P2 – ELEMENTARNI KONTINUALNI SIGNALI

PREDMET: SIGNALI I SISTEMI

Elementarni kontinualni signali

- Većina signala sa kojima se inženjeri sreću u svakodnevnoj praksi su po svojoj prirodi kontinualni u vremenu
- Primeri takvih signala su:
  - Napon
  - Struja
  - Snaga
  - Pritisak
  - Temperatura
  - Protok,
  - Nivo,
  - Ugao, pomeraj, brzina, ubrzanje i tako dalje
- Vremenski oblici ovih signala mogu biti vrlo složeni
- Za analizu signala neophodno je signal matematički opisati.
- Složeni vremenski oblici signala mogu prikazati linearnom kombinacijom elementarnih ili osnovnih kontinualnih vremenskih signala

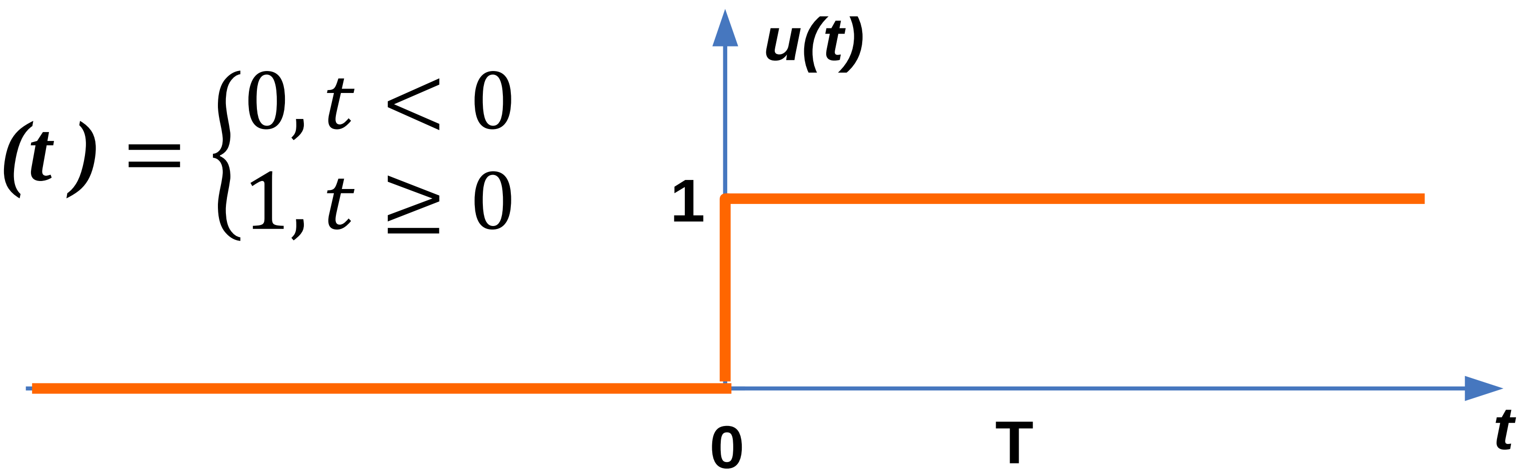
Elementarni kontinualni signali

- Analiza i obrada signala se pojednostavljuje uvođenjem elementarnih signala i svođenjem složenih problema analize i obrade signala na jednostavnije slučajeve
- Najznačajniji elementarni signali su:
  - jedinični odskočni signal,
  - signal znaka,
  - signal nagiba,
  - pravougaoni i trougaoni impuls,
  - jedinični impuls beskonačno velike amplitude
  - kompleksni eksponencijalni, sinusni

Jedinična odskočna funkcija

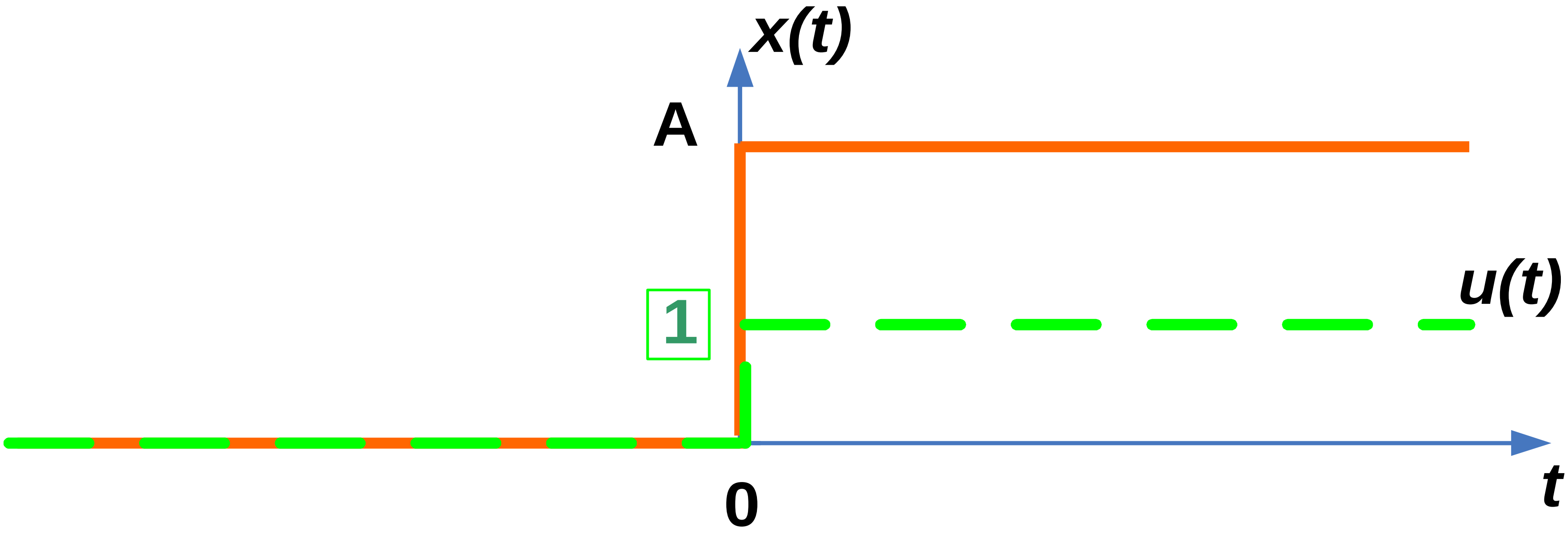
- Ako je signal signal ***x(t)*** kontinualan u vremenu (*CT signal*) to ne znači da je to kontinualna funkcija, već da je vreme ***t*** neprekidna, kontinualna nezavisna promenljiva.
- Važan primer za takvu vrstu signal je jedinična odskočna funkcija ili jedinični odskočni signal
- Jedinična odskočna funkcija naziva ***Hevisajdovom funkcijom*** i označava kao ***u(t)*** ili ***h(t)***.

$$\boldsymbol{u(t)} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$



Odskočna (STEP) funcija

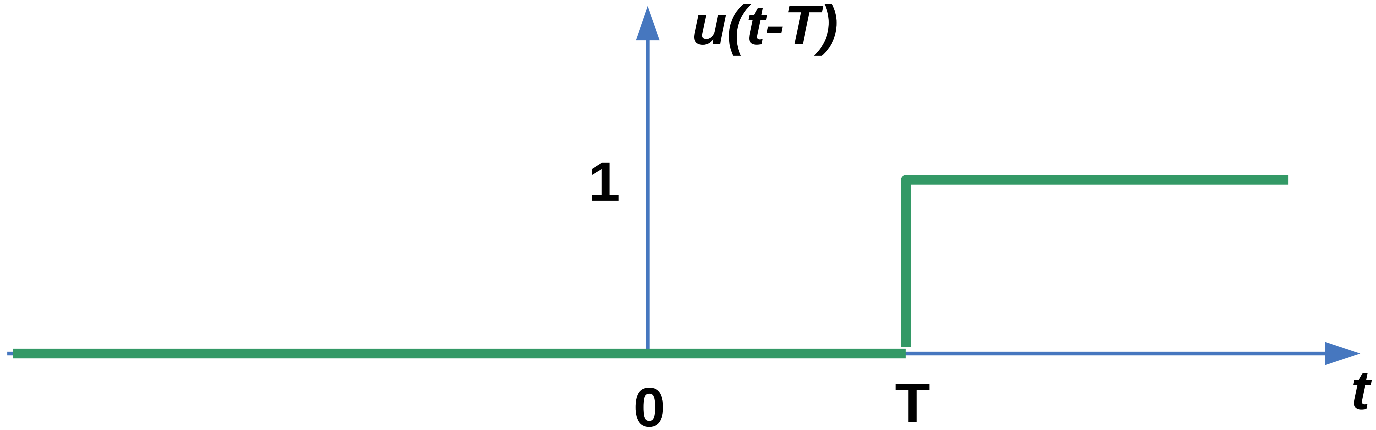
- Odskočna (STEP) funcija dobija se amplitudnim skaliranjem Hevisajdove funcije
- $\boldsymbol{x(t) = Au(t)}$, gde je A konstanta



Jedinična odskočna funkcija

- Funkcija $\boldsymbol{u(t-T)}$ predstavlja pomerenu Hevisajdovu funciju za vreme **T** u desno, po x-osi
- Zakašnjena jediničnu odskočna funkciju definiše se kao

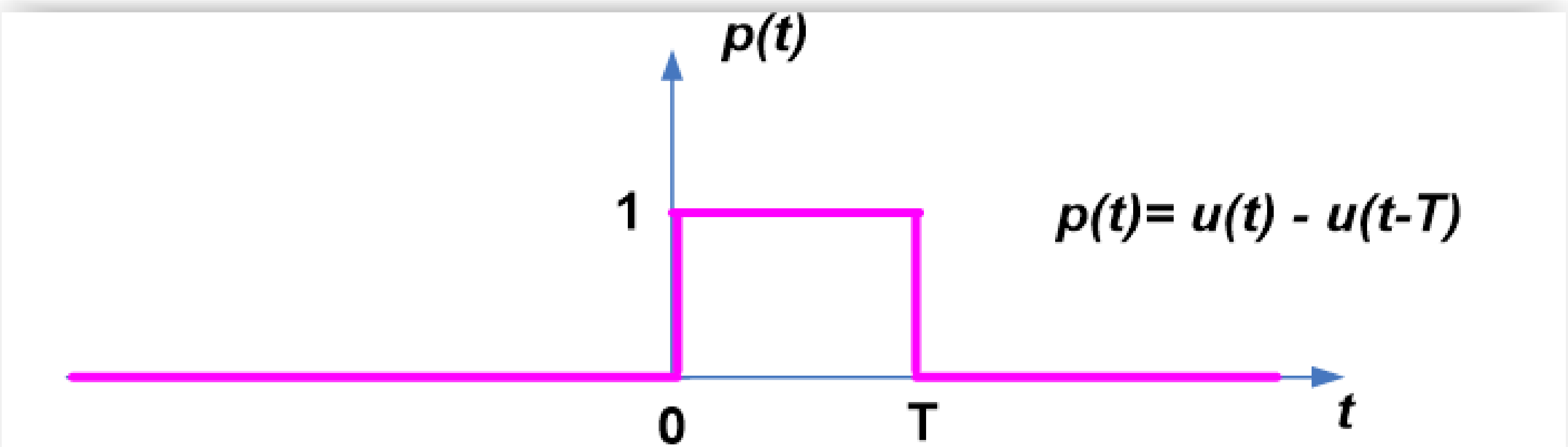
$$\boldsymbol{u(t-T)} = \begin{cases} 0, t < T \\ 1, t \geq T \end{cases}$$



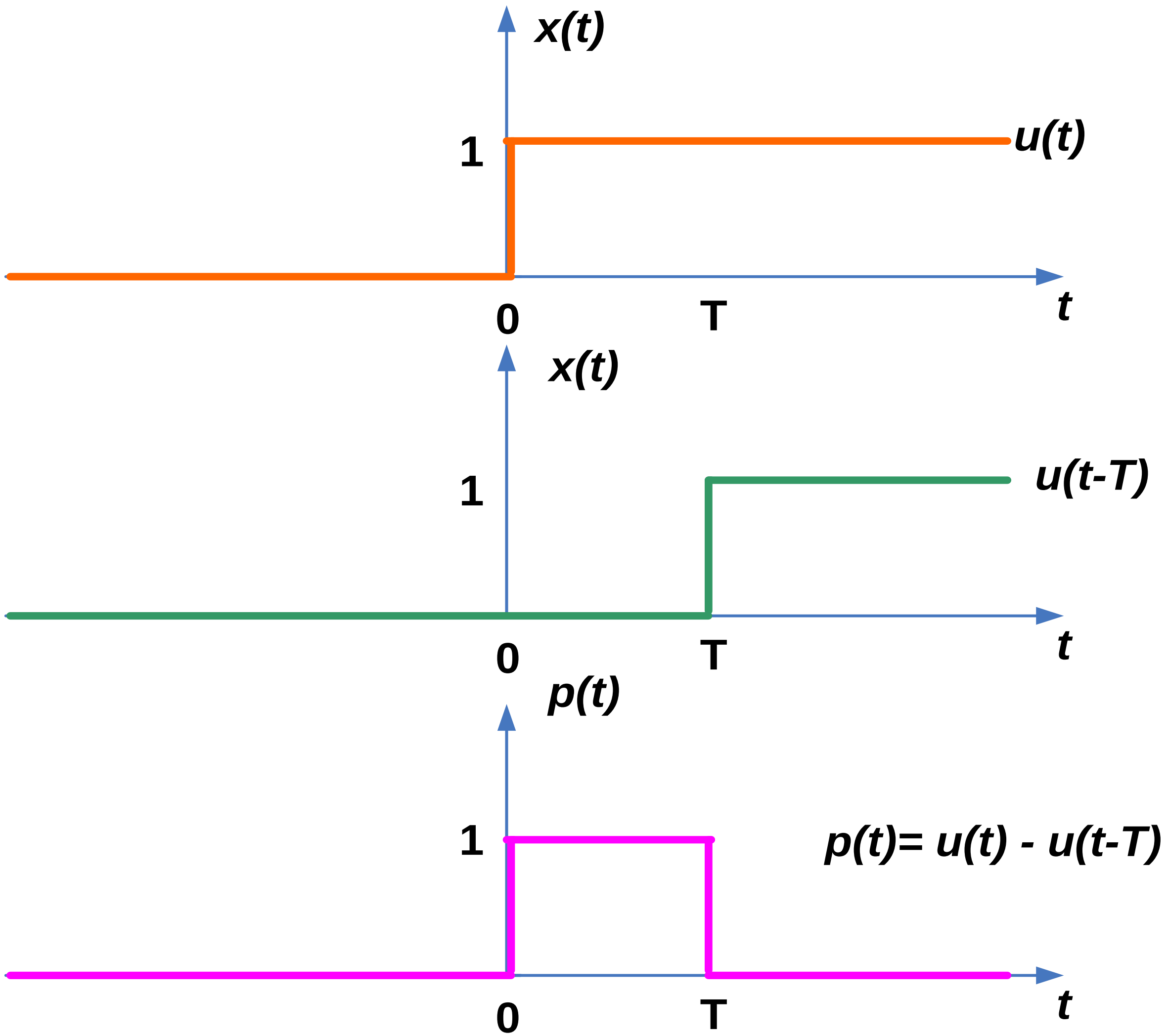
Impulsna funkcija

- Jedinična odskočna funkcija je vrlo korisna jer se pomoću nje može definisati čitav skup drugih signala.
- Primer, pravougaoni impuls p(t) može se predstaviti razlikom dve jedinične odskočne funkcije:

