P5 – LAPLASOVE TRANSFORMACIJE

PREDMET: SIGNALI I SISTEMI

Laplasova transformacija

- Laplasova transformacija funkcije f(t) se definiše na sledeći način:

$$f(t) \rightarrow F(s)$$

- ***f(t) – original funcije*** ***$F(s)$ – slika funkcije***
- $L\{f(t)\} = F(s)$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

gde je $s = \sigma \pm j\omega$ kompleksna promenljiva

Osobine Laplasove transformacije

1. **Teorema linearnosti**

- Homogenost: **L{a f(t)} = a F(s);** gde je a realna konstanta.
- Aditivnost $\mathbf{L\{}f_1\mathbf{(t)}+f_2\mathbf{(t)\}} = F_1\mathbf{(s)}+F_2\mathbf{(s)}$.
- Linearnost: $\mathbf{L\{}a_1 f_1\mathbf{(t)}+a_2 f_2\mathbf{(t)\}} = a_1 F_1\mathbf{(s)}+a_2 F_2\mathbf{(s)}$.

2. **Čisto vremensko kašnjenje**

Za dve funkcije istog oblika ***f(t) i f(t-τ)*** gde druga kasni za prvom za vreme τ, se može definisati:

$$\mathbf{L\{f(t-\tau)\}} = e^{-s\tau}\mathbf{F(s)}$$

Primer funkcija sa čistim vremenskim kašnjenjem je trofazni sistem naizmeničnih struja.

Osobine Laplasove transformacije

3. Pomeranje kompleksnog lika

Pogodno za određivanje LT funkcija koje sadrže eksponencijalni faktor e^{-at}.

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

4. Konvolucija originala

$$L\{f(t)\} = L\{f1(t)*f2(t)\} = F1(s)F2(s)$$

Osobine Laplasove transformacije

5. Teorema o izvodu originala

Laplasova transformacija prvog izvoda funcije f(t) definiše se kao:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

gde je $f(0^-)$ početna vrednost funkcije f(t) u trenutku 0^-

Laplasova transformacija n-tog izvoda funcije f(t) definiše se kao:

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0^-)$$

gde je $f^{k-1}(0^-)$ početna vrednost funkcije f(t) u trenutku 0^-

Osobine Laplasove transformacije

6. **Teorema o integralu originala:**

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

- Za n-tostruki integral važi:

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t \dots \int_0^t f(t)d^n t\right\} = \frac{F(s)}{s^n}, \text{ n=1,2,3, ...}$$

Osobine Laplasove transformacije

7. Teorema o izvodu kompleksnog lika

$$\mathbf{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

8. Teorema o promeni vremenske skale

$$\mathbf{L}\left\{f\frac{t}{a}\right\} = \mathrm{a\ F(s)}$$

9. Prva granična teorema (važi uz uslov da ne postoji impuls u koordinatnom početku)

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

10. Druga granična teorema

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Tabela Laplasovih transformacija - osnovne funcije

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta\ (t)$	1
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-t}	$\frac{1}{s+1}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Tabela Laplasovih transformacija – osnovne funcije

$f(t)$	$F(s)$
$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

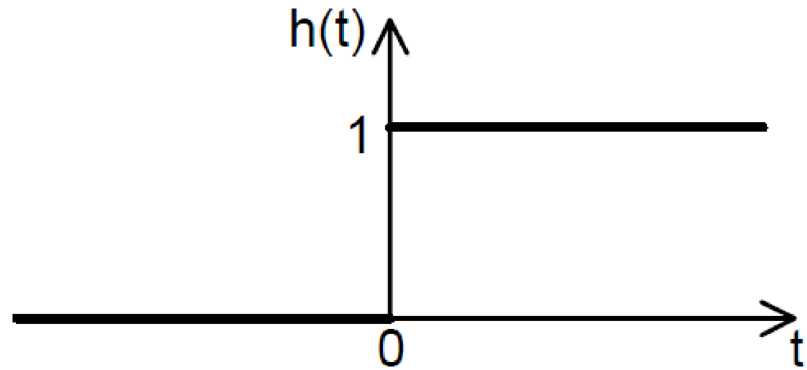
Laplasova transformacija funkcija (signala)

Odziv sistema na odskočnu funkciju naziva se ***jedinični odskočni odziv sistema***,

Jediniĉna odskoĉna funkcija predstavlja *tipični pobudni signal*.

1. Hevisajdov signal (jedinični odskočni signal)

$$h(t) = \begin{cases} 0; & t<0 \\ 1; & t\geq 0 \end{cases}$$

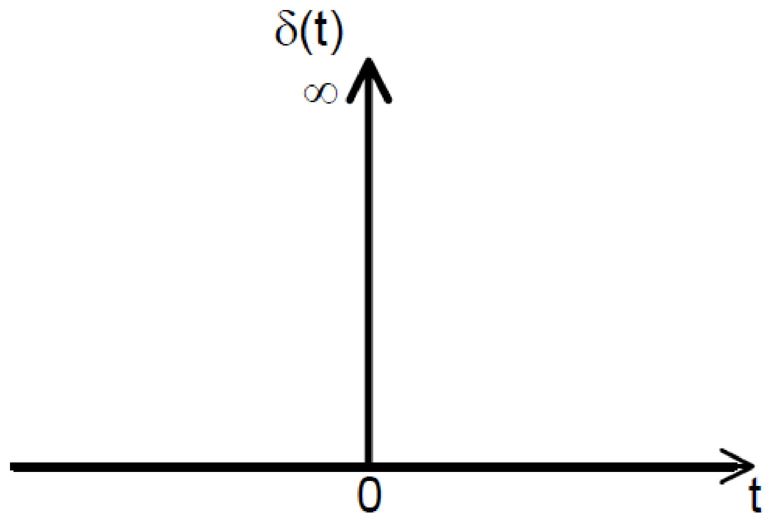


$$F(s) = L\{h(t)\} = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0+}^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Jedinična impulsna funkcija - Dirakov impuls (Delta impuls)

