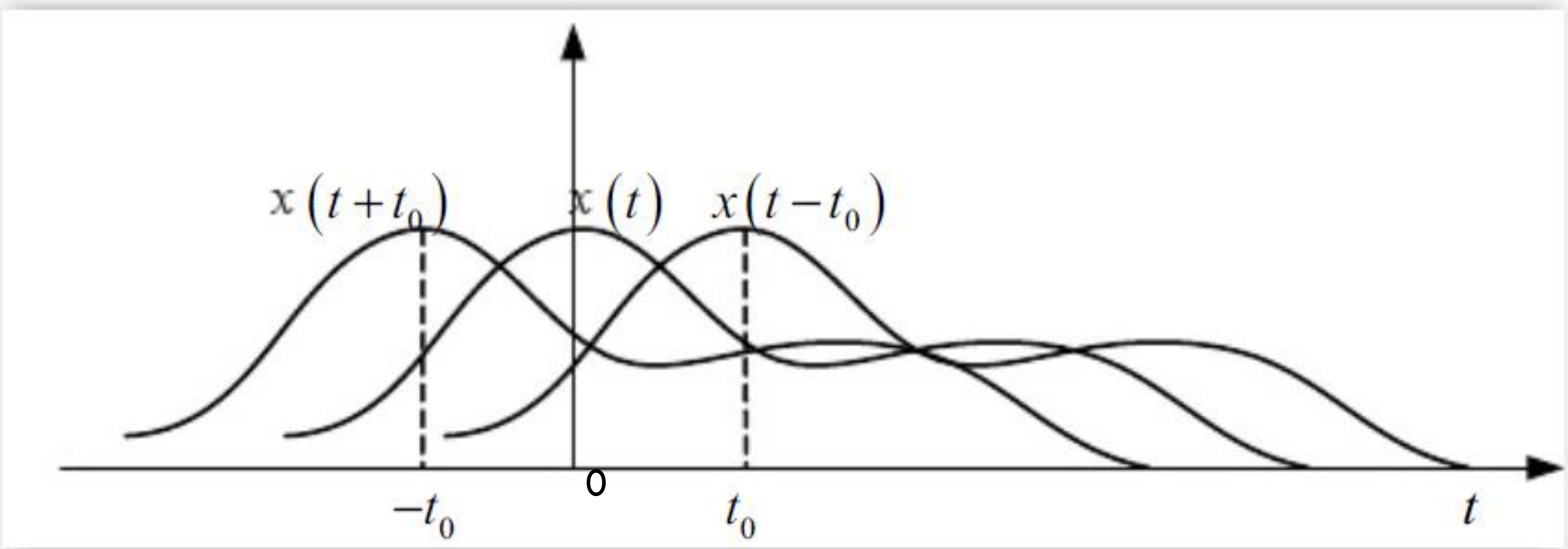
P3 – MODIFIKACIJA NEZAVISNE VREMENSKE PROMENLJIVE *t* U KONTINUALNIM SIGNALIMA

PREDMET: SIGNALI I SISTEMI

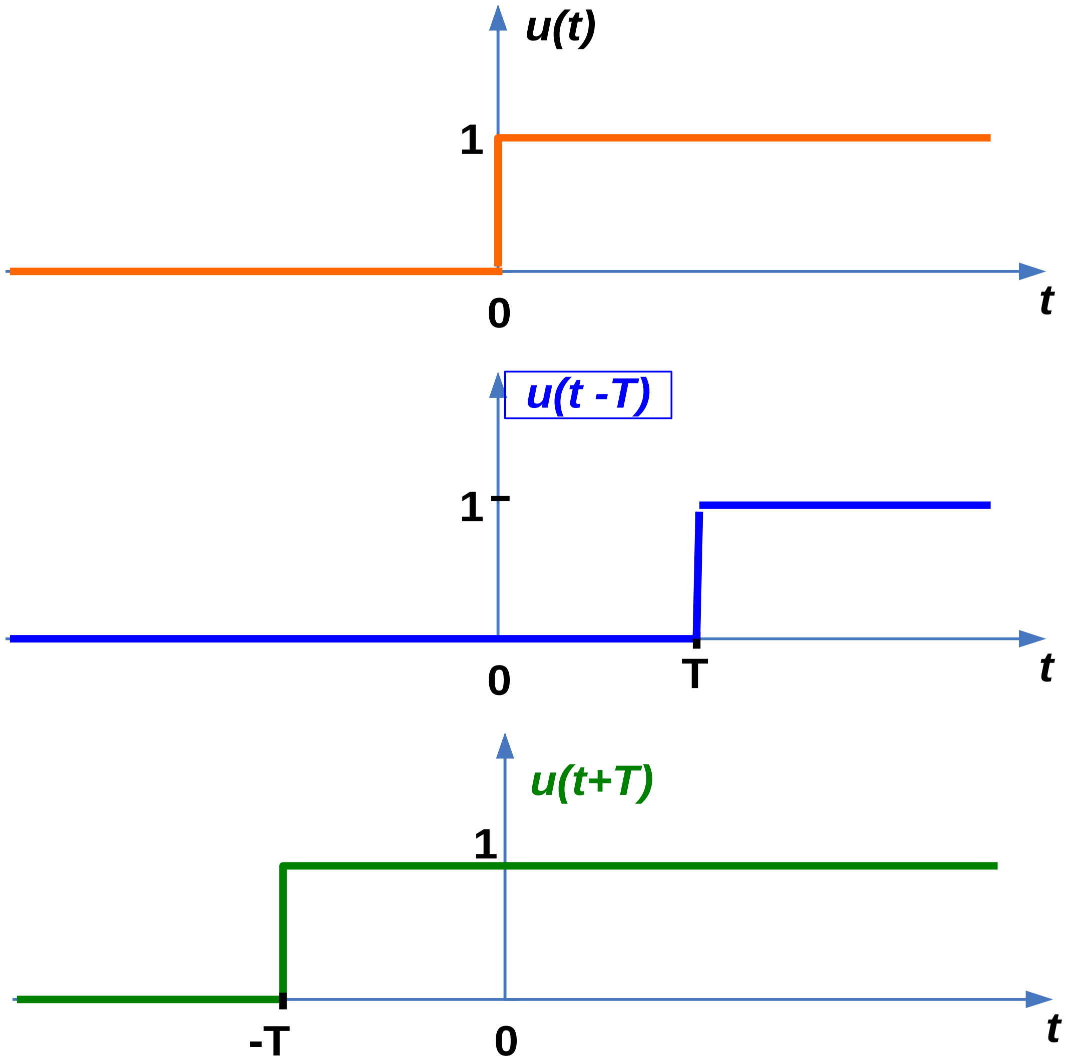
Pomeranje signala u vremenu

Signal x(t - t_0) predstavlja pomeranje signala x(t) za vremenski interval t_0

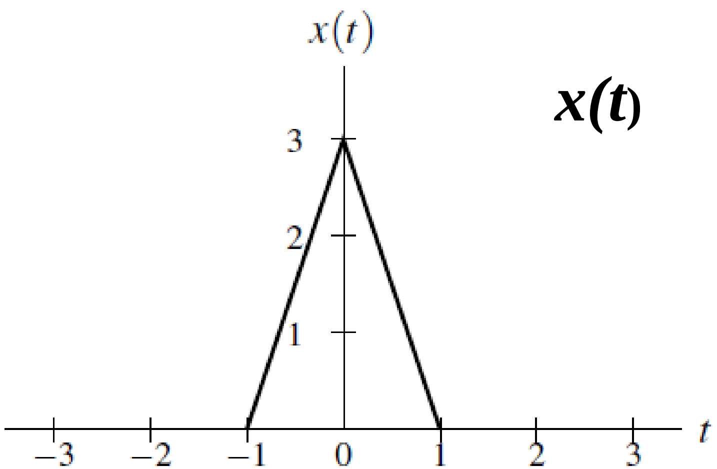
- Ako je t_0 > 0, kašnjenje signala (pomeranje u desno)
- Ako je t_0< 0, prednjačenje signala (pomeranje u levo)



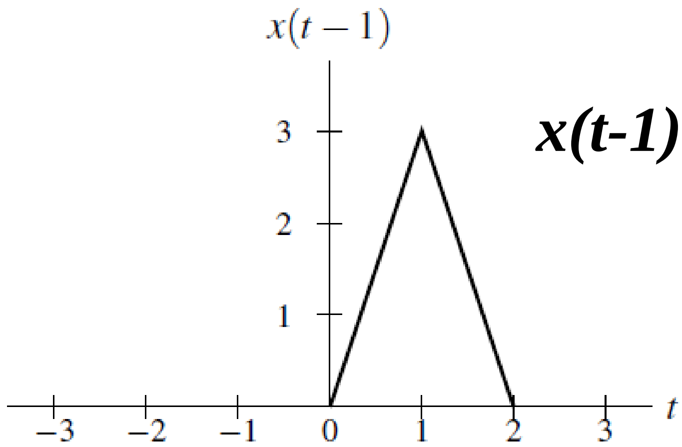
Primer: Pomeranje signala u vremenu



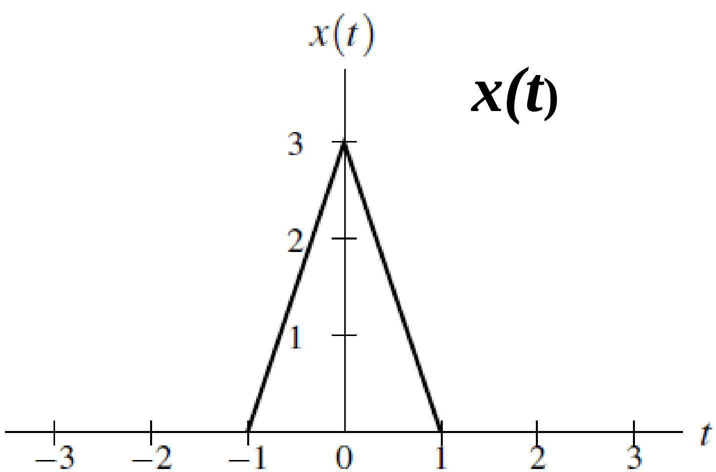
Primer: Pomeranje signala u vremenu



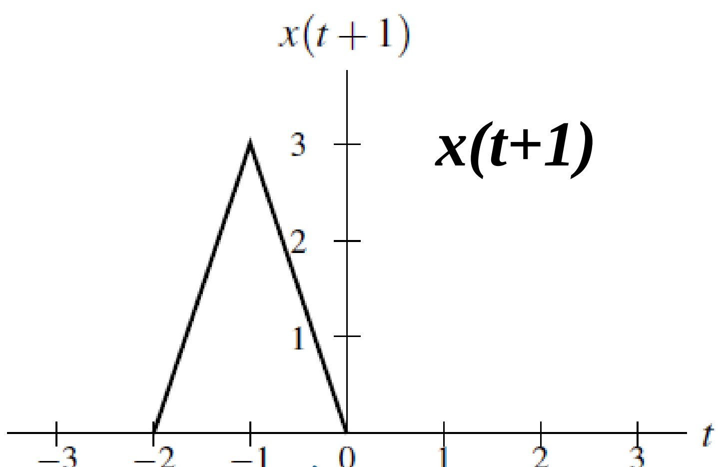
(a)



(b)

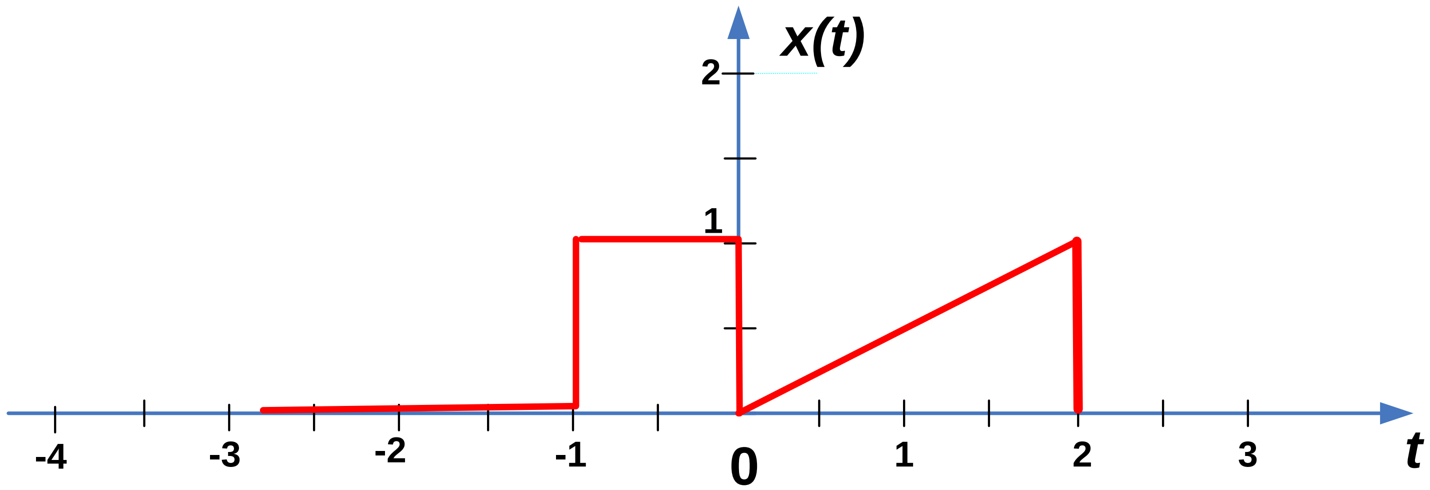


(a)

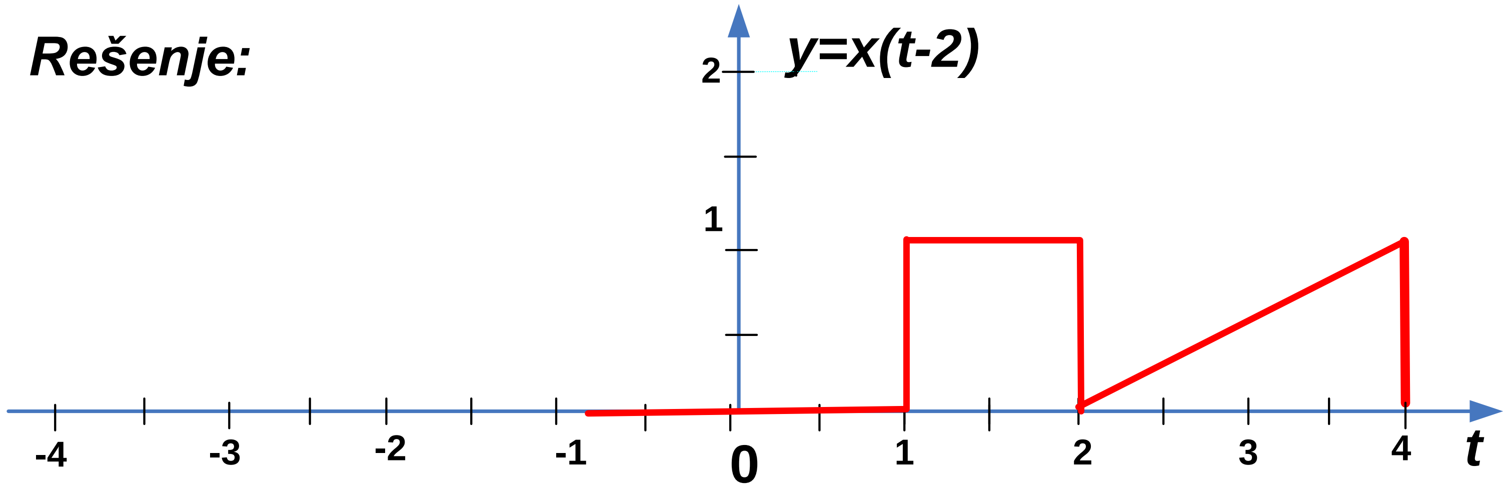


(c)

Za signal sa slike *x(t)* skicirati signal ***y(t)=x(t-2)***

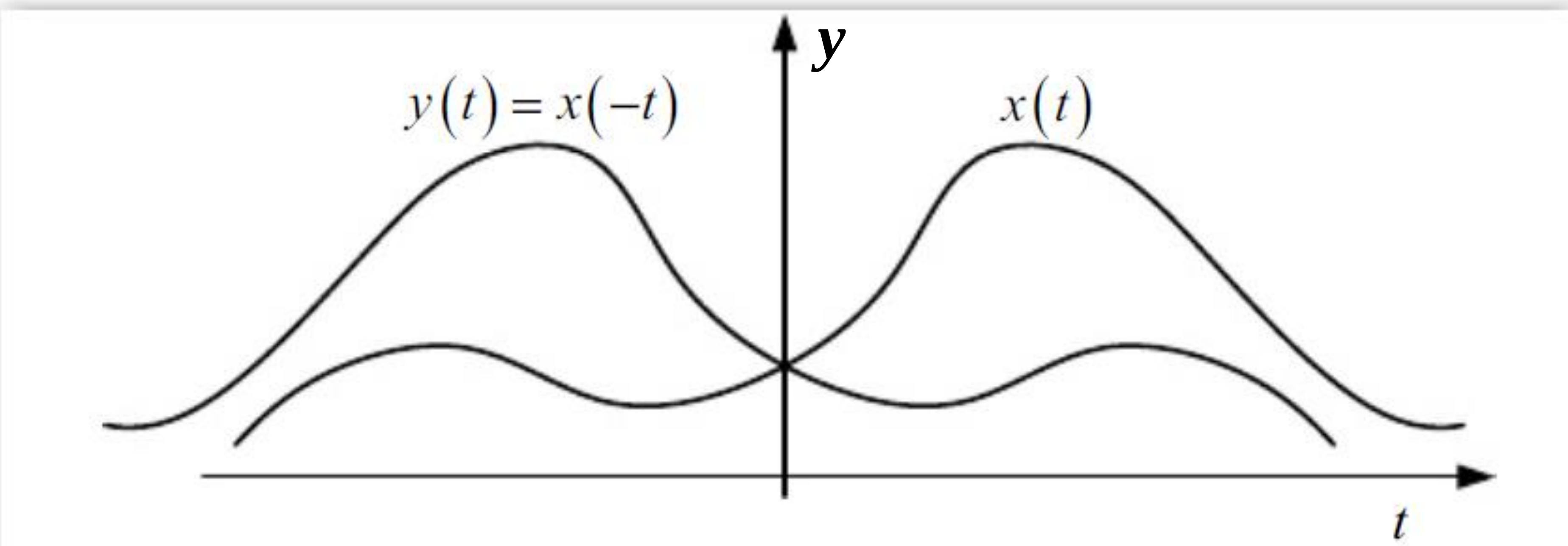


Rešenje:



