih diferencijalnih jednačina, jer je vreme jedina nezavisna promenljiva.
- Za razliku od prethodnih sistema, postoji klasa sistema kod kojih se kao nezavisna promenljiva pored vremena pojavljuje i položaj u prostoru.
- Dinamičko ponašanje ovih sistema se opisuje sa sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Model u prostoru stanja (State Space, SS)

- Prilikom izbora promenljivih stanja treba ih birati tako da one budu linearno nezavisne.
- Nezavisne promenljive stanja su one promenljive koje se ne mogu izraziti pomoću preostalih promenljivih stanja.
- Svaka promenljiva stanja ne mora imati fizičku interpretaciju ili smisao.
- Kao fizičke promenljive se obično usvajaju one promenljive koje predstavljaju fizičke promenljive odgovarajućih skladišta energije.
- Broj promenljivih stanja potreban da opiše dinamiku sistema jednak ili manji od broja energetskih skladišta u sistemu.
- Skladište energije u proizvoljnom sistemu predstavlja elemenat sposoban da primi i uskladišti odgovarajuću energiju

Postupak određivanja modela u prostoru stanja za FP prvog reda

- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s+a}$

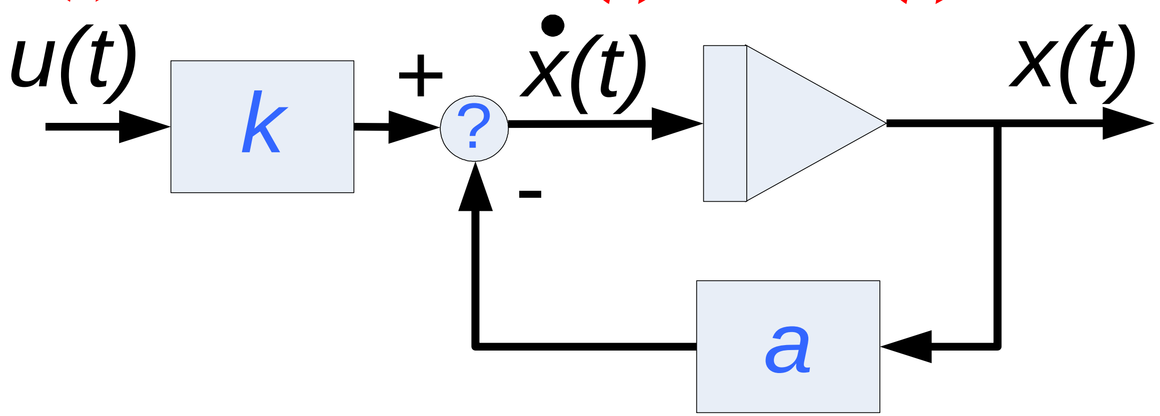
$Y(s)(s+a)=KU(s)$

$sY(s)+aY(s)=KU(S)$

- **Uvesti smenu X(s)=Y(S)**

$sX(s)+aX(s)=KU(S)$

$\dot{x}(t)+ax(t)=Ku(t);$ $\dot{x}(t)= -ax(t)+Ku(t)$



Model sistema u prostoru stanja

- U opštem slučaju pri formiranju modela u prostoru stanja polazi se od njegove funkcije prenosa
- Funkcija prenosa predstavljena je količnikom polinoma kompleksne promenjive sa realnim koeficijentima
- $\mathbf{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$
- Za sistem dat prenosnom funcijom drugog reda
- $\mathbf{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$
- Polinom u imeniocu treba svesti da koeficijent uz najveći stepen ima vrednost **1**

$$\mathbf{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{a_2}}{s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2}}$$

Model sistema u prostoru stanja

$$\mathbf{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{a_2}}{s^2+\frac{a_1}{a_2}\mathbf{s}+\frac{a_0}{a_2}}$$

Uvođenjem smena: $K=\frac{1}{a_2}$; $b=\frac{a_1}{a_2}$; $c=\frac{a_0}{a_2}$; funcija dobija oblik:

$$\mathbf{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2+b\mathbf{s}+c} = \frac{Y(s)}{U(s)}\,\frac{Y_1(s)}{Y_1(s)},$$

što može da se predstavi kao redna (serijska) veza dve funcije prenosa

$$G_1\mathbf{(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+b\mathbf{s}+c}$$

$$G_2\mathbf{(s)} = \frac{Y(s)}{Y_1(s)} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{G(s)} = G_1\mathbf{(s)}\ G_2\mathbf{(s)}$$

Model sistema u prostoru stanja

Ako se prva funcija definiše kao odnos kompleksnih likova

- $\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+bs+c}$; dobija se jednačina
- $(s^2+bs+c)Y_1(s) = U(s)$
- $s^2Y_1(s) = U(s) - bsY_1(s) - cY_1(s)$
- Uvođenjem zamena:
- $s^2Y_1(s) = \ddot{Y}_1$ - predstavlja drugi izvod kompleksnog lika
- $sY_1(s) = \dot{Y}_1$ - predstavlja prvi izvod kompleksnog lika
- Dobija se jednačina
- $\ddot{Y}_1 = U(s) - b\dot{Y}_1 - cY_1$

Model sistema u prostoru stanja

$$\ddot{Y}_1 = U(s) - b\dot{Y}_1 - cY_1;$$

$$Y = KY_1$$

- Ako se izlazi integratora usvoje kao nove promenjive:
- $X_1(s) = Y_1(s)$
- $X_2(s) = \dot{Y}_1,$
- ***Sistem se može opisati DJ prvog reda:***