Jediniĉna impulsna funkcija predstavlja *tipičan pobudni signal*
Odziv sistema na jediniĉnu odskoĉnu funkciju naziva se ***impulsni odziv***.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases} \quad \text{pri čemu važi} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

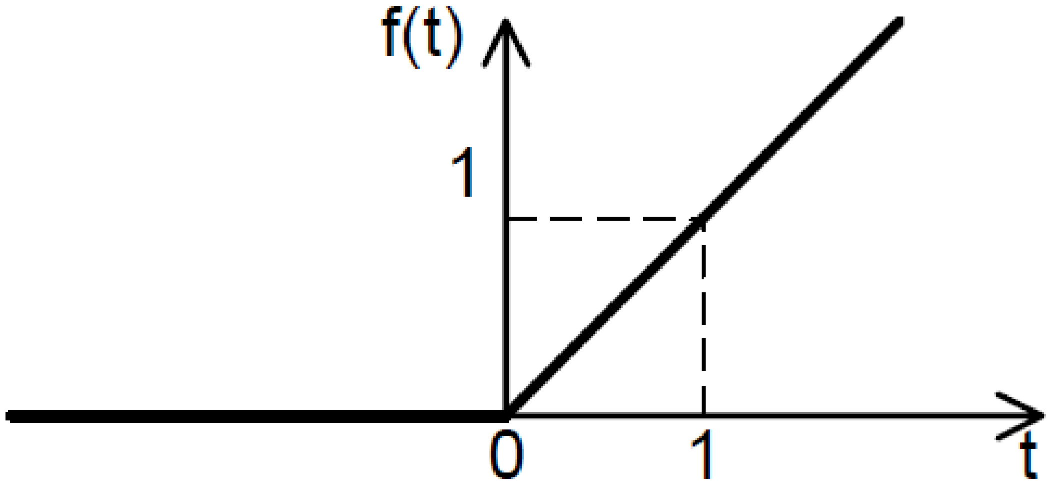


Delta impuls se može predstaviti kao izvod jediničnog odskočnog signala, pa se pri određivanju LT primenjuje teorema o izvodu originala.

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = sL\{h(t)\} - h(0-) = s\,\frac{1}{s} - 0 = 1$$

Jedinični nagibni signal

3. Jedinični nagibni signal. $f(t) = \begin{cases} 0; & t<0 \\ t; & t\geq 0 \end{cases}$ ili $f(t)=t \cdot h(t)$.



$$L\{th(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}.$$

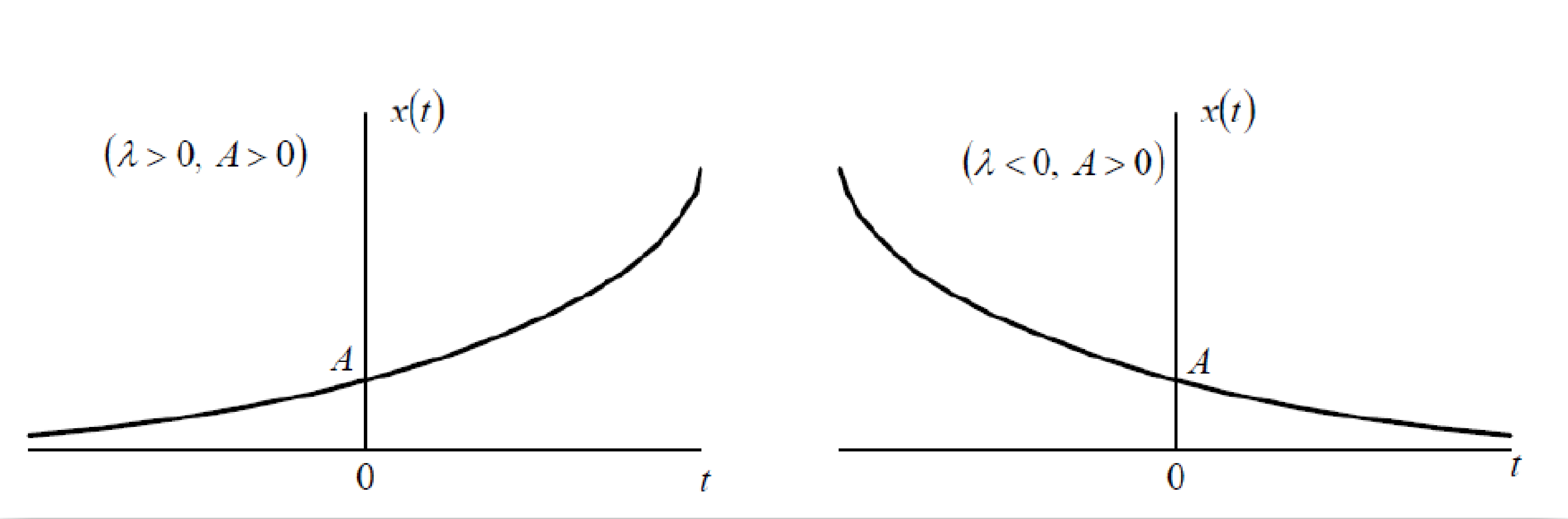
Eksponencijalni signal: $x(t)=Ae^{\lambda t}$

- $x(t)=Ae^{\lambda t}$
- gde u opštem slučaju parametri A i λ mogu biti kompleksni brojevi.
- Ukoliko su ovi parametri realni brojevi, onda se signal naziva realnom eksponencijalnom funkcijom Ukoliko je realni parametar λ pozitivan, tada je signal eksponencijalno rastući
- Eksponencijalno rastuća funkcija se koristi vrlo često da opiše neke prirodne pojave koje su po svojoj prirodi nestabilne.