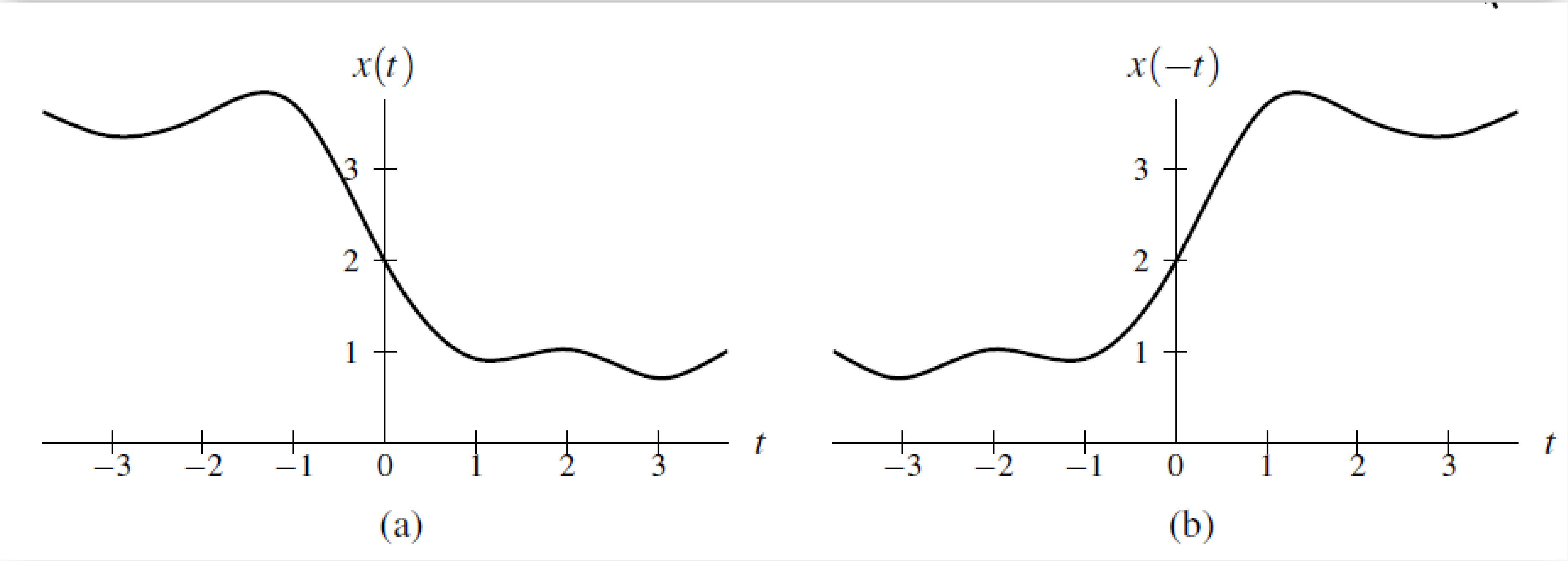
Inverzija vremena - refleksija

- Signal ***y(t) = x(-t)*** predstavlja inverziju signala *x*(*t*) (po vremenu).
- Ovom modifikacijom se vrši refleksija originalnog signala u odnosu na ordinatu (***y – osa***)
- Primer: *y(1)* =*x(-1)* , *y(π)* = *x(-π)* , i tako za sve inverzne promenjive



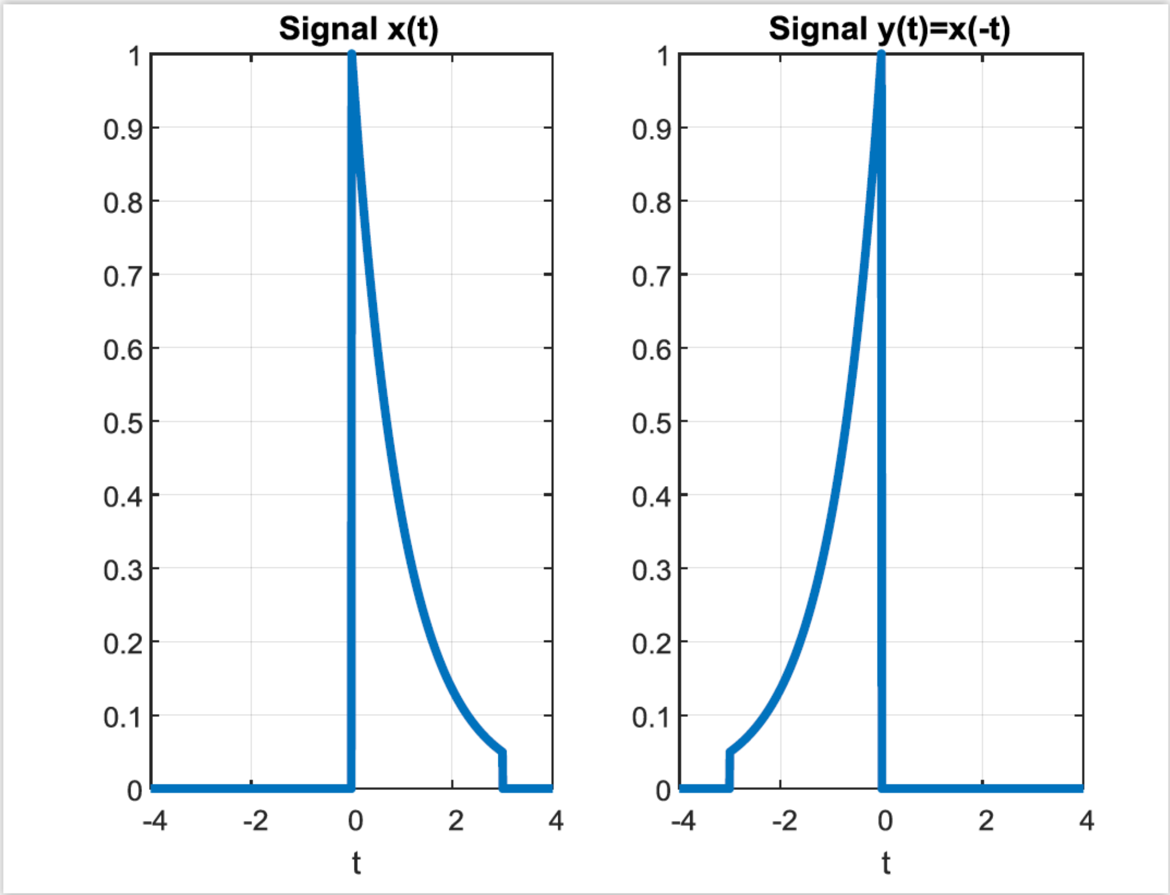
Inverzija vremena - refleksija

- Signal ***x(-t)*** predstavlja inverziju signala ***x(t)*** (po vremenu)



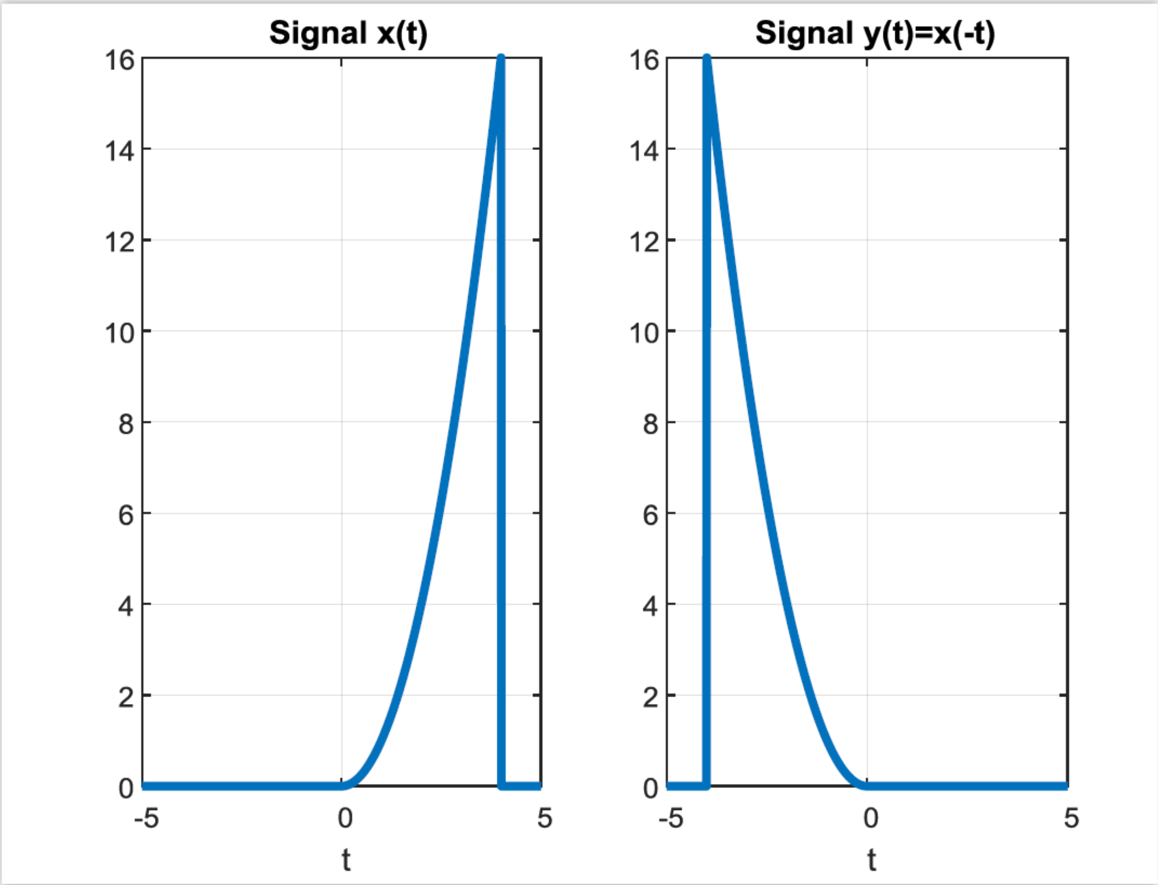
Inverzija vremena - refleksija

- Signal ***y(t)=x(-t)*** predstavlja inverziju signala ***x(t)*** (po vremenu) - refleksiju u odnosu na *y* osu.



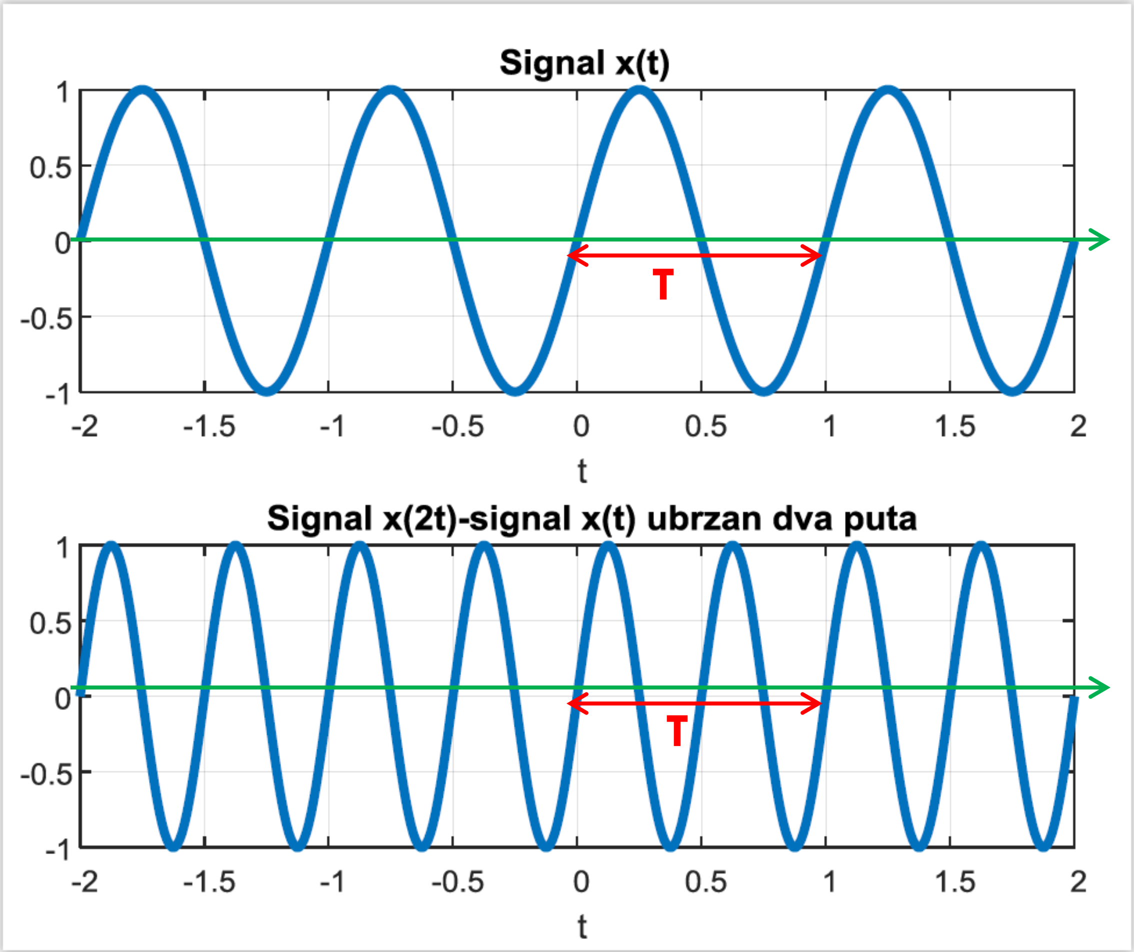
Inverzija vremena - refleksija

- Signal $y(t)=x(-t\ )$ predstavlja inverziju signala $x(t)$ (po vremenu) - refleksiju u odnosu na *y* osu.



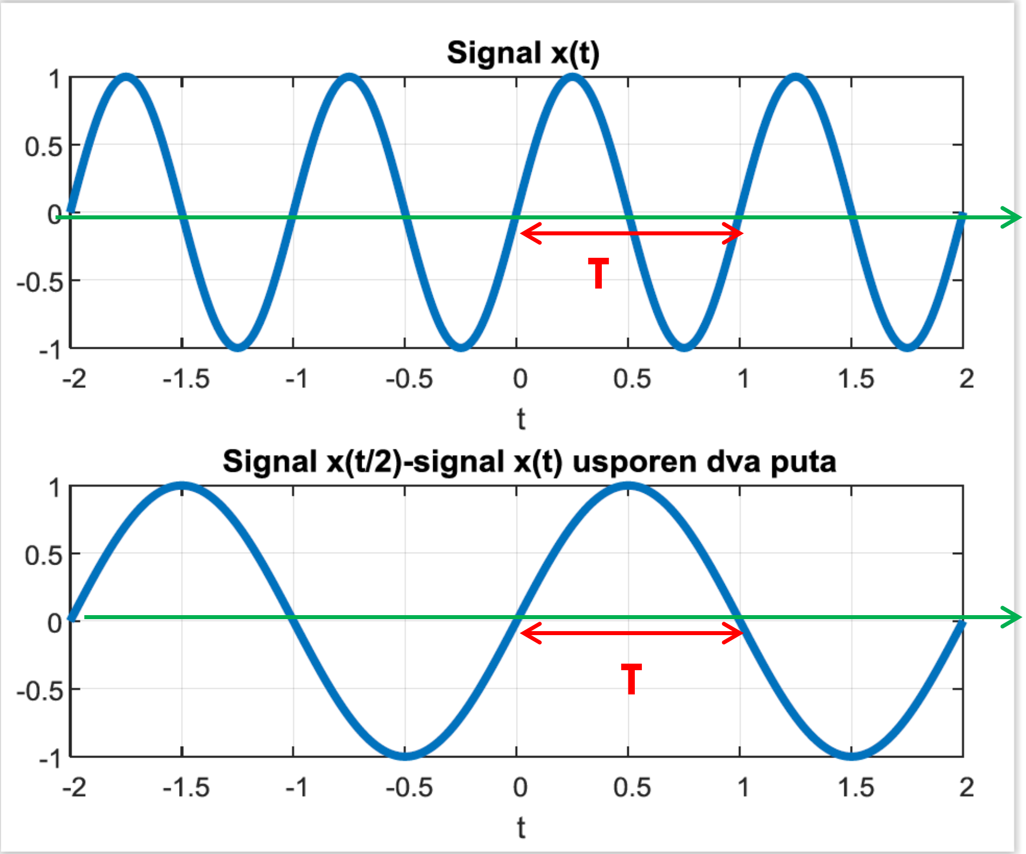
Skaliranje vremena - kompresija

- Signal ***y(t) = x(2t),*** signalu vreme kompresovano
- Signal ***y*** je dva puta ubrzani signal