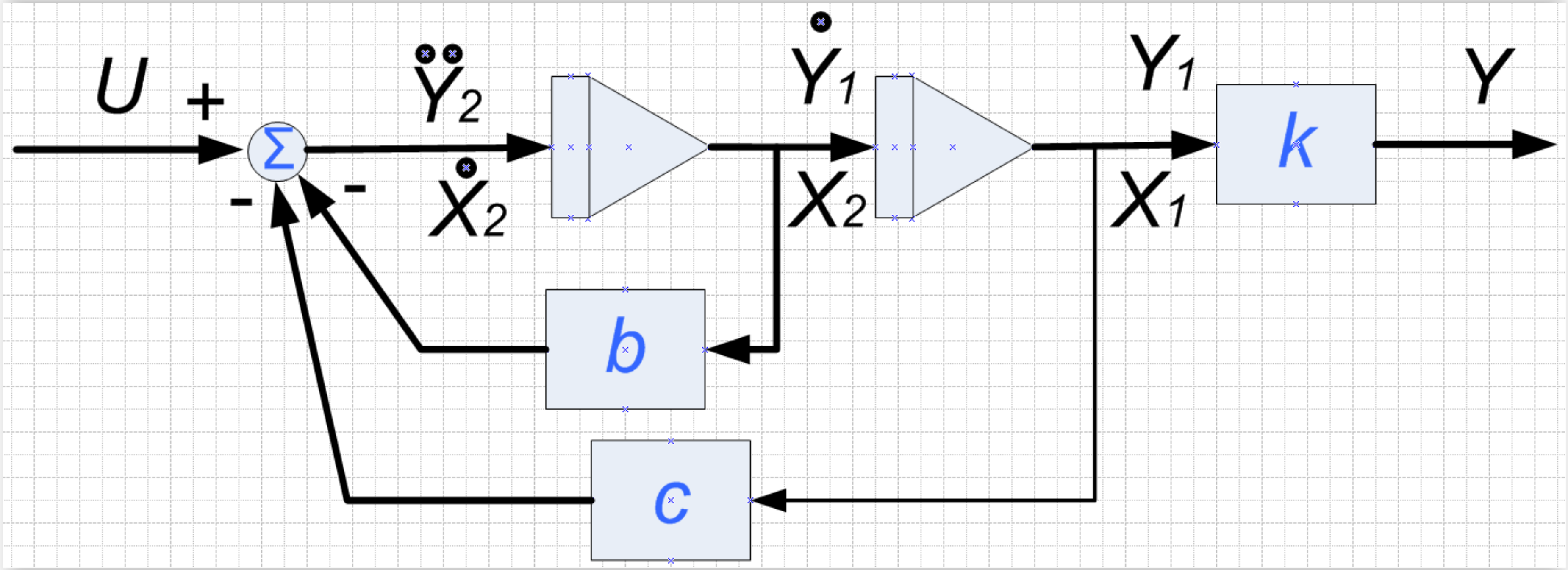
$$\dot{X}_1(s) = X_2(s)$$

$$\dot{X}_2(s) = U(s) - bX_2(s) - cX_1(s)$$

Model sistema u prostoru stanja

$\dot{X}_1(s) = X_2(s)$;

$\dot{X}_2(s) = U(s) - bX_2(s) - cX_1(s)$



Model sistema u prostoru stanja

$\dot{X}_1(s) = X_2(s)$;

$\dot{X}_2(s) = U(s) - bX_2(s) - cX_1(s)$

$\dot{X}_1(s) = 0X_1(s) + X_2(s) + 0U(s)$;

$\dot{X}_2(s) = -cX_1(s) - bX_2(s) + U(s)$

- Ovaj sistem DJ prvog reda može se predstaviti u matričnom obliku:
- $\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ U(s)
- Y(s) = $\begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$ + [0] U(s)

Opšti oblik modela u prostoru stanja

$\dot{X}(s) = AX(s) + BU(s)$ - Jednačina stanja

$Y(s) = CX(s) + DU(s)$ - Jednačina izlaza sistema

Gde su:

- X(s)=$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$, A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix}$ i D= [0]

Slučaj kada je funcija prenosa data u faktorizovanom obliku

- $\frac{\boldsymbol{Y(s)}}{\boldsymbol{U(s)}} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{s^2+bs+c}}$ = **K**$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+p_1}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+p_2}}$,
- p_1 i p_2 su koreni karakteristične jednačine s^2+bs+c=0
- Sistem DJ ima oblik

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{(s)} = -p_1 \boldsymbol{X}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{(s)} + \boldsymbol{X}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{(s)}$$

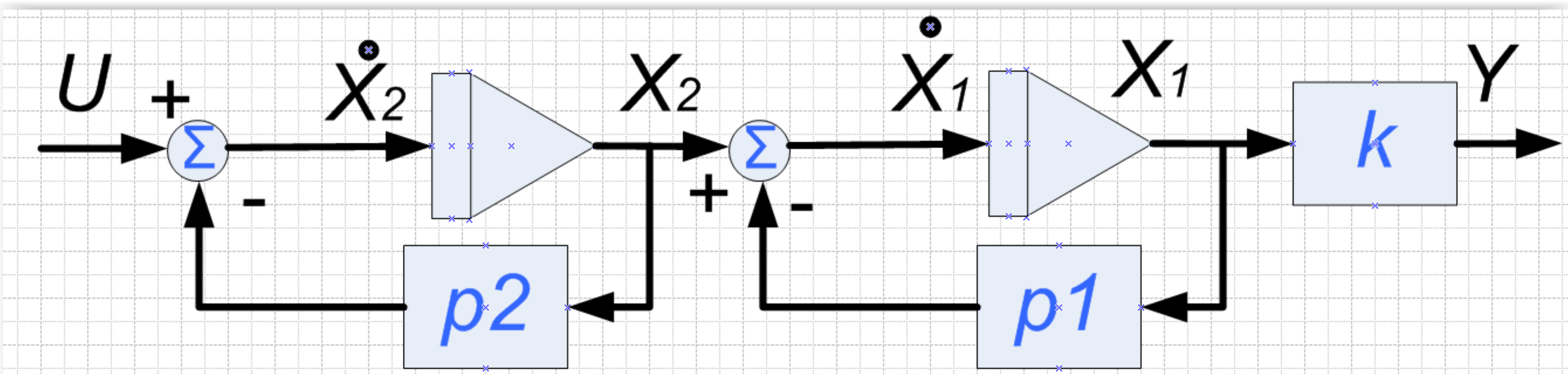
$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{(s)} = \boldsymbol{U(s)} - p_2 \boldsymbol{X}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{(s)}$$

Jednačine stanja i izlaza sistema su:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{(s)} \\ \dot{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{(s)} \\ \boldsymbol{X}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{(s)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{U(s)}$$

Blok šema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2+bs+c} = K\frac{1}{s+p_1}\frac{1}{s+p_2}$$



$$\dot{X}_1(s) = -p_1 X_1(s) + X_2(s)$$
$$\dot{X}_2(s) = U(s) - p_2 X_2(s)$$

Primer 1. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

- G(s)=$\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}$

a) Rešenje metodom pomoćne promenljive:

G(s)= $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)}$

Brojilac i imenilac funcije pomnožiti pomoćnom promenjivom C(s)