$$p(t\,) = u(t\,) - u(t - T)\,,\ T > 0$$

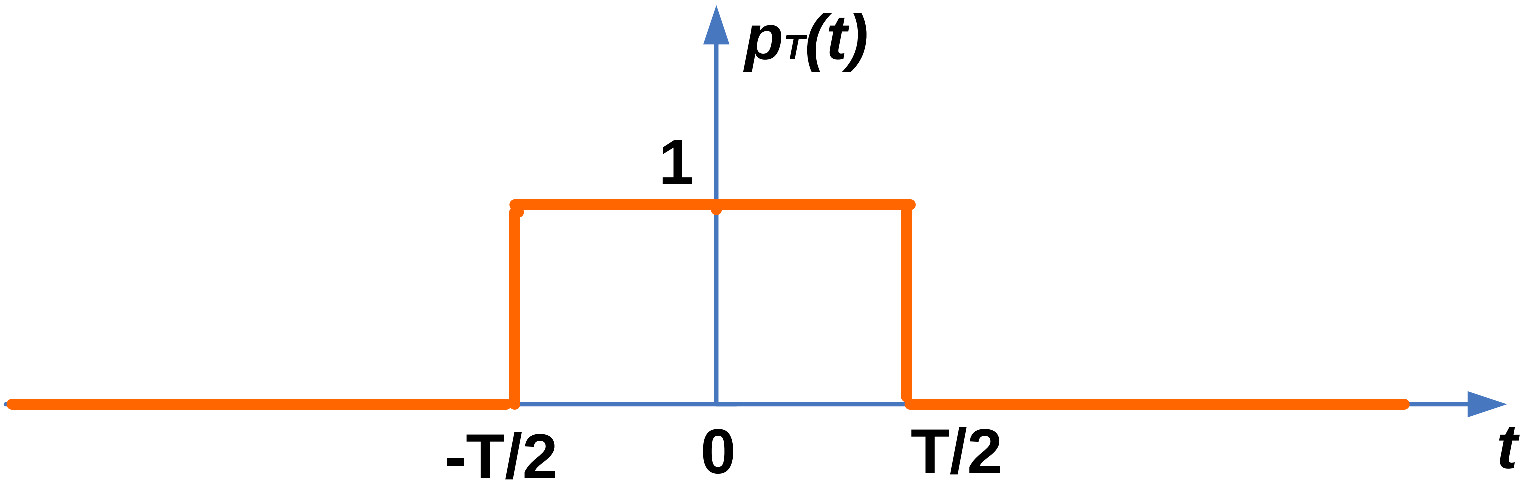


Dobijanje pravougaonog impulsa pomoću Hevisajdove funkcije



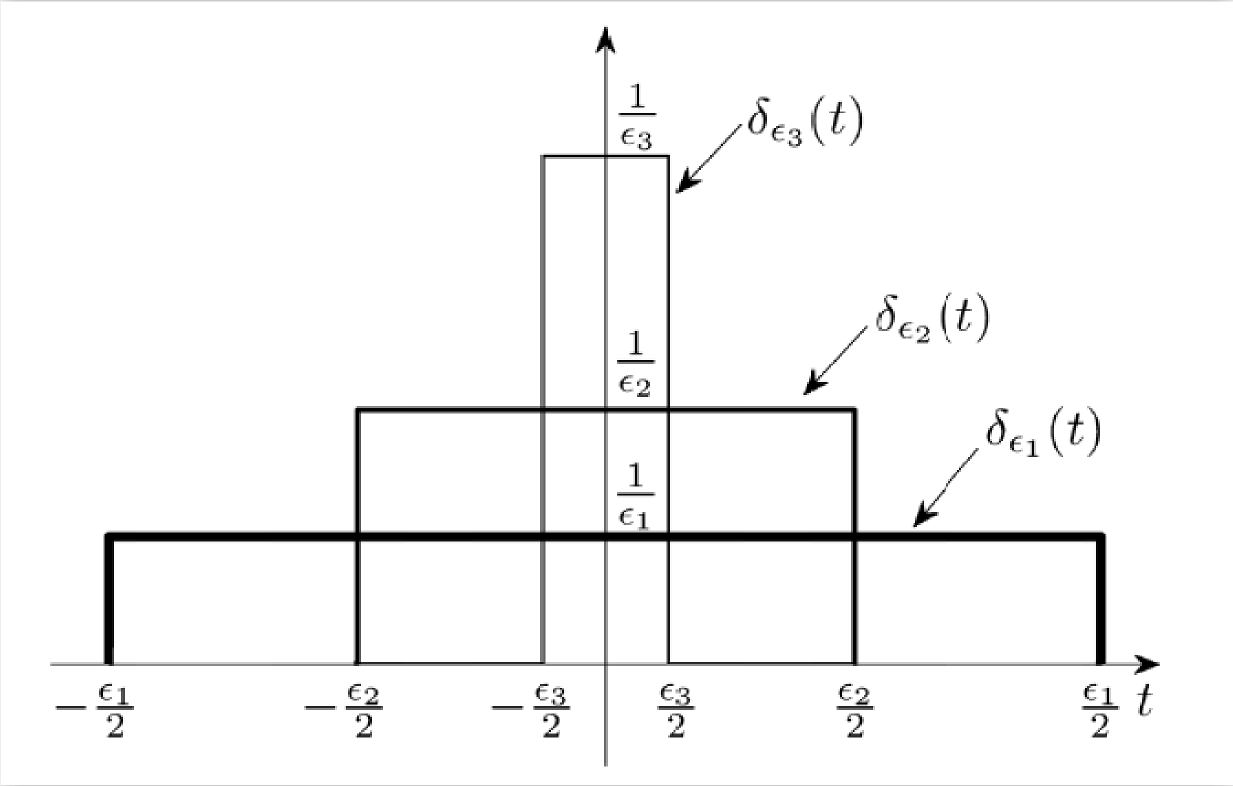
Pravougaoni impuls

- Jednačina pravougaonog impulsa $\boldsymbol{p_T} = \begin{cases} 1, |t| < \frac{\boldsymbol{T}}{2} \\ 0, |t| > \frac{\boldsymbol{T}}{2} \end{cases}$
- $\boldsymbol{p_T(t) = u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})}$ – dobijanje pravougaonog impulsa



Impulsna funkija (Dirakov impuls)

- Dirakov impuls predstavlja granični uslov pravougaonog impulsa $\boldsymbol{p_\varepsilon(t)}$ jedinične površine**,** kada se impuls beskonačno sužava (širina teži nuli), a amplituda beskonaačno raste
- Površina impulsa uvek ostaje jednaka jedinici
- $\boldsymbol{\delta_\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon} p_\varepsilon(t)$
- $\delta(\mathrm{t}) = \lim\limits_{\boldsymbol{\varepsilon} \to 0} \boldsymbol{\delta_\varepsilon}(t)$

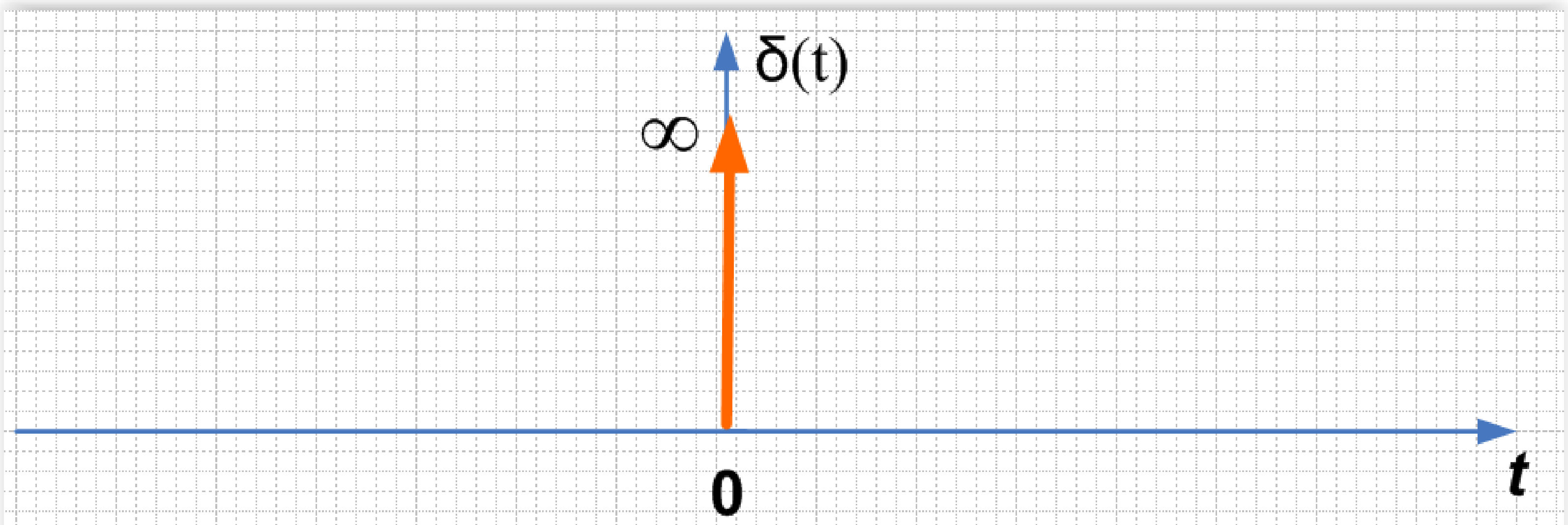


Dirakov impuls

Dirakov impuls predstavlja graničnu vrednost prvog izvoda jediničnog odskočnog signala

$$\delta(t) = lim\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \lim_{\boldsymbol{\varepsilon}\to 0}\frac{du_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt},$$

Dirakov impuls: $$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \infty, \boldsymbol{za\ t = 0} \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{za\ t \neq 0} \end{cases}$$

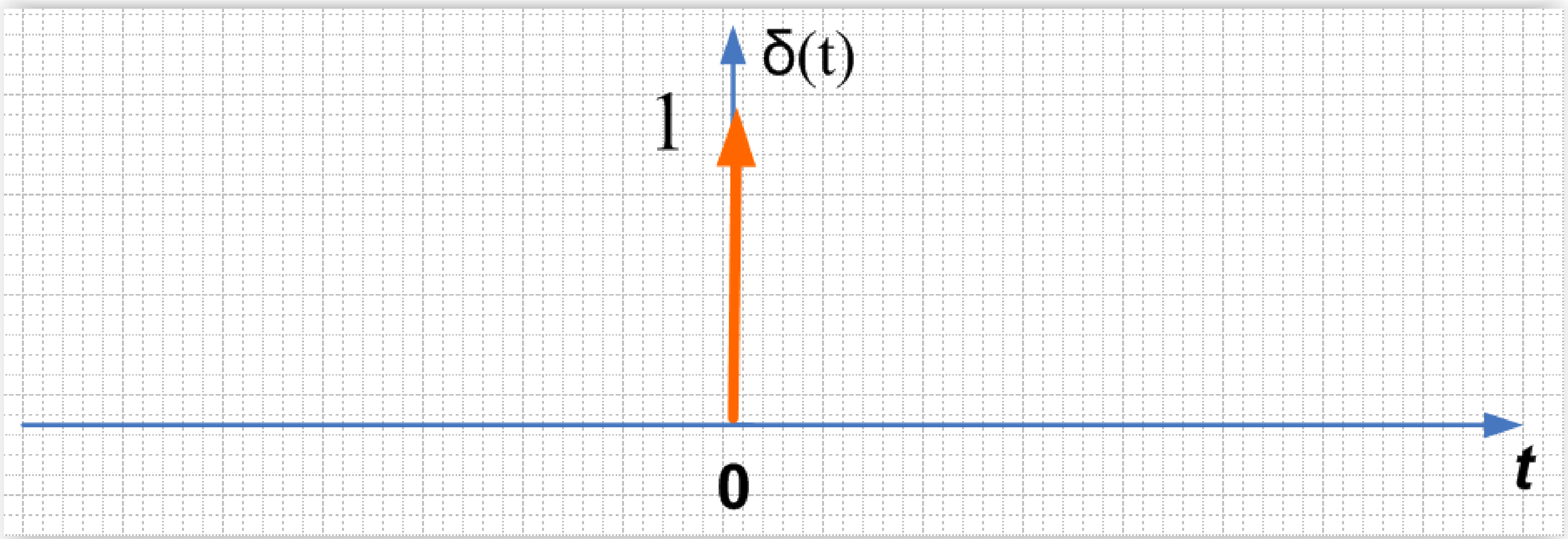


Jedinična impulsna funkija

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0-}^{0*} \delta(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(t)\mathrm{d}t = 1$$

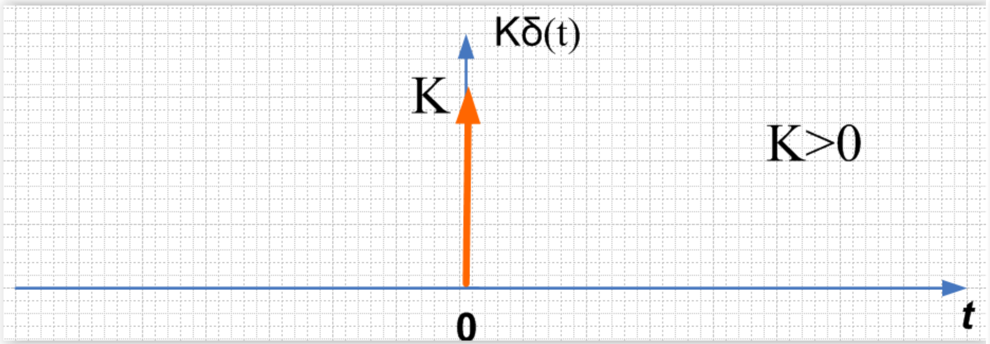
Jedinična impulsna funkcija:

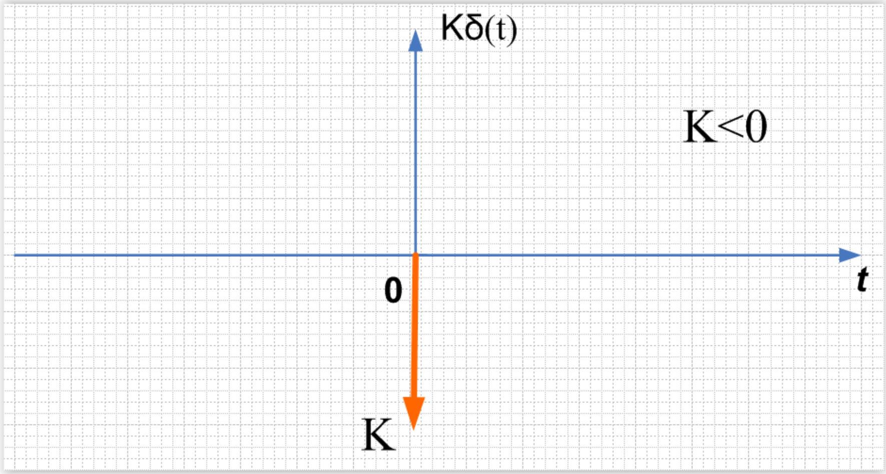
$$\delta(t) = \begin{cases} 1, za\ t = 0 \\ 0, za\ t \neq 0 \end{cases}$$



Osobine Dirakovog impulsa

- Skalirani Dirakov impuls ***Kδ (t)*** predstavlja prvi izvod skalirane ***K.u(t)*** jedinične odskočne funkcije gde vrednost skaliranog impulsa iznosi ***K***



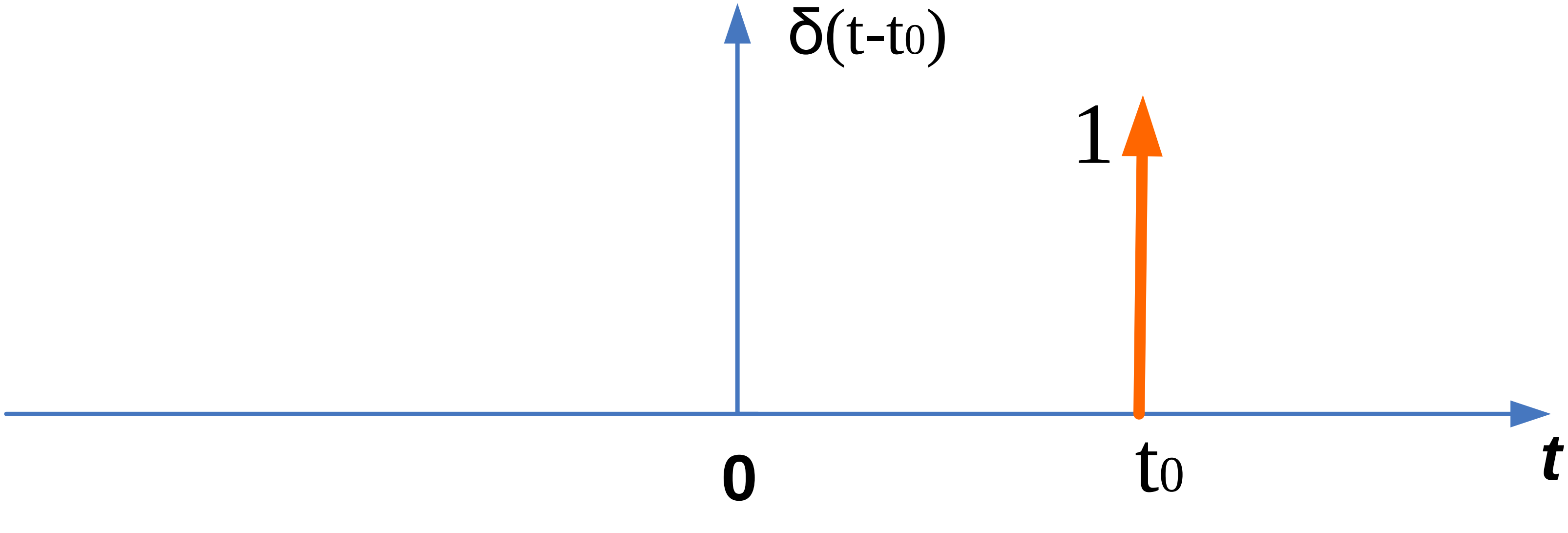


Osobine Dirakovog impulsa

- Složeni signal y(t) dobijen proizvodom Dirakovog impulsa i neke druge proizvoljne funkcije x(t):

$$\boldsymbol{y(t)=x(t).\delta(t-t0\ )}$$

- Pomeranje Dirakovog impulsa za neki konačni interval vremena - (*eng. shifting property of the unit impulse*).



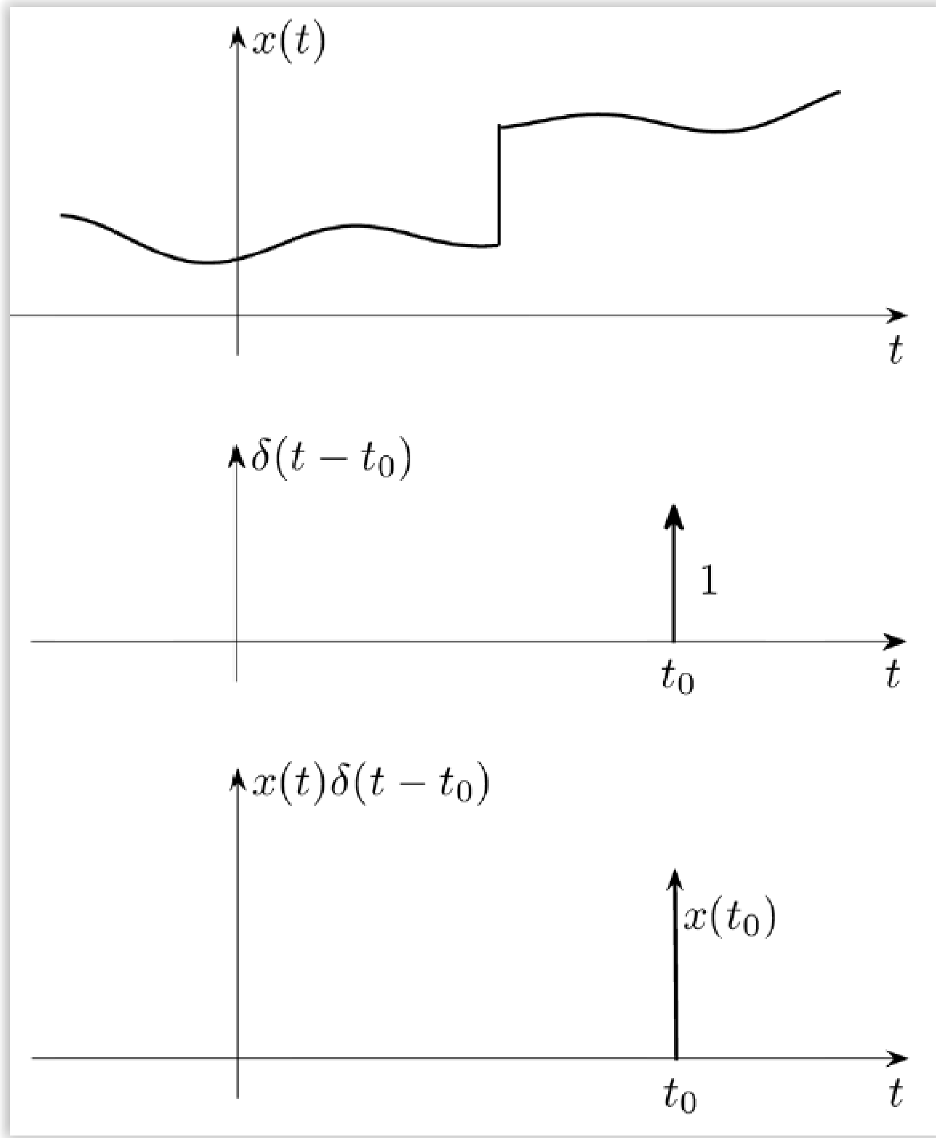
Osobine Dirakovog impulsa

- Za bilo koju matematičku funkciju $\boldsymbol{x(t)}$ koja je neprekidna u $\boldsymbol{t_0}$ važi:
- $\boldsymbol{x(t).\delta(t- t_0)=x(t_0)\ \delta(t- t_0)}$
- Dirakov impuls ima svojstvo odabiranja - bira vrednost funcije u tački delovanja ($\boldsymbol{t_0}$)
- Svojsrvo odabiranja omogućava da se jednostavno izračuna integral proizvoda proizvoljne funcije i Dirakovog impulsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x(t).\delta(t- t_0)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x(t_0)\ \delta(t- t_0)}\ dt = \boldsymbol{x(t_0)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta(t- t_0)}\ dt = \boldsymbol{x(t_0)}$$

Primer odabiranja

- $y(t)=x(t).\delta(t-t_0)$



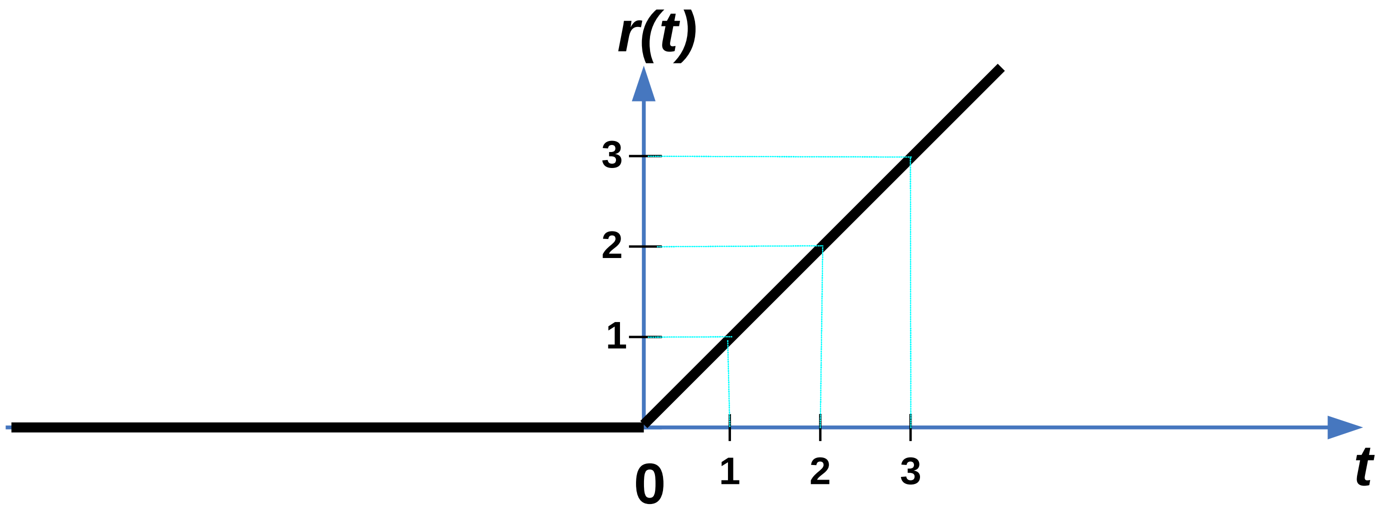
Jedinična nagibna funcija

- *Signal nagiba obeležava se kao* ***r(t)***

$$\boldsymbol{r(t)} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}$$

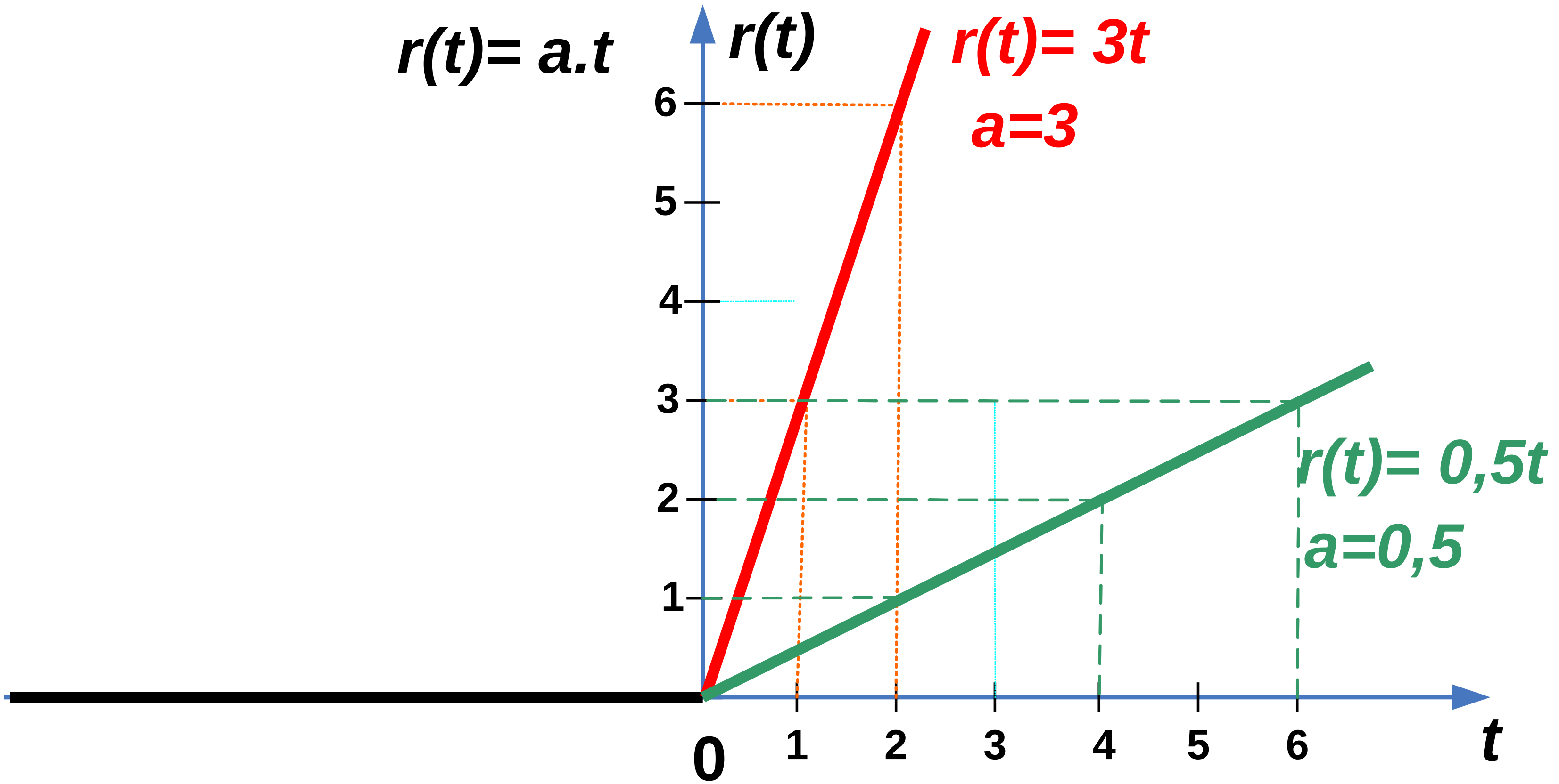
- Sa jediničnom odskočnom funcijom postoji sledeća veza:

$$\boldsymbol{r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau}$$



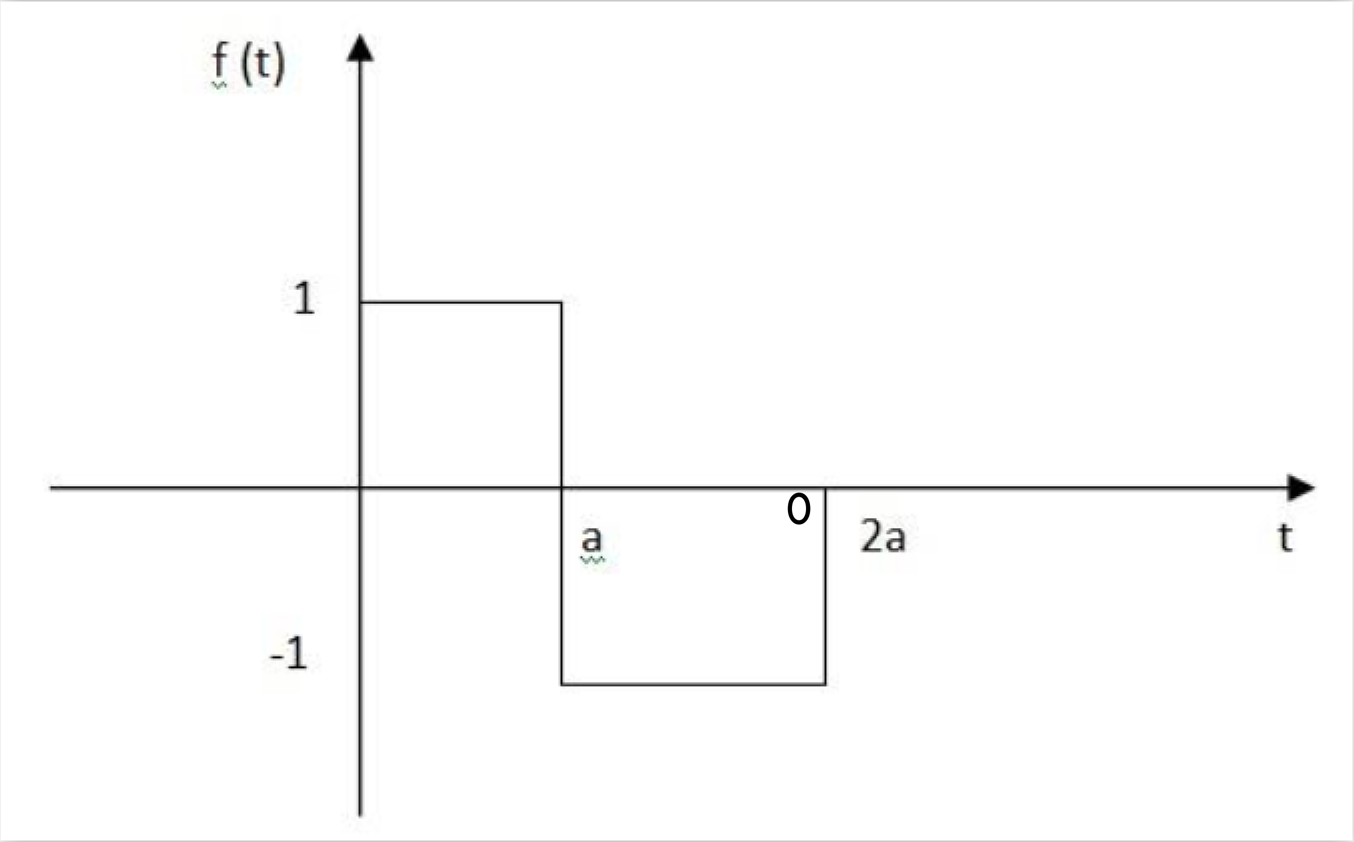
Nagibna funcija

$$\boldsymbol{r(t)} = \begin{cases} \mathbf{0}, t < 0 \\ \boldsymbol{at}, t \geq 0 \end{cases}$$, gde je ***a*** - *koeficijent nagiba*



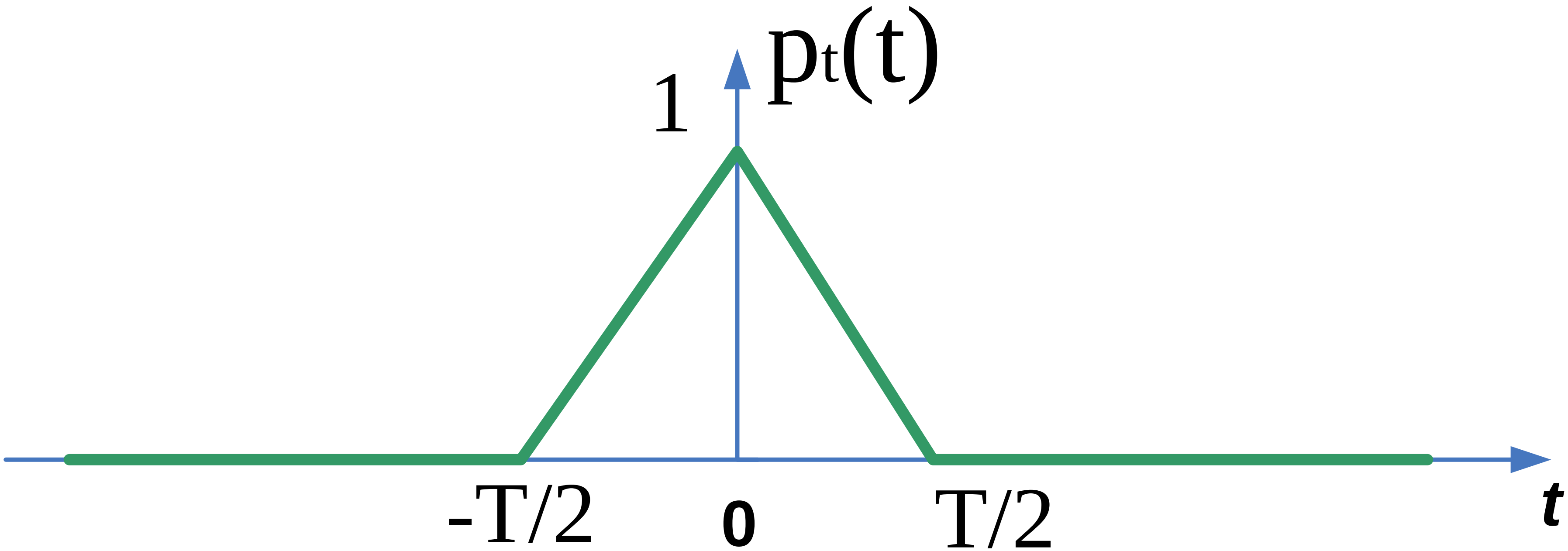
Pravougaoni periodični signal

$$
f(t)=\begin{cases} 0; & t<0 \\ 1; & 0 \le t < a \\ -1; & a \le t \le 2a \\ 0; & t \ge 2a \end{cases}
$$



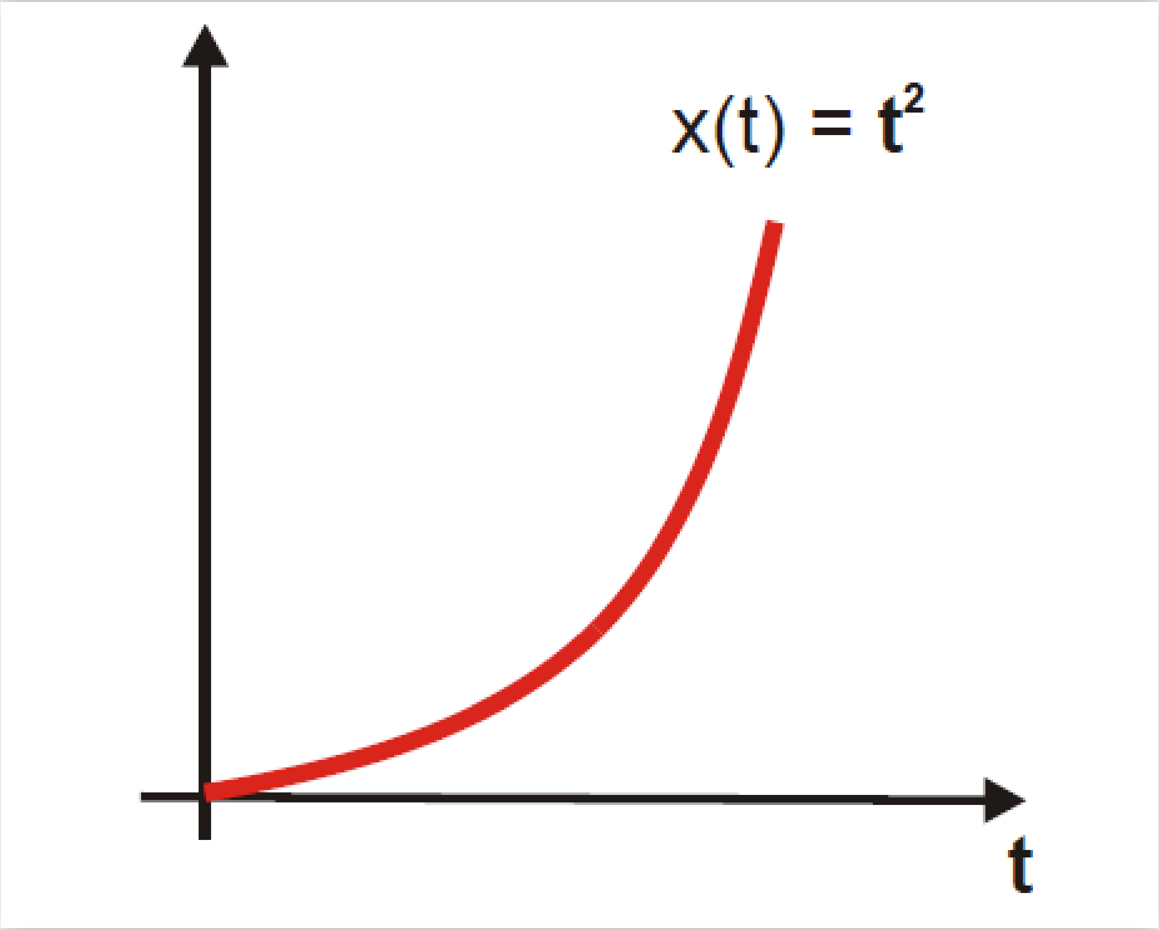
Trougaoni impuls

- $\boldsymbol{p_t}(\mathbf{t})=\begin{cases} \{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2t}}{\boldsymbol{T}}, -\frac{T}{2} \le |t| \le 0 \\ \{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2t}}{\boldsymbol{T}}, 0 \le |t| \le \frac{T}{2} \\ \mathbf{0}, |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$



Parabolična funcija

$x(t)=t^2$

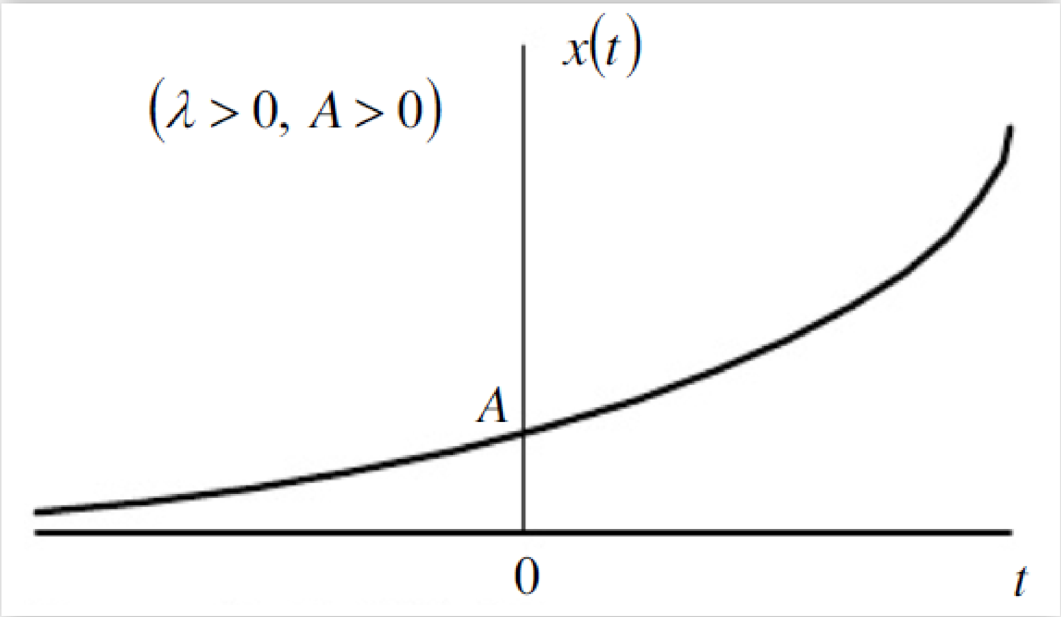


Eksponencijalni signali

- Opšti oblik eksponencjalnih signala $x(t)=Ae^{\lambda t}$,

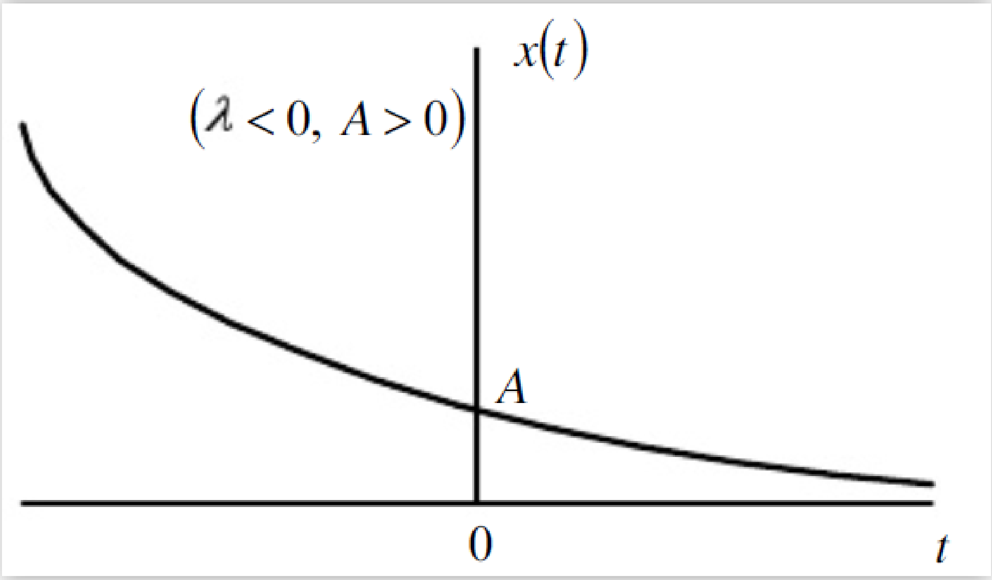
A i **λ** su parametri koji mogu biti i kompleksni brojevi

- Ako su **A** i **λ** realni brojevi, onda se signal naziva realnom eksponencijalnom funkcijom
- Ako je parametar λ pozitivan, signal x(t) je eksponencijalno rastući.
- Eksponencijalno rastuća funkcija se koristi vrlo često da opiše neke prirodne pojave koje su po svojoj prirodi nestabilne.



