Sonja Krstić Iva Đukić

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE

Elektrostatika
Vremenski nepromenljive električne struje

Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija
Beograd, 2020.

Autori

dr Sonja Krstić, dr Iva Đukić

Recenzenti
dr Petar Bošnjaković, profesor Visoke škole elektrotehnike i računarstva u Beogradu
mr Aleksandra Gavrilović, profesor Visoke škole elektrotehnike i računarstva u Beogradu

Izdavač
Visoka škola elektrotehnike i računarstva,
Beograd, Vojvode Stepe 283

Za izdavača
dr Vera Petrović, direktor

Lektor
Anđelka Kovačević

Obrada i priprema teksta
Sonja Krstić

Korice
Nenad Tolić

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд
537.2/.3(075.8)(076)
621.3(075.8)(076)
КРСТИЋ, Соња, 1963-
Zbirka zadataka iz elektrotehnike : elektrostatika, vremenski nepromenljive električne struje / Sonja Krstić, Iva Đukić. - 9. izd. - Beograd : Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, 2020 (Beograd : Razvojno-istraživački centar Grafičkog inženjerstva TMF). - 148, XVI str. : graf. prikazi ; 24 cm
Tiraž 250. - Bibliografija: str. [XVII].
ISBN 978-86-7982-075-4

1. Ђукић, Ива, 1977- [аутор]

a) Електротехника - Задаци b) Електрична струја - Задаци c) Електростатика - Задаци

COBISS.SR-ID 22013193

Tiraž
250 primeraka

Izdanje
9.

Štampa
Razvojno-istraživački centar grafičkog inženjerstva TMF, Beograd

PREDGOVOR

Ova knjiga je nastala kao rezultat višegodišnjeg držanja nastave na predmetima Osnovi elektrotehnike i Elektrotehnika u Višoj elektrotehničkoj školi. Knjiga je pre svega namenjena studentima smerova *Nove računarske tehnologije*, *Audio i video tehnologije* i *Menadžment u elektrotehnici* na predmetu Elektrotehnika, a može koristiti i studentima drugih smerova u Višoj elektrotehničkoj školi, kao i studentima drugih viših elektrotehničkih škola.

S obzirom da iz predmeta Elektrotehnika nije postojao adekvatan udžbenik ili zbirka, studenti su gradivo učili iz beležaka sa predavanja i vežbi. Autori su želeli da studentima maksimalno olakšaju savladavanje gradiva, i to tako što su u ovoj knjizi objedinili teorijske osnove, zadatke, koji su tokom godina rađeni na časovima računskih vežbi, kao i test pitanja, koja se nalaze na kraju svake oblasti. Na kraju knjige nalazi se matematički podsetnik koji sadrži određene oblasti iz matematike neophodne za praćenje gradiva predviđenog ovim predmetom. Na početku knjige nalazi se pregled osnovnih fizičkih veličina. Teorijske osnove na početku svakog poglavlja izložene su u formi pitanja i odgovora, i služe samo kao podsetnik studentima koji su gradivo naučili na času ili iz udžbenika.

Ovo je prva od dve knjige i u njoj su obrađene dve oblasti: elektrostatika i vremenski nepromenljive električne struje.

Teorijske osnove i test pitanja pripremila je profesor mr Sonja Krstić. Zadatke je pripremila Iva Đukić.

Autori se zahvaljuju recenzentima, mr Aleksandri Gavrilović i dr Petru Bošnjakoviću, koji su detaljno pročitali tekst i ukazali na neke nedostatke.

Iako je knjiga pisana pažljivo i više puta proveravana, moguće je da se može naći poneka greška. Autori će biti zahvalni svima koji im na greške ukažu.

U Beogradu, *Autori*
4.10.2010.

SADRŽAJ

FIZIČKE VELIČINE I NJIHOVE JEDINICE

- Za opisivanje osobina tela ili pojava u prirodi koriste se **fizičke veličine**.
- Fizičke veličine se dele na **osnovne** i **izvedene**. Izvedene veličine izražavaju se pomoću osnovnih.
- Osnovne fizičke veličine i njihove jedinice u **SI sistemu** su:

Osnovna fizička veličina	Jedinica	Oznaka
dužina	metar	m
masa	kilogram	kg
vreme	sekunda	s
jačina struje	amper	A
apsolutna temperatura	kelvin	K
jačina osvetljaja	kandela	Cd
količina supstance	mol	mol

- Različite oblasti nauke i tehnike koriste iz SI sistema samo određene fizičke veličine. Na primer:

geometrija:
– *osnovna fizička veličina:* dužina [m]
– *izvedene fizičke veličine*: površina [m^2], zapremina [m^3], ravanski ugao
($\alpha = \frac{\text{dužina luka}}{\text{dužina poluprečnika}} = \frac{l}{r}[\text{rad}]$), prostorni ugao [srad];

kinematika:
– *osnovne fizičke veličine*: dužina [m] i vreme [s],
– *izvedene fizičke veličine*: brzina [m/s], ubrzanje [m/s^2];

dinamika:
– *osnovne fizičke veličine*: dužina [m], vreme [s] i masa [kg],
– *izvedene fizičke veličine*: brzina [m/s], ubrzanje [m/s^2], sila [N];

elektrotehnika:
– *osnovne fizičke veličine*: dužina [m], vreme [s], masa [kg] i jačina struje [A],
– *izvedene fizičke veličine*: brzina [m/s], ubrzanje [m/s^2], sila [N], naelektrisanje [C], napon [V], fluks [Wb]...

POMOĆNE JEDINICE

- Brojna vrednost posmatrane fizičke veličine pokazuje koliko je puta ta veličina veća ili manja od njene usvojene jedinice.

- Često se u praksi dešava da rezultati merenja budu mnogo već,i ili mnogo manji od osnovnih usvojenih jedinica. Zato su uvedeni umnošci tih jedinica (nadmultipli) i delovi jedinica (podmultipli), koji se označavaju prefiksima, datim u tabeli:

n	10^n	Prefiks	Skraćenica	Primer
12	10^{12}	tera	T	Tm = 10^{12}m
9	10^9	giga	G	GW = 10^9W
6	10^6	mega	M	MΩ = 10^6Ω
3	$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$	kilo	k	kJ = 10^3J
0	$10^0 = 1$	osnovna jedinica		V
-3	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}001$	mili	m	mA = 10^{-3}A
-6	$10^{-6} = \frac{1}{10^6}$	mikro	μ	μs = 10^{-6}s
-9	$10^{-9} = \frac{1}{10^9}$	nano	n	nC = 10^{-9}C
-12	$10^{-12} = \frac{1}{10^{12}}$	piko	p	pF = 10^{-12}F

- Retko se koriste pomoćne jedinice

  hekto (h) 10^2
  deka (da) 10^1
  deci (d) 10^{-1}
  centi (c) 10^{-2}

VEKTORSKE I SKALARNE FIZIČKE VELIČINE

- Većina fizičkih veličina deli se na **skalarne** i **vektorske**.