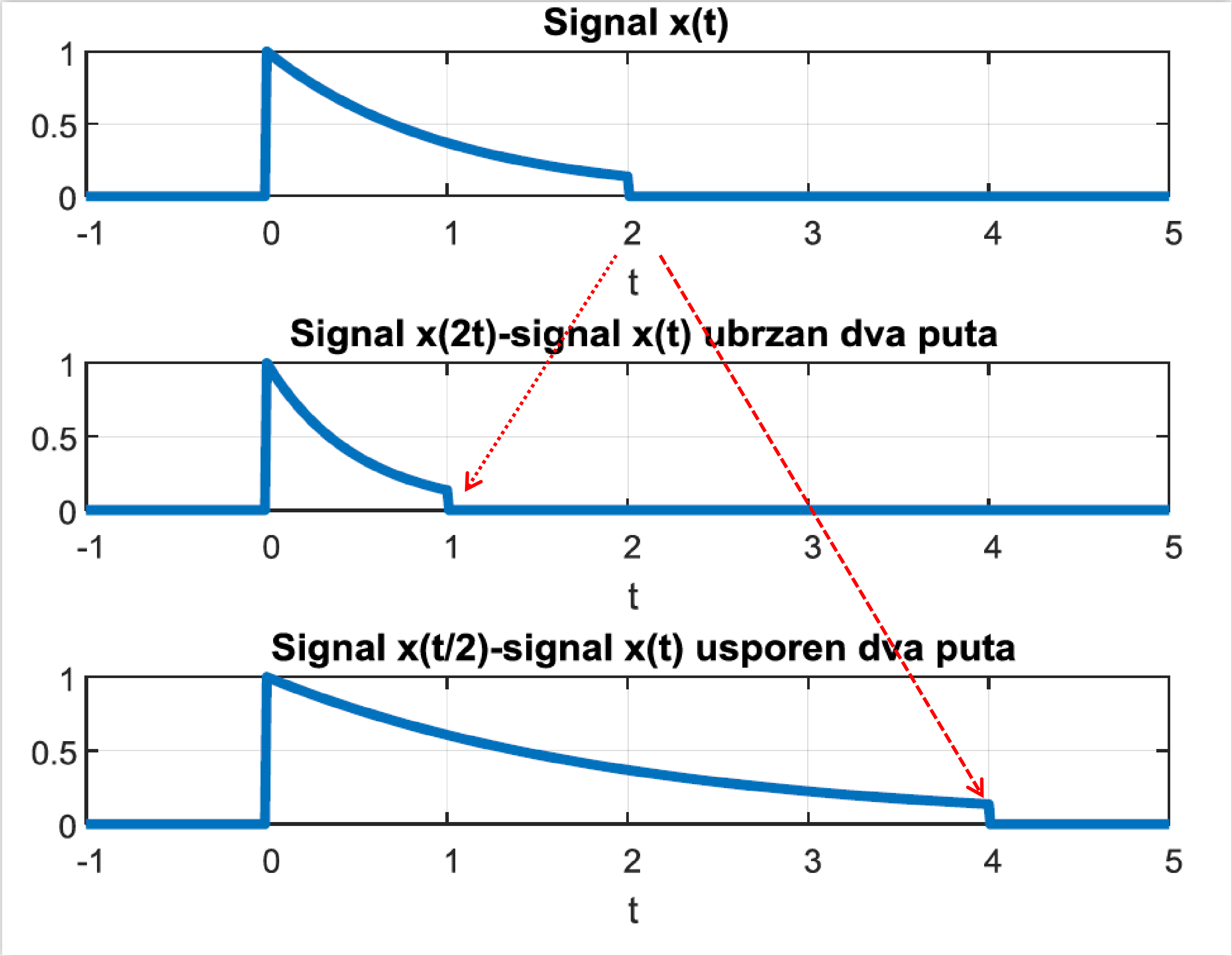


Skaliranje vremena - 'razvučen'

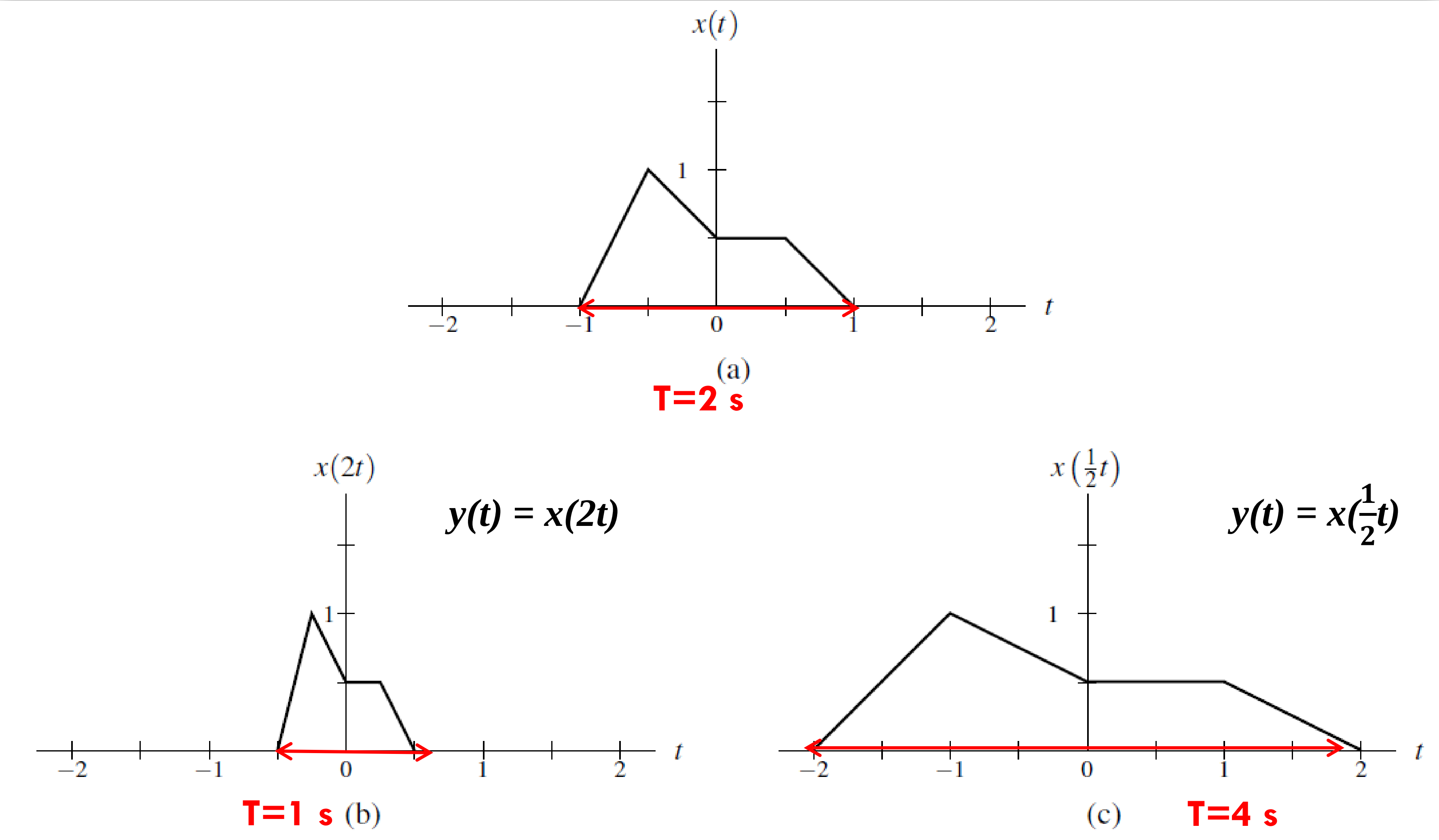
- Ako definišemo novi signal ***z(t)= x(t/2)***
- Posmatrani signal ***z*** biće 'razvučena' ili usporena verzija signala ***x***. (stretched-time signals)



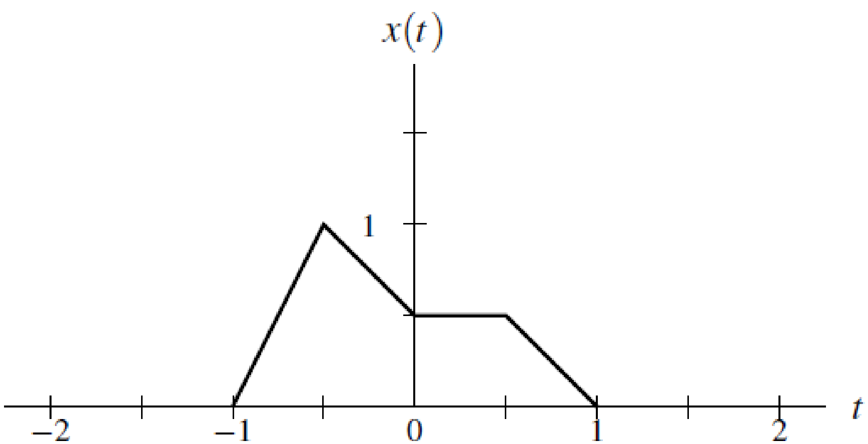
Primer: Signal $x(t)$ (gornja slika), signal $x(2t)$ ubrzan dva puta (srednja slika) i signal $x(t/2)$ usporen dva puta (donja slika)



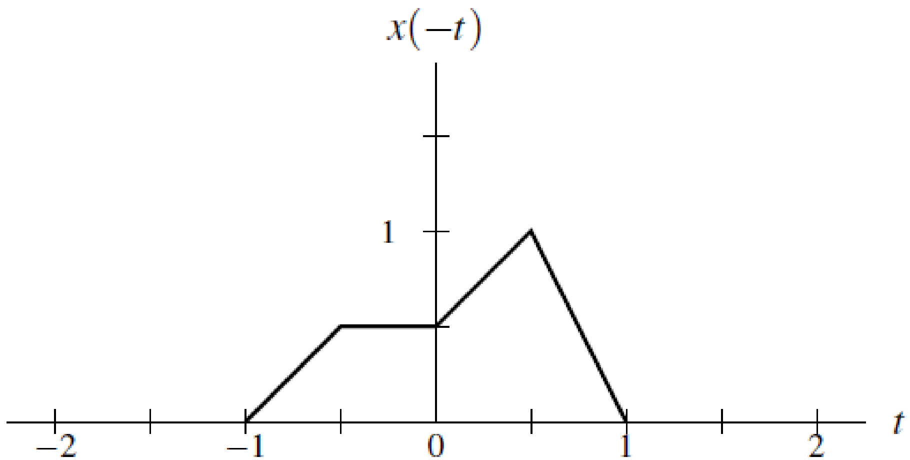
Primer vremenske kompresije/proširenje



Vremensko skaliranje/refleksija

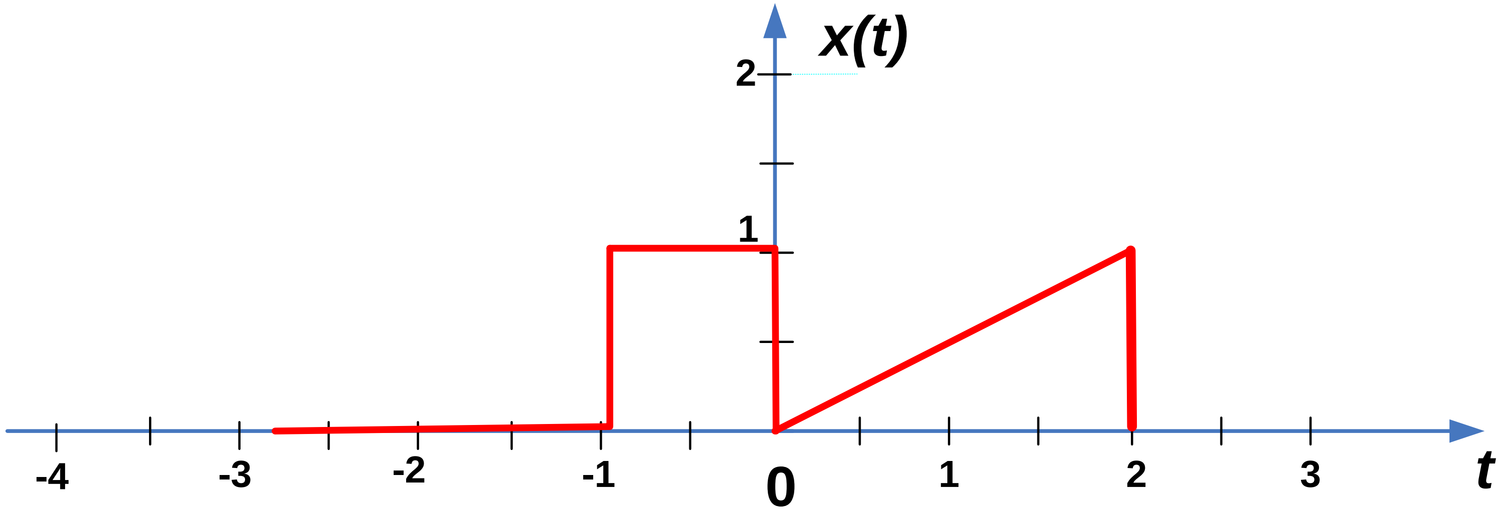


(a)

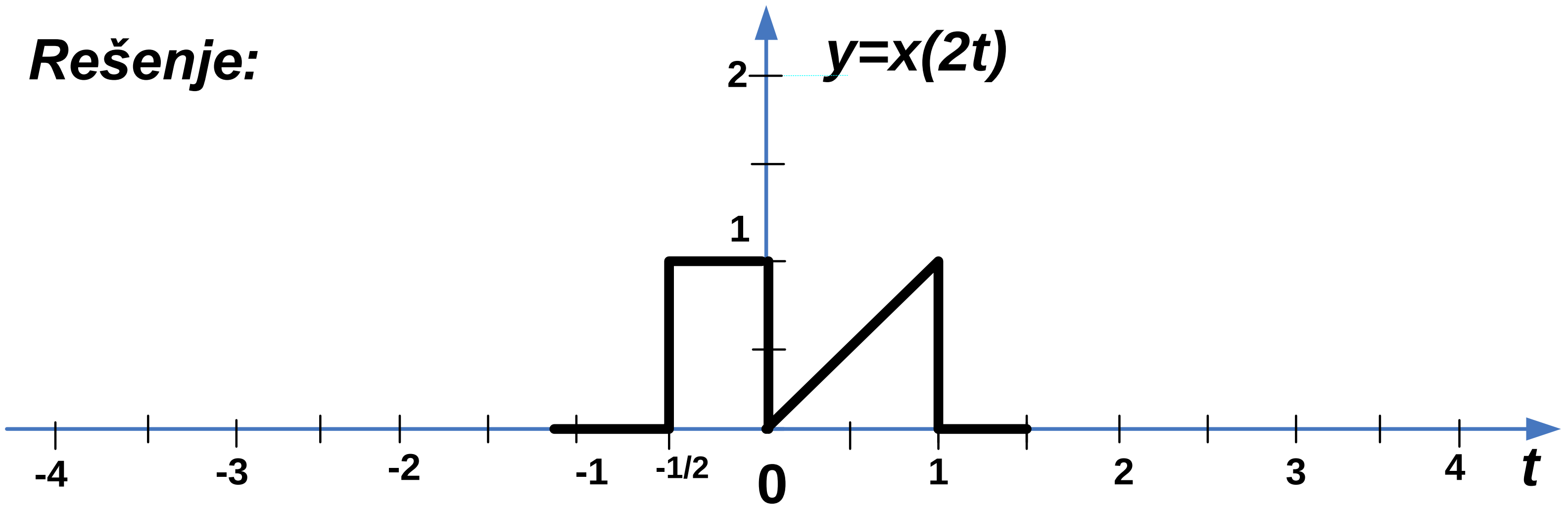


(d)

Za signal sa slike *x(t)* skicirati signal *y(t)=x(2t)*



Rešenje:



Simetričnost signala

- Neki signali imaju osobine parnosti ili neparnosti
- Paran signal: ***x(t)=x(-t)*** ; ***(Even – paran)***
- Neparan signal: ***x(t)= - x(-t) ;*** ***(Odd – neparan)***
- Parni deo signala se definiše na sledeći način:

$$Ev\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

- Neparni deo signala se definiše na sledeći način:

$$Od\{x(t)\}=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

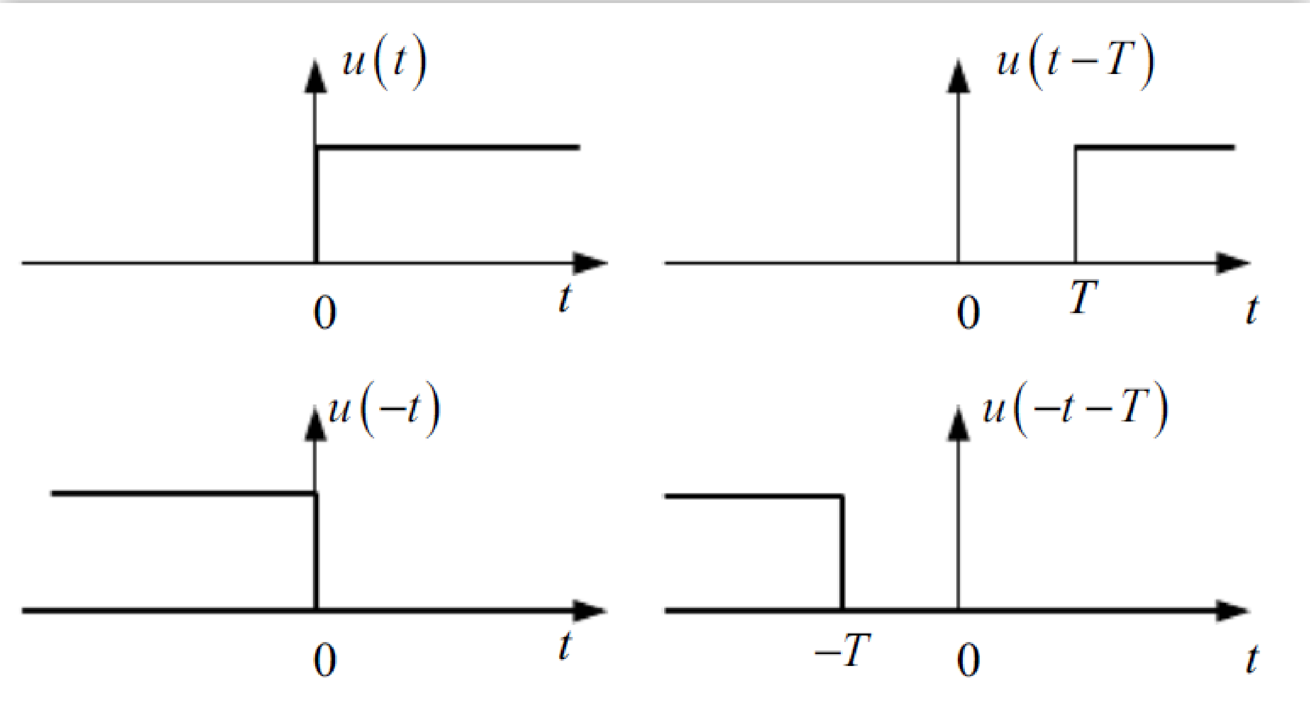
- x(t) predstavlja zbir njegovog parnog i neparnog dela:

$$x(t)= Ev\{x(t)\}+ Od\{x(t)\}$$

Primer: Izračunati parni i neparni deo pravougaog impulsa *p(t)=u(t)-u(t-T)*

$$Ev\{p(t)\}=\frac{1}{2}\left[p(t)+p(-t)\right]=\frac{1}{2}\left[u(t)-u(t-T)+u(-t)-u(-t-T)\right]$$