Eksponencijalni signal: $x(t)=Ae^{\lambda t}$

- Ako je realan parametar λ negativan, tada je signal eksponencijalno opadajući
- Ovakva vrsta signala opisuje mnoge stabilne pojave u prirodi, kao što je na primer odziv *RC* ili *RL* kola, emisija nuklearnih ĉestica iz radioaktivnog materijala i tako dalje.
- U graniĉnom sluĉaju kada je parametar λ jednak nuli, signal postaje konstantan

Eksponencijalni signal: $x(t)=Ae^{\lambda t}$



Sinusoidalni signali

- Klasa signala koji opisuju jednostavne harmonijske oscilacije su sinusoidalnim signalima.
- Kada parametar λ uzme čistu imaginarnu vrednost , tada signal postaje: $\lambda = j\omega_0$ i tada signal postaje:

$$\mathbf{x(t)} = \boldsymbol{A e^{j\omega_0 t}}$$

gde je $\boldsymbol{\omega_0}$ realan broj.

Signal x(t) predstavlja kompleksnu sionusoidu oi primenom Ojlerofe formule može se napisati kao:

$$\mathbf{x(t)} = \boldsymbol{A\cos}(\boldsymbol{\omega_0 t}) + j A\sin(\boldsymbol{\omega_0 t})$$

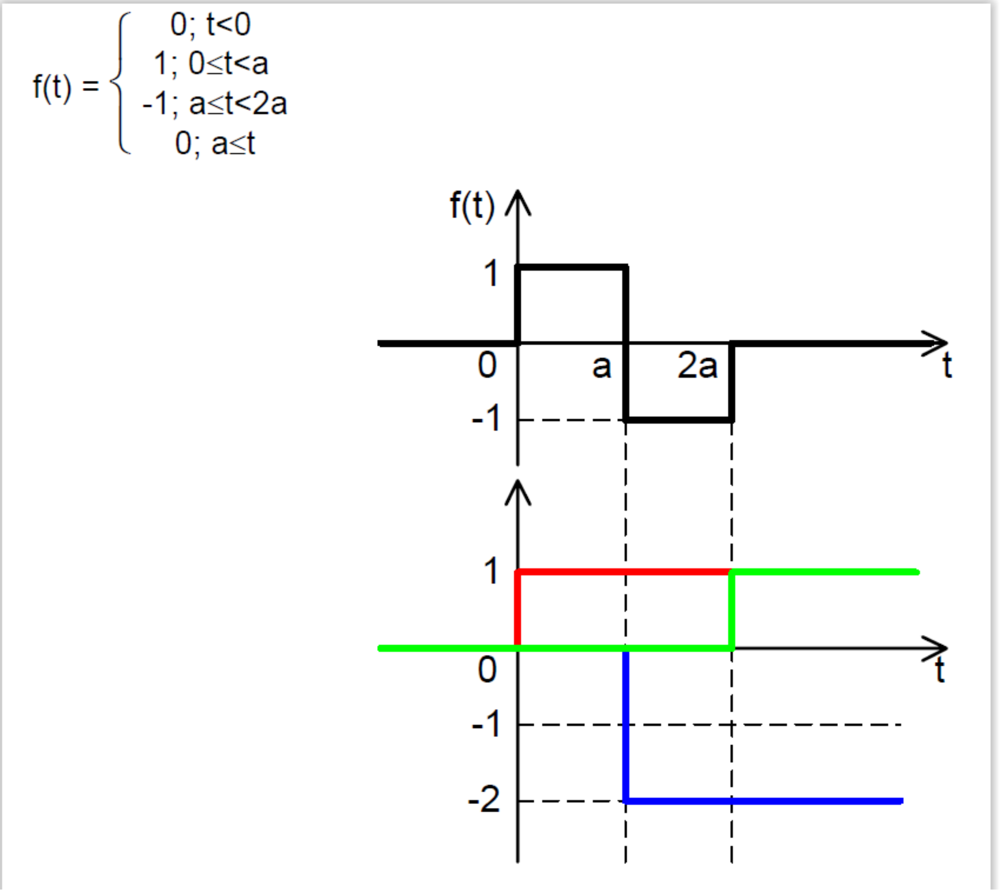
Sinusoidalni signali

- Ukoliko je parametar A kompleksan: $A = |A|\, e^{j\varphi}$, tada je signal $x(t)$:
- $x(t) = A\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega_0 t} = |A|\, e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$
- $x(t) = |A| \cos(\omega_0 t + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 t + \varphi)$
- Signal ***x(t)*** je periodičan signal, tako da za svako ***t*** važi:
- $x(t) = x(t+T)$, gde je T perioda signala
- ω_0 – kružna učestanot (ili kruţna frekvencija) i jedinica u kojoj se izraţava je radijan u sekundi [*rad/s*],
- φ - faza signala (fazni pomeraj) i izražava se u radijanima [*rad*].
- $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f = \frac{1}{T}$
- f_0 - frekvencija ili učestanot izražava se u hercima [*Hz*]

Odrediti Laplasovu transformaciju funkcija e^{at} i e^{-at}, a zatim izračunati Laplasovu transformaciju funkcije $y(t)=e^{at}+e^{-at}$

- $L\{e^{at}\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a}$
- $L\{e^{-at}\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=\frac{1}{s+a}$
- $L\{e^{at}+e^{-at}\}=\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}$
- Ako se umesto parametra ***a*** uvede ***jω***
- $L\{e^{j\omega t}\}=\frac{1}{s-j\omega}$
- $\{e^{-j\omega t}\}=\frac{1}{s+j\omega}$
- $L\{e^{at}+e^{-at}\}=\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}=\frac{2s}{s^2+\omega^2}$