- **Skalarna veličina** je definisana samo intenzitetom (na primer: masa, temperatura, pritisak, napon, fluks...).

- **Vektorska veličina** je definisana intenzitetom, pravcem i smerom (na primer: brzina, sila, električno polje, magnetna indukcija...).

I ELEKTROSTATIKA

I.1 KULONOV ZAKON

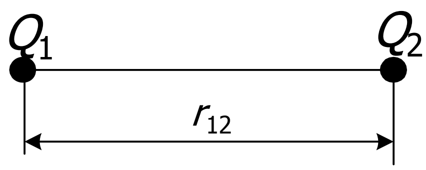
TEORIJSKA OSNOVA

- Šta je Kulonov zakon?
  - Zakon koji govori o elektrostatičkim silama između tačkastih naelektrisanja.

- Šta je tačkasto naelektrisanje?
  - To je naelektrisanje koje ima određenu količinu električnog opterećenja i nema dimenzije. U praksi se za tačkasta naelektrisanja smatraju pozitivno i negativno naelektrisane čestice i sva naelektrisana tela čije su dimenzije zanemarljive u odnosu na rastojanje između njih.

- Kako glasi Kulonov zakon?

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^{\ 2}} \cdot \vec{r}_{012}$$



Intenzitet sile kojom naelektrisanje Q_1 deluje na naelektrisanje Q_2 direktno je srazmeran proizvodu ta dva tačkasta naelektrisanja, a obrnuto srazmeran kvadratu rastojanja između njih.

– U izrazu za Kulonov zakon konstanta srazmernosti je

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2},$$

a ε_0 je dielektrična konstanta vakuuma i vazduha i iznosi

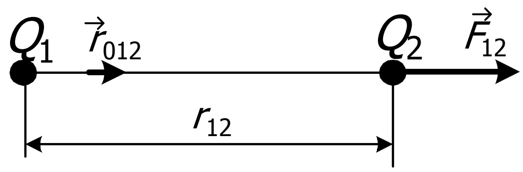
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}.$$

– Sila je vektorska veličina što znači da je određena intenzitetom, pravcem i smerom. Intenzitet sile je određen brojnim vrednostima. Pravac Kulonove sile definisan je jediničnim vektorom $\vec{r}_{012}$. Smer Kulonove sile definisan je jediničnim vektorom $\vec{r}_{012}$ i algebarskim intenzitetom sile.

- Šta je jedinični vektor $\vec{r}_{012}$?
  - Jedinični vektor $\vec{r}_{012}$ iz Kulonovog zakona koji ima:

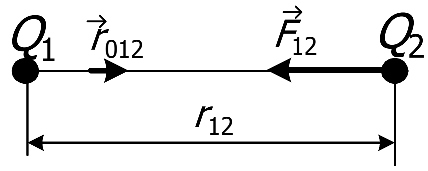
    - intenzitet = 1,
    - pravac linije koja spaja Q_1 i Q_2,
    - smer od Q_1 ka Q_2.

Primer 1:



Ako je $Q_1 > 0$ i $Q_2 > 0$ onda je sila $\vec{F}_{12}$ odbojna. Znači, Q_1 deluje na Q_2 i gura ga od sebe (napadna tačka sile je u tački u kojoj se nalazi Q_2).

Primer 2:

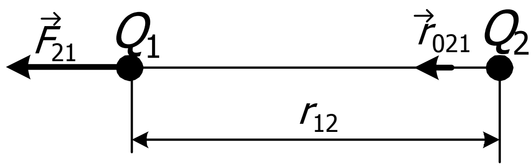


Ako je $Q_1 > 0$ i $Q_2 < 0$ onda je sila $\vec{F}_{12}$ privlačna. Znači, Q_1 deluje na Q_2 i privlači ga ka sebi.

– Jedinični vektor $\vec{r}_{021} = -\vec{r}_{012}$, što znači da mu je intenzitet jednak 1, pravac je isti kao pravac jediničnog vektora $\vec{r}_{012}$, a smer je od Q_2 ka Q_1 (suprotan od smera $\vec{r}_{012}$). Zato je i sila $\vec{F}_{21}$ kojom Q_2 deluje na Q_1 suprotnog smera od sile $\vec{F}_{12}$:

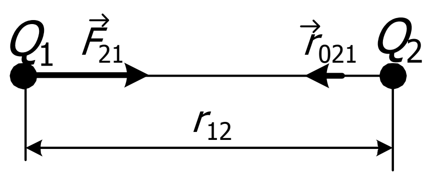
$$\boldsymbol{\vec{F}_{21}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\pi\varepsilon_{\mathbf{0}}} \frac{\boldsymbol{Q_1} \cdot \boldsymbol{Q_2}}{\boldsymbol{r_{12}}^{\mathbf{2}}} \cdot \boldsymbol{\vec{r}_{021}}.$$

Primer 3:



Ako je $Q_1 > 0$ i $Q_2 > 0$ onda je sila $\vec{F}_{21}$ odbojna. Znači, Q_2 deluje na Q_1 i gura ga od sebe (napadna tačka sile je u Q_1).

Primer 4:



Ako je $Q_1 > 0$ i $Q_2 < 0$ onda je sila $\vec{F}_{21}$ privlačna. Znači, Q_2 deluje na Q_1 i privlači ga ka sebi.

- Koja je jedinica za silu?
  – Njutn [N].

- Koja je jedinica za količinu naelektrisanja?
  – Kulon [C].

ZADACI

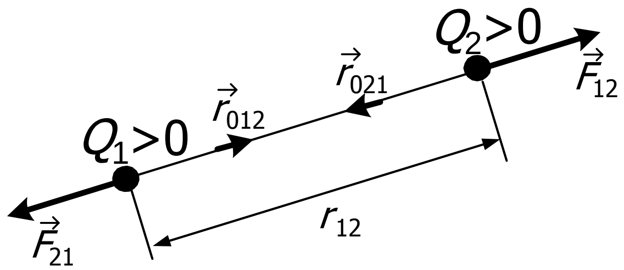
I.1.1 Dva tačkasta tela naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze se u vazduhu na rastojanju $r_{12} = 0.2$ m. Odrediti vektor Kulonove sile kojim telo naelektrisanja Q_1 deluje na telo naelektrisanja Q_2, ako je:

a) $Q_1 = 4 \cdot 10^{-11}$ C i $Q_2 = 6 \cdot 10^{-11}$ C;

b) $Q_1 = -4 \cdot 10^{-11}$ C i $Q_2 = -6 \cdot 10^{-11}$ C;

c) $Q_1 = 4 \cdot 10^{-11}$ C i $Q_2 = -6 \cdot 10^{-11}$ C.

