



Elektrotehnika

Vežbe 13

Naizmenične struje



Naizmenične struje

Zadatak

IV.1.9.4 Za vezu elemenata sa slike odrediti:

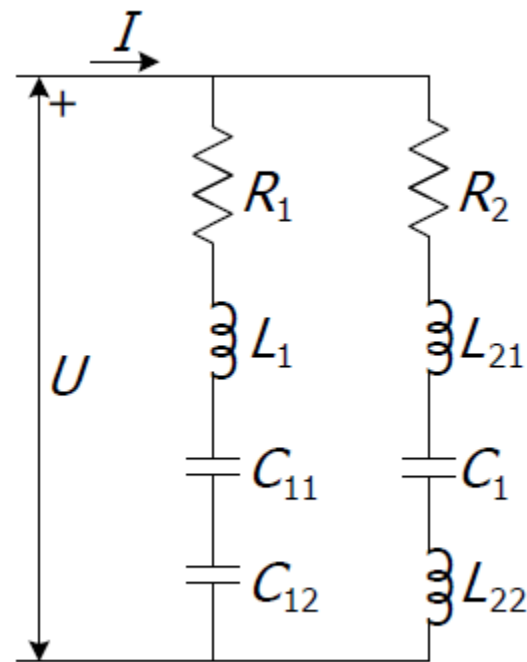
- a) ekvivalentnu impedansu, rezistansu i reaktansu,
- b) karakter kola,
- c) efektivnu vrednost struje kroz napojnu granu,
- d) aktivnu, reaktivnu, prividnu snagu i faktor snage cele veze.

Poznato je:

$$R_1 = 30 \, \Omega, L_1 = 6 \, \text{mH}, C_{11} = 2 \, \mu\text{F}, C_{12} = 2 \, \mu\text{F}, R_{21} = 10 \, \Omega,$$

$$R_{22} = 40 \, \Omega, L_{21} = 8 \, \text{mH}, L_{22} = 2 \, \text{mH}, C_2 = 2 \, \mu\text{F}, U = 100 \, \text{V},$$

$$\omega = 10^4 \, \text{s}^{-1}.$$





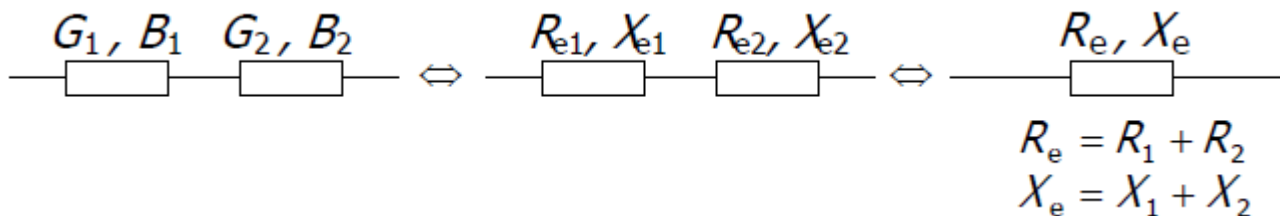
Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

Rešenje:

a) Kod redne veze ukupna ekvivalentna konduktansa odnosno susceptansa se ne mogu dobiti kao zbir konduktansi odnosno susceptansi pojedinih prijemnika.

$$G_e \neq G_1 + G_2 \quad \text{i} \quad B_e \neq B_1 + B_2$$





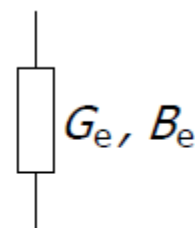
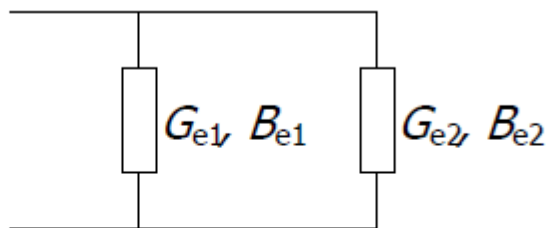
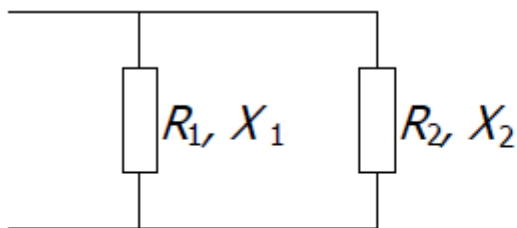
Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