Eksponencijalni signali

- Ako je realan parametar λ negativan, tada je x(t) eksponencijalno opadajuća funcija
- Ovakva vrsta signala opisuje mnoge stabilne pojave u prirodi, kao što je na primer odziv RC ili RL kola, emisija nuklearnih čestica iz radioaktivnog materijala i tako dalje.
- U graničnom slučaju kada je parametar λ = 0, signal x(t) postaje konstantan.



Sinusni signali

- Ako je λ=jω_0, onda je ***x(t)=Ae***$^{j\omega_0 t}$ - kompleksna sinusoida
- Ako je A realan broj, primenom Ojlerove formule dobijamo:

$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + jA\sin(\omega_0 t)}$$

Signal ***x(t)*** je periodična funcija, jer za svako ***t*** važi relacija:

x(t+T)=x(t), gde je **T** perioda signala

$$T=\frac{2\pi}{\boldsymbol{\omega_0}}$$

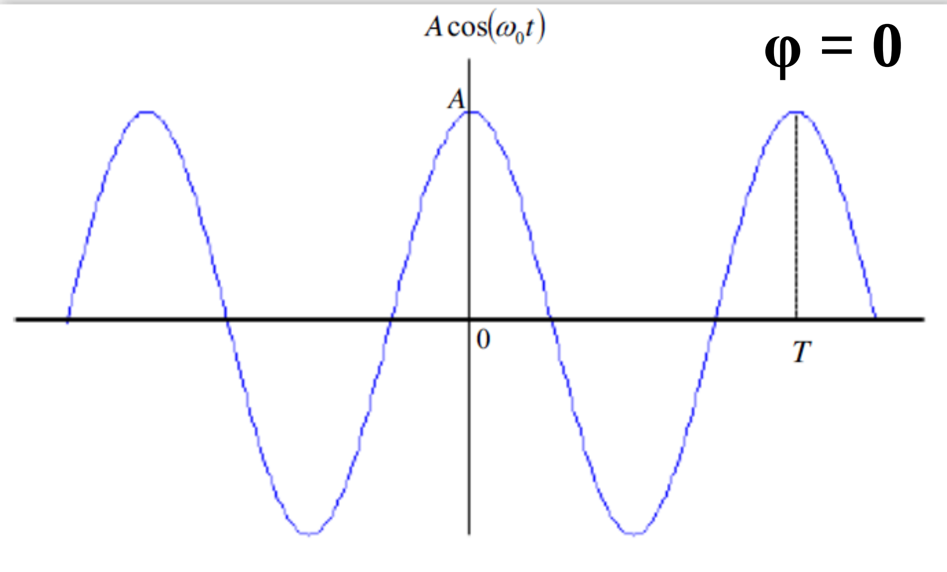
- Parametar $\boldsymbol{\omega_0}$ se naziva kružnom učestanošću (ili kružnom frekvencijom) i izražava se radijan u sekundi [rad/s],

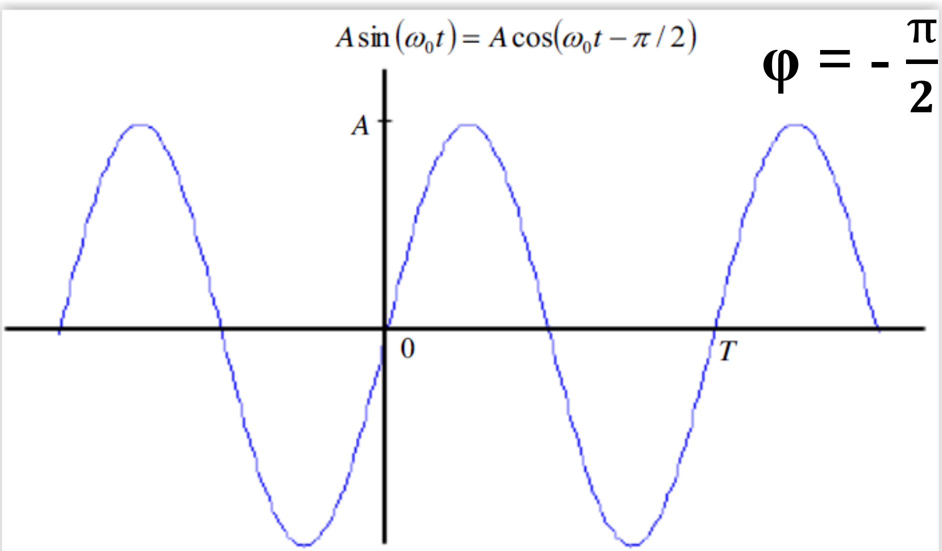
$$\boldsymbol{\omega_0}=2\pi \boldsymbol{f_0},$$

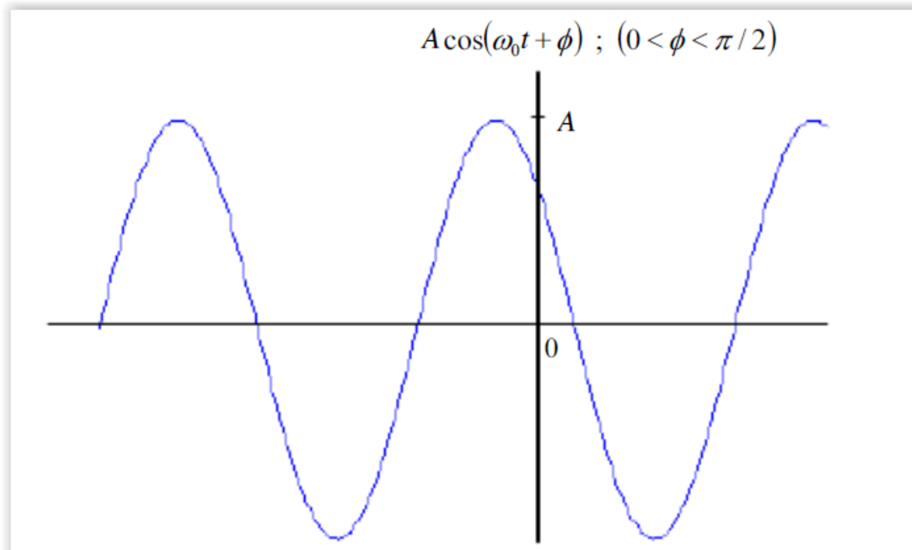
- $\boldsymbol{f_0}$ frekvencija ili učestalost – jedinica **Hz** - Herc

Realne sinusoide za različite vrednosti faze φ

$$x(t) = A cos(\omega_0 t + \varphi)$$



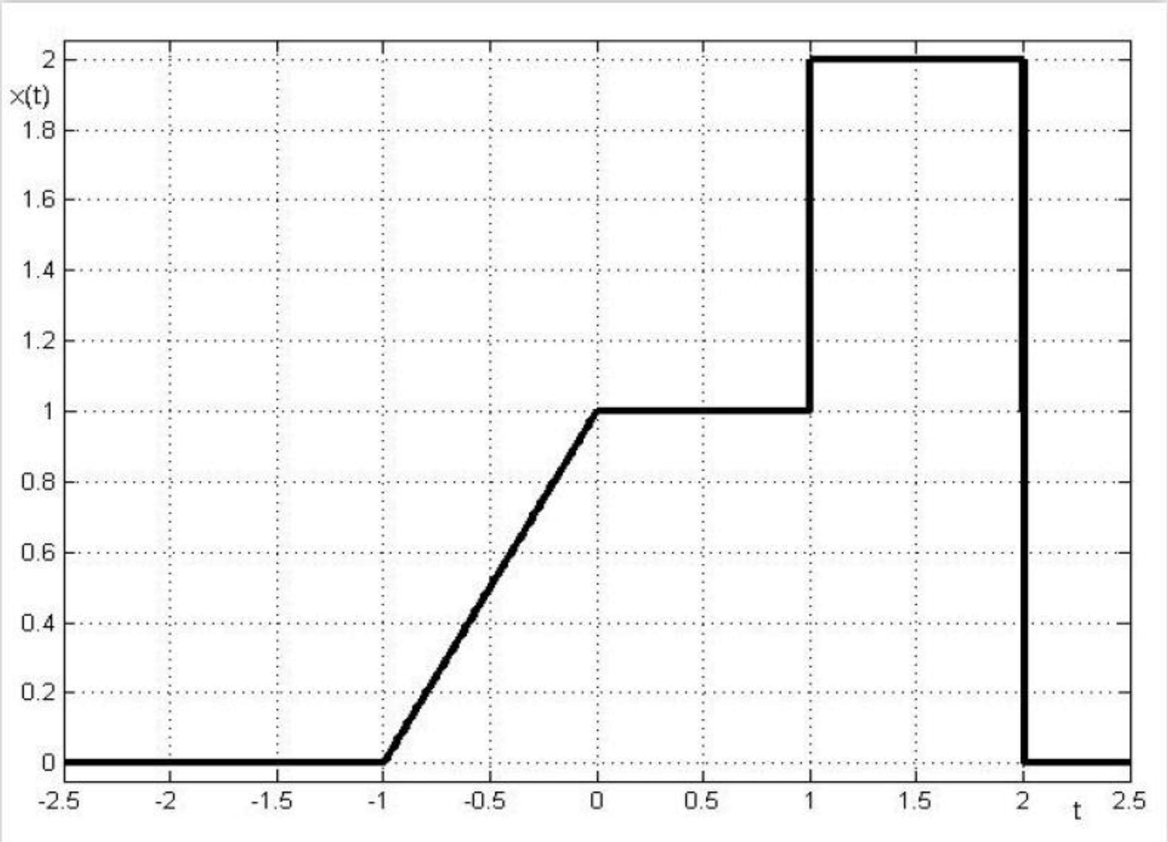




Primer 1. Kontinualni vremenski signal x(t) prikazan je na slici. Skicirati sledeće signale:

a) $y(t)=x(t)[u(t)-u(t-1)]$

b) $z(t)=x(t)\delta(t-\frac{3}{2})$



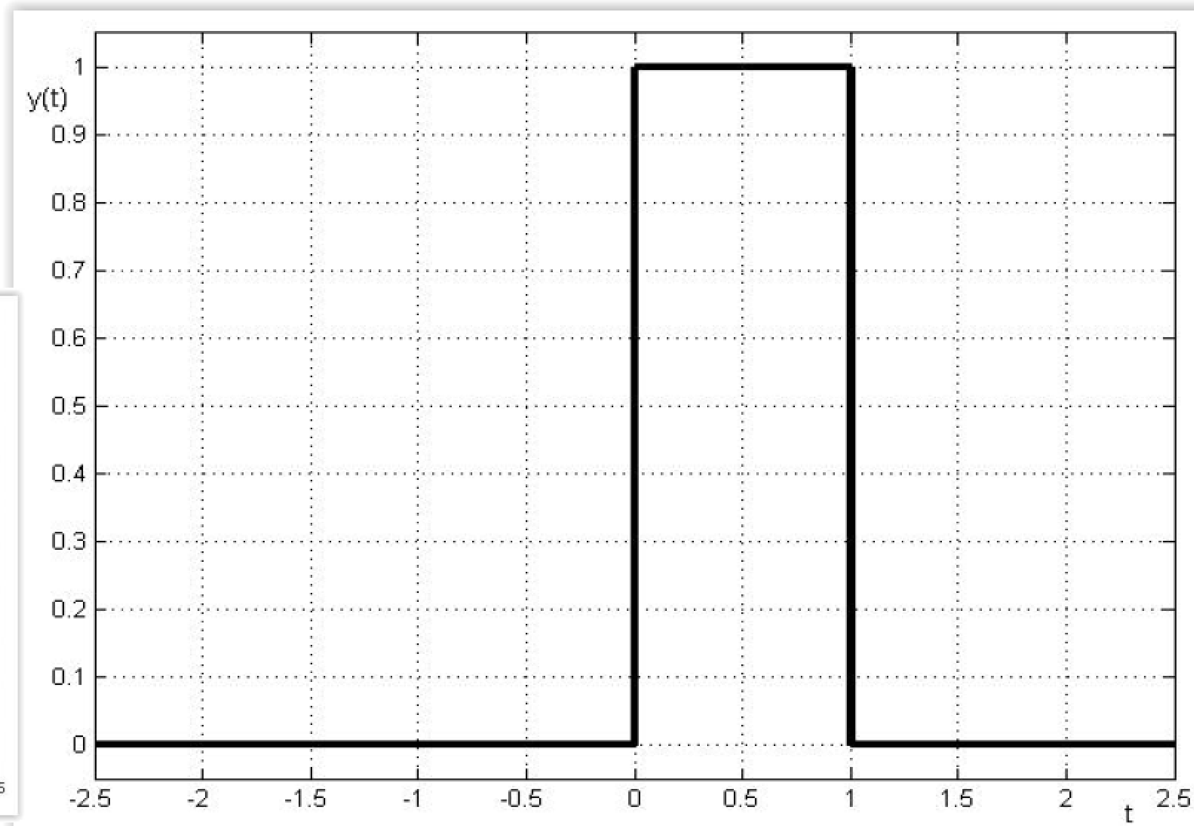
Rešenje a) y(t)=x(t)[$u(t)-u(t-1)$]

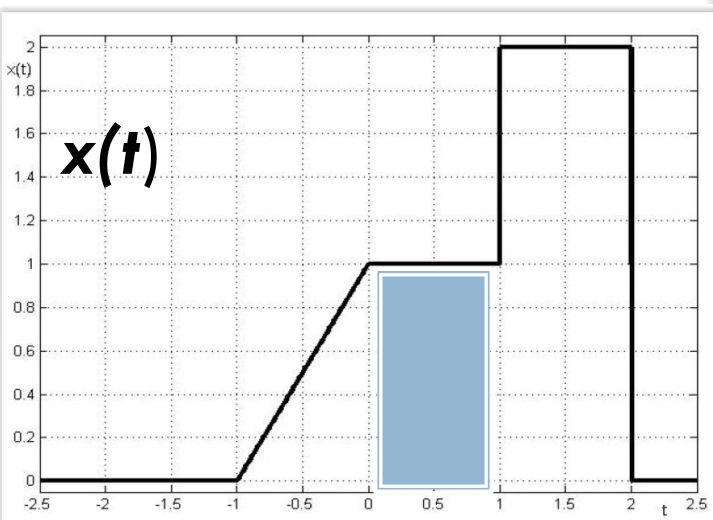
$$u(t)=\begin{cases}1, t \geq 0\\0, t < 0\end{cases}$$

$$u(t-1)=\begin{cases}1, t \geq 1\\0, t < 1\end{cases}$$

$$u(t)-u(t-1)=\begin{cases}1, & 0 < t \leq 1\\0, & t \leq 1, t > 1\end{cases}$$

y(t)