Za signal sa slike odrediti njegovu Laplasovu transformaciju



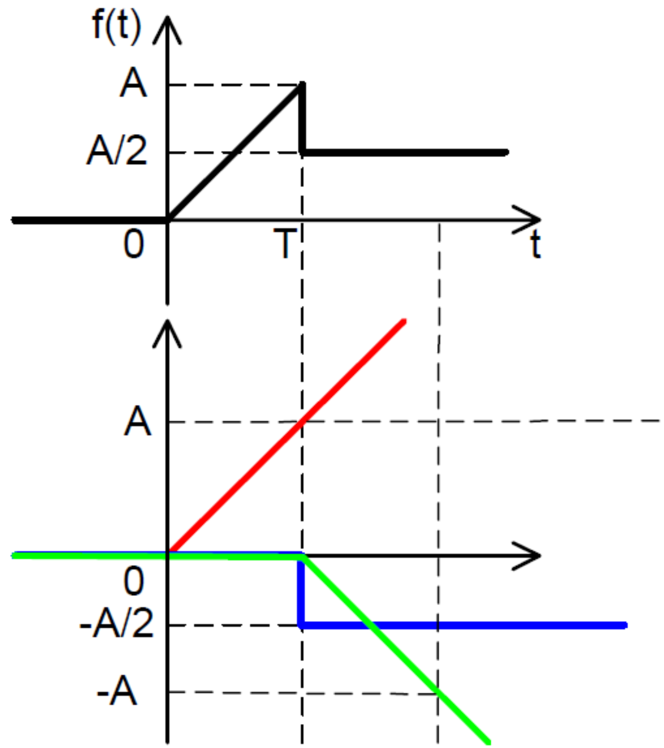
- Prvi korak je definisanje funkcij pomoću elementarnih signala

$f(t)=u(t)-2u(t-a)+u(t-2a)$

- $L\{f(t)\}= \frac{1}{s} - 2\,\frac{1}{s}\,e^{-as} + \frac{1}{s}\,e^{-2as}$

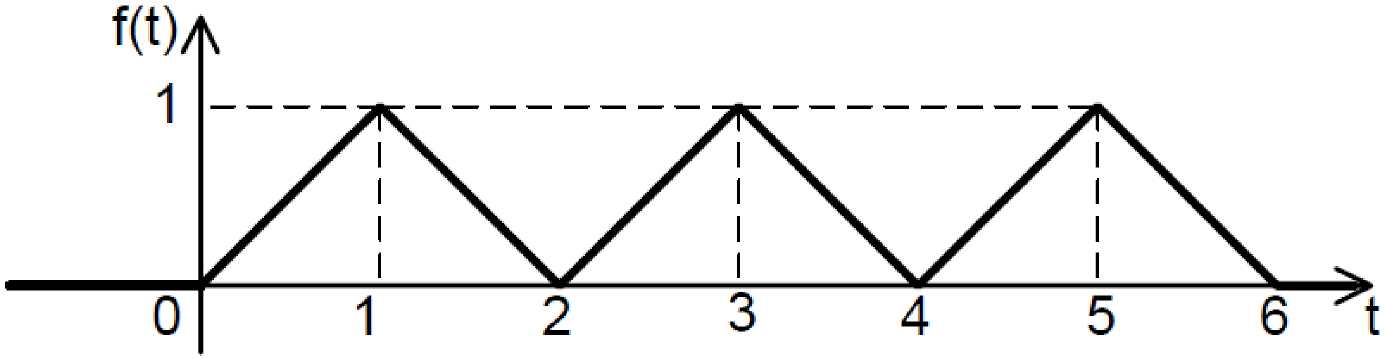
Laplasova transformacija signala

$$f(t) = \begin{cases} 0; \; t<0 \\ \frac{A}{T} t; \; 0 \le t < T \\ \frac{A}{2}; \; T \le t \end{cases}$$



$$f(t) = \frac{A}{T} t \cdot h(t) - \frac{A}{2} h(t-T) - \frac{A}{T} (t-T) \cdot h(t-T) \Rightarrow F(s) = \frac{A}{Ts^2}\left(1-e^{-sT}\right) - \frac{A}{2s} e^{-sT}$$

Laplasova transformacija signala

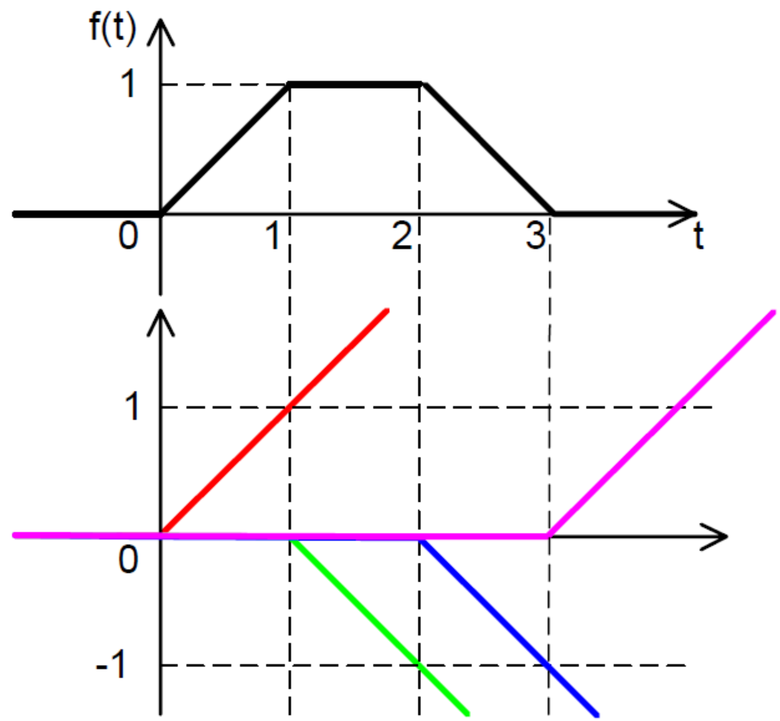


$f(t) = t \cdot h(t) - 2 \cdot (t-1) \cdot h(t-1) + 2 \cdot (t-2) \cdot h(t-2) - 2 \cdot (t-3) \cdot h(t-3) + 2 \cdot (t-4) \cdot h(t-4) - 2 \cdot (t-5) \cdot h(t-5) + (t-6) \cdot h(t-6)$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left[1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s} - 2e^{-3s} + 2e^{-4s} - 2e^{-5s} + e^{-6s}\right]$$