Rešenje:

a) Kod paralelne veze ukupna ekvivalentna rezistansa odnosno rekatansa se ne mogu dobiti sabiranjem rezistansi odnosno reaktansi pojedinih prijemnika

$$R_e \neq R_1 + R_2 \text{ i } X_e \neq X_1 + X_2$$



$$G_e = G_1 + G_2$$

$$B_e = B_1 + B_2$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

Rešenje:

a) Rezistansa prve paralelne grane je:

$$R_1 = 30 \, \Omega$$

Reaktansa prve paralelne grane je:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_{11}} - \frac{1}{\omega C_{12}} = 60 \, \Omega - 50 \, \Omega - 50 \, \Omega = -40 \, \Omega$$

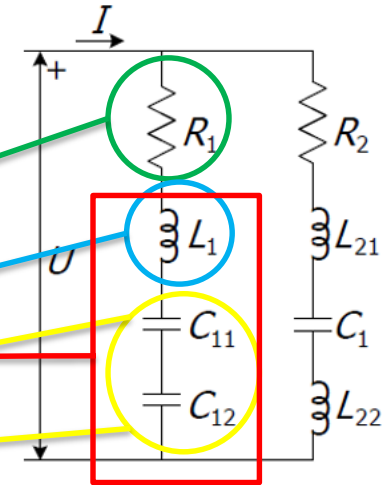
Rezistansa druge paralelne grane je:

$$R_2 = 50 \, \Omega$$

Reaktansa druge paralelne grane je:

$$X_2 = \omega L_{21} + \omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_1} = 80 \, \Omega + 20 \, \Omega - 50 \, \Omega = 50 \, \Omega$$

Potrebno je odrediti ekvivalentne paralelne parametre kako bi mogli da ih saberemo!





Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

Rešenje:

a) Ekvivalentni paralelni parametri su:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{30 \, \Omega}{(30 \, \Omega)^2 + (-40 \, \Omega)^2} = 12 \, \text{mS} \\ B_1 &= -\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = -\frac{-40 \, \Omega}{(30 \, \Omega)^2 + (-40 \, \Omega)^2} = 16 \, \text{mS} \\ G_2 &= \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{50 \, \Omega}{(50 \, \Omega)^2 + (50 \, \Omega)^2} = 10 \, \text{mS} \\ B_2 &= -\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = -\frac{50 \, \Omega}{(50 \, \Omega)^2 + (50 \, \Omega)^2} = -10 \, \text{mS} \end{aligned}$$

Orange arrows point from the circled denominators of the first two equations to the label Z_1^2 . Blue arrows point from the circled denominators of the last two equations to the label Z_2^2 .

Pa je: $G_e = G_1 + G_2 = 12 \, \text{mS} + 10 \, \text{mS} = 22 \, \text{mS}$

$$B_e = B_1 + B_2 = 16 \, \text{mS} - 10 \, \text{mS} = 6 \, \text{mS}$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

Rešenje:

a) Admitansa kola je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{(22 \text{ mS})^2 + (6 \text{ mS})^2} = 22,8 \text{ mS}$$

pa je impedansa:

$$Z_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{22,8 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 43,9 \Omega$$