<u>*Rešenje:*</u>



Slika I.1.1.1

Između dva tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2, koja se nalaze na rastojanju r_{12}, deluje Kulonova sila. Naelektrisanje Q_1 deluje na naelektrisanje Q_2 silom:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^{\ 2}} \cdot \vec{r}_{012},$$

koja zavisi od naelektrisanja Q_1 i Q_2 i rastojanja između njih. Pravac sile određen je jediničnim vektorom $\vec{r}_{012}$. Smer sile određen je jediničnim vektorom $\vec{r}_{012}$ i algebarskim intenzitetom sile (znacima naelektrisanja).

a) Zamenom brojnih vrednosti u izrazu za Kulonovu silu dobijamo:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^{\ 2}} \cdot \vec{r}_{012} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{4 \cdot 10^{-11}\text{C} \cdot 6 \cdot 10^{-11}\text{C}}{(0{,}2\text{ m})^2} \vec{r}_{012} =$$

$$= \frac{9 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10^{9-11-11}}{0{,}04} \text{N} \cdot \vec{r}_{012} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 6}{4} \cdot 10^{9-11-11+2} \text{N} \cdot \vec{r}_{012} = 54 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \vec{r}_{012}$$

Iz rezultata vidimo da je algebarski intenzitet sile jednak $F_{12} = 54 \cdot 10^{-11}$ N i pošto je pozitivan to znači da se pravac i smer Kulonove sile poklapaju sa pravcem i smerom jediničnog vektora $\vec{r}_{012}$. Jedinični vektor $\vec{r}_{012}$ je usmeren od naelektrisanja Q_1 (telo koje deluje) ka naelektrisanju Q_2 (telo na koje se deluje), tako da je Kulonova sila odbojna. To je očekivani rezultat pošto su Q_1 i Q_2 naelektrisanja istog znaka. Na slici I.1.1.1 prikazan je pravi smer Kulonove sile $\vec{F}_{12}$.

Silu kojom telo naelektrisanja Q_2 deluje na telo naelektrisanja Q_1 računamo primenom Kulonovog zakona:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^{\ 2}} \cdot \vec{r}_{021} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{6 \cdot 10^{-11}\text{C} \cdot 4 \cdot 10^{-11}\text{C}}{(0{,}2\text{ m})^2} \vec{r}_{021} = 54 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \vec{r}_{021}.$$

Naravno algebarski intenzitet i ove sile je pozitivan, a jednak je algebarskom intenzitetu sile $\vec{F}_{12}$. S obzirom da je algebarski intenzitet pozitivan smer sile $\vec{F}_{21}$ se poklapa sa smerom jediničnog vektora $\vec{r}_{021}$, koji je usmeren od naelektrisanja Q_2 ka naelektrisanju Q_1. Dakle, sile $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ su istog intenziteta a suprotnog smera, kao što je prikazano na slici I.1.1.1.

b) Kao i u zadatku pod a), zamenom brojnih vrednosti u izrazu za Kulonovu silu dobijamo:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{{r_{12}}^2} \cdot \vec{r}_{012} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{(-4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}) \cdot (-6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C})}{(0{,}2\ \mathrm{m})^2} \vec{r}_{012} =$$

$$= \frac{9 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10^{9-11-11}}{0{,}04} \mathrm{N} \cdot \vec{r}_{012} = 54 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \vec{r}_{012}$$

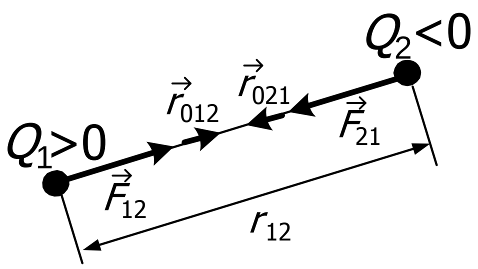
I u ovom slučaju je algebarski intenzitet sile pozitivan a sila je odbojna, i prikazana je na slici I.1.1.1.

c) Zamenom brojnih vrednosti u izrazu za Kulonov zakon dobijamo:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{{r_{12}}^2} \cdot \vec{r}_{012} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C} \cdot (-6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C})}{(0{,}2\ \mathrm{m})^2} \vec{r}_{012} =$$

$$= -\frac{9 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10^{9-11-11}}{0{,}04} \mathrm{N} \cdot \vec{r}_{012} = -54 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \vec{r}_{012}$$

U ovom slučaju je algebarski intenzitet sile jednak $F_{12} = -54 \cdot 10^{-11}$ N i pošto je negativan to znači da je smer Kulonove sile suprotan od smera jediničnog vektora $\vec{r}_{012}$. Kao što smo već pomenuli, jedinični vektor je usmeren od naelektrisanja Q_1 ka naelektrisanju Q_2 i Kulonova sila je privlačna. I ovo je očekivani rezultat, pošto su Q_1 i Q_2 naelektrisanja suprotnog znaka.



Slika I.1.1.2

Na slici I.1.1.2 nacrtan je pravi smer sila $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$. Sila $\vec{F}_{21}$ je istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera od sile $\vec{F}_{12}$.

I.1.2 Dve kuglice poluprečnika $a = 2$ mm naelektrisane su istim količinama naelektrisanja Q. Intenzitet sile koja deluje između njih je $9{\cdot}10^{-7}$ N. Kuglice su na rastojaju $r = 2$ dm. Odrediti količinu naelekrisanja Q kojom su naelektrisane kuglice.