Laplasova transformacija trapeznog signala

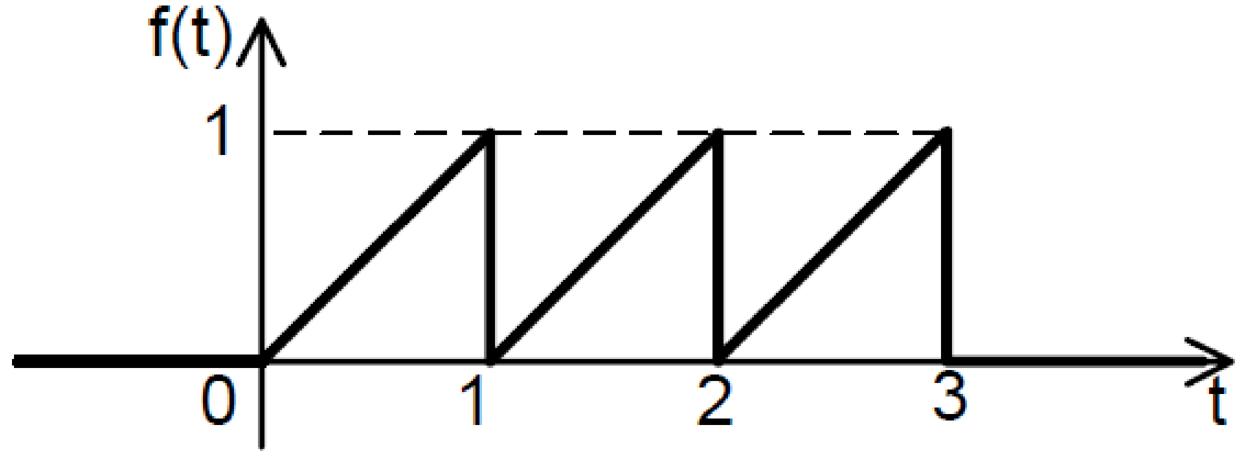
$$f(t) = \begin{cases} 0; & t<0 \\ t; & 0 \le t < 1 \\ 1; & 1 \le t < 2 \\ 3-t; & 2 \le t < 3 \\ 0; & 3 \le t \end{cases}$$



$$f(t) = t \cdot h(t) - (t-1) \cdot h(t-1) - (t-2) \cdot h(t-2) + (t-3) \cdot h(t-3)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}\right]$$

Laplasova transformacija testerastog signala



$$f(t) = t \cdot h(t) - h(t-1) - h(t-2) - h(t-3) - (t-3) \cdot h(t-3)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s} e^{-3s} - \frac{1}{s^2} e^{-3s}$$

FUNKCIJA PRENOSA

- Funkcija prenosa linearnog kontinualnog sistema sa vremenski invarijantnim parametrima je definisana kao količnik *Laplasove transformacije* izlaznog signala i ulaznog signala uz pretpostavku da su svi početni uslovi jednaki nuli.

- **G(s)=** $\frac{Y(s)}{X(s)}$

Funkcija prenosa (TF)

- Funkcija prenosa se definiše kao odnos izlaznog i ulaznog signala, pri nultim početnim uslovima.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

- Koristeći osobinu izvoda, jednačina se može pretvoriti u s-domen:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s)$$

Funkcija prenosa sistema u s-domenu je:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- $X(s)$ predstavlja Laplasovu transformaciju odstupanja ulaza od njegove vrednosti u stacionarnom stanju,
- $Y(s)$ predstavlja Laplasova transformaciju odstupanja izlaza od njegove vrednosti u stacionarnom stanju.

Inverzna Laplasova transformacija

- Inverzna Laplasova transformacija je linearna i definiše se:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)\,ds$$

- Ova definicija se retko koristi za praktično nalaženje inverzne Laplasove transformacije.
- Najčešće se koristi metod Hevisajdove ekspanzije:
- Funkcija $F(s)$, čiju inverznu Laplasovu transformaciju treba naći, se prikazuje u obliku zbira jednostavnih funkcija čije se inverzne transformacije mogu naći direktno, pregledom tablica Laplasovih transformacija:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_N(s)$$

Inverzna Laplasova transformacija

- Za određivanje inverzne Laplasove transformacije su od posebnog značaja polovi funkcije *F(s)*, i tu se mogu uočiti četiri karakteristična slučaja:

1. Svi polovi funkcije *F(s)* su realni i prosti;
2. Postoje konjugovano kompleksni polovi, a realni su, ako postoje, prosti;
3. Funkcija *F(s)* ima višestruke realne korene;
4. Funkcija *F(s)* ima višestruke konjugovano kompleksne polove.

Rastavlanje funkcije prenosa na sumu parcijalnih razlomaka

- Pri rešavanju običnih linearnih diferencijalnih jednačina, funkcija $F(s)$ čiju inverznu Laplasovu transformaciju treba naći, dobija se kao odnos dva polinoma po s:
- **F(s)** $= \dfrac{Z_M(s)}{P_N(s)}$, **Kada se izvrši faktorizacija u imeniocu dobija se**
- **F(s)** $= \dfrac{Z_M(s)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)(s-p_N)}$
- gde su pi (i=1,...,N) nule polinoma $\boldsymbol{P_N(s)}$, i ako su sve ove vrednosti različite, funkcija $\boldsymbol{F(s)}$ se može izraziti kao zbir parcijalnih razlomaka od N članova:
- **F(s)** $= \dfrac{r_1}{(s-p_1)} + \dfrac{r_2}{(s-p_2)} + \ldots + \dfrac{r_n}{(s-p_N)}$

Rastavlanje funkcije prenosa na sumu parcijalnih razlomaka

- *Nepoznate konstante* r_1 , $r_{2,}$, ... ,$r_{n,}$ *određuju se po formuli:*
- $r_1 = \lim_{s \to p_1} [(s - p_1)F(s)]$
- $r_2 = \lim_{s \to p_2} [(s - p_2)F(s)]$
- .....
- $r_N = \lim_{s \to p_N} [(s - p_N)F(s)]$
- Ako se neki pol ponavlja više putam tada se koristi formula:
- $\mathbf{F(s)} = \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{(s-p_1)^n}} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{(s-p_1)^{n-1}}} + \ldots + \frac{\boldsymbol{A_n}}{\boldsymbol{(s-p_1)}} + \frac{\boldsymbol{r_2}}{\boldsymbol{(s-p_2)}} + \ldots + \frac{\boldsymbol{r_N}}{\boldsymbol{(s-p_N)}}$
- Primenom $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ dobija se ***f(t)***