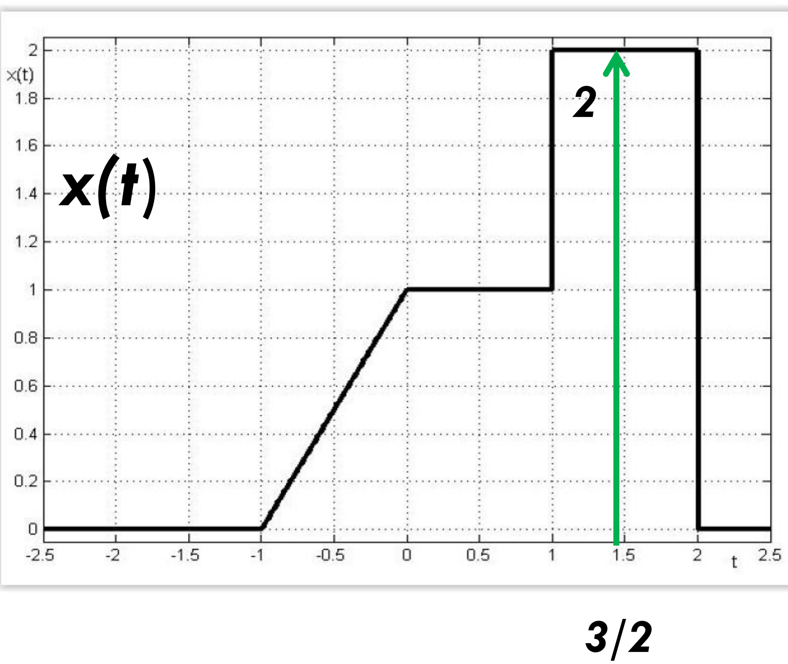


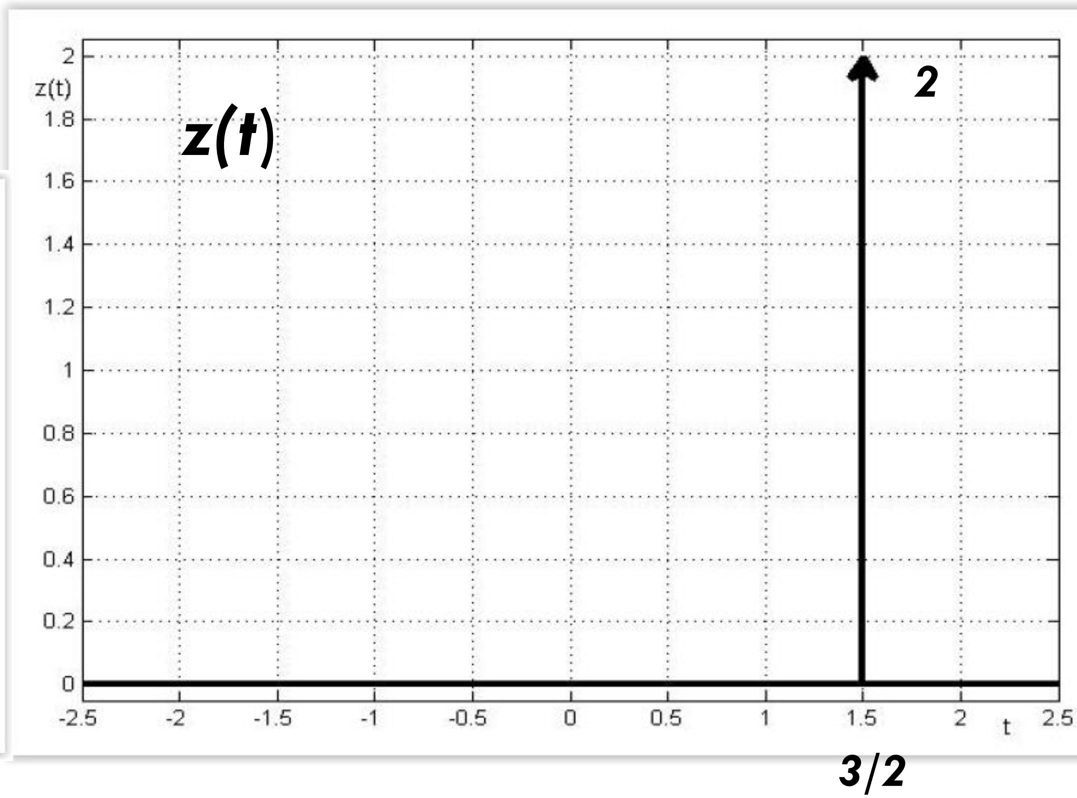


b) Rešenje $z(t)=x(t)\delta(t-3/2)$

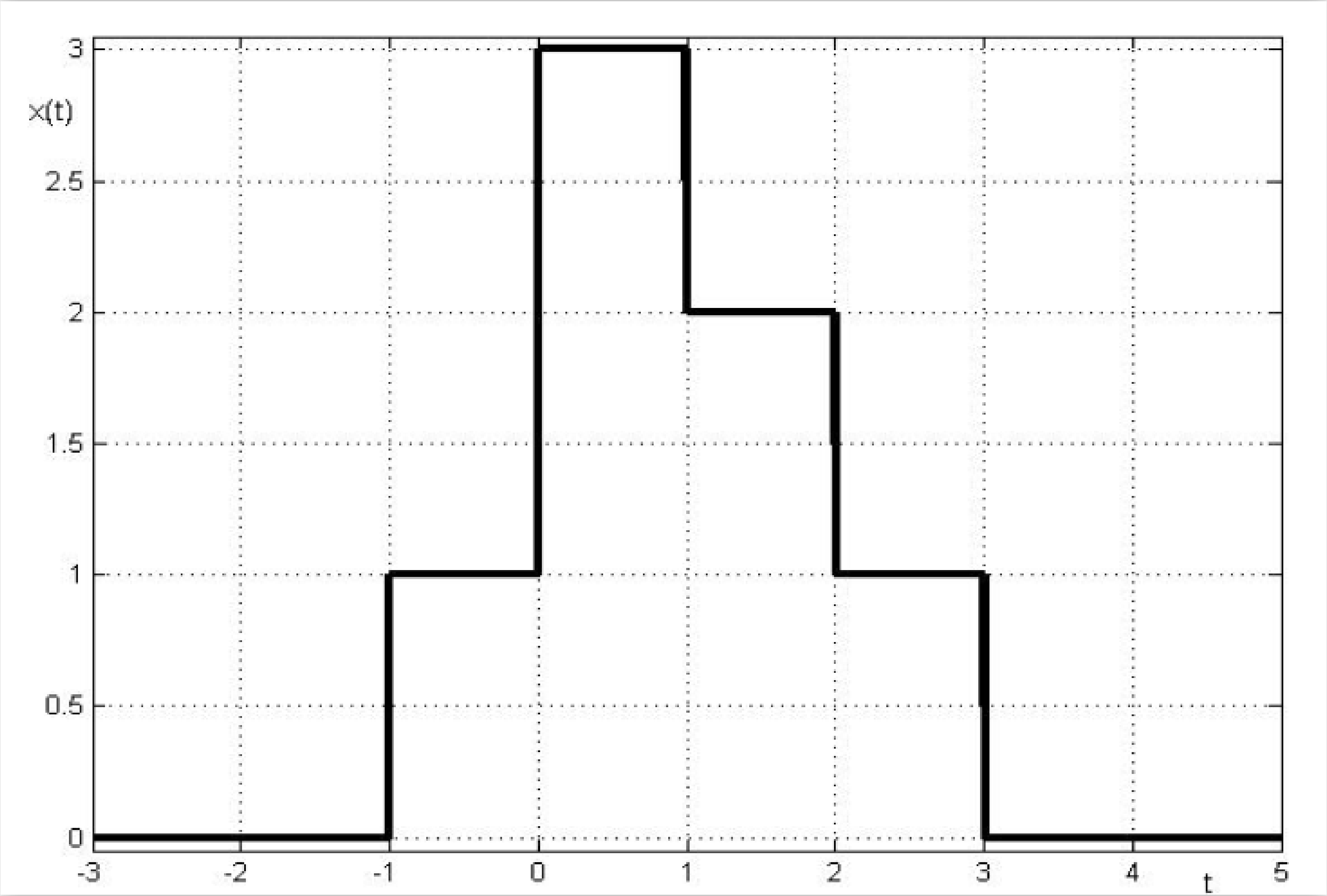
- $z(t)=x(t)\delta(t-3/2) = x(3/2)\,\delta(t-3/2) = 2\delta(t-3/2)=2.1=2$

- $x(3/2)=2$

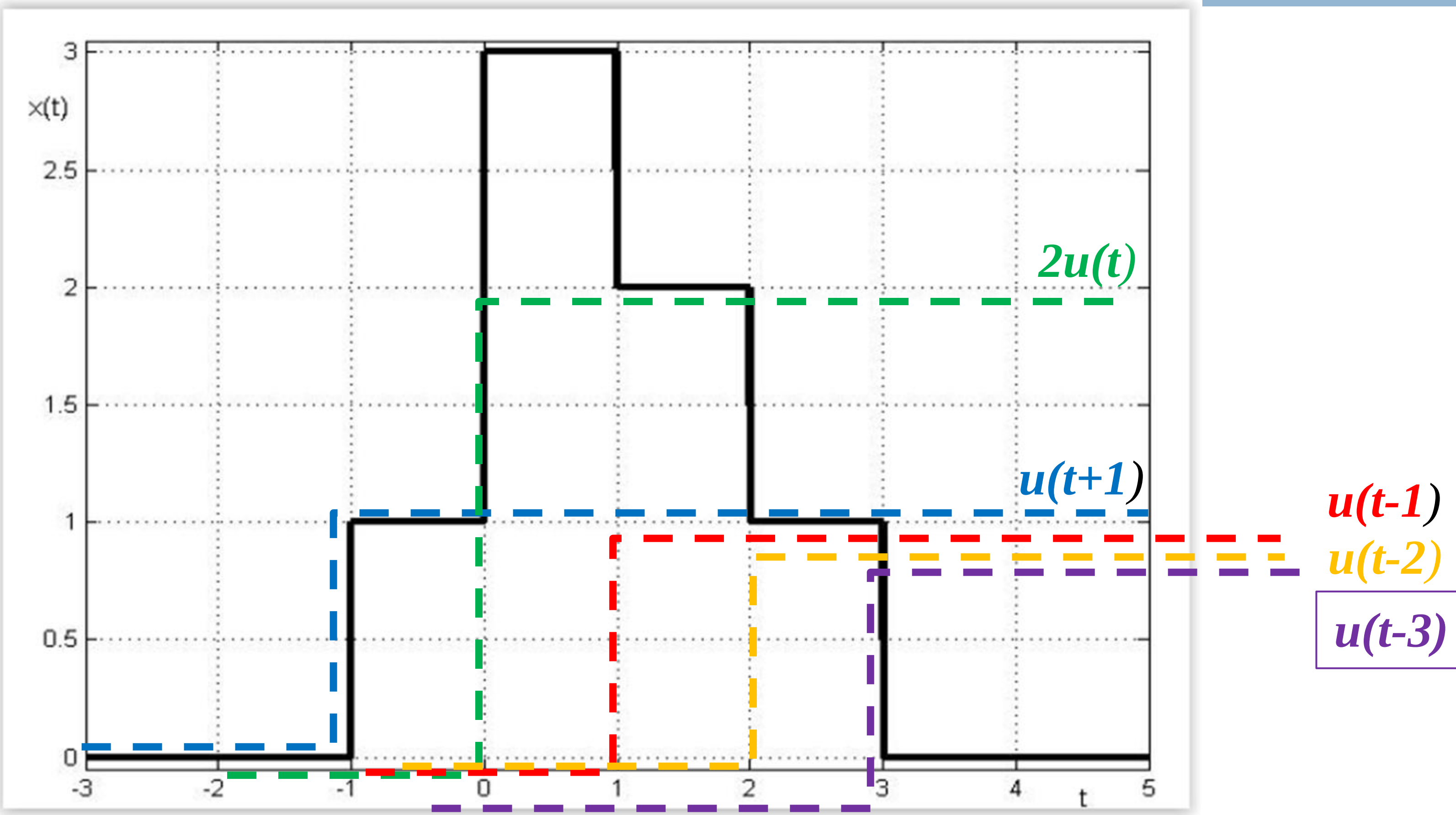




Primer2: Napisati izraz za signal $x(t)$ prikazan na slici pomoću elementarnih signala

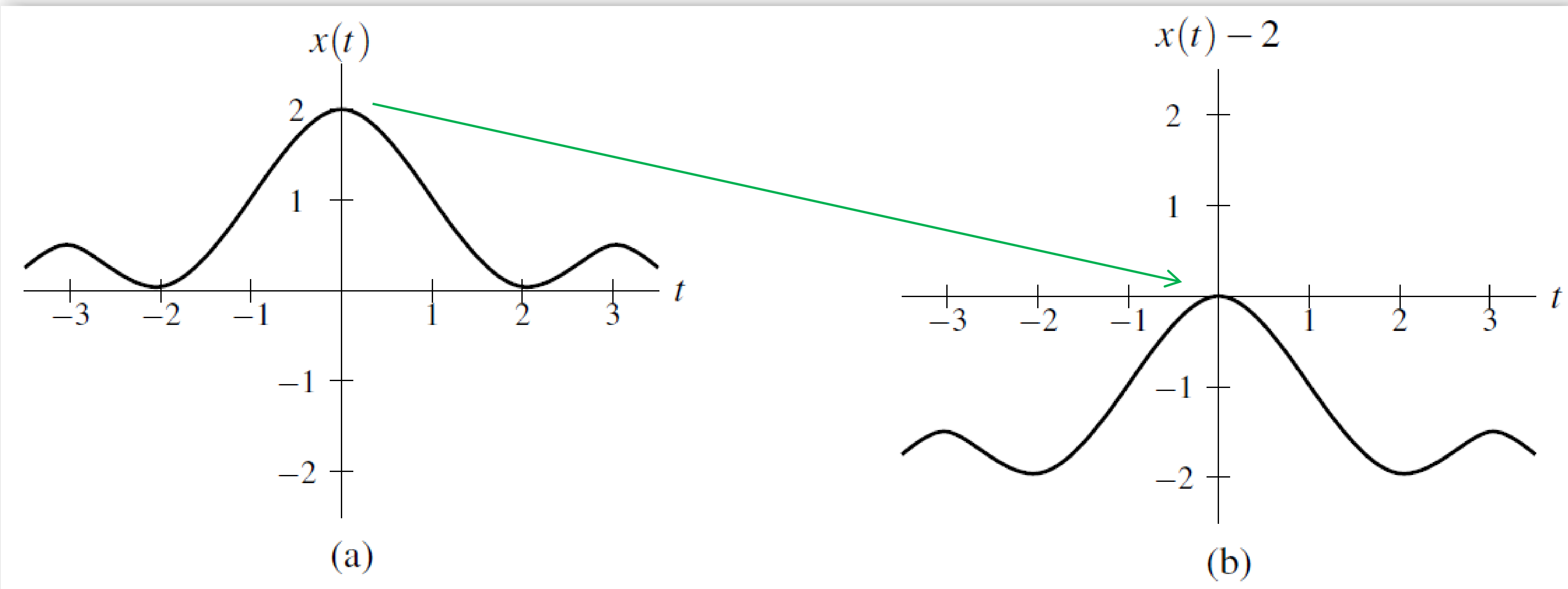


Rešenje primer 2:

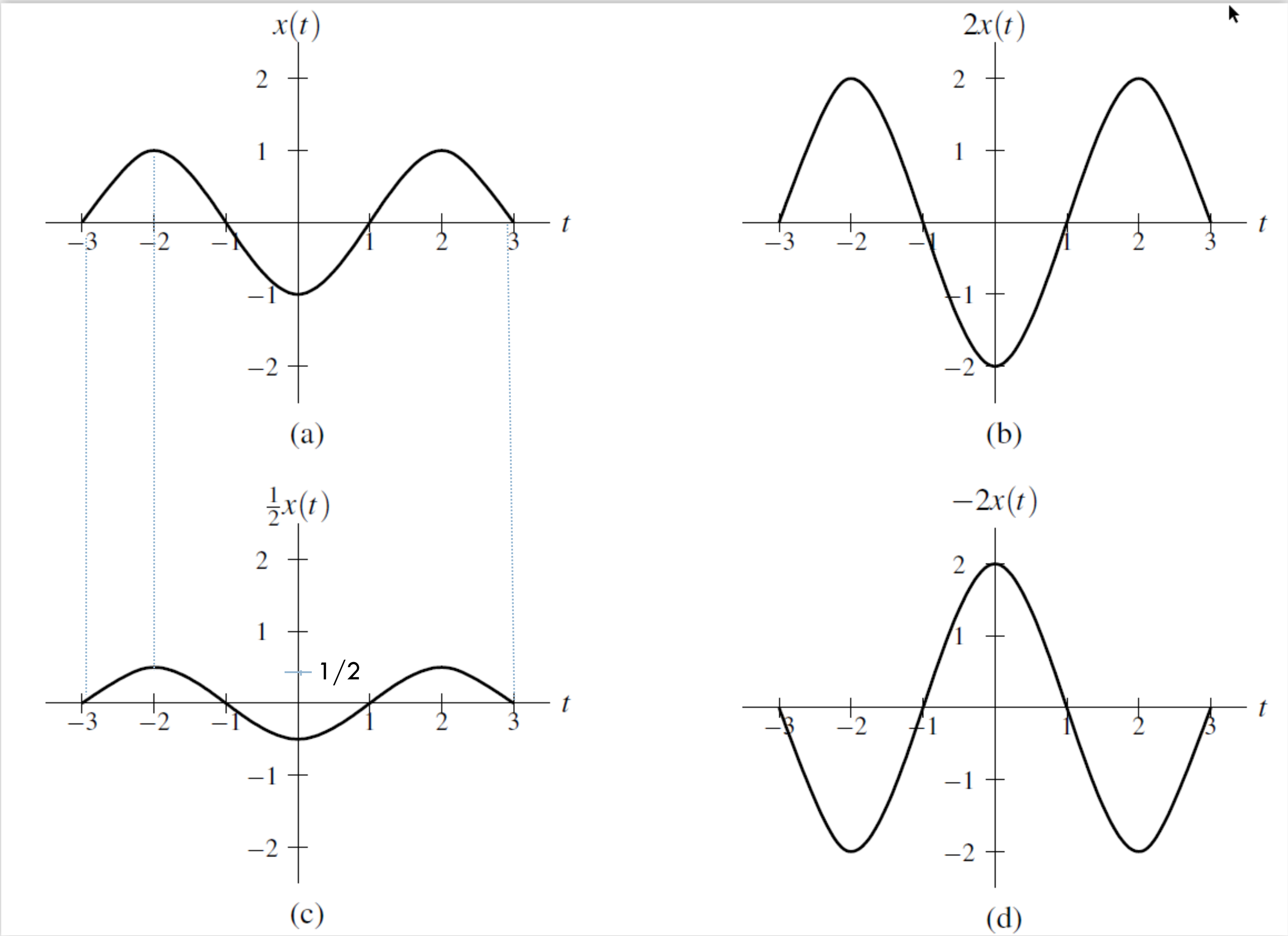


- *Rešenje:* $x(t)=u(t+1)+2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$

Pomeranje signala po amplitudi



Komprimovanje pomeranje signala po amplitudi i skaliranje

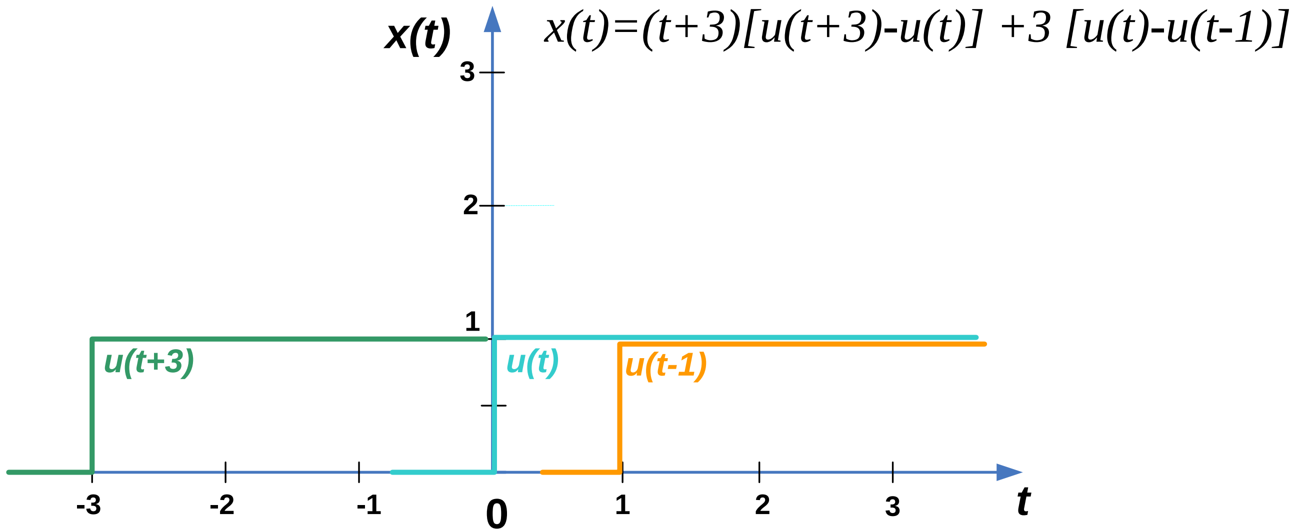


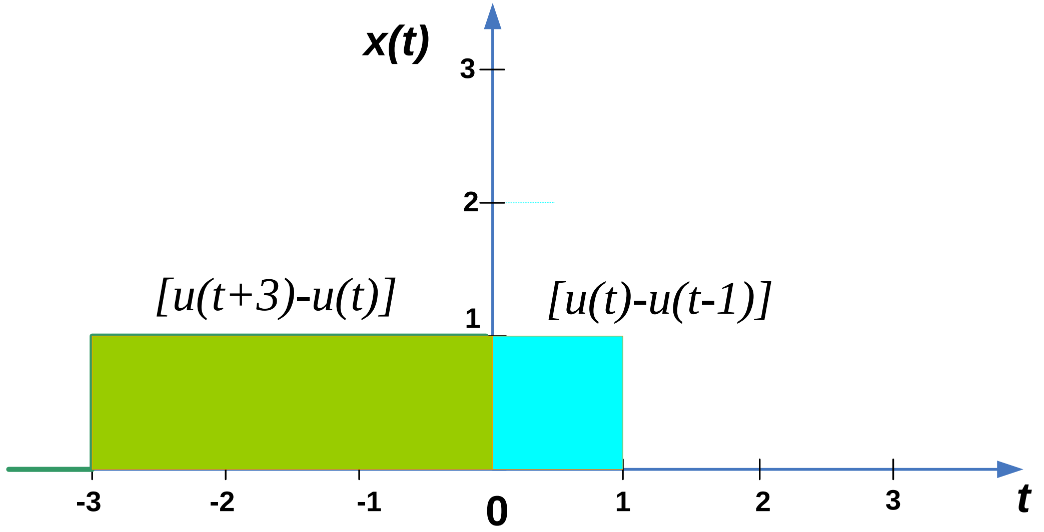
Primer 3. Nacrtati signal $x(t)=(t+3)[u(t+3)-u(t)] +3 [u(t)-u(t-1)]$

- Kod crtanja signala skicirati sve elementarne funcije koje čine signal
- Uvek početi od signala koji najviše prednjači (s leve strane)
- Formirari pomoćne signale u uglastim zagradama
- Pomnožiti signale prema formuli
- Sabrati dobijene delova signala i formirati traženi signal

Primer 3. Nacrtati signal

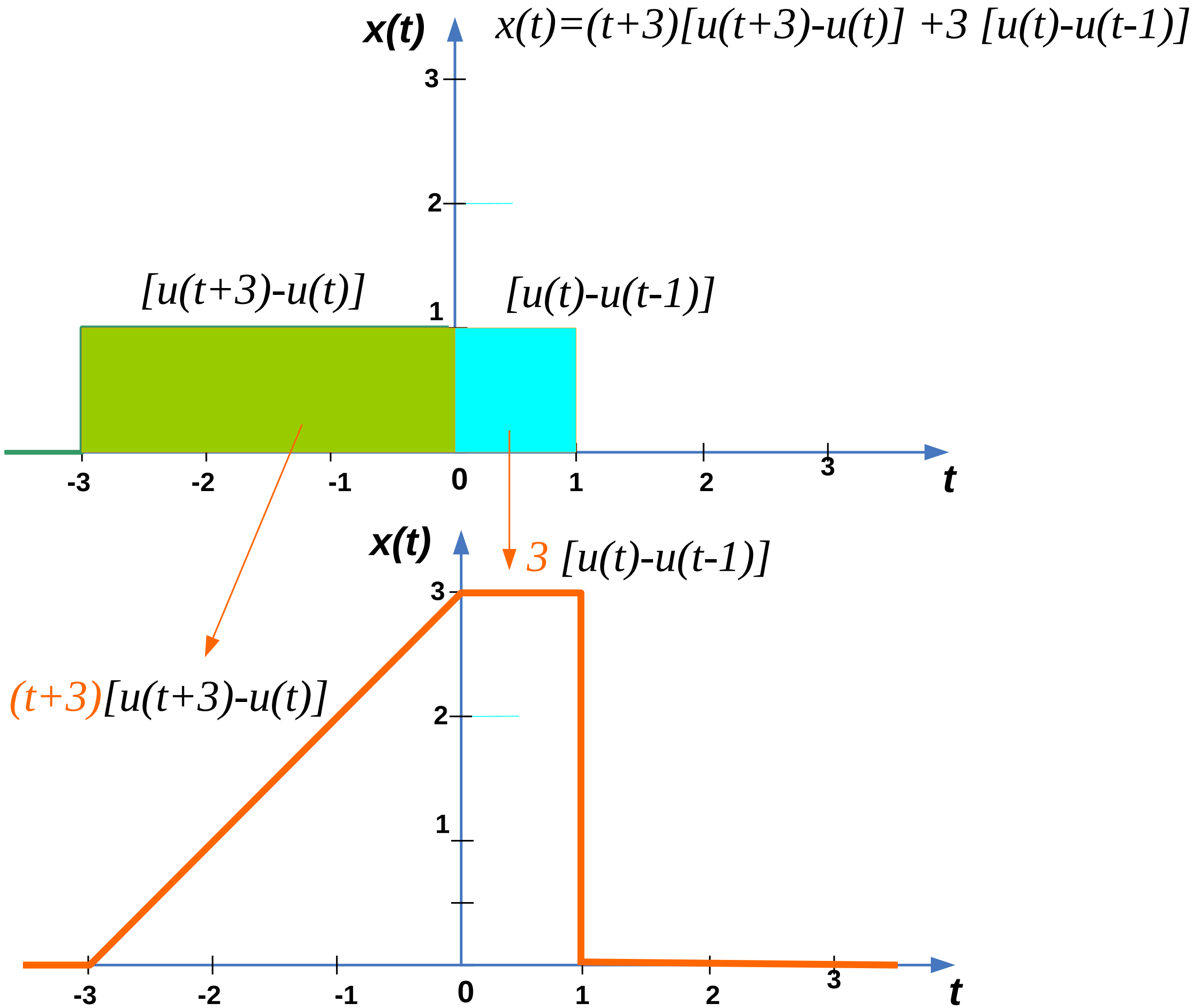
$$x(t)=(t+3)[u(t+3)-u(t)] +3 [u(t)-u(t-1)]$$