Rešenje:

Kuglice zadatih dimenzija se na rastojanju od 2 dm mogu smatrati tačkastim naelektrisanjima pa je sila između njih (ako zanemarimo gravitacionu silu, koja je mnogo redova veličina manja) definisana Kulonovim zakonom, a intenzitet sile je:

$$F = k\frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N}.$$

Odatle se može odrediti traženo naelektrisanje koje može biti pozitivno ili negativno, a s obzirom da su oba naelektrisanja istog znaka sila je odbojna.

$$Q = \pm\sqrt{\frac{F \cdot r^2}{k}} = \pm\sqrt{\frac{9 \cdot 10^{-7}\mathrm{N} \cdot \left(2 \cdot 10^{-1}\mathrm{m}\right)^2}{9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}}}} = \pm\sqrt{4 \cdot 10^{-18}\mathrm{C}^2} = \pm 2 \cdot 10^{-9}\mathrm{C}.$$

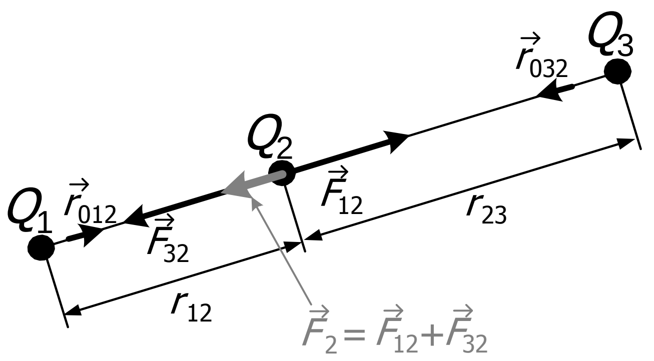
I.1.3 Tri tačkasta naelektrisanja, Q_1 = 1 pC, Q_2 = 2 pC i Q_3 = 3 pC, nalaze se u vazduhu na istom pravcu, pri čemu se naelektrisanje Q_2 nalazi između naelektrisanja Q_1 i Q_3. Rastojanje između naelektrisanja Q_1 i Q_2 je r_{12} = 2 cm, a rastojanje između naelektrisanja Q_2 i Q_3 je r_{13} = 3 cm.

a) Odrediti elektrostatičku silu (njen pravac, smer i intenzitet) koja deluje na naelektrisanje Q_2.

b) Odrediti elektrostatičku silu (njen pravac, smer i intenzitet) koja deluje na naelektrisanje Q_3.

<u>*Rešenje:*</u>

a)



Slika I.1.3.1

Na slici I.1.3.1 prikazani su položaj naelektrisanja i elektrostatičke sile koje deluju na naelektrisanje Q_2: sila $\vec{F}_{12}$ kojom naelektrisanje Q_1 deluje na naelektrisanje Q_2, i sila $\vec{F}_{32}$ kojom naelektrisanje Q_3 deluje na naelektrisanje Q_2. (Na slici su prikazani pravi smerovi sila.) Sile $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{32}$ dobijamo primenom Kulonovog zakona:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^{\,2}} \cdot \vec{r}_{012} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \, \frac{1 \cdot 10^{-12}\mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^{-12}\mathrm{C}}{\left(2 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{012} =$$

$$= \frac{9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{9-12-12+4}}{4} \mathrm{N} \cdot \vec{r}_{012} = 4{,}5 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \cdot \vec{r}_{012} = 45 \text{ pN} \cdot \vec{r}_{012},$$

$$\vec{F}_{32} = k\frac{Q_3 \cdot Q_2}{r_{23}^{\,2}} \cdot \vec{r}_{032} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \, \frac{3 \cdot 10^{-12}\mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^{-12}\mathrm{C}}{\left(3 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{032} =$$

$$= \frac{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{9-12-12+4}}{9} \mathrm{N} \cdot \vec{r}_{032} = 6 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \cdot \vec{r}_{032} = 60 \text{ pN} \cdot \vec{r}_{032}.$$

Prema *principu superpozicije*, primenjenom na sile koje deluju na neko telo, ukupnu (rezultantnu) silu koja deluje na to telo dobijamo kao vektorski zbir svih sila koje deluju na telo. (Sa superpozicijom ćemo se ponovo sresti kod linearnih električnih kola.)

Dakle, ukupnu silu $\vec{F}_2$ koja deluje na naelektrisanje Q_2 dobijamo kada vektorski saberemo sile $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{32}$:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 45 \text{ pN} \cdot \vec{r}_{012} + 60 \text{ pN} \cdot \vec{r}_{032}.$$

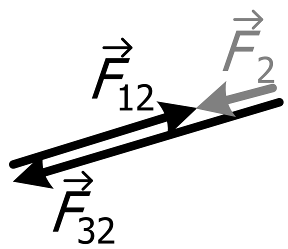
Jedinični vektor $\vec{r}_{012}$ je usmeren od naelektrisanja Q_1 ka naelektrisanju Q_2, a jedinični vektor $\vec{r}_{032}$ je usmeren od naelektrisanja Q_3 ka naelektrisanju Q_2. S obzirom da su jedinični vektori $\vec{r}_{012}$ i $\vec{r}_{032}$ istog intenziteta (koji je jednak jedinici) i pravca a suprotnog smera, važi da je $\vec{r}_{012} = -\vec{r}_{032}$ (ovo se moglo zaključiti i direktno sa slike). Zamenjujući $\vec{r}_{012} = -\vec{r}_{032}$ u jednačini, dobijamo:

$$\vec{F}_2 = 45\ \text{pN} \cdot \left(-\vec{r}_{032}\right) + 60\ \text{pN} \cdot \vec{r}_{032} = \left(-45\ \text{pN} + 60\ \text{pN}\right) \cdot \vec{r}_{032} = 15\ \text{pN} \cdot \vec{r}_{032}\,.$$

Ili ako zamenimo $\vec{r}_{032} = -\vec{r}_{012}$ dobijamo isti rezultat u zavisnosti od vektora $\vec{r}_{012}$:

$$\vec{F}_2 = 45\ \text{pN} \cdot \vec{r}_{012} + 60\ \text{pN} \cdot \left(-\vec{r}_{012}\right) = \left(45\ \text{pN} - 60\ \text{pN}\right) \cdot \vec{r}_{012} = -15\ \text{pN} \cdot \vec{r}_{012}\,.$$

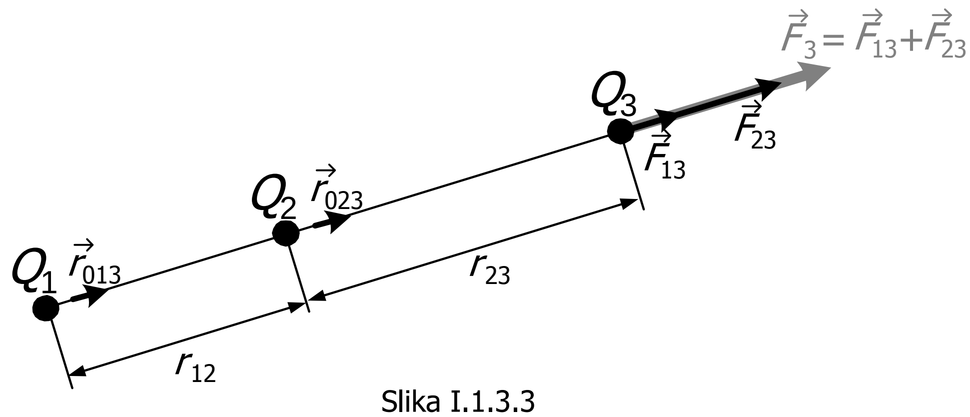
Zaključujemo da se pravac i smer rezultantne sile poklapaju sa smerom jediničnog vektora $\vec{r}_{032}$, odnosno da je (zbog minusa koji se javlja u izrazu) rezultantna sila suprotnog smera od jediničnog vektora $\vec{r}_{012}$. Sila $\vec{F}_2$ je takođe prikazana na slici I.1.3.1.