P1. Rastaviti funkciju prenosa G(*s*) na sumu parcijalnih razlomaka:

G(*s*)= $\frac{\mathbf{2}}{s(s+1)(s+2)}$

Rešenje: G(s)= $\frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{r_3}{s+2}$

$$r_1 = \lim_{s\to 0}\left[s\,\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right] = \frac{2}{(0+1)(0+2)} = 1$$

$$r_2 = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)\,\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right] = \lim_{s\to -1}\left[\frac{2}{s(s+2)}\right] = \frac{2}{(-1)(-1+2)} = -2$$

$$r_3 = \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\,\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right] = \lim_{s\to -2}\left[\frac{2}{s(s+1)}\right] = \frac{2}{(-2)(-2+1)} = 1$$

G(*s*)= $\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

Rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine korišćenjem Laplasove transformacije: P2. Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$3\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 2x = 0$, *za početne uslove x(0)=0 i* $x'(0) = 0.5$

Primenom Laplasove ***X(s)*=L {*x(t)*}**) transformacije na levu i desnu stranu dobijamo jednačinu:

3 s^2 X(s) +5 s X(s) +2 X(s) = 0

Zamenom početnih uslova dobijamo jednačinu:

3 [s^2 X(s) - s x(0) - x′(0)] +5 [s X(s) - x(0)] +2 X(s)=0

(3 s^2+5s+2) X(s)=1.5

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu:

- $X(s) = \frac{1.5}{3\,s^2+5s+2}$,

Rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine korišćenjem Laplasove transformacije

- Da bi se dobilo rešenje u vremenskom domenu potrebno je naći inverznu Laplasovu transformaciju izraza.
- U tom cilju treba prvo izvršiti faktorizaciju polinoma u imeniocu.
- Rešavanjem kvadratne jednačine $\mathbf{3s^2+5s+2}=0$
- Nule polinoma u imeniocu su $\mathbf{s_1= - 1}$ **i** $\mathbf{s_2= - 2/3}$, tako da se gornja jednačina može napisati u obliku:
- $\mathbf{X(s)} = \dfrac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{s^2+5s+2}} = \dfrac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{3(s+1)(s+\frac{2}{3})}} = \dfrac{\mathbf{0.5}}{\mathbf{(s+1)(s+\frac{2}{3})}} = \dfrac{\mathbf{r_1}}{\mathbf{s+1}} + \dfrac{\mathbf{r_2}}{\mathbf{s+\frac{2}{3}}}$
- $r_1 = \lim\limits_{s\to-1}\left[(s+1)\dfrac{0.5}{(\mathbf{s+1})(\mathbf{s+\frac{2}{3}})}\right] = -1.5$
- $r_2 = \lim\limits_{s\to-2/3}\left[(\mathbf{s}+\frac{2}{3})\dfrac{0.5}{(\mathbf{s+1})(\mathbf{s+\frac{2}{3}})}\right] = 1.5$
- $\mathbf{X(s)} = \dfrac{\mathbf{-1.5}}{\mathbf{s+1}} + \dfrac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{s+2/3}} = \dfrac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{s+2/3}} - \dfrac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{s+1}}$

Rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine korišćenjem Laplasove transformacije

- Primenom inverzne Laplasove transformacije iz tabele:

  $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+a}\} = e^{-at}$$

- $\mathbf{X(s)} = \dfrac{1.5}{s+2/3} - \dfrac{1.5}{s+1}$
- Dobija se rešenje u vremenskom domenu
- $x(t) = 1.5\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2/3}\} - 1.5\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 1.5e^{\frac{2}{3}t} - 1.5e^{-t}$
- Rešenje polazne diferencijalne jednačine, za date početne uslove je:
- $x(t) = 1.5(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-t})$

P3. Odrediti inverznu laplasovu transformaciju funkcije

G(s)=$\frac{3s^2+4s+7}{(s+1)(s+5)(s+8)}$

Rešenje: G(s)=$\frac{r_1}{s+1}+\frac{r_2}{s+5}+\frac{r_3}{s+8}$

$$r_1=\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\frac{3s^2+4s+7}{(s+1)(s+5)(s+8)}\right]=\lim_{s\to -1}\left[\frac{3s^2+4s+7}{(s+5)(s+8)}\right]=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

$$r_2=\lim_{s\to -5}\left[(s+5)\frac{3s^2+4s+7}{(s+1)(s+5)(s+8)}\right]=\lim_{s\to -5}\left[\frac{3s^2+4s+7}{(s+1)(s+8)}\right]=\frac{62}{-12}=-\frac{31}{6}$$

$$r_3=\lim_{s\to -8}\left[(s+8)\frac{3s^2+4s+7}{(s+1)(s+5)(s+8)}\right]=\lim_{s\to -8}\left[\frac{3s^2+4s+7}{(s+1)(s+5)}\right]=\frac{167}{21}$$

$$G(s)=\frac{3}{14}\frac{1}{s+1}-\frac{31}{6}\frac{1}{s+5}+\frac{167}{21}\frac{1}{s+8}$$

$$g(t)=\frac{3}{14}e^{-t}-\frac{31}{6}e^{-5t}+\frac{167}{21}e^{-8t}$$

4. Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$25\frac{d^2x}{dt^2} + x = 1,$$ *za početne uslove x(0)=0 i* $x'(0) = 0$

Primenom Laplasove (***X(s)*=L {*x(t)*}**) transformacije na levu i desnu stranu dobijamo jednačinu:

$$25\, s^2\, X(s) + X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(25\, s^2 + 1)\, X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(25\, s^2 + 1)} = \frac{1}{25s(s^2 + 1/25)} = \frac{1/25}{s(s^2 + 1/25)}$$