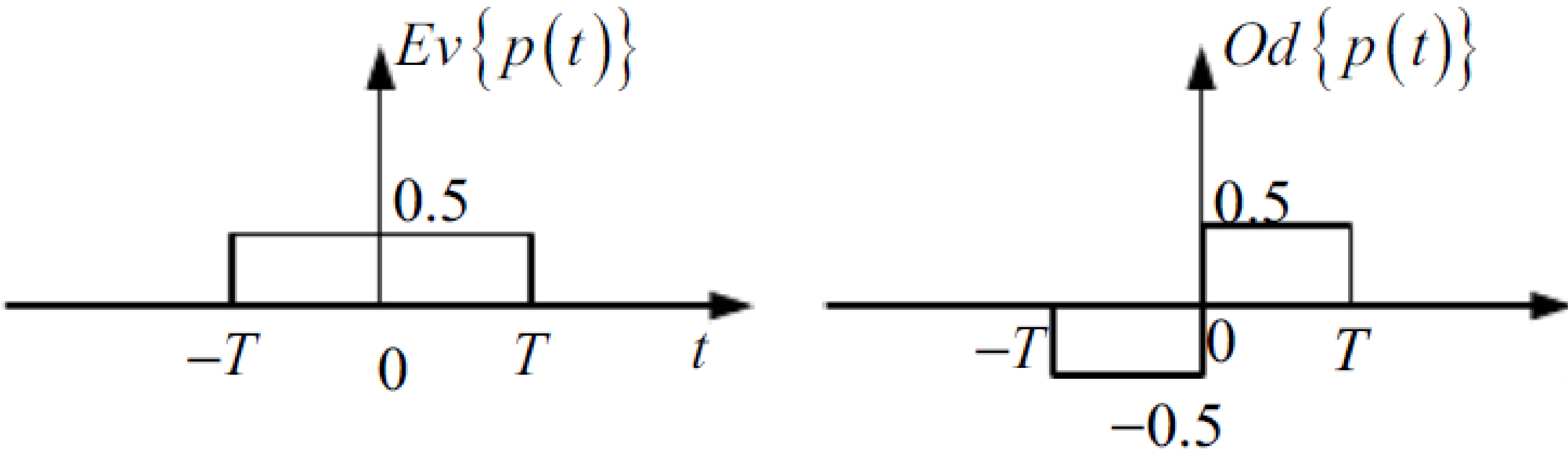
$$Od\{p(t)\}=\frac{1}{2}\left[p(t)-p(-t)\right]=\frac{1}{2}\left[u(t)-u(t-T)-u(-t)+u(-t+T)\right]$$



Primer: Izračunati parni i neparni deo pravougaog impulsa $p(t)=u(t)-u(t-T)$

$$Ev\{p(t)\}=\frac{1}{2}\left[u(t+T)-u(t-T)\right]$$

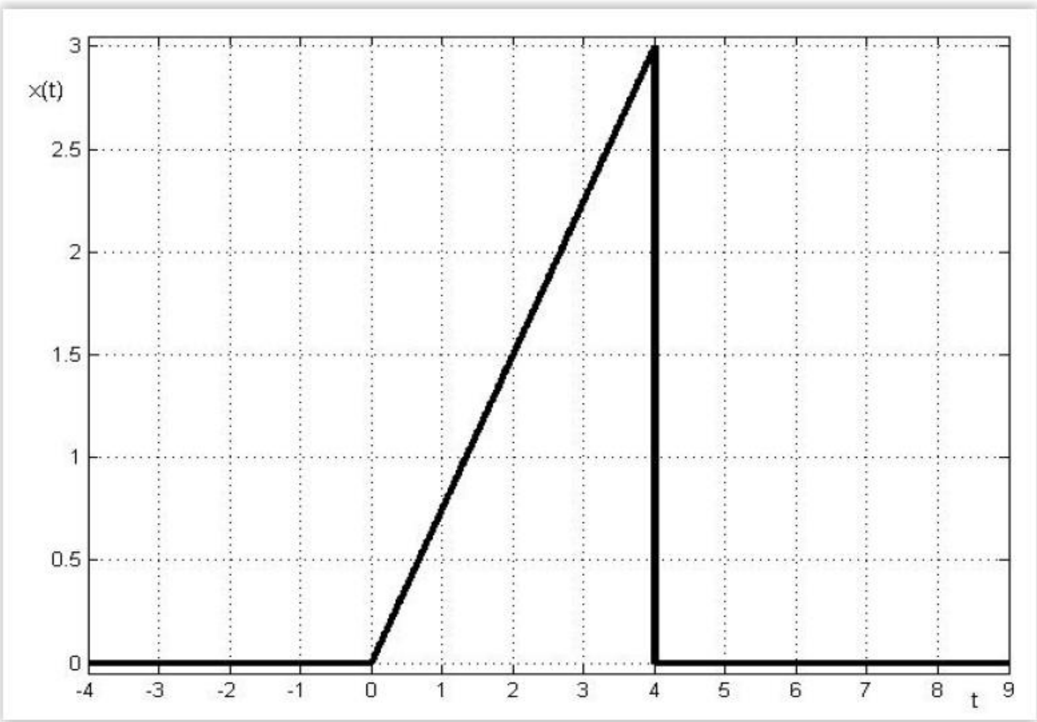
$$Od\{p(t)\}=\frac{1}{2}\left[-u(t+T)+2u(t)-u(t-T)\right]$$



Пример 1:

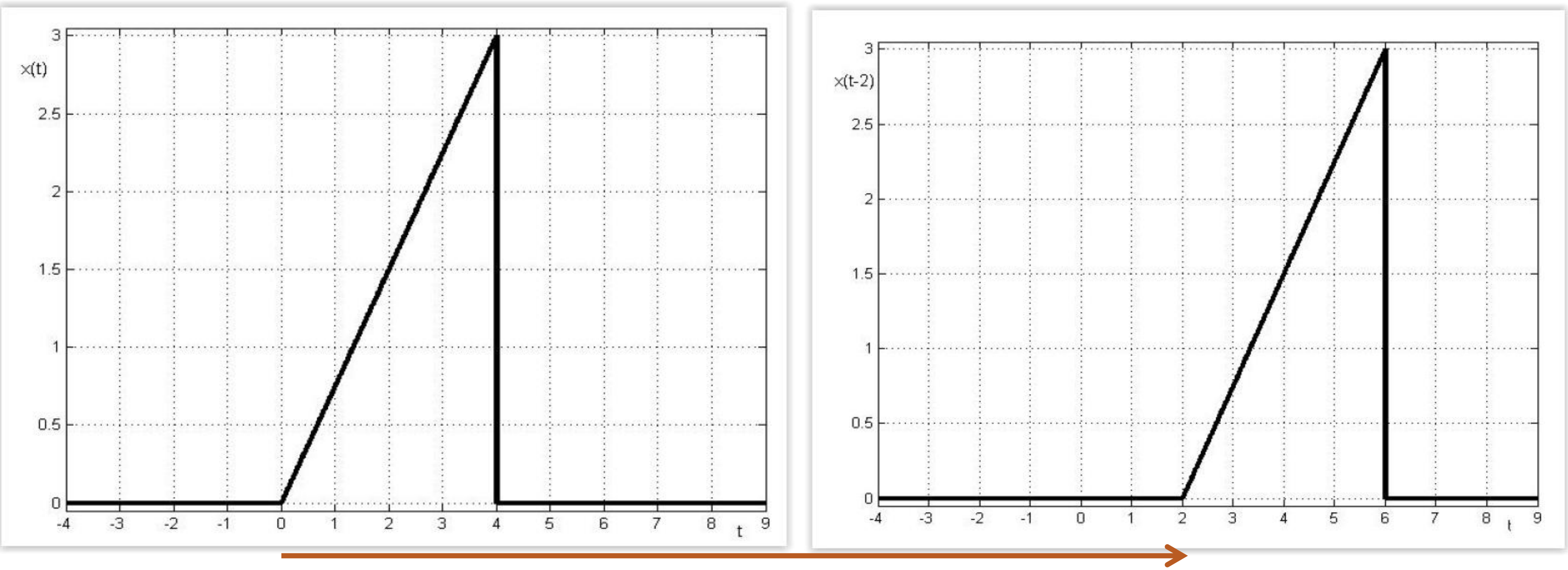
- 1. Временски континуални сигнал x(t) је приказан на слици. Скицирати следеће сигнале:

  а) $x(t-2)$, б) $x(t/2)$.



Пример 1:

а) Сигнал ***x(t -2)*** се добија применом смене u = t – 2 на сигнал x(t). Добијени сигнал представља транслиран изворни сигнал за 2 подеока у десно.

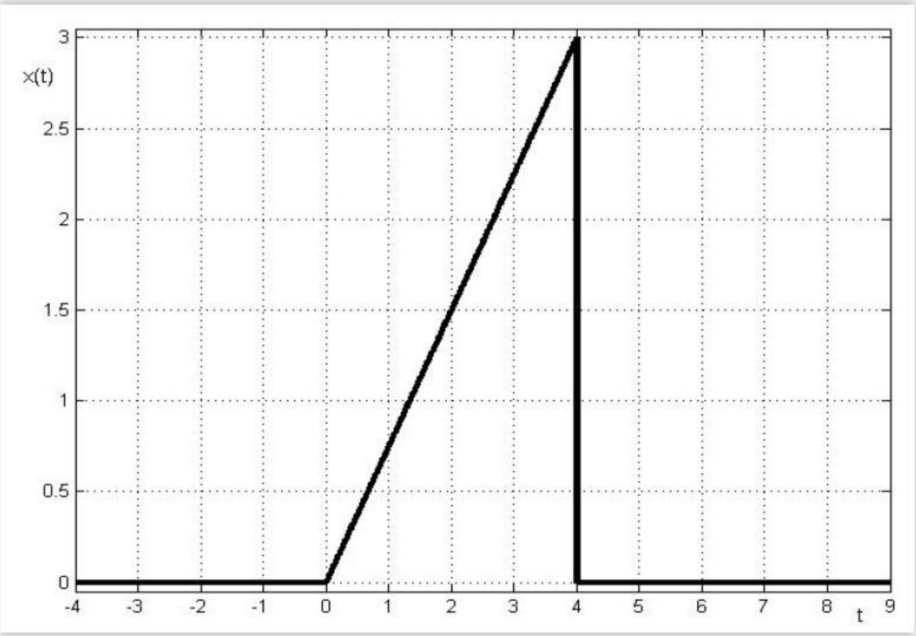


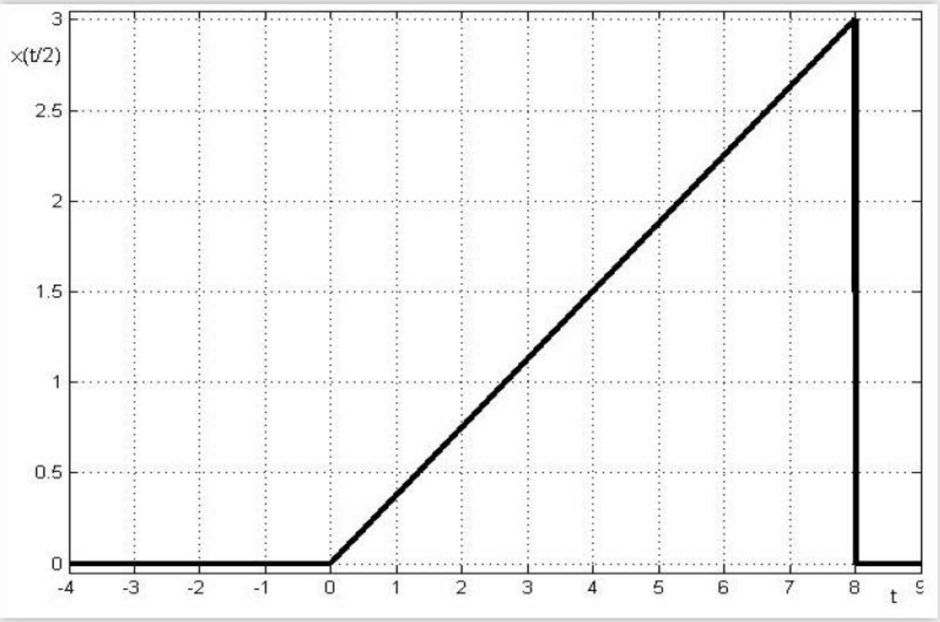
x(t)

x(t-2) **2**

Пример 1:

б) Сигнал ***x(t/2)*** се добија применом смене ***u = t /2*** на сигнал x(t). Добијени сигнал задржава облик изворног сигнала, али му је временско трајање два пута веће.





x(t) **0** **4**

x(t/2) **0** **8**

Основни појмови о сигналима

- Сваки сигнал x(t) се може представити као збир свог парног и непарног дела:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

- Парни део за континуалне сигнале је дефинисан као:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

- Непарни део за континуалне сигнале је дефинисан као:

$$x_0(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Пример 2:

- Одредити парни и непарни део сигнала $\boldsymbol{x(t) = e^{jt}}$.

Комплексни број: $z = r.e^{jt} = r(\cos(t)+j.\sin(t))$

Парни део сигнала:

$x_e(\mathrm{t})=\frac{1}{2}(x(\mathrm{t})+x(-\mathrm{t}))$

$x_e(\mathrm{t})=\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt}) = \frac{1}{2}(\cos(t)+j.\sin(t)+\cos(t)-j.\sin(t))=\cos(t)$

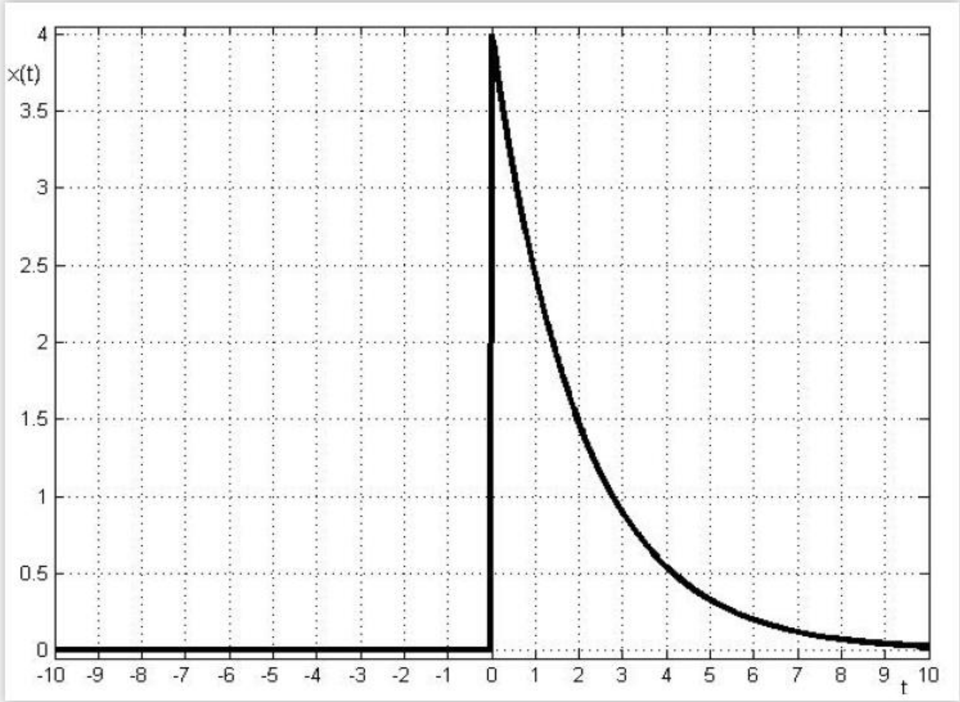
Непарни део сигнала:

$x_0(\mathrm{t})=\frac{1}{2}(x(\mathrm{t})-x(-\mathrm{t}))$

$x_0(t)=\frac{1}{2}(e^{jt}-e^{-jt}) =\frac{1}{2}(\cos(t)+j.\sin(t)-\cos(t)+j.\sin(t))=j.\sin(t)$

Пример 3:

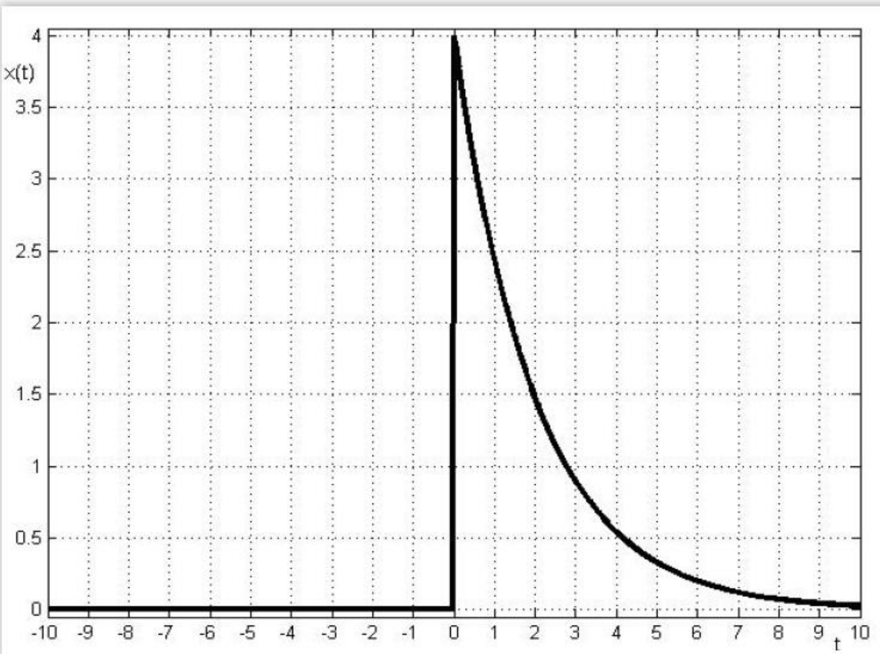
- За сигнале приказан на слици одредити и скицирати парну и непарну компоненту сигнала.