Slika I.1.3.2

Dakle, ovde smo izvršili sabiranje dva vektora, $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{32}$, koji su istog pravca a suprotnog smera, pa rezultujući vektor $\vec{F}_2$ ima intenzitet koji je jednak razlici intenziteta ova dva vektora (ovde se ne misli na algebarski intenzitet!), a smer se poklapa sa smerom vektora većeg intenziteta (u ovom slučaju je to vektor $\vec{F}_{32}$). Sabiranje ova dva vektora je još jednom grafički prikazano na slici I.1.3.2.

b)



Slika I.1.3.3

Deo zadatka pod b) radi se isto kao i deo zadatka pod a). Razlika je u tome što su u ovom slučaju sile koje sabiramo, sile $\vec{F}_{13}$ i $\vec{F}_{23}$, istog pravca i smera. Sile $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{32}$ dobijamo primenom Kulonovog zakona:

$$\vec{F}_{13} = k\,\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}{}^2} \cdot \vec{r}_{013} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\,\frac{1 \cdot 10^{-12}\,\text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{\left(5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}\,\vec{r}_{013} =$$

$$= \frac{9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^{9-12-12+4}}{25}\ \text{N} \cdot \vec{r}_{013} = 1{,}08 \cdot 10^{-11}\,\text{N} \cdot \vec{r}_{013} = 10{,}8\ \text{pN} \cdot \vec{r}_{013}\,,$$

gde je $r_{13} = r_{12} + r_{23} = 2\ \text{cm} + 3\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$;

$$\vec{F}_{23} = k\frac{Q_3 \cdot Q_2}{{r_{23}}^2} \cdot \vec{r}_{023} = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{3 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{023} =$$

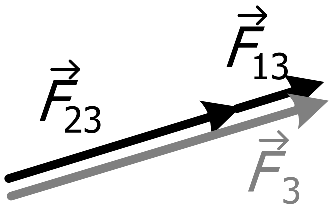
$$= \frac{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{9-12-12+4}}{9}\,\mathrm{N} \cdot \vec{r}_{032} = 6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \vec{r}_{032} = 60\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{023}\,.$$

Primenom principa super pozicije dobijamo:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 10{,}8\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{013} + 60\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{023} =$$

$$= 10{,}8\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{013} + 60\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{013} = 70{,}8\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{013} = 70{,}8\ \mathrm{pN} \cdot \vec{r}_{023}\,,$$

gde smo iskoristili činjenicu da su jedinični vektori $\vec{r}_{013}$ i $\vec{r}_{023}$ jednaki (istog su intenziteta, pravca i smera).



Slika I.1.3.4

Dakle, ovde smo izvršili sabiranje dva vektora, $\vec{F}_{13}$ i $\vec{F}_{23}$, istog pravca i smera, pa rezultujući vektor $\vec{F}_3$ ima intenzitet koji je jednak zbiru intenziteta ova dva vektora (ne algebarskog intenziteta!), a pravac i smer su isti kao kod dva vektora koja smo sabrali. Sabiranje ova dva vektora je još jednom grafički prikazano na slici I.1.3.4.

I.2 ELEKTROSTATIČKO POLJE

TEORIJSKA OSNOVA

- Šta je elektrostatičko polje?

  – Fizičko stanje u okolini naelektrisanih tela koje se manifestuje silom koja deluje na probno opterećenje u mirovanju, uneto u polje, naziva se **elektrostatičko polje** ukoliko ta naelektrisana tela miruju. Ukoliko se naelektrisana tela kreću to polje se naziva **električno**. Priroda ovih polja je ista.

- Šta je vektor jačine elektrostatičkog polja?

  – Vektorska veličina koja kvantitativno određuje električno polje. Ima isti pravac i smer kao elektrostatička sila:

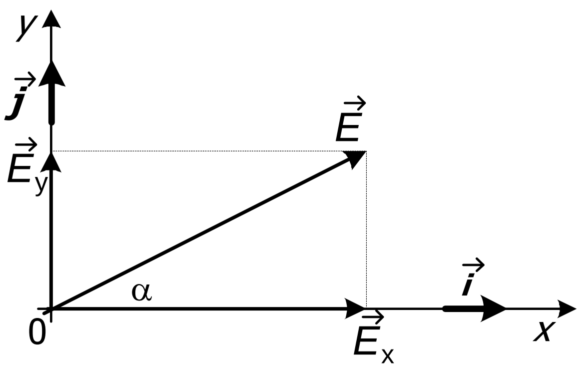
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_p}.$$

- A šta je probno opterećenje Q_p?

  – To je tačkasto naelektrisanje koje koristimo u eksperimentima, a tako je osmišljeno da ne utiče na rezultate eksperimenta. Znači: uvek je pozitivno i barem dva reda veličine (barem 100 puta) manjeg naelektrisanja od ostalih naelektrisanja u okolini.

- Šta je x komponenta vektora polja, a šta je y komponenta vektora polja?