Funcija ima tri pola: $s_1 = 1;\ s_2 = -j1/5$ *i* $s_3 = j1/5$

4. Rešenje

$$X(s) = \frac{1/25}{s(s+1/5j)(s-1/5j)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/5\ j} + \frac{C}{s-1/5\ j}$$

Koeficijente *A*, *B* i *C* ćemo odrediti korišćenjem jednačine (2.2-23):

$$A = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1/25}{s(s+1/5j)(s-1/5j)} \right] = \frac{1/25}{(1/5j)(-1/5j)} = \frac{1/25}{1/25} = 1$$

$$B = \lim_{s \to -1/5j} \left[(s+1/5j) \frac{1/25}{s(s+1/5j)(s-1/5j)} \right] = \frac{1/25}{(-1/5j)(-2/5j)} = \frac{1/25}{-2/25} = -\frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s \to 1/5j} \left[(s-1/5j) \frac{1/25}{s(s+1/5j)(s-1/5j)} \right] = \frac{1/25}{(1/5j)(2/5j)} = \frac{1/25}{-2/25} = -\frac{1}{2}$$

Tako da se *X*(*s*) dobija kao sledeći zbir parcijalnih razlomaka:

$$y(t) = K\ x(t)$$

4. Rešenje

Primenom inverzne Laplasove transformacije, dobija se:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/5j}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1/5j}\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{5}jt\right) - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{5}jt\right)$$

Ovaj izraz se može pojednostaviti, jer zadnja dva člana mogu da se prikažu kao cos(t/5):

$$x(t) = 1 - \cos\frac{1}{5}t$$

5. Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funcije:

- $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)s(s+2)s(s+3)}$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{s\to -1} \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{2}$$

$$C = \lim_{s\to -2} \frac{s+2}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s\to -2} \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2}$$

$$D = \lim_{s\to -3} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s\to -3} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{6}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{6}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} - \frac{\frac{1}{6}}{s+3}$$

$$g(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}.$$

P6. Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funcije:

- $G(s) = \frac{4s+9}{s(s-3)(s+3)}$
- ***Rešenje:***

Rešenje: $G(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s-5} + \frac{r_3}{s+3}$

$$r_1 = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{4s+9}{s(s-3)(s+3)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{4s+9}{(s-3)(s+3)}\right] = \frac{9}{-9} = -1$$

$$r_2 = \lim_{s\to 3}\left[(s-3)\frac{4s+9}{s(s-3)(s+3)}\right] = \lim_{s\to 3}\left[\frac{4s+9}{s(s+3)}\right] = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$$

$$r_3 = \lim_{s\to -3}\left[(s+3)\frac{4s+9}{s(s-3)(s+3)}\right] = \lim_{s\to -3}\left[\frac{4s+9}{s(s-3)}\right] = \frac{-3}{18} = -\frac{1}{6}$$

$$G(s) = -\frac{1}{s} + \frac{7}{6}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+3}$$

$$g(t) = -u(t) + \frac{7}{6}e^{3t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

Slučaj 2. Funcija ima konjugovano kompleksne polove

Pretpostavka je da jednačina Q(s)=0 ima samo jedan par konjugovano kompleksnih polova (s_1 i $s_2=s^*_1$) a da su svi ostali (s_3, s_4, ...,s_n) realni i prosti:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s-s_3)\ldots(s-s_n)}=\frac{K_1}{(s-s_1)}+\frac{K_1^*}{(s-s_1^*)}+\frac{K_2}{(s-s_2)}+\cdots+\frac{K_n}{(s-s_n)}$$

Ako je: $s_1=-\alpha+j\omega$ i $s_1^*=-\alpha-j\omega$, Tada je: $K_1=-a+jb$ i $K_1^*=-a-jb$.

$$F(s)=\frac{a+jb}{(s+\alpha)-j\omega}+\frac{a-jb}{(s+\alpha)+j\omega}+\sum_{k=3}^{n}\frac{K_k}{s-s_k}=\frac{2a(s+\alpha)-2b\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{K_k}{s-s_k}$$

$$F(s)=2a\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}-2b\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{K_k}{s-s_k}$$

Inverzna Laplasova transformacija je:

$$f(t)=2ae^{-\alpha t}\cos(\omega t)-2be^{-\alpha t}\sin(\omega t)+\sum_{k=3}^{n}K_k e^{s_k t}.$$

Koeficijent K_1=a+jb se izračunava prema obrascu:

$$K_k=a+jb=\left[(s+\alpha-j\omega)\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-\alpha+j\omega}.$$

Slučaj 2. Funcija ima konjugovano kompleksne polove

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije: $F(s) = \dfrac{3s+7}{(s^2+2s+2)(s-3)(s+3)}$.

Rešenje:

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+1-j)} + \frac{K_1^*}{(s+1-j)} + \frac{K_3}{(s+3)} + \frac{K_4}{(s-3)}$$

$$K_1 = (s+1-j)\left.\frac{3s+7}{(s+1-j)(s+1+j)(s-3)(s+3)}\right|_{s=-1+j} = \frac{-19+j42}{170}$$

$$K_1^* = \frac{-19-j42}{170}$$

$$K_3 = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3} = \left.\frac{3s+7}{(s^2+2s+2)(s-3)}\right|_{s=-3} = \frac{1}{15}$$

$$K_4 = (s-3)F(s)\Big|_{s=3} = \left.\frac{3s+7}{(s^2+2s+2)(s+3)}\right|_{s=3} = \frac{8}{51}$$

$$F(s) = \frac{-19+j42}{170}\frac{1}{s+1-j} + \frac{-19-j42}{170}\frac{1}{s+1+j} + \frac{1}{15}\frac{1}{(s+3)} + \frac{8}{51}\frac{1}{(s-3)} =$$

$$= -\frac{19s+61}{85((s+1)^2+1^2)} + \frac{1}{15}\frac{1}{(s+3)} + \frac{8}{51}\frac{1}{(s-3)} =$$

$$= -\frac{19}{85}\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{42}{85}\frac{1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{1}{15}\frac{1}{(s+3)} + \frac{8}{51}\frac{1}{(s-3)}$$

$$f(t) = -\frac{19}{85}e^{-t}\cos t - \frac{42}{85}e^{-t}\sin t + \frac{1}{15}e^{-3t} + \frac{8}{51}e^{3t}.$$