Odgovarajući redni parametri redne veze su:

$$R_e = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2} = \frac{22 \text{ mS}}{(22 \text{ mS})^2 + (6 \text{ mS})^2} = 0,0423 \text{ k}\Omega = 42,3 \Omega$$

$$X_e = -\frac{B_e}{G_e^2 + B_e^2} = -\frac{6 \text{ mS}}{(22 \text{ mS})^2 + (6 \text{ mS})^2} = -0,0115 \text{ k}\Omega = 11,5 \Omega$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

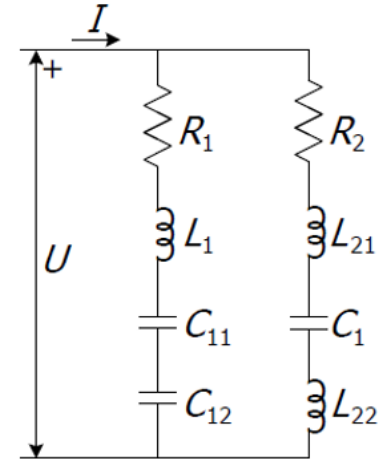
Rešenje:

b) Odrediti karakter kola.

Kako je $X_e < 0$

Odnosno $B_e > 0$

Kolo će biti **kapacitivnog** karaktera.



c) Odrediti efektivnu vrednost struje kroz napojnu granu

Na osnovu ekvivalentne impedanse i efektivne vrednosti napona može se odrediti efektivna vrednost struje napojne grane:

$$I = \frac{U}{Z_e} = \frac{100 \text{ V}}{43,9 \Omega} = 2,28 \text{ A}$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.4

Rešenje: Odrediti faktor snage celog kola

d) Razlika faza napona i struje na celoj vezi je

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{-11,5 \, \Omega}{42,3 \, \Omega} = \arctg (-0,27) = -0,26$$

pa je faktor snage:

$$\cos \varphi_e = 0,96$$

Snage se mogu odrediti preko faktora snage, preko struje i rednih parametara ili napona i paralelnih elemenata:

$$P = UI \cos \varphi_e = I^2 R_e = U^2 G_e \approx 220 \, \text{W}$$

$$Q = UI \sin \varphi_e = I^2 X_e = -U^2 B_e \approx -60 \, \text{VAr}$$

$$S = UI = I^2 Z_e = U^2 Y_e \approx 228 \, \text{VA}$$



Naizmenične struje

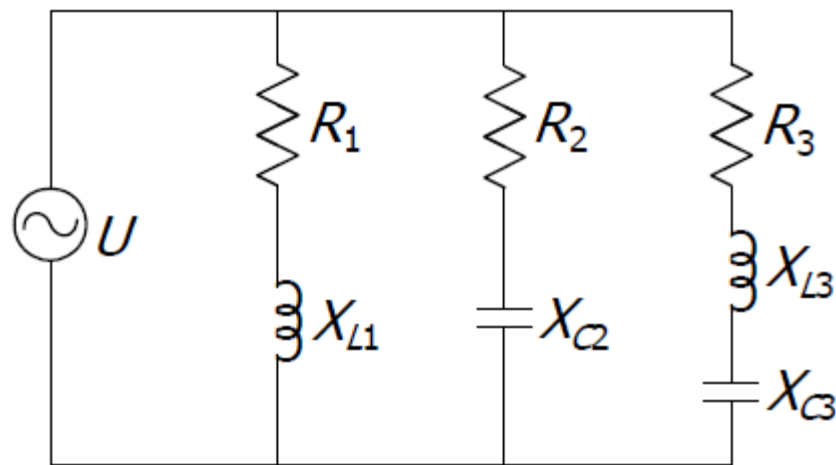
Zadatak

IV.1.9.5 Tri prijemnika karakteristika $R_1 = 20 \, \Omega$, $X_{L1} = 20 \, \Omega$, $R_2 = 80 \, \Omega$, $X_{C2} = 80 \, \Omega$ i $R_3 = 50 \, \Omega$, $X_{L3} = 50 \, \Omega$, $X_{C3} = 100 \, \Omega$, vezana su paralelno i priključena na prostoperiodični napon

$$u(t) = 50\sqrt{2} \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$

Odrediti:

- a) ekvivalentnu impedansu kola,
- b) karakter kola,
- c) izraz po kome se menja trenutna vrednost struje u napojnoj grani,
- d) faktor snage kola,
- e) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola.





Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.5

Rešenje:

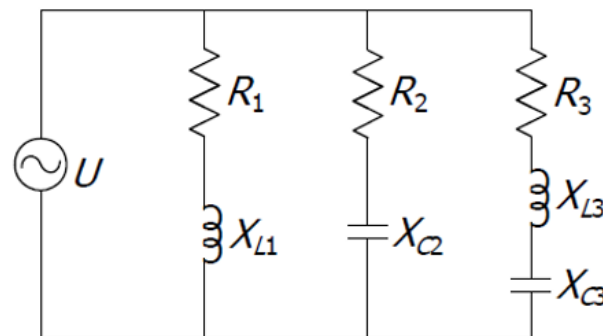
a) Reaktivni deo prvog prijmnika sastoji se samo od kalema pa je njegova reaktansa:

$$X_1 = X_{L1} = 20 \, \Omega$$

Ekvivalentni paralelni parametri prvog prijemnika su:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{20 \, \Omega}{(20 \, \Omega)^2 + (20 \, \Omega)^2} = 0,025 \, \text{S} = 25 \, \text{mS}$$

$$B_1 = -\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = -\frac{20 \, \Omega}{(20 \, \Omega)^2 + (20 \, \Omega)^2} = -0,025 \, \text{S} = -25 \, \text{mS}$$





Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.5

Rešenje:a)

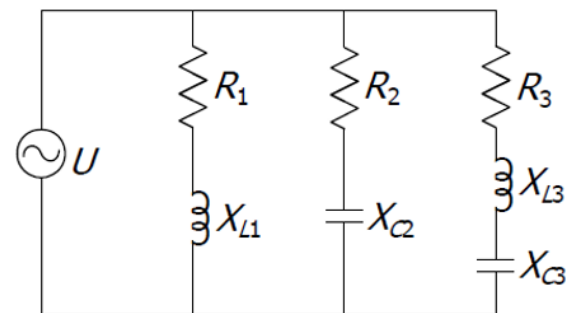
Reaktivni deo drugog prijemnika sastoji se samo od kondenzatora pa je njegova reaktansa:

$$X_2 = -X_{C2} = -80 \, \Omega$$

Ekvivalentni parametri drugog prijemnika su

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{80 \, \Omega}{(80 \, \Omega)^2 + (-80 \, \Omega)^2} = 0,00625 \, \text{S} = 6,25 \, \text{mS}$$

$$B_2 = -\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = -\frac{-80 \, \Omega}{(80 \, \Omega)^2 + (-80 \, \Omega)^2} = 0,00625 \, \text{S} = 6,25 \, \text{mS}$$





Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.5

Rešenje:a)

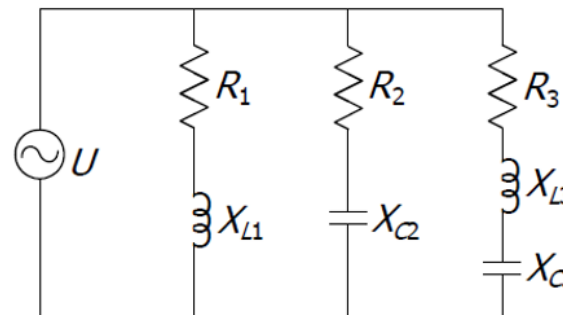
Reaktansa trećeg prijemnika je:

$$X_3 = X_{L3} - X_{C3} = 50 \, \Omega - 100 \, \Omega = -50 \, \Omega$$

Ekvivalentni paralelni parametri trećeg prijemnika su:

$$G_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + X_3^2} = \frac{50 \, \Omega}{(50 \, \Omega)^2 + (-50 \, \Omega)^2} = 0,01 \, \text{S} = 10 \, \text{mS}$$

$$B_3 = -\frac{X_3}{R_3^2 + X_3^2} = -\frac{-50 \, \Omega}{(50 \, \Omega)^2 + (-50 \, \Omega)^2} = 0,01 \, \text{S} = 10 \, \text{mS}$$