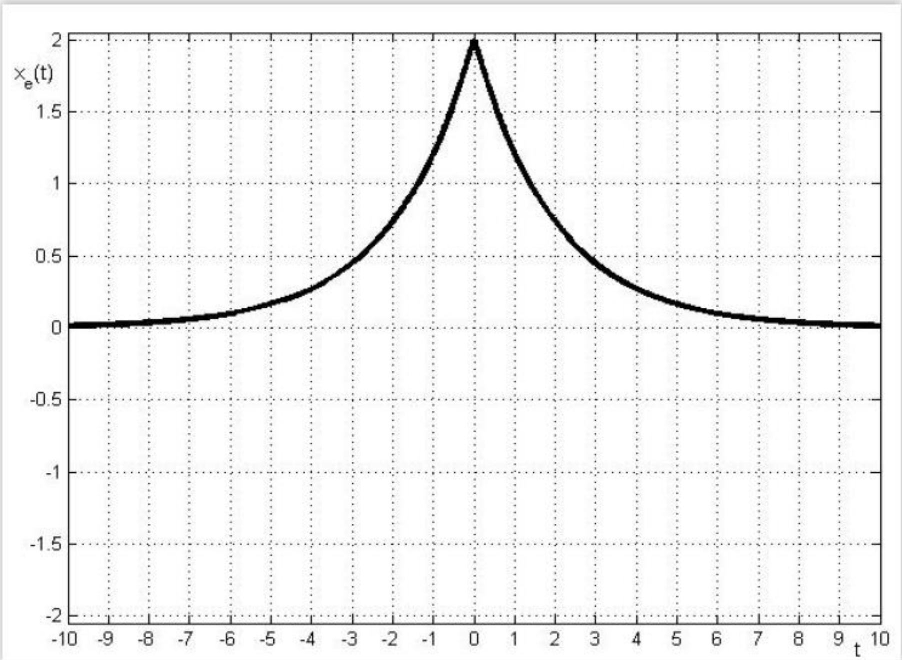


$$x(t) = 4e^{-0.5t}$$

Пример 3: Парна компонента сигнала

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) \qquad \Rightarrow \qquad x_e(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}4e^{-0.5t} & t \geq 0 \\ \frac{1}{2}4e^{0.5t} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-0.5t} & t \geq 0 \\ 2e^{0.5t} & t < 0 \end{cases},$$

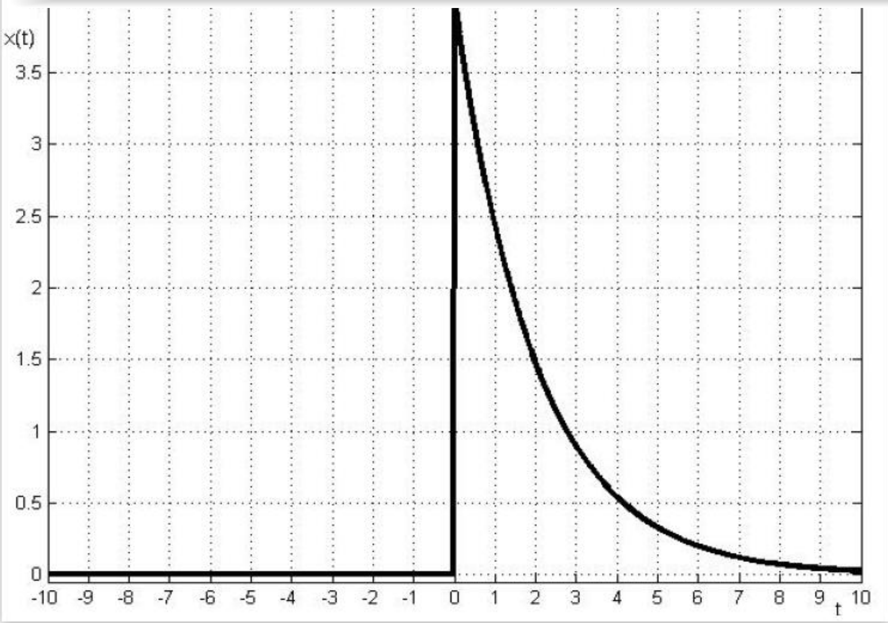


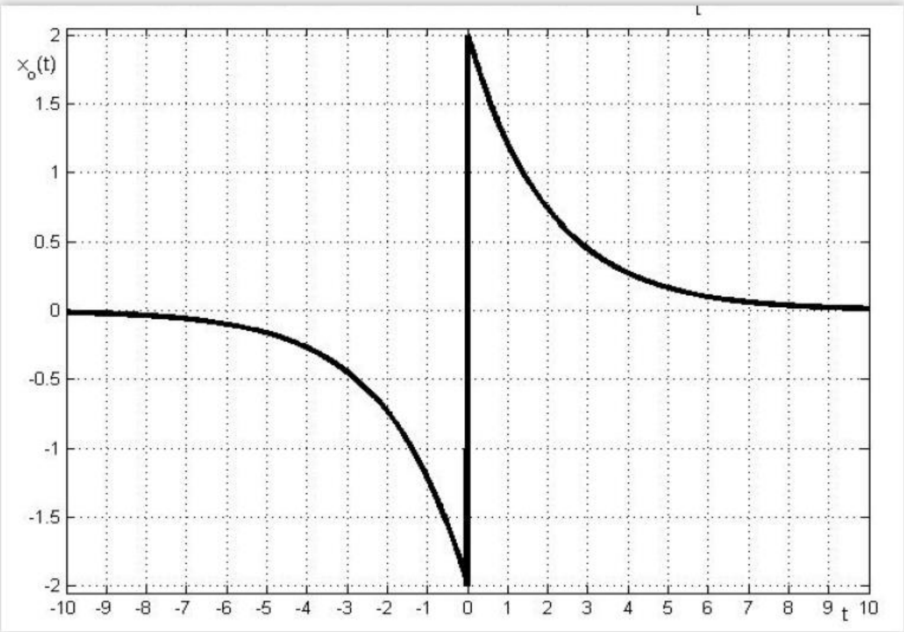


$a)\ x(t) = 4e^{-0.5t}$

Пример 3: Непарна компонента сигнала

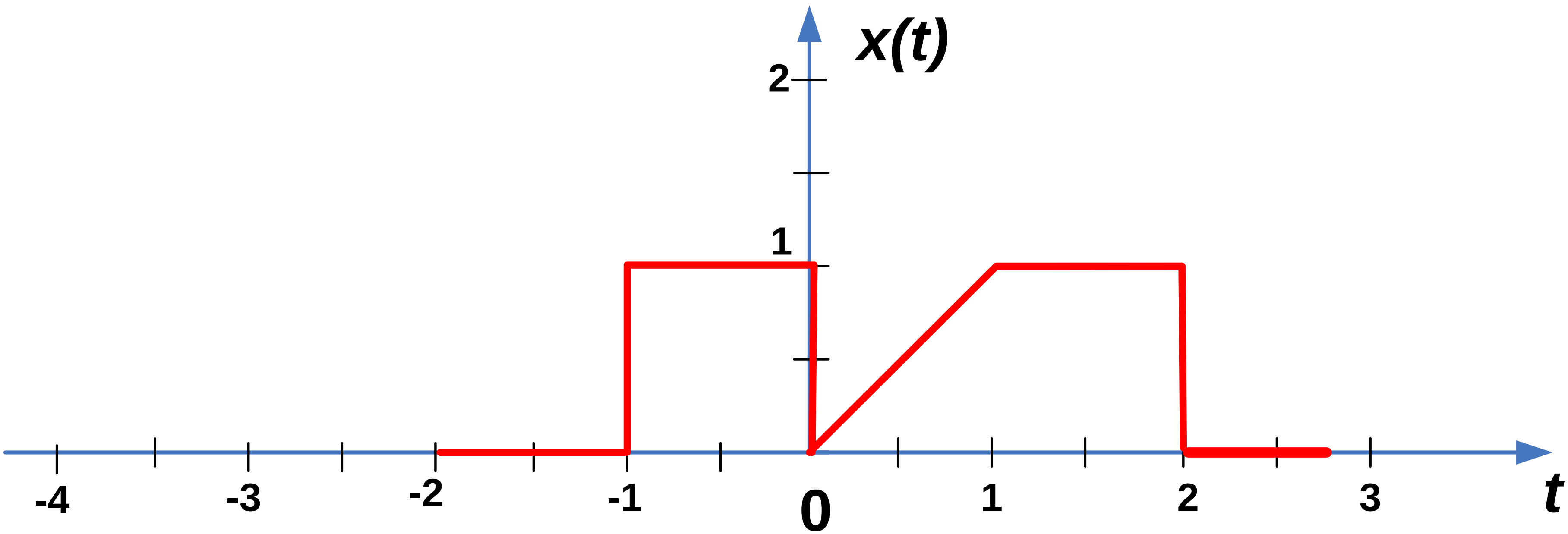
$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right) \quad \Rightarrow \quad x_o(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}4e^{-0.5t} & t \geq 0 \\ -\frac{1}{2}4e^{0.5t} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-0.5t} & t \geq 0 \\ -2e^{-0.5t} & t < 0 \end{cases}.$$





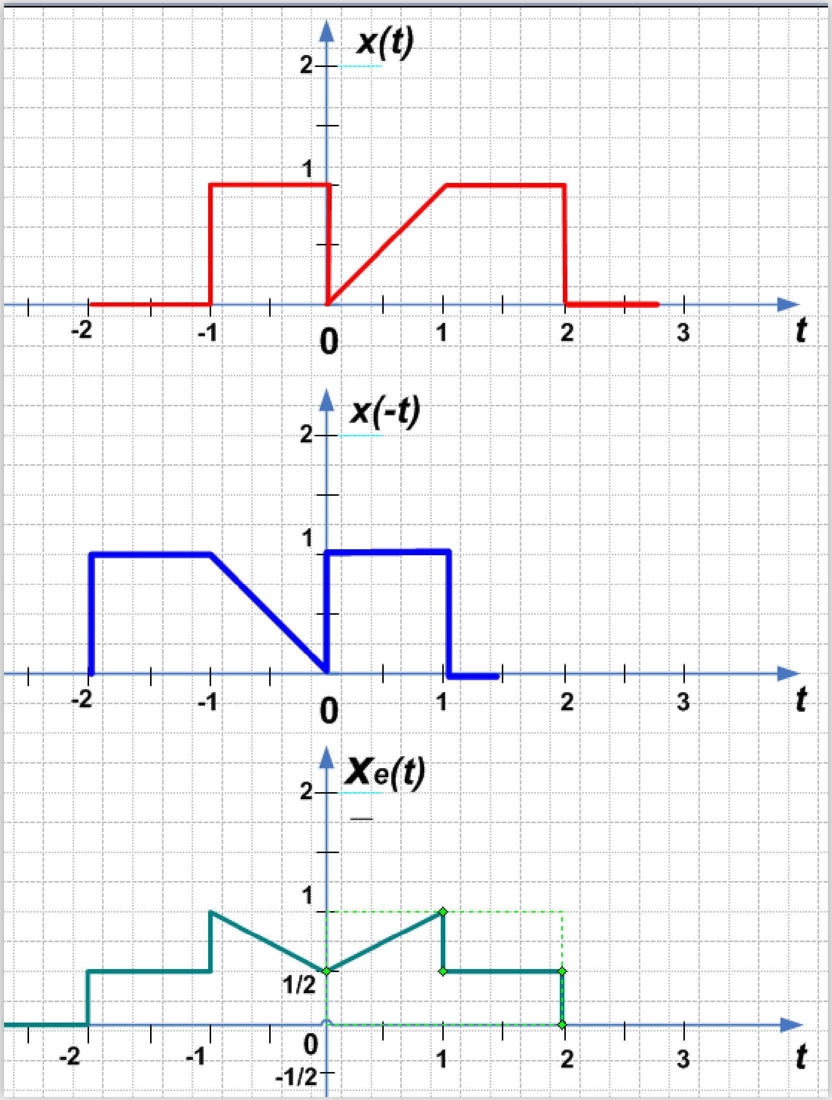
$a)\ x(t) = 4e^{-0.5t}$

Skicirati parnu i neparnu komponentu signala sa slike x(t)



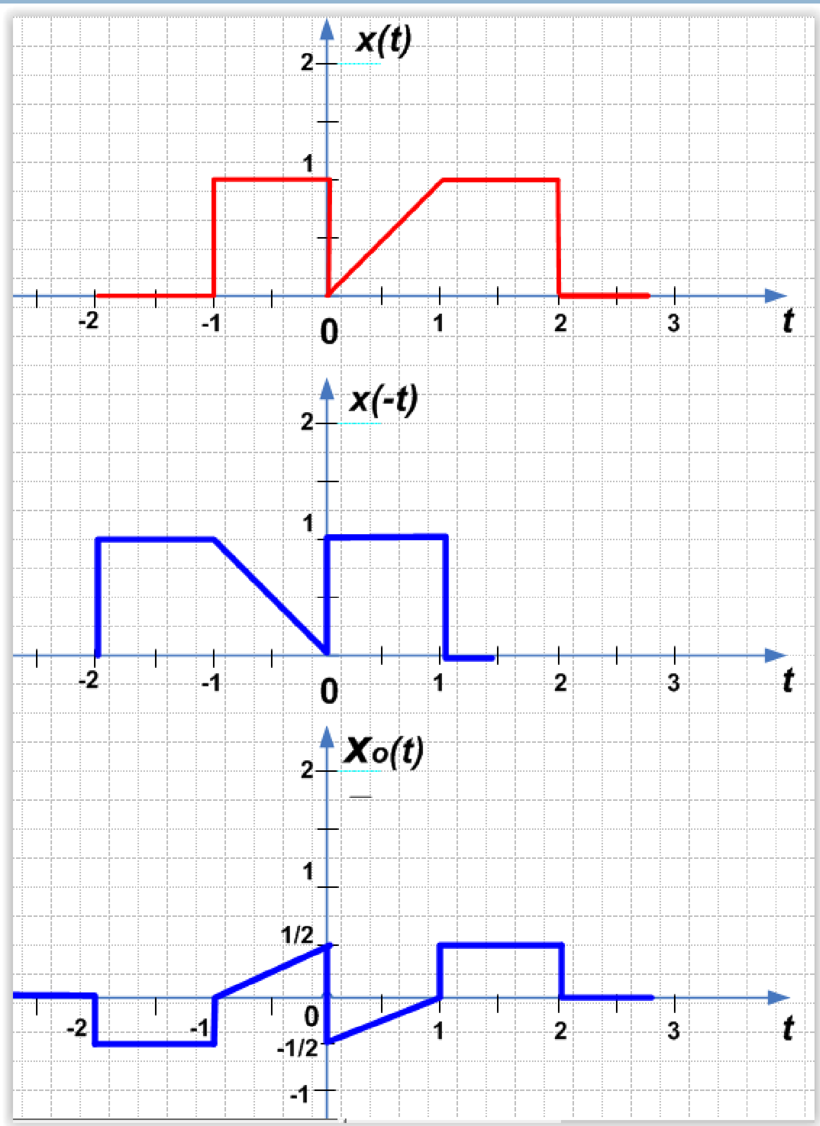
Parna komponenta signala sa slike x(t)

$$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

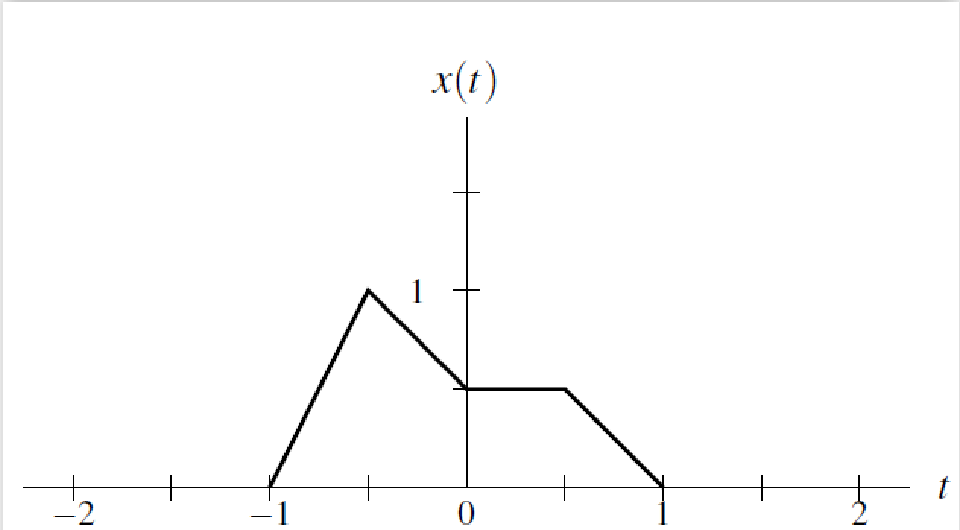


Neparna komponenta signala sa slike x(t)

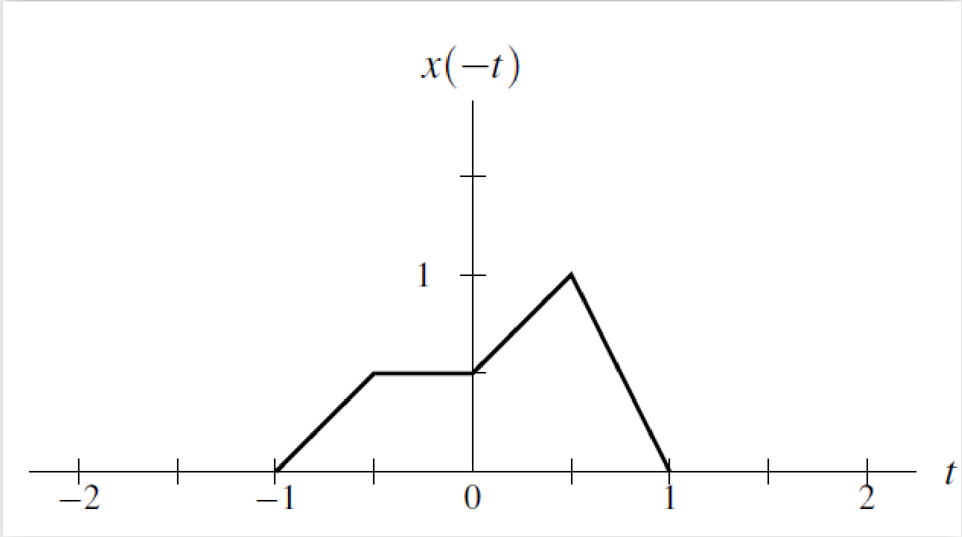
$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$