Slučaj 2. Funcija ima konjugovano kompleksne polove

Ovaj pristup je komplikovan jer zahteva puno računa sa kompleksnim brojevima, pa se da primeniti jednostavniji način:

$$F(s) = \frac{3s+7}{(s^2+2s+2)(s-3)(s+3)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+2)} + \frac{C}{(s+3)} + \frac{D}{(s-3)} =$$

$$= \frac{(A+C+D)s^3 + (B-C+5D)s^2 + (8D-9A-4C)s + (6D-9B-6C)}{(s^2+2s+2)(s-3)(s+3)}$$

Sada se formira sistem jednačina:

A+C+D=0
B-C+5D=0
-9A-4C+8D=3
-9B-6C+6D=7

Rešenja su: $A = -\frac{19}{85}; B = -\frac{61}{85}; C = \frac{1}{15}; D = \frac{8}{51}$.

Sada je:

$$F(s) = -\frac{1}{85}\frac{19s+61}{(s+1)^2+1^2} + \frac{1}{15}\frac{1}{(s+3)} + \frac{8}{51}\frac{1}{(s-3)}$$

Za original f(t) se dobija isto rešenje:

$$f(t) = -\frac{19}{85}e^{-t}\cos t - \frac{42}{85}e^{-t}\sin t + \frac{1}{15}e^{-3t} + \frac{8}{51}e^{3t}.$$

Slučaj 3: Funcija F(s) ima višestruke realne polove

Pretpostavka je da jednačina Q(s)=0 ima jedna višestruko (trostruko) rešenje s_1, a da su ostali polovi fukcije F(s) realni i prosti.

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{(s-s_1)^3(s-s_4)\ldots(s-s_n)}$$

Dalje se F(s) razvija u parcijalne razlomke:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_{11}}{(s-s_1)^3}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^2}+\frac{K_{13}}{(s-s_1)}+\frac{K_4}{(s-s_4)}+\cdots+\frac{K_n}{(s-s_n)}$$

Koeficijenti se izračunavaju prema izrazu:

$$K_{11}=\left[(s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_1}$$

$$K_{12}=\left[\frac{d}{ds}\left((s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=s_1}$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left((s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=s_1}$$

Opšti obrazac za koeficijente K_{rm}; m=1,2,...,p višestrukog pola $s=s_r$, višestrukosti p jeste:

$$K_{rm}=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left((s-s_r)^p\frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=s_r}$$

Inverzna Laplasova transformacija polazne funkcije je:

$$f(t)=\frac{1}{2}K_{11}t^2e^{s_1 t}+K_{12}te^{s_1 t}+K_{13}e^{s_1 t}+\sum_{i=4}^{n}K_i e^{s_i t}$$

Primer:

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije: $F(s)=\dfrac{4s+9}{(s+2)^3(s+3)}$.

Rešenje:

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+2)^3}+\frac{K_{12}}{(s+2)^2}+\frac{K_{13}}{(s+2)}+\frac{K_4}{(s+3)}$$

$$K_{11}=\left[(s+2)^3F(s)\right]_{s=-2}=\left.\frac{4s+9}{s+3}\right|_{s=-2}=1$$

$$K_{12}=\left[\frac{d}{ds}\left((s+2)^3F(s)\right)\right]_{s=-2}=\left.\left[\frac{d}{ds}\frac{4s+9}{s+3}\right]\right|_{s=-2}=\left.\frac{3}{(s+3)^2}\right|_{s=-2}=3$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left((s+2)^3F(s)\right)\right]_{s=-2}=-3$$

$$K_4=(s+3)F(s)\big|_{s=-3}=\left.\frac{4s+9}{(s+2)^3}\right|_{s=-3}=3$$

$$F(s)=\frac{1}{(s+2)^3}+\frac{3}{(s+2)^2}-\frac{3}{(s+2)}+\frac{3}{(s+3)}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-2t}+3te^{-2t}-3e^{-2t}+3e^{-3t}.$$

Primer:

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije: $F(s)=\frac{4s+9}{(s+2)^3(s+3)}$.

Rešenje:

Moguć je i drugačiji pristup:

$$F(s)=\frac{A}{(s+2)^3}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)}+\frac{D}{(s+3)}=$$

$$=\frac{(C+D)s^3+(B+7C+6D)s^2+(A+5B+16C+12D)s+3A+6B+12C+8D}{(s+2)^3(s+3)}=$$

$$\frac{4s+9}{(s+2)^3(s+3)}$$

Dobija se sistem jednačina:

C+D=0

B+7C+6D=0

A+5B+16C+12D=4

3A+6B+12C+8D=9

čija su rešenja: A=1; B=3; C=-3; D=3. Sada je postupak do kraja isti kao kod prethodn
načina.

Slučaj 4: Funcija F(s) ima višestruke konjugovano kompleksne polove

Ovaj slučaj se rešava primenom konvolucije.

Primer:

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije: $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$.

Rešenje:

Polovi funkcije F(s) su $s_{1,2} = s_{3,4} = \pm j\omega$. F(s) poseduje dvostruki par konjugovano kompleksnih polova.

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{\omega^2}L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{\omega^2}[\sin(\omega t) * \sin(\omega t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \sin(\omega\tau)\sin(\omega(t-\tau))d\tau = -\frac{1}{2\omega^2}\int_0^t [\cos(\omega t) - \cos(\omega(t-2\tau))]d\tau$$

$$f(t) = \frac{1}{2\omega^3}[\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)].$$