G(s)= $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \frac{C(s)}{C(s)}$

Napisati odvojeno izraz za brojilac i izraz za imenilac funkcije prenosa:

Y(s)= (s+4) C(s)

U(s)= $(s + 1)(s + 3)C(s)$

Primer 1. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

Y(s)= (s+4) C(s)

U(s)= $(s+1)(s+3)C(s)$

Y(s)= s C(s) +4 C(s)

U(s)= $s^2C(s)$+ 4s C(s) +3 C(s)

Izvršiti inverznu Laplasovu transformaciju

y(t)=$\dot{c}$(t)+4c(t)

u(t)=$\ddot{c}$(t)+4$\dot{c}$(t)+3c(t)

$\ddot{c}$(t) = u(t) - 4$\dot{c}$(t) -3c(t)

y(t)=$\dot{c}$(t)+4c(t)

Primer 1. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

$\ddot{c}$(t) = u(t) - 4$\dot{c}$(t) -3c(t)

y(t)=$\dot{c}$(t)+4c(t)

- Uvek za elemente vektora stanja birati izlaze integratora
- Redosled je s desna na levo i tim redom usvajamo elemente vektora stanja
- Izlaz drugog integratora je $\boldsymbol{x_1}$

$$x_1(t) = c(t)$$

$$x_2(t) = \dot{c}(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{c}(t) = u(t) - 4\dot{c}(t) - 3c(t)$$

$$\dot{x}_2 = u(t) - 4\,x_2(t) - 3\,x_1(t)$$

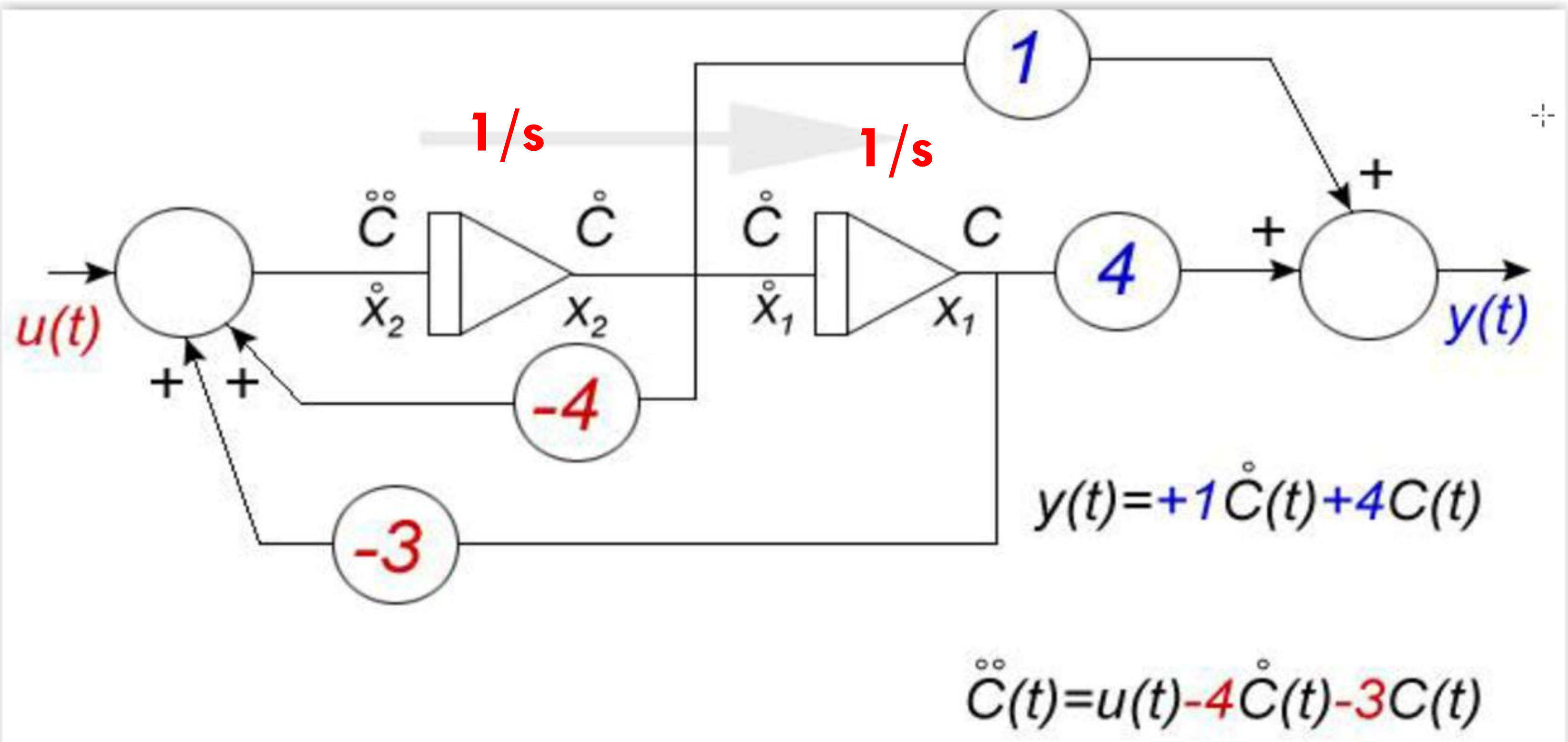
$$y(t) = \dot{c}(t) + 4c(t) = x_2(t) + 4\,x_1(t)$$

Primer 1. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

- Broj integratora u simulacionom blok dijagramu određuje red sistema

$$\dot{x}_2 = \mathbf{u(t) - 4}\ x_2\mathbf{(t) - 3}\ x_1\mathbf{(t)}$$

$$\mathbf{y(t)} = x_2\mathbf{(t) + 4}\ x_1\mathbf{(t)}$$



Primer 1. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

$x_1(\mathrm{t}) = \mathrm{c(t)}$

$\dot{x}_1(t) = x_2(\mathrm{t})$

$\dot{x}_2 = \mathrm{u(t)} - 4\, x_2(\mathrm{t}) - 3\, x_1(\mathrm{t})$

$\mathrm{y(t)} = x_2(\mathrm{t}) + 4\, x_1(\mathrm{t})$

$\dot{x}_1 = 0.x_1(\mathrm{t}) + 1.\, x_2(\mathrm{t}) + 0.\, \mathrm{u(t)}$

$\dot{x}_2 = -\, 3.x_1(\mathrm{t}) - 4.\, x_2(\mathrm{t}) + 1.\, \mathrm{u(t)}$

$\mathrm{y(t)} = 4\, x_1(\mathrm{t}) + 1.\, x_2(\mathrm{t}) + 0.\, \mathrm{u(t)}$