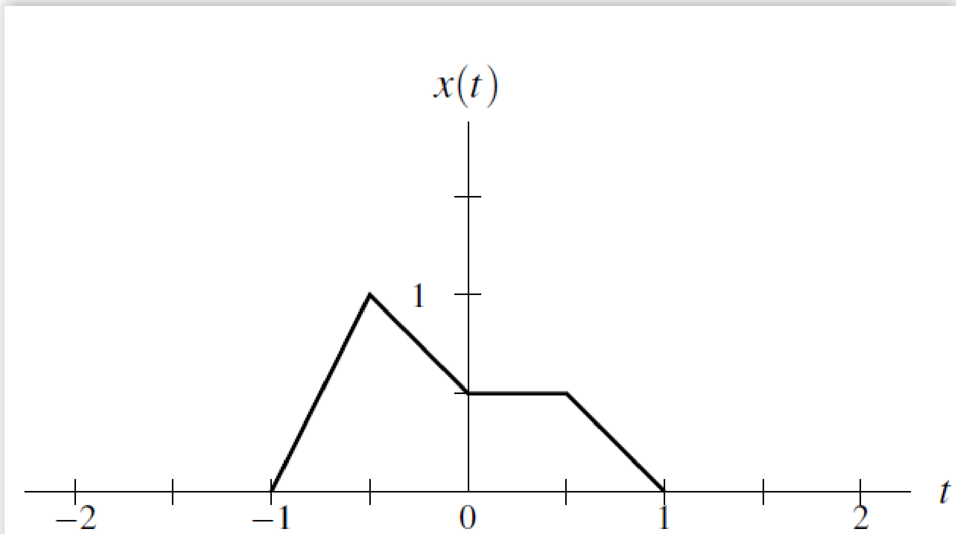
3. Za signal x(t) sa slike, skicirati signale: $x(-t)$, $x(2t)$ i $x(\frac{1}{2}t)$



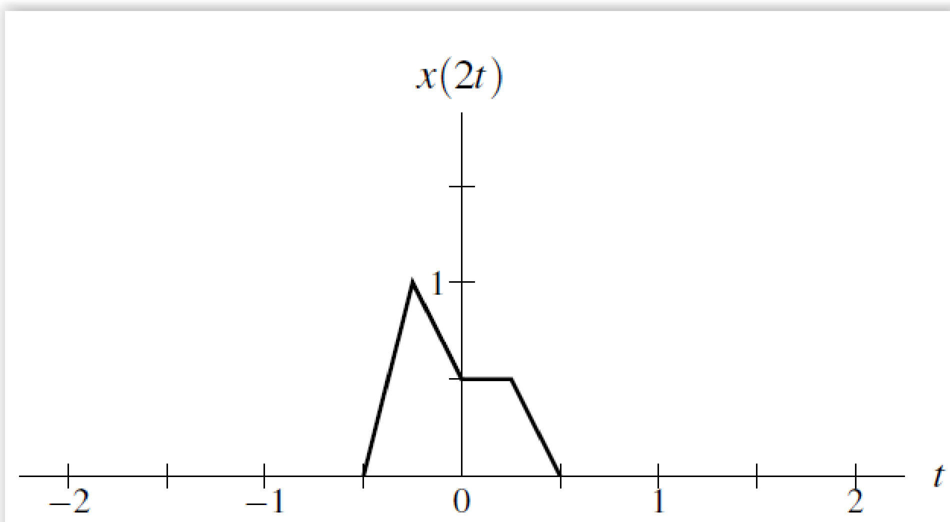
- x(-t)



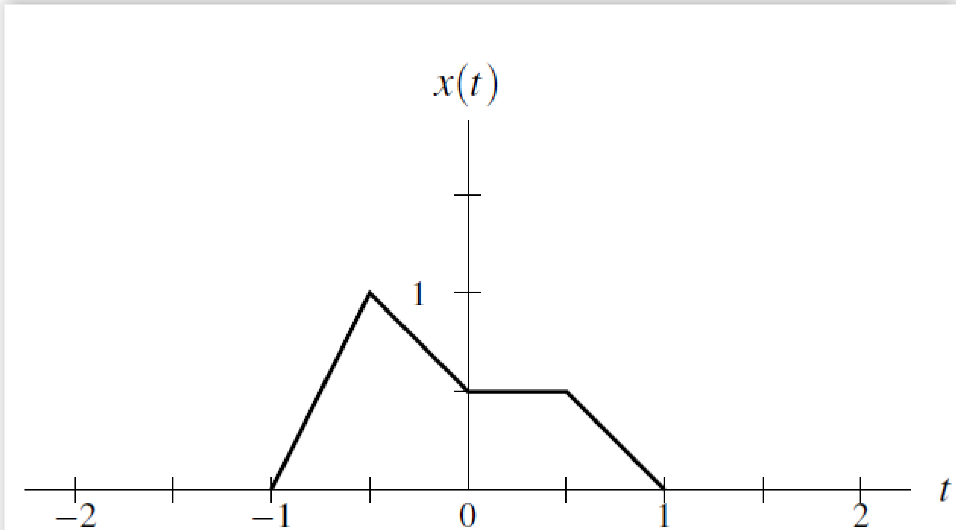
3. Za signal x(t) sa slike, skicirati signale: x(-t), x(2t) i $x(\frac{1}{2}t)$



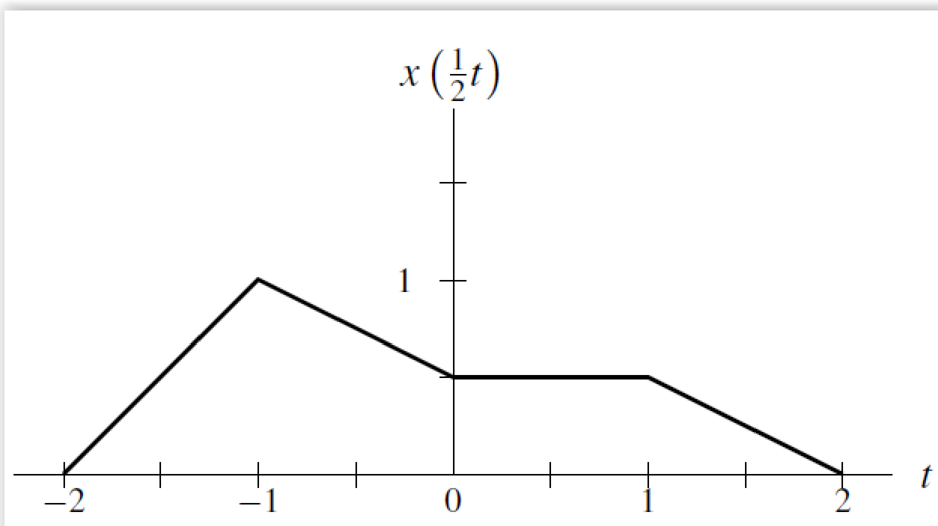
- x(2t)



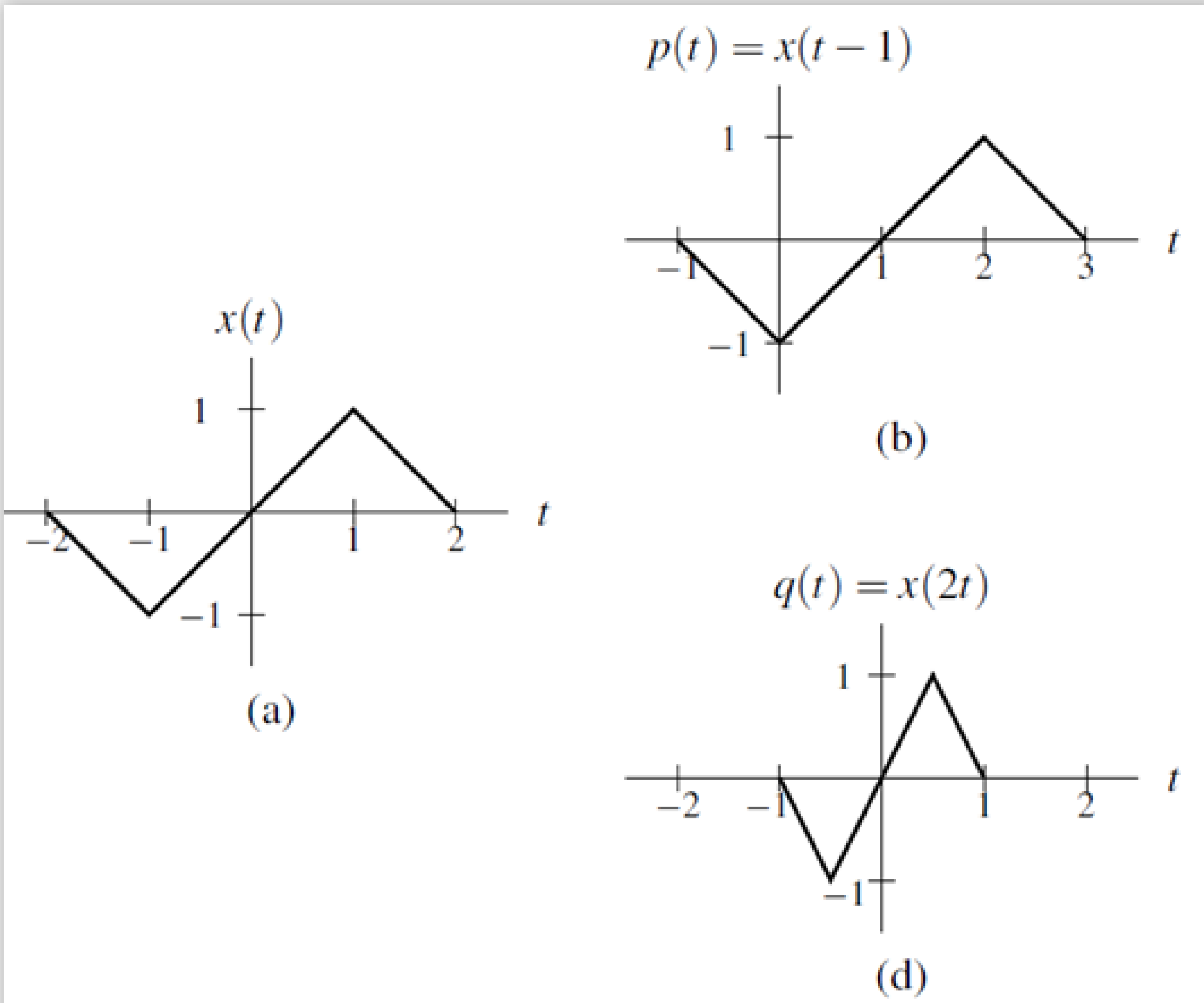
3. Za signal x(t) sa slike, skicirati signale: x(-t), x(2t) i $x(\frac{1}{2}t)$



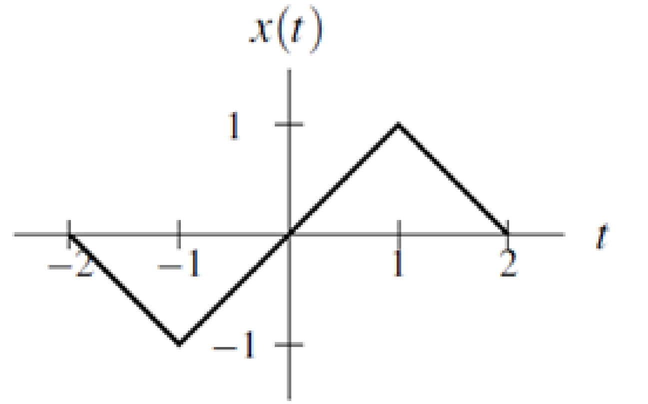
- $x(\frac{1}{2}t)$



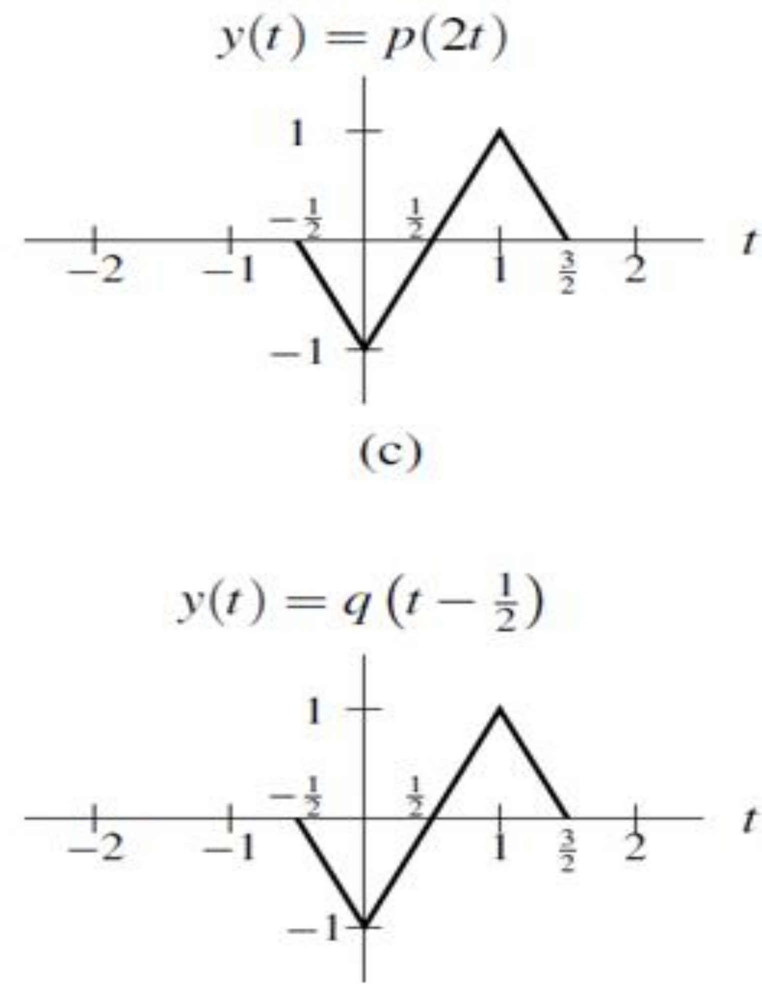
4. Za signal x(t) sa slike, skicirati signale: p(t)=x(t-1), q(t)=x(2t)



5. Za signal x(t) sa slike, skicirati signale: $y(t)=p(2t)$, $y(t)=q((t-\frac{1}{2})$



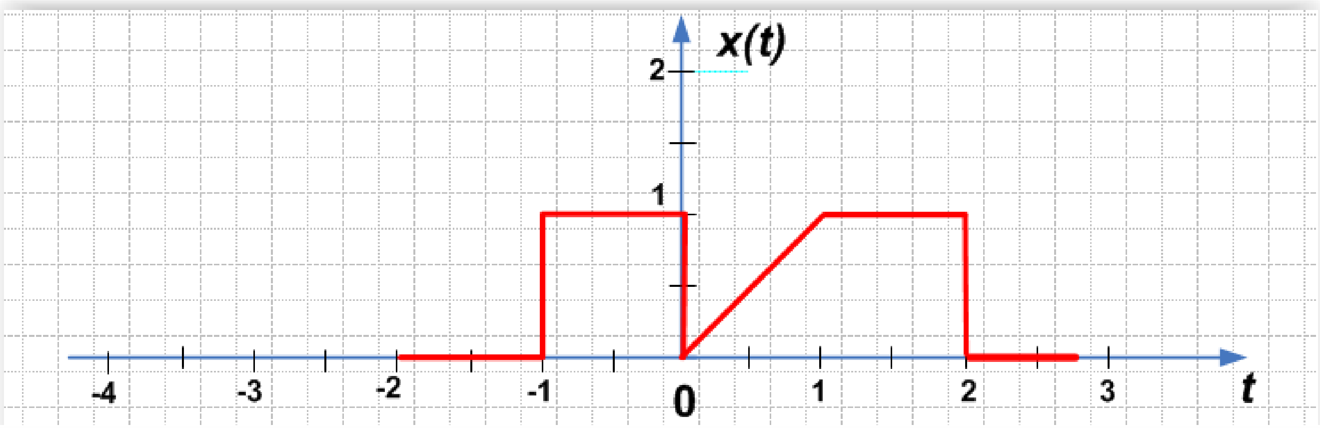
(a)

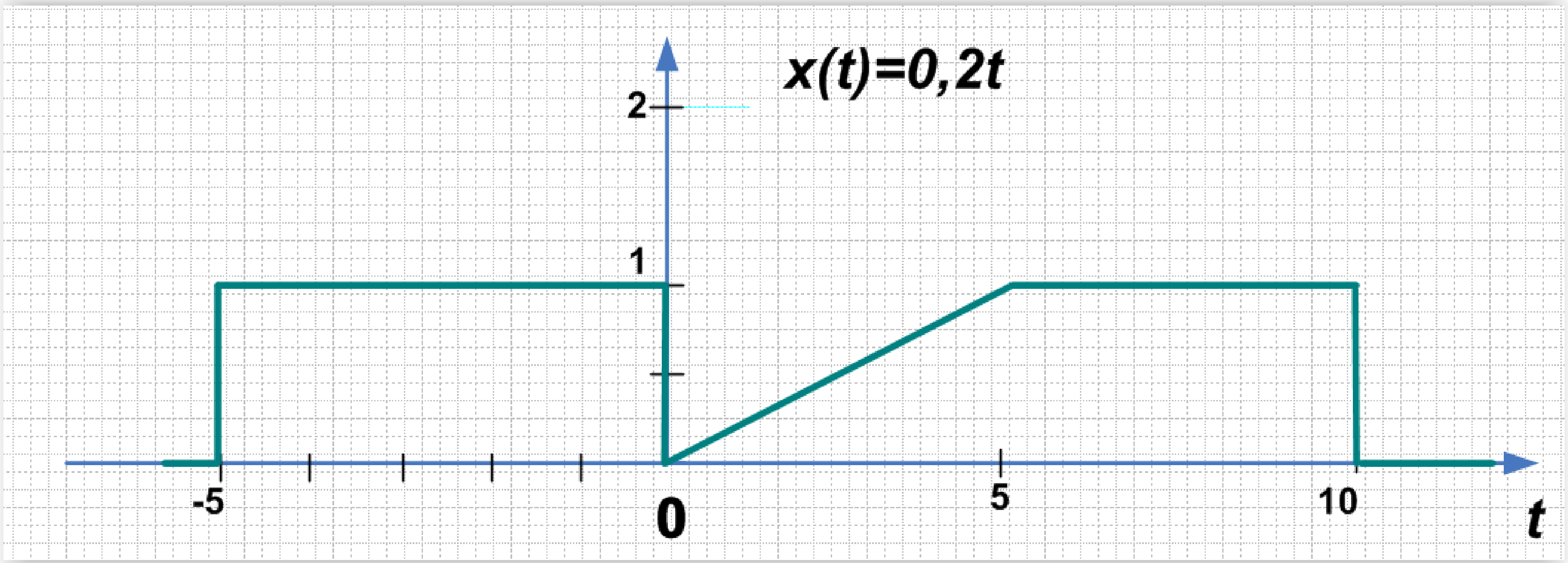


(c)
(e)