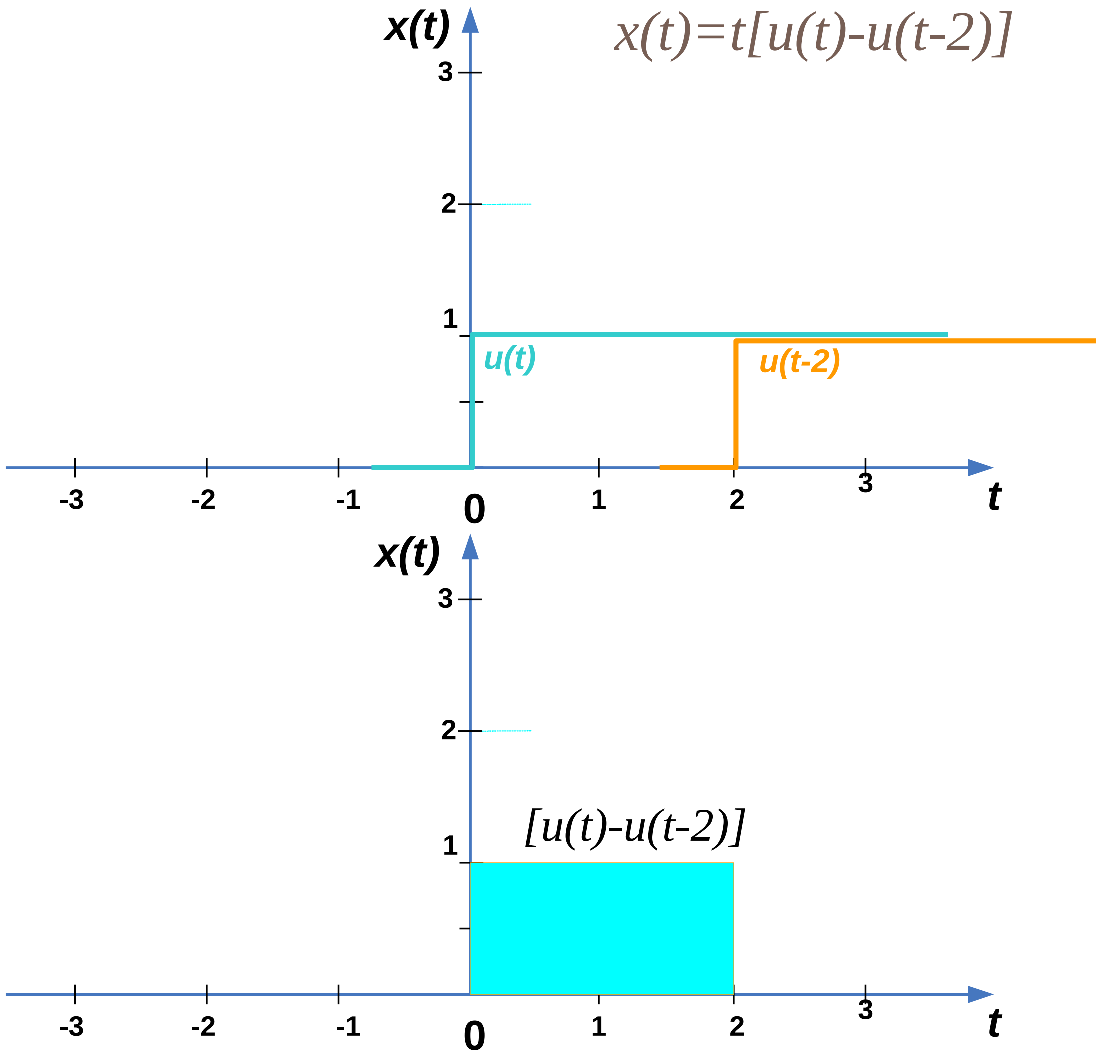


Primer 3. Nacrtati signal

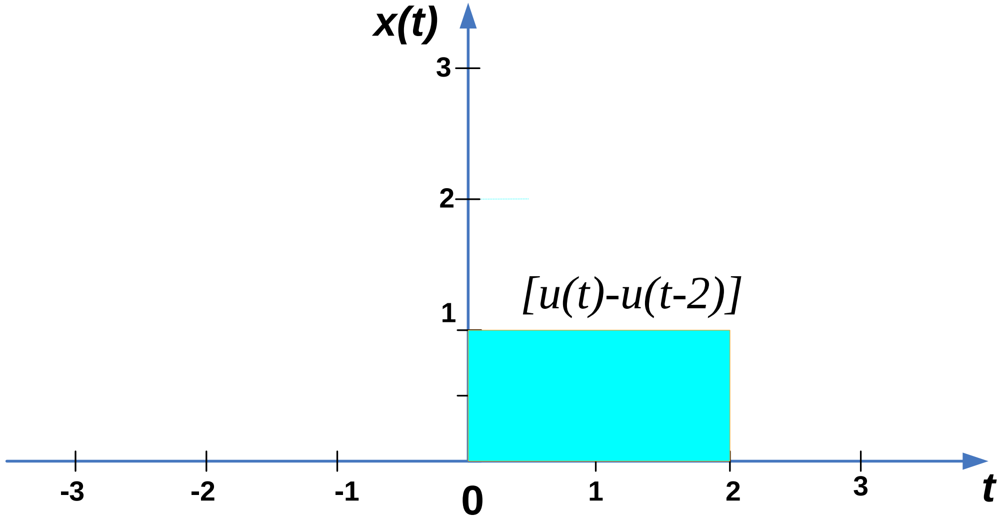
$$x(t)=(t+3)[u(t+3)-u(t)]+3\,[u(t)-u(t-1)]$$

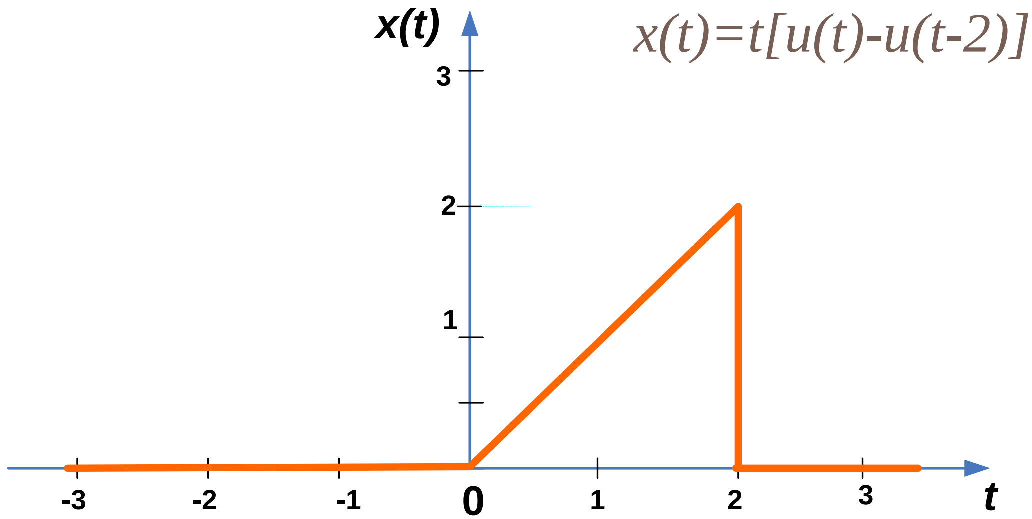


Primer 4. Nacrtati signal $x(t)=t[u(t)-u(t-2)]$



Primer 4. Nacrtati signal $x(t)=t[u(t)-u(t-2)]$

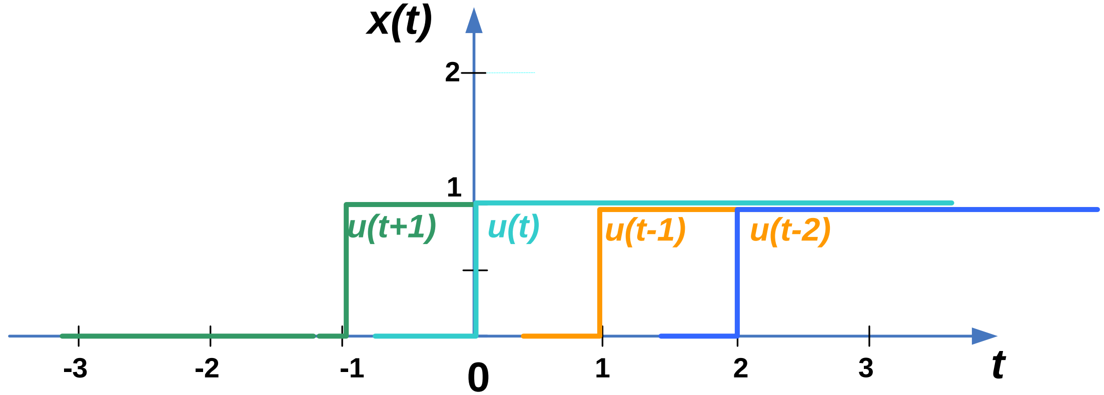


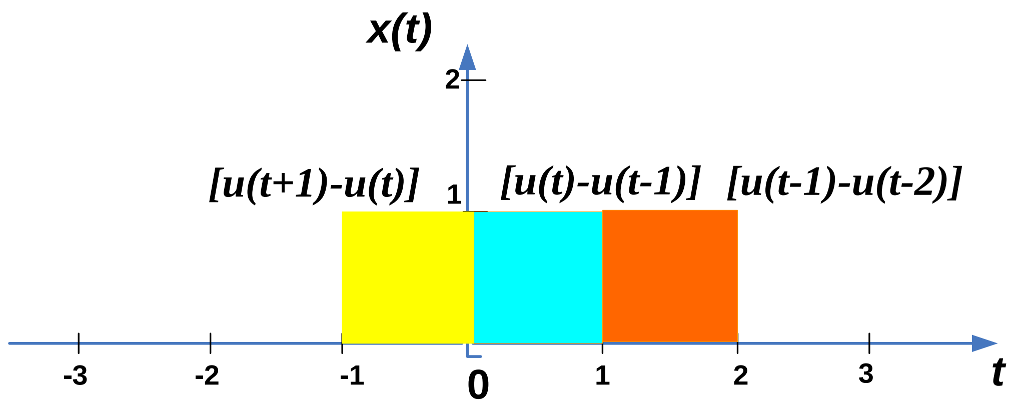


Primer 5. Nacrtati signal

$x(t)=(t+1)[u(t+1)-u(t)] +[u(t)-u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-2)]$

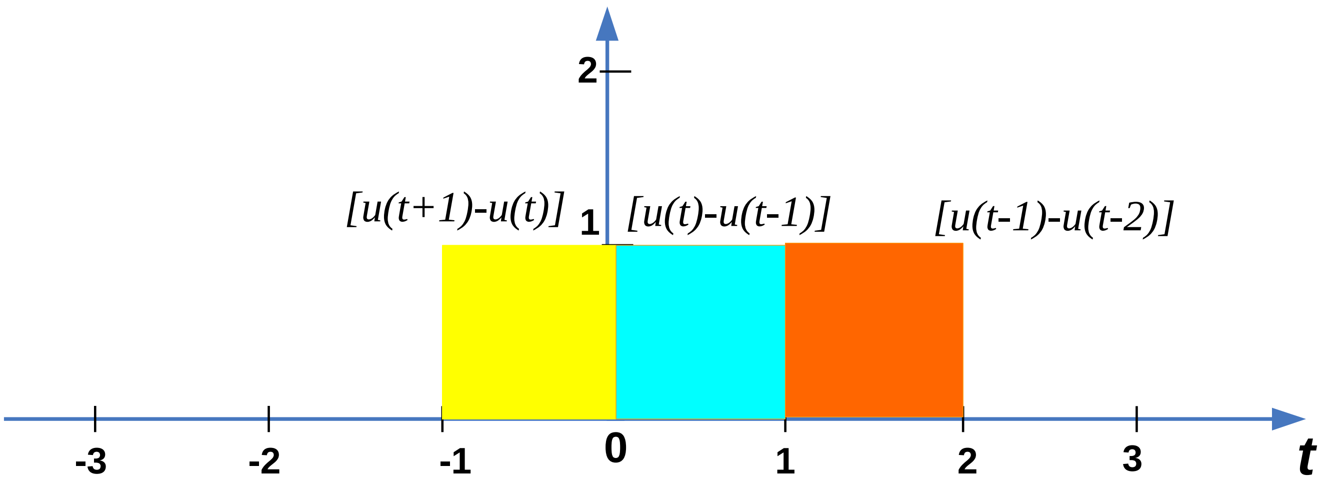
$x(t)=(t+1)[u(t+1)-u(t)] +[u(t)-u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-2)]$

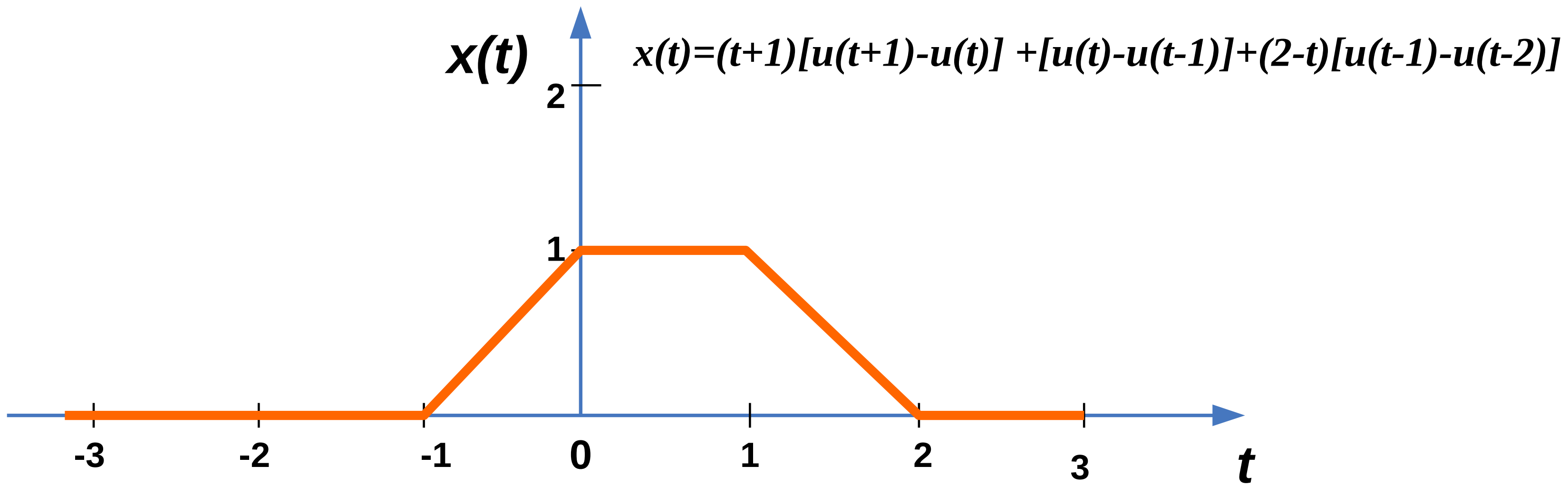




Primer 5. Nacrtati signal

$x(t)=(t+1)[u(t+1)-u(t)] + [u(t)-u(t-1)] + (2-t)[u(t-1)-u(t-2)]$





6. Izraziti sledece signale u formi osnovnog signala u formi $u(t \pm t_0)$:

a) $\boldsymbol{u(\frac{t}{4}-3)}$, b) $\boldsymbol{u(\frac{t}{4}+3)}$, c) $\boldsymbol{u(-3t+6)}$, d) $\boldsymbol{u(3t-6)}$,

Rešenje:

a) $u(\frac{t}{4}-3)=u(t-12)$

b) $u(\frac{t}{4}+3)=u(t+12)$

c) $u(-3t+6)=u(-t+2)=1-u(t-2)$

d) $u(3t-6)=u(t-2)$

7. Izraziti sledece signale u formi osnovnog signala u formi $u(t \pm t_0)$:

a) $u(-t)$,
b) $u(3-t)$,
c) $tu(-t)$,
d) $(t-3)u(3-t)$

Rešenje:

a) $u(-t)=1-u(t)$
b) $u(3-t)=1-u(t-3)$
c) $tu(-t)=t(1-u(t))$
d) $(t-3)u(3-t)=(t-3)(1-u(t-3)$