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathrm{x(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u(t)}$$

$$\mathrm{y(t)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{x(t)} + [0]\, \mathrm{u(t)}$$

Primer 1b. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

b) Rastavljanjem funkcije prenosa na sumu parcijalnih razlomaka

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}$$

$$G(s)=\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}=\frac{r_1}{s+1}+\frac{r_2}{s+3}$$

$$r_1=\lim_{s\to -1}(s+1)\cdot G(s)=\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}=\lim_{s\to -1}\frac{s+4}{s+3}=\frac{-1+4}{-1+3}=\frac{3}{2}$$

$$r_2=\lim_{s\to -3}(s+3)G(s)=\lim_{s\to -3}(s+3)\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}=\lim_{s\to -3}\frac{s+4}{s+1}=\frac{-3+4}{-3+1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Primer 1b. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3}$

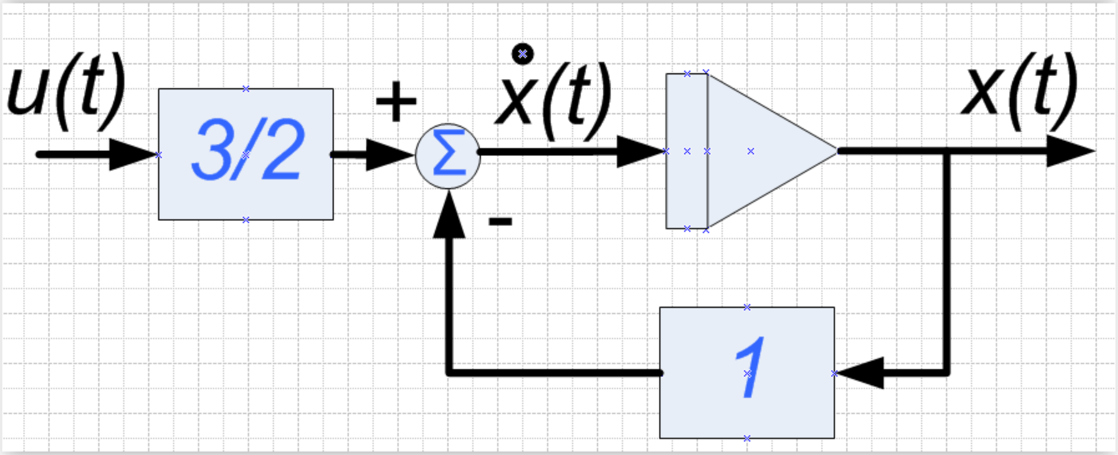
$\mathbf{Y(s)(s+1) = \frac{3}{2} U(s)}$

$\mathbf{sY(s) + Y(s) = \frac{3}{2} U(S)}$

- **Uvesti smenu X(s)=Y(S)**

$\mathbf{sX(s) + X(s) = \frac{3}{2}\, U(S)}$

- $\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{3}{2} u(t)$



Primer 1b. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$

$\dot{x}_2 = -3\, x_2(t) + u(t)$

$y(t) = \frac{3}{2} x_1(t) - \frac{1}{2} x_2(t)$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

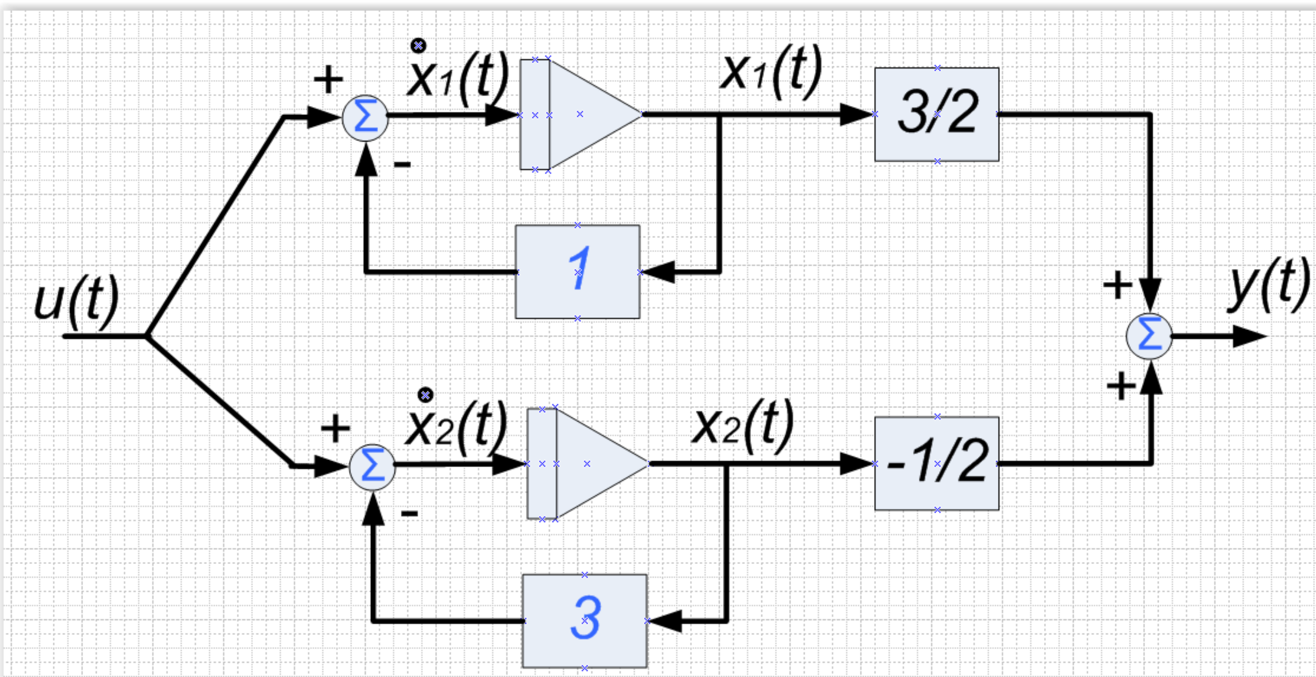
$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot\ x(t) + [0]\, u(t)$$

Primer 1b. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2 = -3\,x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = \frac{3}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t)$$