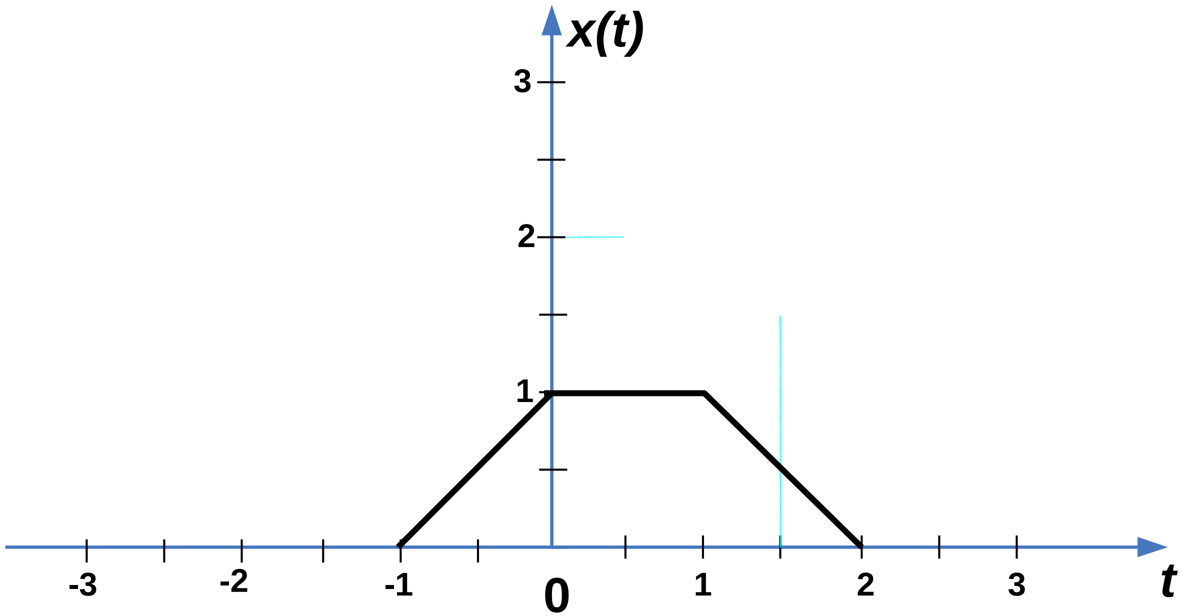
Za signal x(t) skicirati signal y(t)=0,2t

$$y(t)=0{,}2t=\frac{1}{5}t$$





Primer: Za trapezoidni signal $x(t)$ sa slike, skicirati signal $y(t)=x(1-\frac{t}{2})$

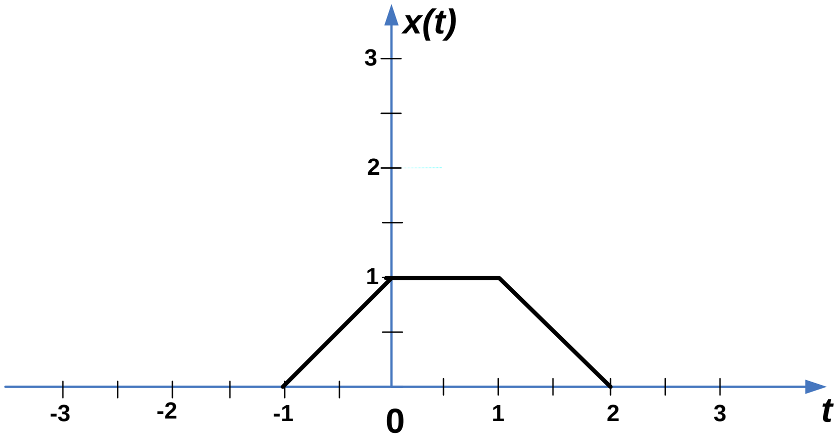


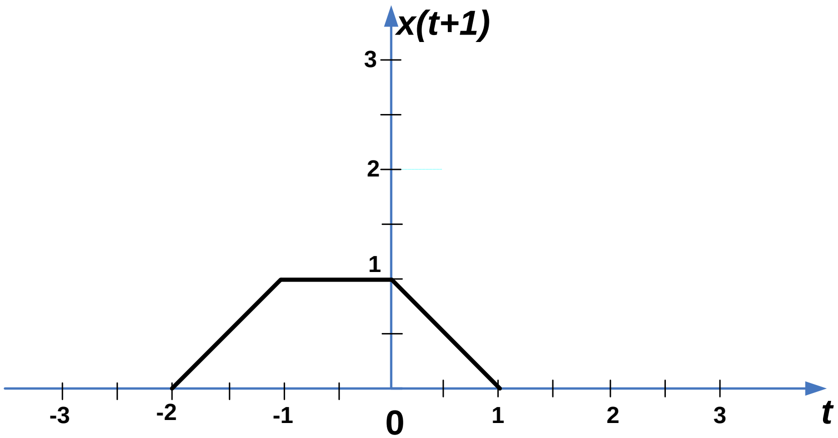
Signal $\boldsymbol{y(t)=x(1-\frac{t}{2})}$ *predstavite u obliku* $\boldsymbol{y(t)=x(-\frac{t}{2}+1)}$

1. Skicirati pomoćni signal $\boldsymbol{y(t)=x(t+1)}$ – vremensko pomeranje u levo

Primer: Formiranje signala $y(t)=x(t+1)$

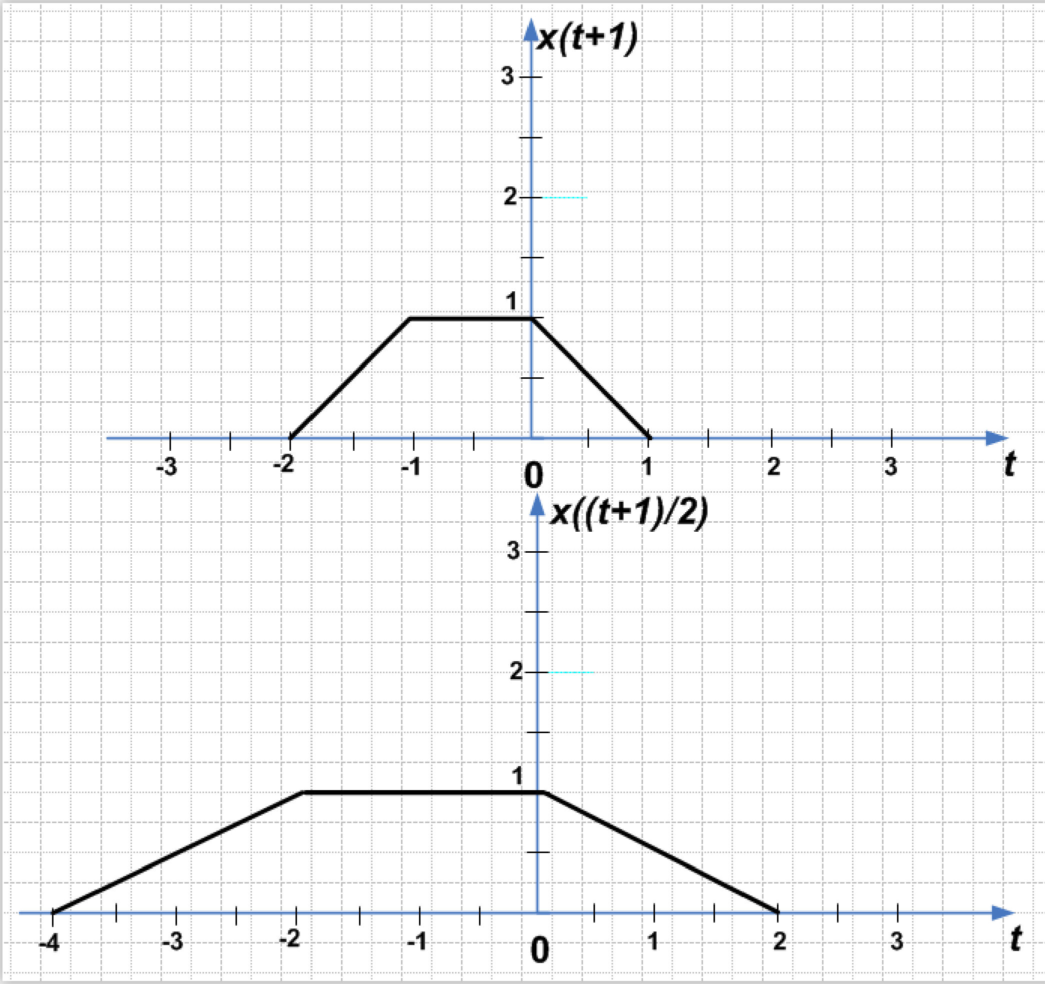
Skicirati pomoćni signal $y(t)=x(t+1)$ – vremensko pomeranje u levo





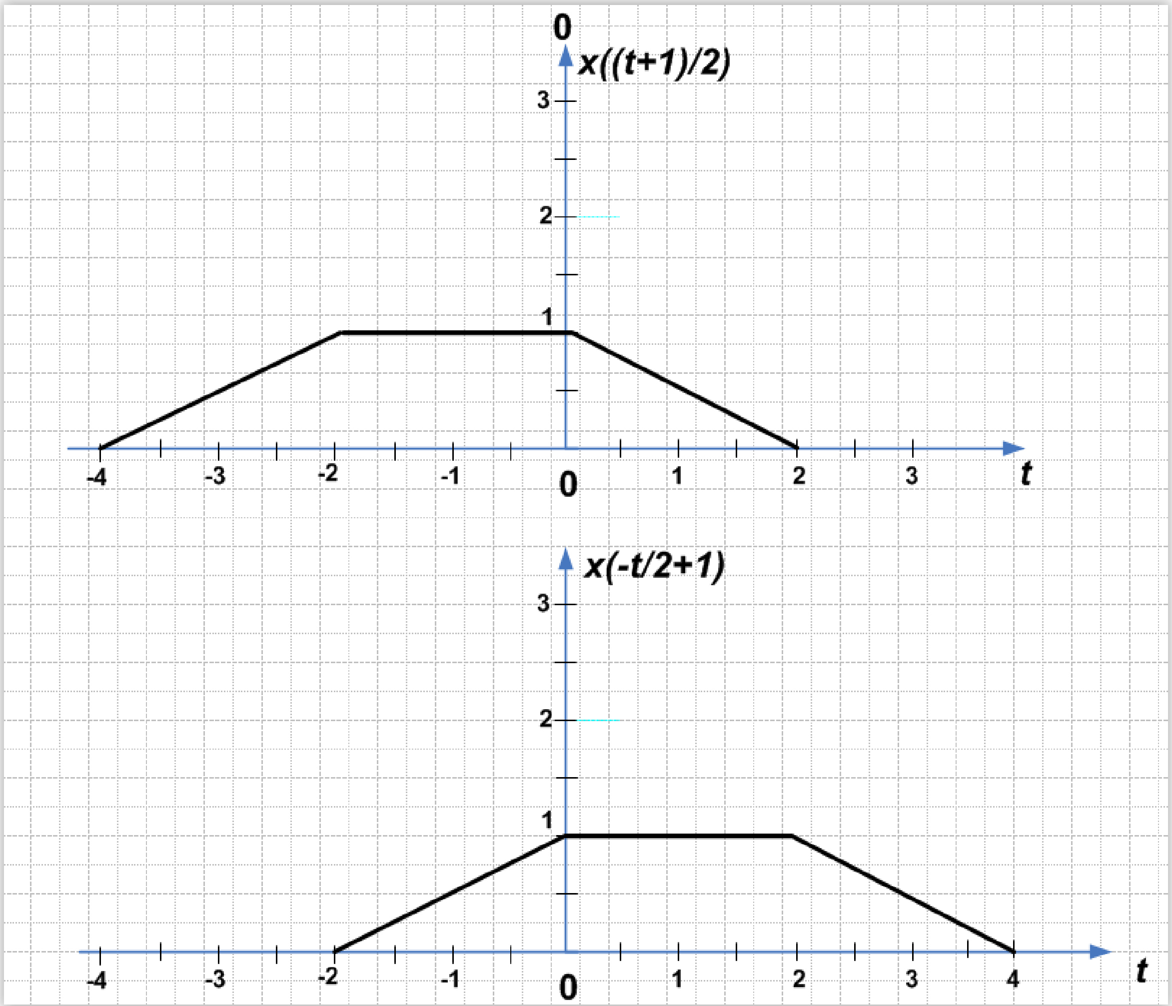
Primer: Za trapezoidni signal *x(t)* skicirati signal ***z(t)=x(t/2)***

Skicirati pomoćni signal ***z(t)=x(t/2)*** – vremenska ekspanzija faktorom 2



Primer: Za trapezoidni signal *x(t)* skicirati signal $y(t)=x(-\frac{t}{2}+1)$

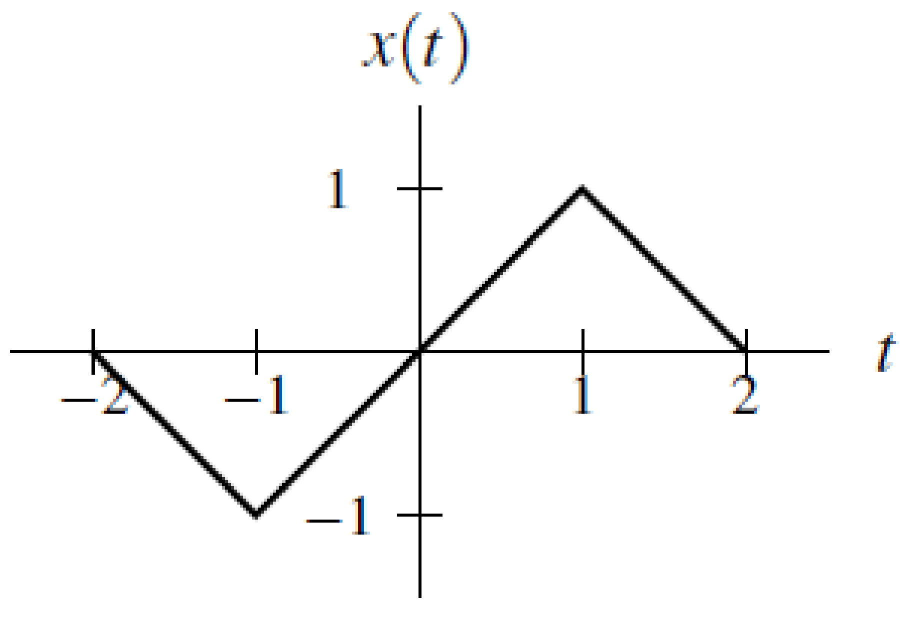
Skicirati pomoćni signal $y(t)=x(-\frac{t}{2}+1)$ – refleksija u odnosu na *y* - osu



Kombinovanje vremenskog pomeranja i skaliranja

- $y(t) = x(at + b)$

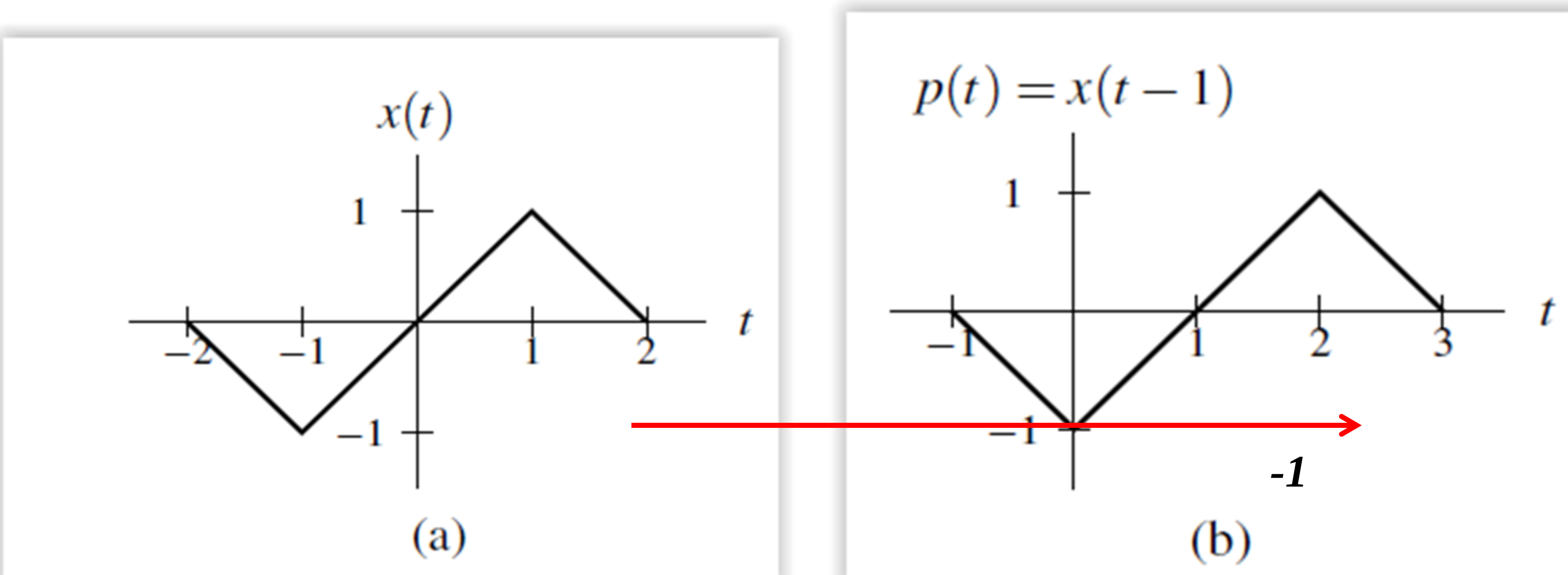
Primer: Za funciju x(t) skicirati funciju $y(t) = x(2t - 1)$