  – To su projekcije vektora polja na x i y ose koordinatnog sistema u ravni.



$$\vec{E}_x = \left|\vec{E}_x\right| \cdot \vec{i} = \left|\vec{E}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E}_y = \left|\vec{E}_y\right| \cdot \vec{j} = \left|\vec{E}\right| \cdot \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

gde su :

$\vec{i}$ - jedinični vektor x-ose (on definiše pravac i smer x-ose),

$\vec{j}$ - jedinični vektor y-ose (on definiše pravac i smer y-ose),

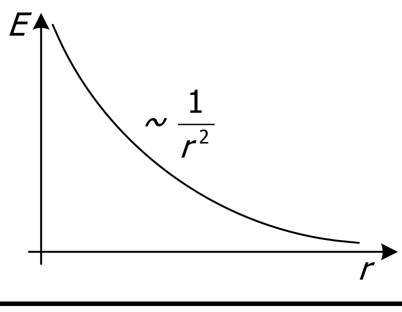
$\left|\vec{E}\right|$ je intenzitet vektora $\vec{E}$,

$\left|\vec{E}_x\right|$ je intenzitet projekcije vektora $\vec{E}$ na x-osu,

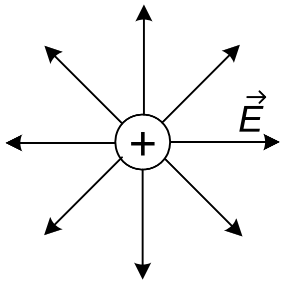
$\left|\vec{E}_y\right|$ je intenzitet projekcije vektora $\vec{E}$ na y-osu.

- Kakvo je polje u okolini tačkastog naelektrisanja?

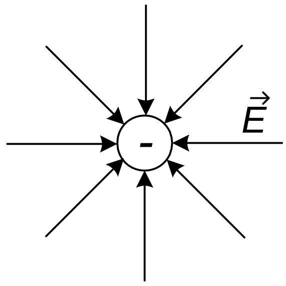
  – Radijalno i opada sa kvadratom rastojanja u svim pravcima.



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_p} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q_p}{r^2} \cdot \vec{r}_0}{Q_p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_p}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$



linije elektrostatičkog polja uvek su usmerene od pozitivnog naelektrisanja



linije elektrostatičkog polja uvek su usmerene ka negativnom naelektrisanju

- Šta su to linije elektrostatičkog polja?
  – Linije na koje je vektor elektrostatičkog polja tangentan u svakoj tački.

- Koliko je elektrostatičko polje u tački A u okolini nekoliko tačkastih naelektrisanja?
  – Elektrostatičko polje u tački A jednako je vektorskom zbiru elektrostatičkih polja koja stvaraju pojedina naelektrisanja u tački A (*princip superpozicije*). Na primer, u tački A u okolini tri tačkasta naelektrisanja elektrostatičko polje je:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{A}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}}$$

- Koja je jedinica za jačinu elektrostatičkog polja?
  – $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ ili $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

I.2.1 a) Odrediti vektor jačine elektrostatičkog polja na rastojanju $r = 0{,}2$ m od tačkastog naelektrisanja
$Q_1 = 4 \cdot 10^{-11}$ C.

b) Ako se u tačku na rastojanju $r = 0{,}2$ m od tačkastog naelektrisanja Q_1 postavi tačkasto naelektrisanje $Q_2 = 6 \cdot 10^{-11}$ C odrediti silu (njen intenzitet, pravac i smer) koja deluje na naelektrisanje Q_2?

c) Odrediti silu koja bi delovala na tačkasto naelektrisanje $Q_3 = -6 \cdot 10^{-11}$ C postavljeno u istu tačku.

d) Uraditi isti zadatak pod a), b) i c) ako je $Q_1 = -4 \cdot 10^{-11}$C.

Rešenje:

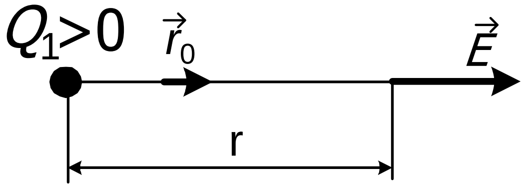
Vektor jačine elektrostatičkog polja koje oko sebe stvara tačkasto naelektrisanje Q, na rastojanju r, u vazduhu, jednak je:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0 ,$$

gde je $\vec{r}_0$ jedinični vektor koji je uvek usmeren od naelektrisanja Q, bez obzira na znak naelektrisanja.

a) Zamenom brojnih vrednosti u izraz za vektor jačine elektrostatičkog polja dobijamo:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{4 \cdot 10^{-11}\text{C}}{(0{,}2\,\text{m})^2} \vec{r}_0 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-11}}{\left(2 \cdot 10^{-1}\right)^2} \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_0 = 9 \cdot 10^{9-11+2} \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_0 = 9 \, \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_0$$



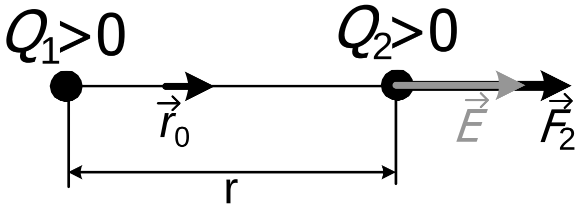
Slika I.2.1.1

Algebarski intenzitet jačine elektrostatičkog polja je $E = 9 \, \frac{\text{N}}{\text{C}}$ i pozitivan je, pa se smer ovog vektora poklapa sa smerom jediničnog vektora $\vec{r}_0$ - usmeren je od tačkastog naelektrisanja kao što je prikazano na slici I.2.1.1. Uopšte, elektrostatičko polje, koje stvara pozitivno tačkasto naelektrisanje, je radijalno, a vektor jačine elektrostatičkog polja je uvek usmeren od naelektrisanja.

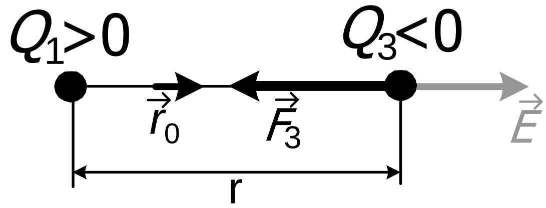
b) Silu koja deluje na tačkasto naelektrisanje postavljeno u blizinu drugog tačkastog naelektrisanja možemo izračunati primenom Kulonovog zakona, kao u zadatku I.1.1, ili preko vektora jačine elektrostatičkog polja, koji smo prethodno odredili. S obzirom da smo u ovom zadatku pod a) odredili vektor jačine elektrostatičkog polja u posmatranoj tački, silu na tačkasto naelektrisanje Q_2 određujemo kao proizvod vektora jačine elektrostatičkog polja i algebarske vrednosti naelektrisanja:

$$\vec{F}_2 = \vec{E} \cdot Q_2 = 9 \, \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_0 \cdot 6 \cdot 10^{-11}\text{C} = 54 \cdot 10^{-11}\text{N} \, \vec{r}_0 \, .$$

Sila $\vec{F}_2$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{E}$, jer je naelektrisanje Q_2 pozitivno. Iz izraza vidimo da se smer sile poklapa sa smerom jediničnog vektora $\vec{r}_0$, odnosno da je sila odbojna i da je jednaka sili $\vec{F}_{12}$ iz zadatka I.1.1. Dakle, s obzirom da su vrednosti naelektrisanja Q_1 i Q_2 iste kao u zadatku I.1.1, kao što je očekivano dobili smo isti rezultat. Vektor $\vec{F}_2$ je prikazan na slici I.2.1.2.