P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

G(s)= $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$

a) Direktno programiranje:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2+5s+6} \cdot \frac{E(s)}{E(s)}$$

$$U(s) = \left(s^2+5s+6\right)E(s) \quad C(s) = 5E(s)$$

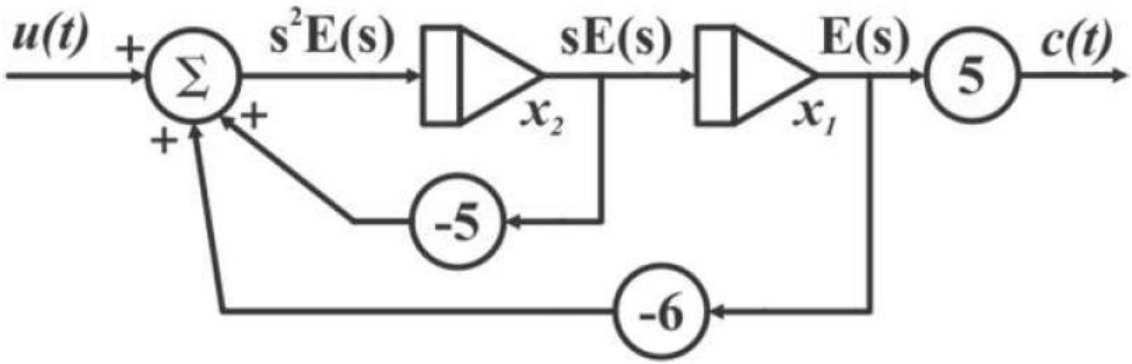
$$s^2E(s) = -5sE(s) - 6E(s) + U(s)$$

$$C(s) = 5E(s)$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

a) Direktno programiranje:



$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 5x_2 + u \\ c &= 5x_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix};\ H = 0 \end{aligned}$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

G(s)= $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$

a) Direktno programiranje:

$$G(s) = D(sI - A)^{-1} B + H$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ \frac{-6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [5 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ \frac{-6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{s^2+5s+6}$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

G(s)= $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$

b)Paralelno programiranje:

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)}$$

$$A = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)} \frac{5}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = 5$$

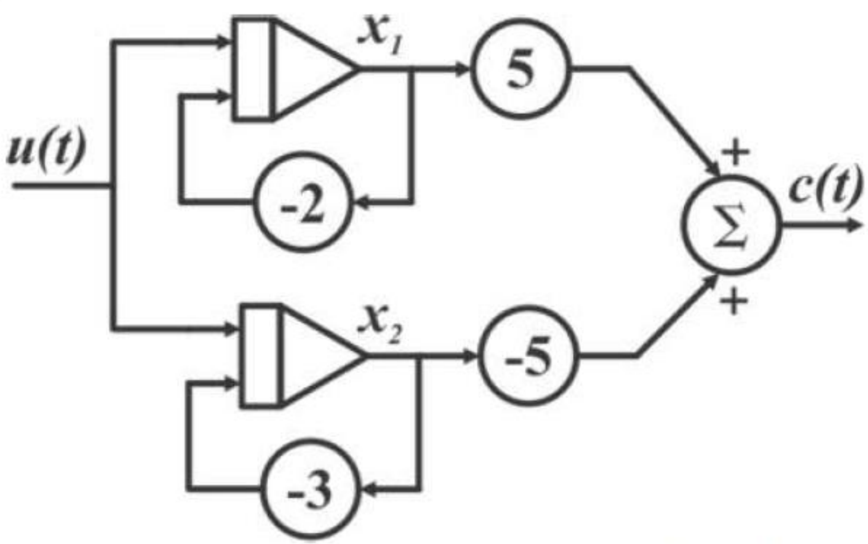
$$B = \lim_{s \to -3} \cancel{(s+3)} \frac{5}{(s+2)\cancel{(s+3)}} = -5$$

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)} - \frac{5}{(s+3)}$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{5}{s+2}-\frac{5}{s+3}$$

:



$$\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u$$

$$\dot{x}_1=-2x_1+u$$

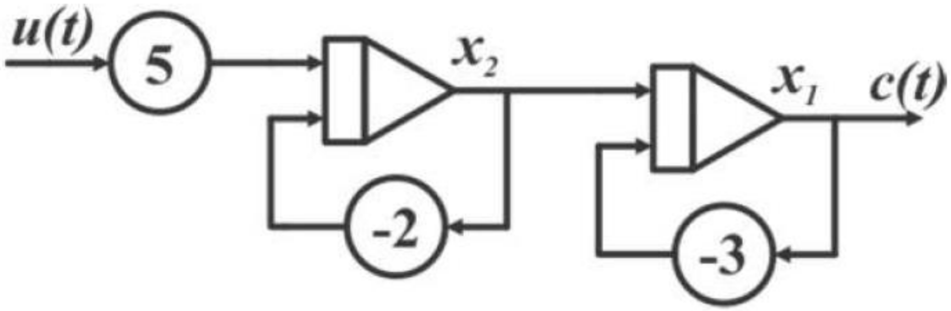
$$\dot{x}_2=-3x_2+u \quad\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$c=5x_1-5x_2 \qquad D=\begin{bmatrix}5 & -5\end{bmatrix};\ H=0$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

c)Redno programiranje:

$$G(s)=\frac{5}{(s+2)(s+3)}=5\frac{1}{(s+2)}\cdot\frac{1}{(s+3)}$$



$$\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u$$

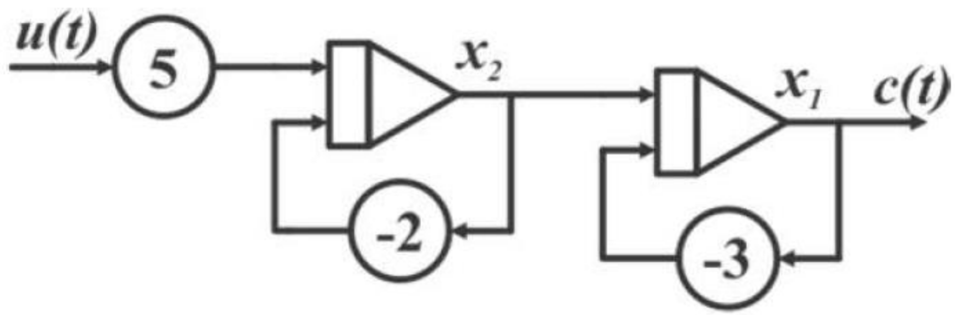
$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2&=-2x_2+5u\\ c&=x_1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ H=0$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

c) Redno programiranje:

$$G(s)=\frac{5}{(s+2)(s+3)}=5\frac{1}{(s+2)}\cdot\frac{1}{(s+3)}$$



$$\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2&=-2x_2+5u\\ c&=x_1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ H=0$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