(a)

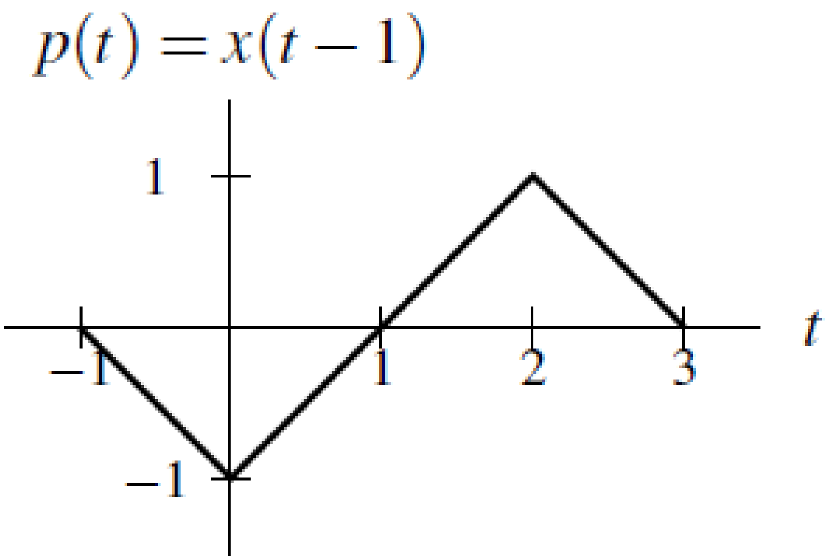
Primer: y(t) = x(2t -1)

- ***y(t) = x(2t -1)***   ***y(t) = x(at +b)***
- Prvi korak je vremensko pomeranje za **-1** i formiranje pomoćnw f-je **p(t)**

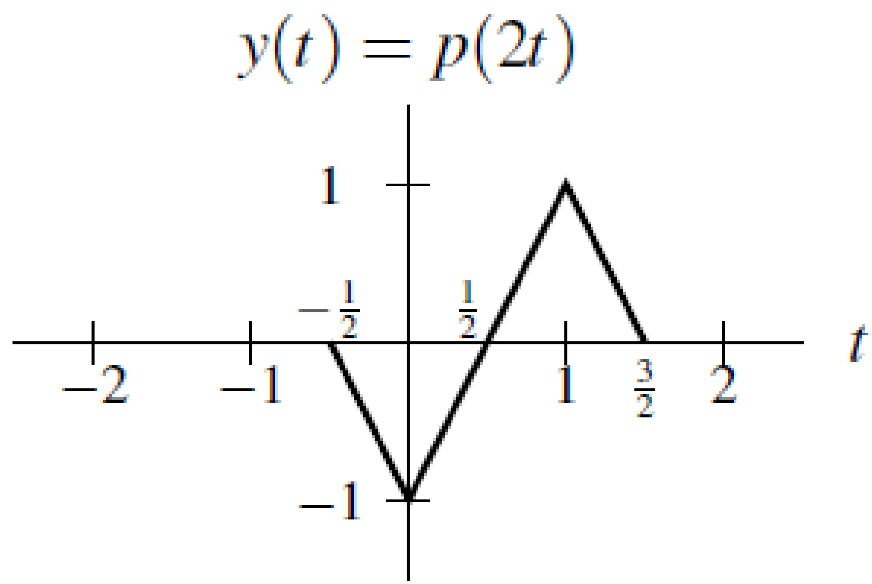


Kombinovanje vremenskog pomeranja i skaliranja

- $y(t) = x(2t - 1)$
- Drugi korak je skaliranje faktorom ***2,*** sabijanje

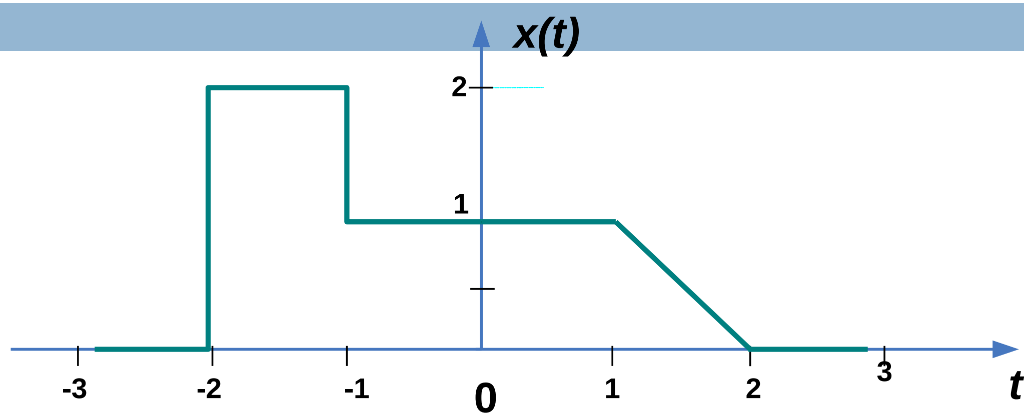


(b)

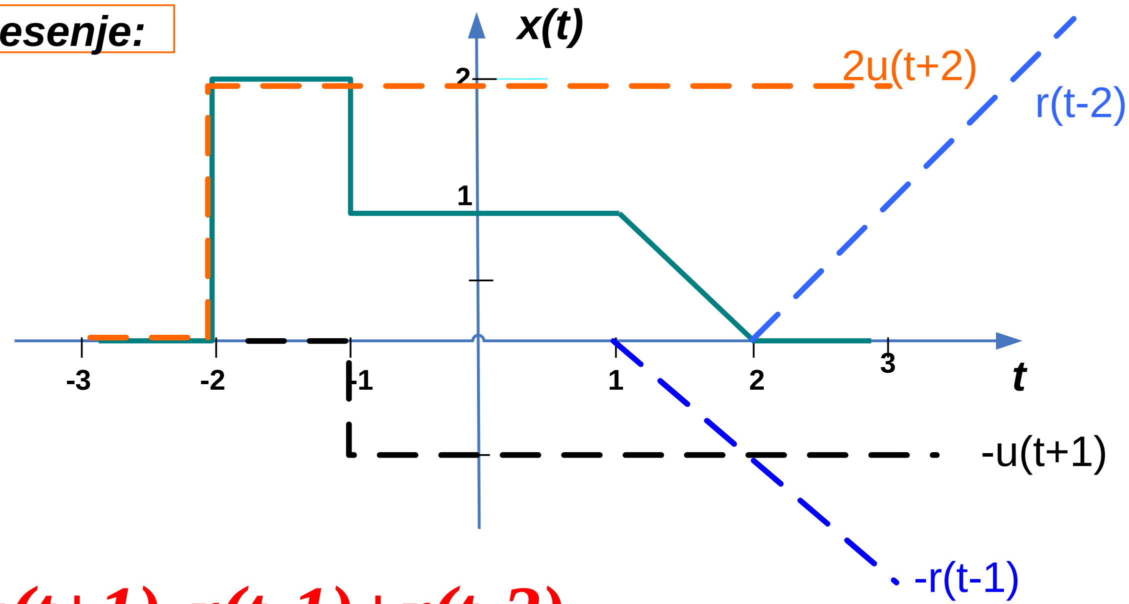


(c)

Primer: Za signal sa slike x(t) napisati njegov analitički oblik pomoću odskočne i nagibne funkcije

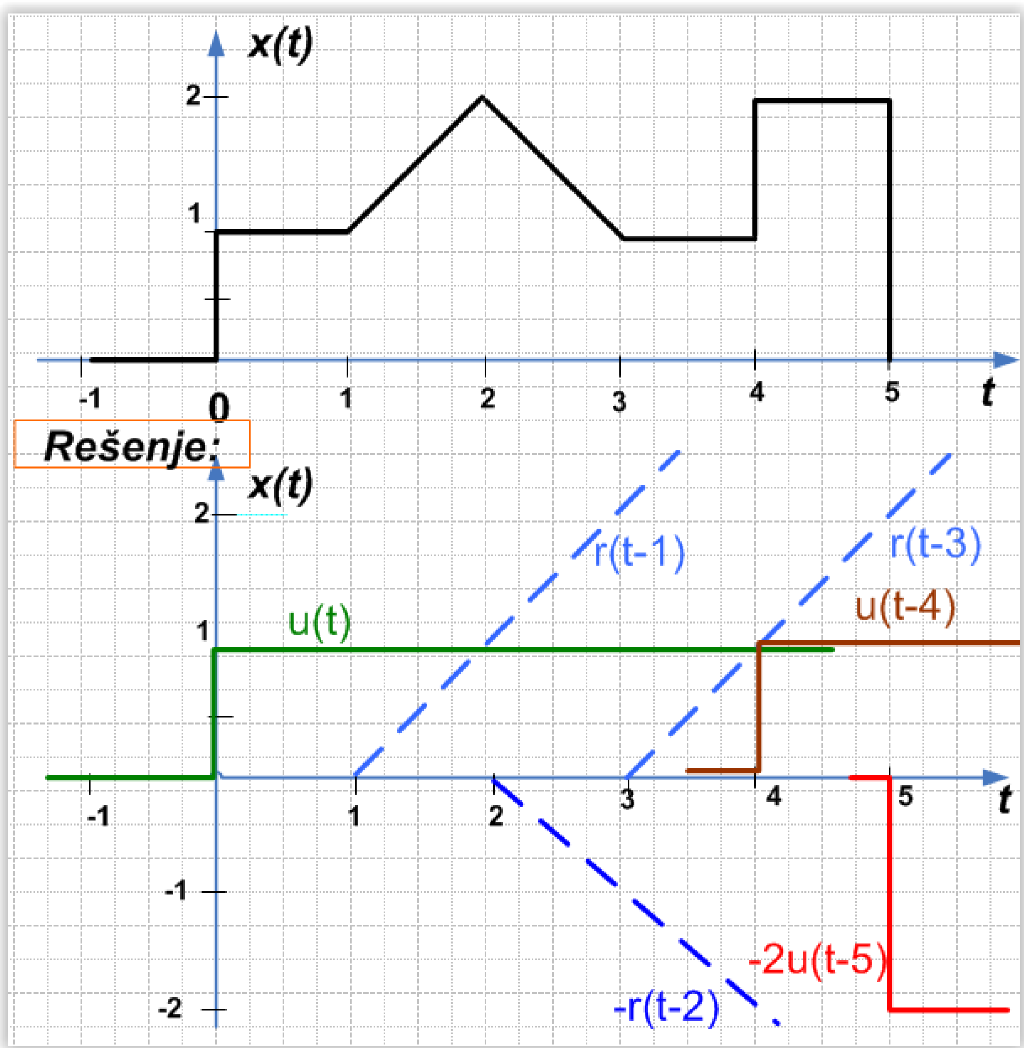


Resenje:



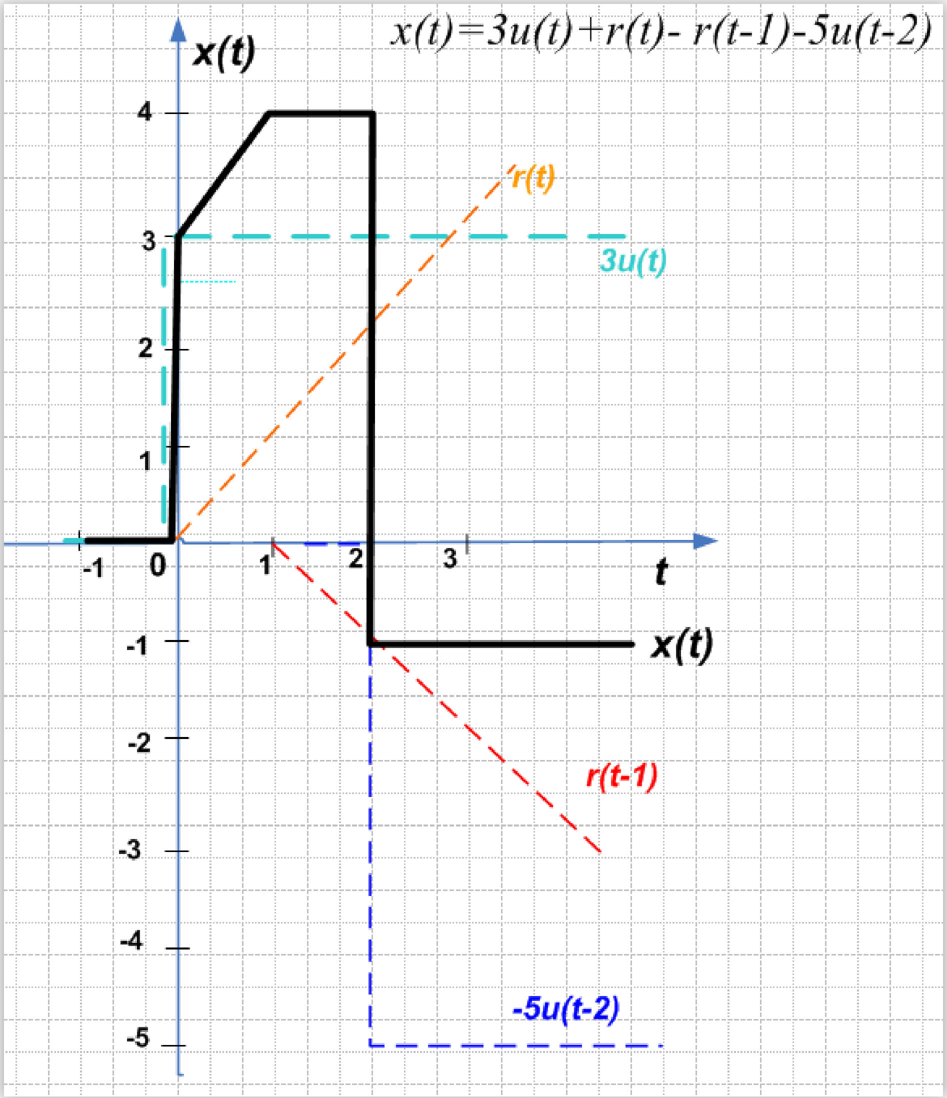
- $x(t) = 2u(t+2) - u(t+1) - r(t-1) + r(t-2)$

Primer: Za signal sa slike x(t) napisati njegov analitički oblik pomoću odskočne i nagibne funkcije



$$x(t)=u(t)+r(t-1)-2r(t-2)+r(t-3)+u(t-4)-2u(t-5)$$

Primer: Koristći odskočnu i nagibnu funciju skicirati signal *x(t)=3u(t)+r(t)-r(t-1)-5u(t-2)*



KONVOLUCIJA SIGNALA

Konvolucija kontinualnih vremenskih funkcija

- Fundamentalna operacija nad signalima koja se u teoriji obrade signala koristi jeste **konvolucija**.
- Ako nad signalim ***x(t)*** i ***h(t)*** primenimo konvoluciju kao rezultat ćemo dobiti treću kontinualnu funkciju ***y(t)*** , pri čemu kao oznaku za konvoluciju koristimo simbol ' *':

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t)}$$

- a izračunava po sledećoj relaciji

$$\boldsymbol{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}$$

- Ukoliko u poslednjoj relaciji izvršimo smenu promenljivih $\boldsymbol{t-\tau=\lambda}$ dobija se

$$\boldsymbol{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda}$$

Algoritam izračunavanja konvolucije signala

1. Signal $h(\tau)$ se prvo invertuje i pomeri u vremenu kako bi se dobila funcija $h(t-\tau)$ od τ gde je t parametar
2. Signal $x(\tau)$ i $h(t-\tau)$ se izmnože za sve moguće vrednosti varijable τ, a za fiksno t
3. Proizvod $x(\tau)h(t-\tau)$ se integrali po celokupnom skupu vrednosti τ i tako dobija vrednost $y(t)$ za neko fiksno t
4. Ponove se koraci od 1 do 3 za različite vrednosti parametra t iz skupa$(-\infty, \infty)$, kako bi se dobila funcija $y(t)$

Primer 1: Izračunati konvoluciju dve jedinične odskočne funkcije $y(t) = u(t) * u(t)$

Po definiciji: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\, d\tau$

Znajući da u (τ) za τ<0:

$y(t) = \int_{0}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\, d\tau$

Za τ>0, u(τ)=1

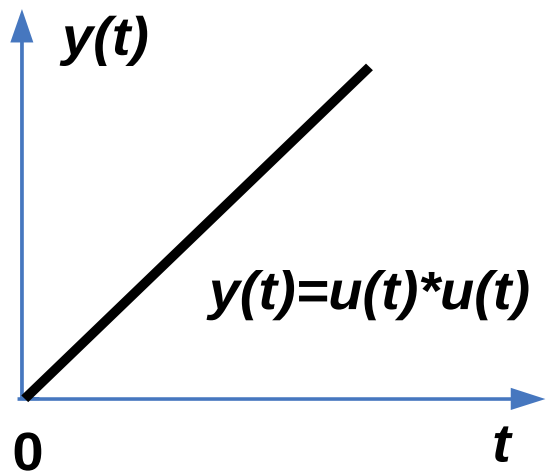
$y(t) = \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)\, d\tau$ **,** Ukoliko izvršimo smenu promenljivih $t - \tau = \lambda$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\lambda)\, \mathbf{d}\lambda;$

Primer 1: Izračunati konvoluciju dve jedinične odskočne funkcije

- Za t<0: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}\ (\lambda)\ \mathbf{d}\lambda == \int_{-\infty}^{t} \mathbf{0}\ \mathbf{d}\lambda = 0$

- Za t>0: $y(t)= \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}\ (\lambda)\ \mathbf{d}\lambda = \int_{0}^{t} \mathbf{1}\ \mathbf{d}\lambda = t$



- S obzirom na prirodu jedinične osdkočne funkcije, dobijeni rezultat može da se napiše kao:

$$y(t) = tu(t)$$