Slika I.2.1.2



Slika I.2.1.3

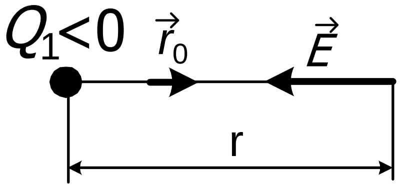
c) Kada se u istu tačku postavi negativno naelektrisanje Q_3, sila koja deluje na to naelektrisanje je:

$$\vec{F}_3 = \vec{E} \cdot Q_3 = 9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_0 \cdot \left(-6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}\right) = -54 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}\,\vec{r}_0$$

S obzirom da je naelektrisanje Q_3 iste brojne vrednosti kao i naelektrisanje Q_2 a suprotnog znaka, sila $\vec{F}_3$ ima isti intenzitet kao sila $\vec{F}_2$ ali je suprotnog smera. Dakle, pošto je naelektrisanje Q_3 negativno, sila $\vec{F}_3$ je istog pravca a suprotnog smera od vektora jačine elektrostatičkog polja $\vec{E}$ u posmatranoj tački, kao što je prikazano na slici I.2.1.3.

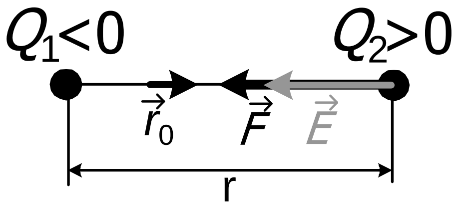
d) Zamenom brojnih vrednosti u izrazu za vektor jačine elektrostatičkog polja dobijamo:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = 9 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{\left(-4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}\right)}{(0{,}2\,\mathrm{m})^2}\,\vec{r}_0 = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-11}}{\left(2 \cdot 10^{-1}\right)^2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_0 = -9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_0\,.$$



Slika I.2.1.4

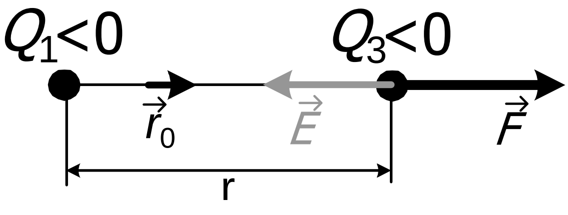
Algebarski intenzitet jačine elektrostatičkog polja je $E = -9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, i pošto je negativan, smer ovog vektora je suprotan od smera jediničnog vektora $\vec{r}_0$ (uvek usmerenog od naelektrisanja) – vektor $\vec{E}$ je usmeren ka tačkastom naelektrisanju kao što je prikazano na slici I.2.1.4. Uopšte, elektrostatičko polje, koje stvara negativno tačkasto naelektrisanje, je radijalno, a vektor jačine elektrostatičkog polja je uvek usmeren ka naelektrisanju.



Slika I.2.1.5

Sila koja deluje na naelektrisanje Q_2 postavljeno u posmatranu tačku je:

$$\vec{F}_2 = \vec{E} \cdot Q_2 = -9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_0 \cdot 6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C} = -54 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}\;\vec{r}_0\,.$$



Slika I.2.1.6

Sila koja deluje na naelektrisanje Q_3 postavljeno u posmatranu tačku je:

$$\vec{F}_3 = \vec{E} \cdot Q_3 = -9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_0 \cdot \left(-6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}\right) = 54 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}\,\vec{r}_0$$

.

I.2.2 Koliki je intenzitet sile koja deluje na tačkasto naelektrisanje Q = 10 pC koje se nalazi u tački u kojoj je jačina elektrostatičkog polja $E = 3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$?

Rešenje:

Veza između naelektrisanja postavljenog u elektrostatičko polje i elektrostatičke sile koja na njega deluje je:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q\,,$$

pa ćemo intenzitet sile izračunati kao:

$$F = E \cdot Q = 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 10 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} = 30\ \mathrm{pN}\,.$$

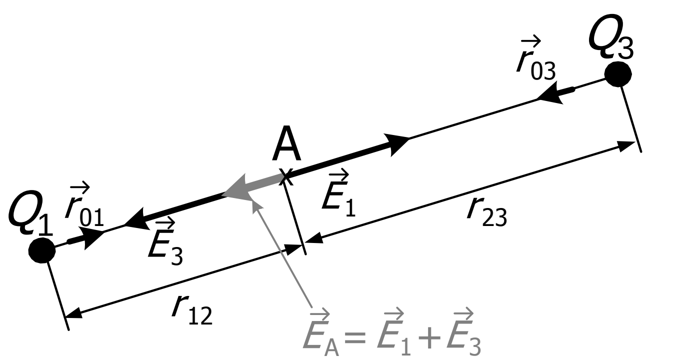
I.2.3 Dva tačkasta naelektrisanja Q_1 = 1 pC i Q_3 = 3 pC nalaze se na rastojanju r_{13} = 5 cm u vazduhu.

a) Odrediti vektor jačine elektrostatičkog polja u tački A koja se nalazi na pravoj između ova dva naelektrisanja, a udaljena je od naelektrisanja Q_1 za r_{12} = 2 cm.

b) Odrediti silu (njen pravac, smer i intenzitet) koja deluje na naelektrisanje Q_2 = 2 pC koje je postavljeno u tačku A.

Rešenje:

a)



Slika I.2.3.1

Primenićemo princip superpozicije na elektrostatičko polje: ukupnu jačinu elektrostatičkog polja u tački A dobićemo kada vektorski saberemo vektor jačine elektrostatičkog polja $\vec{E}_1$ koje u tački A stvara naelektrisanje Q_1, i vektor jačine elektrostatičkog polja $\vec{E}_3$ koje u tački A stvara naelektrisanje Q_3. Vektori $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_3$, kao i rezultujući vektor $\vec{E}_A$ prikazani su na slici I.2.3.1.

Elektrostatička polja $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_3$ određujemo iz izraza:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_{12}^{\ 2}} \cdot \vec{r}_{01} = 9 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}\,\vec{r}_{01} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-4}}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_{01} = 22{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_{01}\,,$$

$$\vec{E}_3 = k \cdot \frac{Q_3}{r_{23}^{\ 2}} \cdot \vec{r}_{03} = 9 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{3 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}\,\vec{r}_{03} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^{-4}}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_{03} = 30\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{r}_{03}\,,$$

gde je $r_{23} = r_{13} - r_{12} = 5\ \mathrm{cm} - 2\ \mathrm{cm} = 3\ \mathrm{cm}$.