G(s)= $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s+2} - \frac{5}{s+3}$

$$G(s) = D(sI - A)^{-1}B + H$$

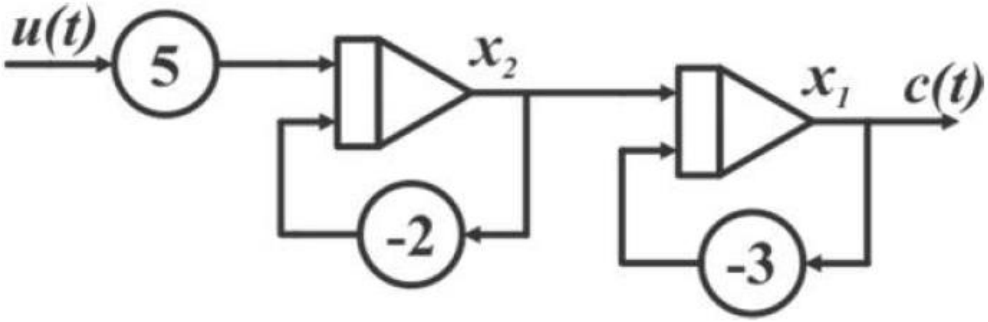
$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [5 \quad -5]\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

Redno programiranje

$$G(s)=\frac{5}{(s+2)(s+3)}=5\frac{1}{(s+2)}\cdot\frac{1}{(s+3)}$$



$$\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2&=-2x_2+5u\\ c&=x_1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&A=\begin{bmatrix}-3&1\\0&-2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\\ &D=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix};\ H=0\end{aligned}$$

P2. Odrediti model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa

Redno programiranje

$$G(s) = D(sI - A)^{-1} B + H$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

P3. Za sistem zadat funcijom prenosa skicirati simulacioni blok dijagram i predstaviti sistem u prostoru stanja

- G(s)= $\frac{s+3}{s^2+3s+3}$
- Rešenje:
- G(s)=$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}\,\frac{C(s)}{C(s)}$
- Y(s)= (s+3)C(s)
- U(s)=$(s^2+3s+3)C(s)$

- Y(s)= sC(s)+3C(s)
- U(s)=$s^2C(s)$ +3s$C(s)$+3$C(s)$
- Uvesti smenu $X_1(s) = C(s)$

P3. Za sistem zadat funcijom prenosa skicirati simulacioni blok dijagram i predstaviti sistem u prostoru stanja

- **Y(s)= s$X_1(s)$+3$X_1(s)$**
- **U(s)=$s^2X_1(s)$+3s$X_1(s)$+3$X_1(s)$**

$\dot{x}_1 = x_2$

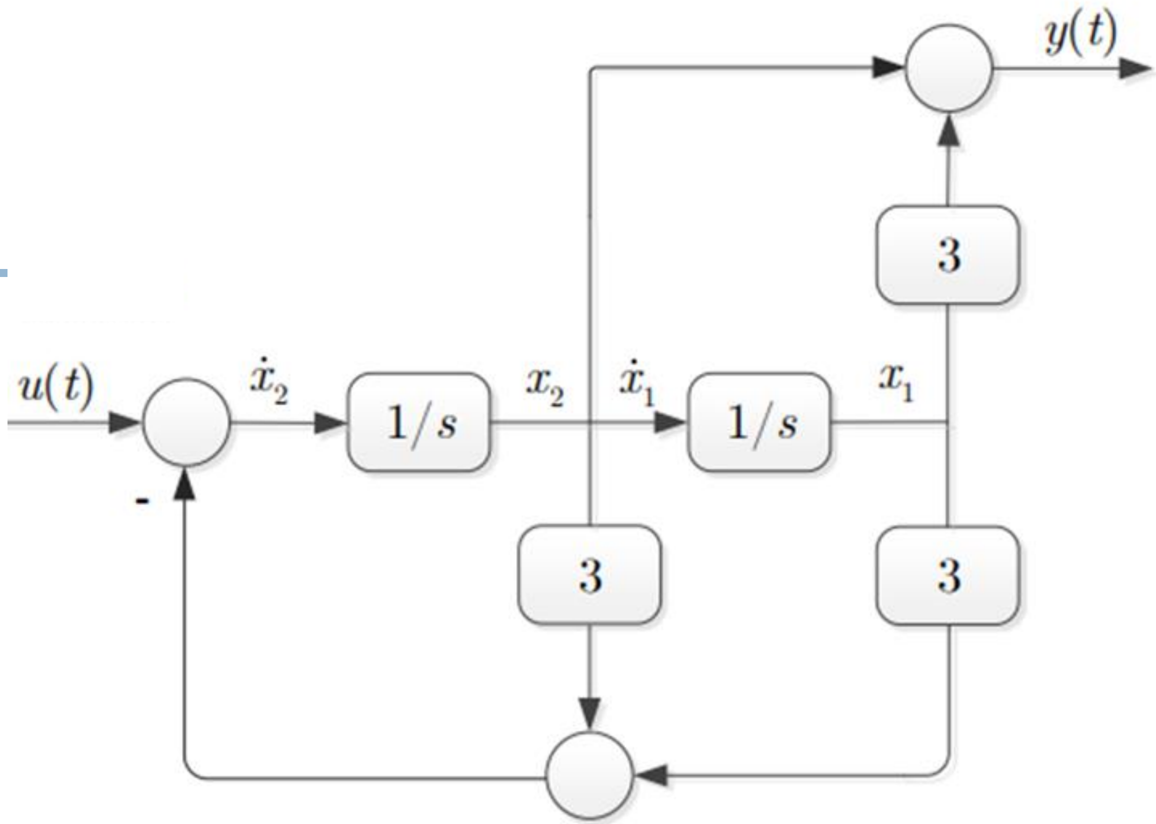
$y = \dot{x}_1 + 3x_1$

$u = \dot{x}_2 + 3\dot{x}_1 + 3x_1$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -3\dot{x}_1 - 3x_1 + u$