Konduktansa celog kola je:

$$G_e = G_1 + G_2 + G_3 = 25 \, \text{mS} + 6,25 \, \text{mS} + 10 \, \text{mS} = 41,25 \, \text{mS}$$

Susceptansa je:

$$B_e = B_1 + B_2 + B_3 = -25 \, \text{mS} + 6,25 \, \text{mS} + 10 \, \text{mS} = -8,75 \, \text{mS}$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.5

Rešenje: a)

Admitansa celog kola je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{(41,25 \text{ mS})^2 + (-8,75 \text{ mS})^2} = 42,17 \text{ mS}$$

Pa je impedansa:

$$Z_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{42,17 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 23,7 \, \Omega$$

b) Pošto je ekvivalentna susceptansa celog kola negativna kolo ima pretežno **induktivni** karakter.

c) Na osnovu izraza po kome se menja trenutna vrednost napona možemo odrediti:

- amplitudu napona $U_m = 50\sqrt{2} \text{ V}$,
- efektivnu vrednost napona $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 50 \text{ V}$,
- kružnu učestanost $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$,
- početnu fazu $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.5

Rešenje: c)

Efektivna vrednost struje napojne grane je:

$$I = U \cdot Y_e = 50 \text{ V} \cdot 42,17 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 2,1 \text{ A}$$

pa je amplituda:

$$I_m = I \sqrt{2} = 2,1 \cdot \sqrt{2} \text{ A} = 2,97 \text{ A}$$

Na osnovu razlike faza struje i napona kola:

$$\nu_e = \arctg \frac{B_e}{G_e} = \arctg \frac{-8,75 \text{ mS}}{41,25 \text{ mS}} = \arctg (-0,21) = -0,21$$

Početna faza struje biće:

$$\psi = \theta + \nu_e = \frac{\pi}{4} + (-0,21) = 0,79 - 0,21 = 0,58$$

Pa je izraz po kome se menja trenutna vrednost struje napojne grane:

$$i_1(t) = 2,97 \sin(10^5 t + 0,58) \text{ A}$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.1.9.5

Rešenje: d)

Faktor snage kola je:

$$\cos \varphi_e = \cos(-\nu_e) = \cos(-0,21) = 0,98$$

e) Aktivna, reaktivna i prividna snaga kola su:

$$P = UI \cos \varphi_e = 50 \text{ V} \cdot 2,1 \text{ A} \cdot 0,98 = 102,9 \text{ W}$$

$$Q = UI \sin \varphi_e = 50 \text{ V} \cdot 2,1 \text{ A} \cdot \sin(-0,21) = -22,05 \text{ VAR}$$

$$S = UI = 50 \text{ V} \cdot 2,1 \text{ A} = 105 \text{ VA}$$



Naizmenične struje

Zadatak

IV.2.1.1 Za sledeće struje i napone, za koje su dati izrazi po kojima se menjaju njihove trenutne vrednosti, napisati izraze u kompleksnom obliku:

a) $i_1(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(10^4 t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A} ,$

b) $u_1(t) = 4 \sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V} ,$

c) $i_2(t) = \sin \omega t \text{ A} .$



Naizmenične struje

Zadatak IV.2.1.1

Rešenje:a)

Na osnovu izraza za trenutnu vrednost struje može se zaključiti da je:

- amplituda $I_{1m} = 2\sqrt{2} \text{ A}$,
- efektivna vrednost $I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} \text{ A}}{\sqrt{2}} = 2 \text{ A}$,
- kružna učestanost $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$,
- početna faza $\psi_1 = \frac{\pi}{6}$.

pa je kompleksni izraz za jačinu struje:

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} = 2 \text{ A} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.2.1.1

Rešenje:a)

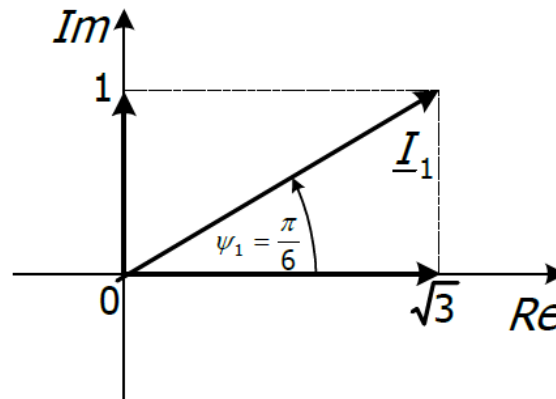
Primenom Ojlerovih formula određujemo realni i imaginarni deo kompleksnog izraza za struju:

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$$

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} = I_1 (\cos \psi_1 + j \sin \psi_1) = I_1 \cos \psi_1 + j \cdot I_1 \sin \psi_1$$

Zamenom brojnih vrednosti u izraz dobijamo:

$$\underline{I}_1 = 2 \text{ A} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 2 \text{ A} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \text{ A} \cdot (0,5\sqrt{3} + j0,5) = (\sqrt{3} + j) \text{ A}$$





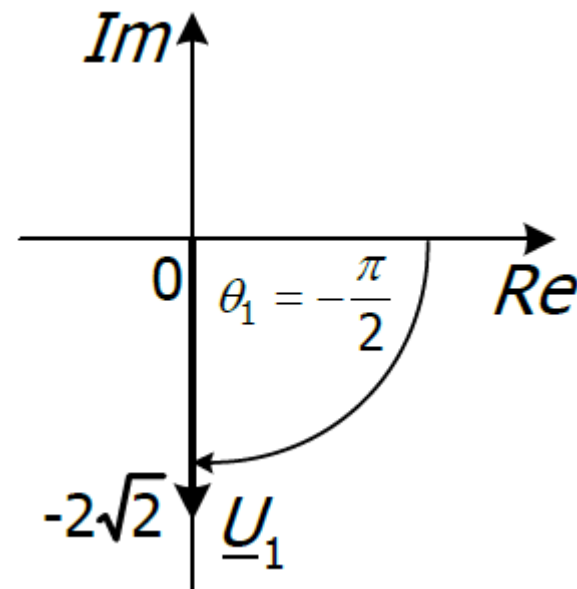
Naizmenične struje

Zadatak IV.2.1.1

Rešenje:b)

Parametri analiziranog napona su:

- amplituda $U_{1m} = 4 \text{ V}$,
- efektivna vrednost $U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{4 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ V}$,
- kružna učestanost $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$,
- početna faza $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.



$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= U_1 e^{j\theta_1} = 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot (0 - j) = -j2\sqrt{2} \text{ V}\end{aligned}$$



Naizmenične struje

Zadatak IV.2.1.1

Rešenje:c)

Parametri analizirane struje su:

- amplituda $I_{2m} = 1 \text{ A}$,
- efektivna vrednost $I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{2} \text{ A}$,
- početna faza $\psi_2 = 0$.

$$\underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_1} = 0,5\sqrt{2} \text{ A} \cdot e^{j0} = 0,5\sqrt{2} \text{ A} \cdot (\cos 0 + j \sin 0) = 0,5\sqrt{2} \text{ A} \cdot (1 + j0) = 0,5\sqrt{2} \text{ A}$$