$y = x_2 + 3x_1$



P3. Za sistem zadat funcijom prenosa skicirati simulacioni blok dijagram i predstaviti sistem u prostoru stanja

$$\dot{x}_1 = 0\, x_1 + 1 x_2 + \; 0\, u$$

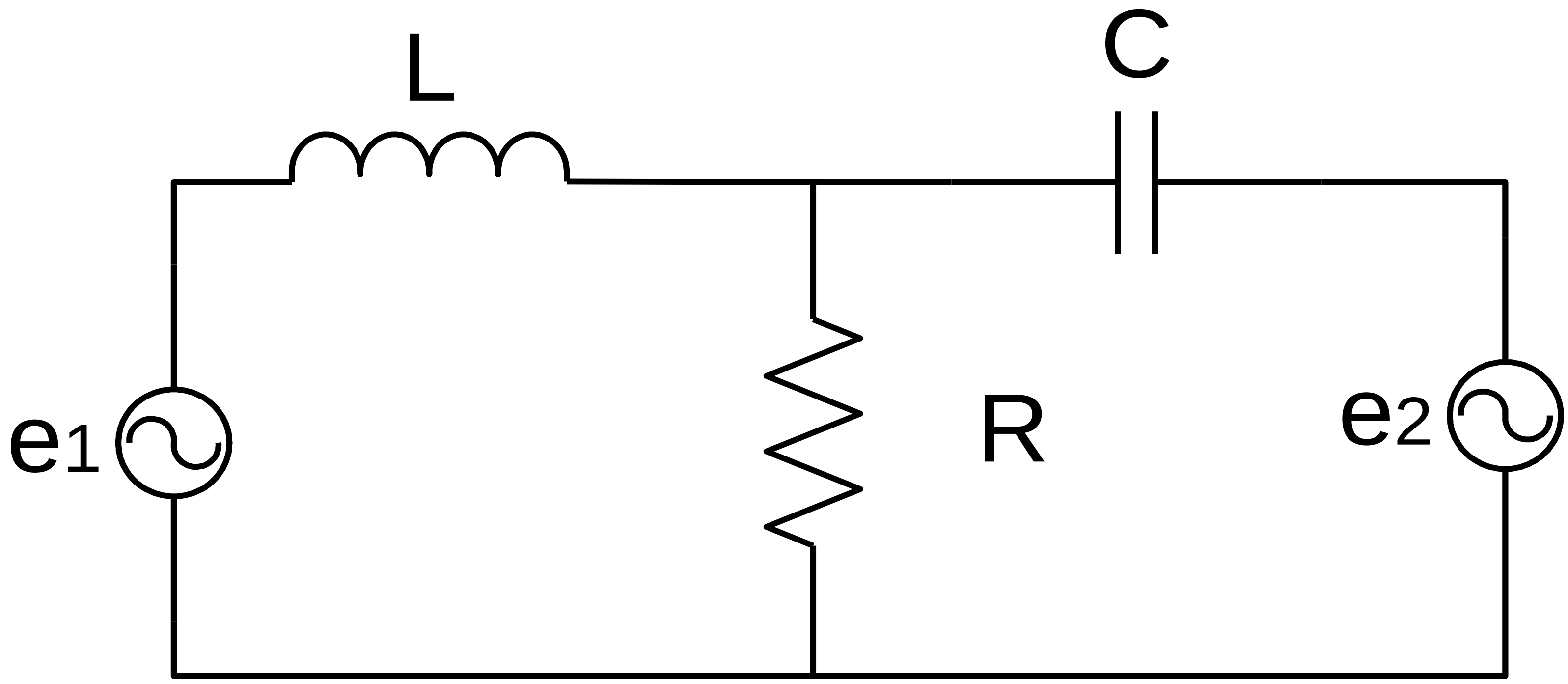
$$\dot{x}_2 = -3 x_1 - 3 x_2 + 1\, u$$

$$y = 3 x_1 + 1.\, x_2 + 0.\, \mathrm{u(t)}$$

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \mathrm{x(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u(t)}$$

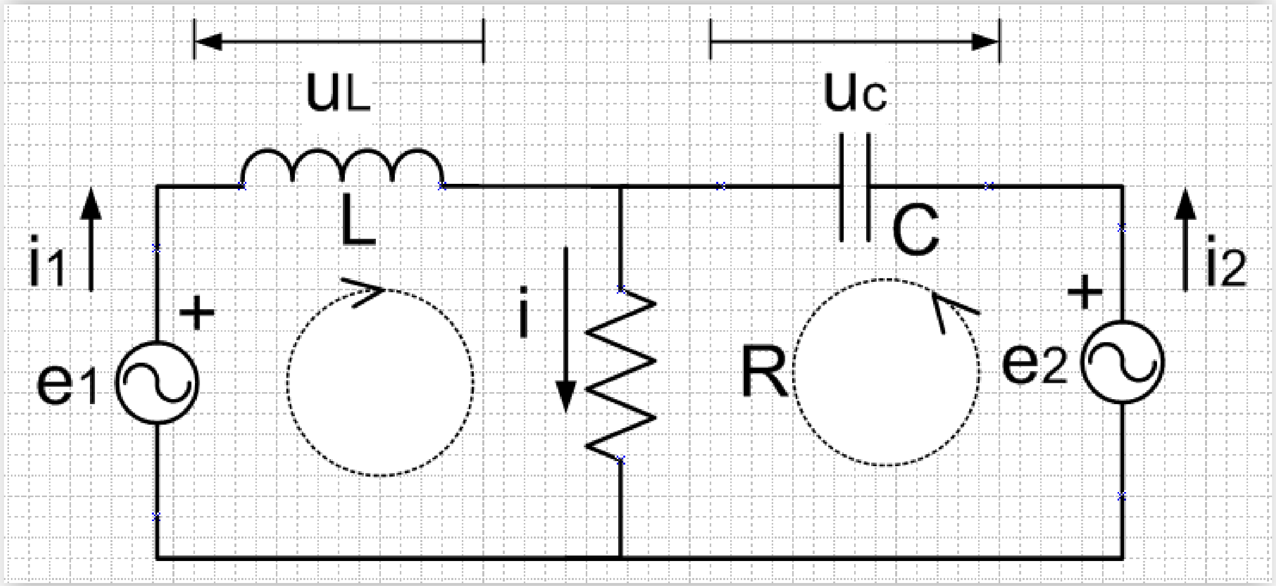
$$\mathrm{y(t)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{x(t)} + [0]\, \mathrm{u(t)}$$

P4: Formirati matematicki model u prostoru stanja za elektricno kolo sa slike



P4:Formirati matematicki model u prostoru stanja za elektricno kolo sa slike

- Prvo treba oznaciti referentne smerove struja i napona i postaviti jednacine u kolu (po Kirhofovim zakonima):



- $e_1 - u_L - R\,i = 0$
- $e_2 - u_C - R\,i = 0$
- $u_L = L\frac{di1}{dt}$, $i_2 = C\,\frac{duc}{dt}$

P4:Formirati matematicki model u prostoru stanja za elektricno kolo sa slike

- $e_1 - u_L - R\, i = 0$
- $e_2 - u_C - R\, i = 0$
- $u_L = L\frac{di1}{dt}$, $i2 = C\,\frac{duc}{dt}$, $i = i1 + i2$

- $e_1 = L\frac{di1}{dt} + R\, i1 + R\, i2$
- $e_2 = u_C + R\, i1 + R\, i2$
- $i2 = C\,\frac{duc}{dt}$

- $L\frac{di1}{dt} + RC\,\frac{duc}{dt} = e_1 - R\, i1$
- $RC\,\frac{duc}{dt} = e_2 - u_C - R\, i1$

P4: Formirati matematicki model u prostoru stanja za elektricno kolo sa slike

- Kao promenjive stanja treba usvojiti promenjive koje se pojavljuju sa prvim izvodom, u_C i i_1
- $L\frac{di1}{dt} = e_1 - R\, i_1 - RC\,\frac{duc}{dt} = e_1 - R\, i_1 - e_2 + u_C + R\, i_1$
  $= u_C + e_1 - e_2$
- $L\frac{di1}{dt} = u_C + e_1 - e_2$
- $\frac{di1}{dt} = \frac{1}{L}\, u_C + \frac{1}{L}\, e_1 + \frac{1}{L}\, e_2$
- $\frac{duc}{dt} = \frac{1}{RC}\, e_2 - \frac{1}{RC}\, u_c - \frac{1}{C}\, i_1$

P4: Formirati matematicki model u prostoru stanja za elektricno kolo sa slike

- Kao promenjive stanja treba usvojiti promenjive koje se pojavljuju sa prvim izvodom, $\boldsymbol{u_C}$ i $\boldsymbol{i1}$
- $\frac{di1}{dt} = 0\ i1 + \frac{1}{L}\ u_C + \frac{1}{L}\ e_1 + \frac{1}{L}\ e_2$
- $\frac{duc}{dt} = -\frac{1}{C}\ i_1 - \frac{1}{RC}\ u_c + 0.e_1 + \frac{1}{RC}\ e_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{i1} \\ \dot{uc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i1 \\ uc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \end{bmatrix}$$

Matrica stanja i upravljanja su, respektivno

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

Odnos između matematičkog modela sistema u vremenskom i kompleksnom domenu

- Analiza multivarijabilnih linearnih sistema sa konstantnim koeficijentima može se vršiti u vremenskom domenu, odnosno, u prostoru stanja ili u kompleksnom domenu.
- U prostoru stanja matematički model sistema je:

$$\dot{\mathbf{x}}\,(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax}(\mathbf{t}) + \mathbf{Bu}(\mathbf{t})\ ,\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{Cx}(\mathbf{t}) + \mathbf{Du}(\mathbf{t})$$

- U kompleksnom domenu model multivarijabilnog sistema je zadat sa:

$$\mathbf{Y(s)=W(s)U(s)}$$

- Y(s) i U(s) kompleksni likovi odgovarajućih vektorskih promenljivih, dok je **W**(s) matrica funkcija prenosa (multivarijabilna prenosna funkcija)

Odnos između matematičkog modela sistema u vremenskom i kompleksnom domenu

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \cdots & w_{1r}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \cdots & w_{2r}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{m1}(s) & w_{m2}(s) & \cdots & w_{mr}(s) \end{bmatrix},$$

- **m** je dimenzija *vektora izlaza*,
- **r** je dimenzija *vektora ulaza*,
- $\boldsymbol{w_{ij}}$ predstavlja funkciju prenosa između proizvoljnog i-tog izlaza i j-tog ulaza.
- Transformacija iz vremenskog u kompleksni domen je jednoznačna i jednostavna.
- Primenom Laplasove transformacije na jednačine stanja i izlaza iz uz pretpostavku nultih početnih uslova, x, dobija se:

Odnos između matematičkog modela sistema u vremenskom i kompleksnom domenu

- Transformacija iz kompleksnog u vremenski domen je mnogo teža iz više razloga.
- Matematički model u prostoru stanja sadrži više informacija o sistemu nego funkcija prenosa, što za posledicu ima nejednoznačnu transformaciju.
- Između mnogo mogućih transformacija treba izabrati onu koja obezbeđuje najmanji skup promenljivih stanja korespodentnih određenoj prenosnoj funkciji.
- Postoji više postupaka za nalaženje takve ili takvih (pošto ih može biti više) funkcija prenosa minimalne realizacije

Odnos između matematičkog modela sistema u vremenskom i kompleksnom domenu

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ $\quad\quad$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$

$sX(s)=AX(s)+BU(s)$ $\quad\quad$ $Y(s)= CX(s)+DU(s)$

$sX(s) - AX(s) = BU(s)$ $\quad\quad$ $Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s)+DU(s)$

$(sI-A)X(s) = BU(s)$ $\quad\quad$ $\mathbf{Y(s) = (C(sI-A)^{-1}B+D)U(s)}$

$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$

$$\mathbf{W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}= C(sI-A)^{-1}B+D}$$

Ova jednačina predstavlja izraz za izračunavanje multivarijabilne matrice prenosa

P5. Odrediti funkciju prenosa sistema, ukoliko je sistem opisan modelom u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{u(t)}$$

- Rešenje:
- $\dot{\mathbf{x}}\,(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$
- $\mathbf{W(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C(sI-A)^{-1}B+D}$
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D} = 1$
- $\mathbf{(sI-A)} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$

P5. Odrediti funkciju prenosa sistema, ukoliko je sistem opisan modelom u prostoru stanja:

- **A**=$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$; B $=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}$; C= $[1 \quad 0]$; D=1
- sI−A= $\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ 2 & s\end{bmatrix}$;

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\,adjA$$

- $(\mathrm{sI-A})^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix}$
- $\mathrm{W(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathrm{C(sI-A)^{-1}B+D}$
- $\mathrm{W(s)}=[1 \quad 0]\,\frac{\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix}}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}+1=\frac{s^2+2s+1}{s^2+3s+2}$