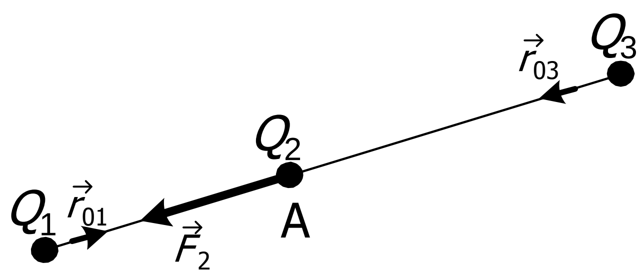
Vektor jačine elektrostatičkog polja u tački A je:

$$\vec{E}_{\mathrm{A}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 = 22{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{01} + 30\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{03} = 22{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\left(-\vec{r}_{03}\right) + 30\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{03} = 7{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{03} = -7{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{01},$$

gde smo kao u zadatku I.1.3 iskoristili činjenicu da je $\vec{r}_{01} = -\vec{r}_{03}$, jer su to jedinični vektori istog pravca a suprotnog smera, kao što se vidi na slici I.2.3.1.

b) S obzirom da nam je poznat vektor jačine elektrostatičkog polja u tački A, silu na naelektrisanje Q_2 postavljeno u tu tačku izračunavamo kao:

$$\vec{F}_2 = \vec{E}_{\mathrm{A}} \cdot Q_2 = 7{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{03} \cdot 2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} = 15 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}\,\vec{r}_{03} = 15\ \mathrm{pN}\ \vec{r}_{03}.$$



Slika I.2.3.2

Dakle, rezultujuća sila na naelektrisanje Q_2 je intenziteta 15pN i usmerena je ka naelektrisanju Q_1 (smer sile se poklapa sa smerom vektora jačine elektrostatičkog polja $\vec{E}_{\mathrm{A}}$, jer je naelektrisanje Q_2 pozitivno). Ovo je isti rezultat kao što smo dobili u zadatku I.1.3 (vektori $\vec{r}_{03}$ i $\vec{r}_{032}$ su jednaki, jer su to jedinični vektori istog pravca i smera, kao što se vidi sa slika I.1.3.1 i 1.2.3.1).

I.3 ELEKTROSTATIČKI POTENCIJAL
TEORIJSKA OSNOVA

- Šta je elektrostatički potencijal neke tačke?
  - Količnik elektrostatičke potencijalne energije probnog naelektrisanja u toj tački i njegove količine naelektrisanja.

$$V = \frac{W_{\mathrm{e}}}{Q_{\mathrm{p}}}$$

- Kako se izračunava u opštem slučaju?
  - Kao linijski integral vektora elektrostatičkog polja duž bilo koje putanje, računato od tačke čiji potencijal tražimo pa do referentne tačke.

$$V_{\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Šta je referentna tačka?
  - To je tačka u odnosu na koju se elektrostatički potencijal određuje. Ona se može proizvoljno izabrati, ali se najčešće za referentnu tačku uzima tačka u beskonačnosti.
  - Često se ta tačka zove i tačka nultog potencijala.

- A zašto?
  - Zato što je elektrostatički potencijal referentne tačke 0V.

- Kako se izračunava elektrostatički potencijal neke tačke A na rastojanju r_{A} tačkastog naelektrisanja Q?

$$V_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_{\mathrm{A}}}$$

- Koja je jedinica za elektrostatički potencijal?
  - Volt [V].

- Šta je razlika elektrostatičkih potencijala?
  - Napon.

$$U_{\mathrm{AB}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}$$

- Zašto je uopšte uvedena razlika potencijala kao potpuno nova fizička veličina?
  - Zato što elektrostatičkih potencijal zavisi od izbora referentne tačke, a napon ne.

$$V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \left(- \int_{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{\mathrm{AB}}$$

- Koja je jedinica za napon?
  - Volt [V].

- $U_{AB} = -U_{BA}$
  Zašto?

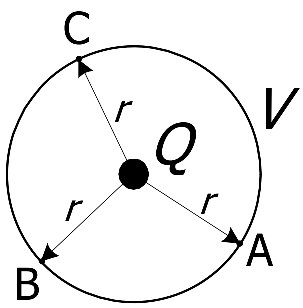
$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -U_{BA}$$

Na primer, ako je napon $U_{12} = 10\text{V}$, onda je napon $U_{21} = -10\text{V}$. Ako je napon $U_{MN} = -50\text{V}$, onda je napon $U_{NM} = 50\text{V}$.

- Šta je ekvipotencijalna površina?
  - Površina čije su sve tačke na istom potencijalu.

Primer:

$$\left.\begin{aligned} V_A &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ V_B &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ V_C &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad V_A = V_B = V_C$$



Pošto su sve tačke ove sfere na istom rastojanju od naelektrisanja *Q*, onda je i njihov elektrostatički potencijal isti. Zato ova sfera predstavlja ekvipotencijalnu površinu.

ZADACI

I.3.1 Odrediti potencijal tačke koja se nalazi na rastojanju r_1 = 0,2 m od tačkastog naelektrisanja Q_1 = $4 \cdot 10^{-11}$ C u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

Rešenje:

Potencijal je skalarna veličina. Elektrostatički potencijal koji stvara tačkasto naelektrisanje Q_1 = $4 \cdot 10^{-11}$ C na rastojanju r_1 = 0,2 m od njega dobija se po formuli:

$$V_1 = k\frac{Q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{4 \cdot 10^{-11}\,\text{C}}{0{,}2\ \text{m}} = 1{,}8\ \text{V}.$$

Dakle, pozitivno naelektrisanje stvara pozitivan potencijal u prostoru oko sebe.

I.3.2 Odrediti potencijal tačke koja se nalazi na rastojanju r_2 = 0,4 m od tačkastog naelektrisanja Q_2 = $-6 \cdot 10^{-11}$ C u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

Rešenje:

Primenjujući formulu kao u prethodnom zadatku dobijamo elektrostatički potencijal posmatrane tačke:

$$V_2 = k\frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{-6 \cdot 10^{-11}\,\text{C}}{0{,}4\ \text{m}} = -1{,}35\ \text{V}.$$

Negativno naelektrisanje stvara negativan potencijal u prostoru oko sebe.

I.3.3 Odrediti potencijal tačke koja se nalazi na rastojanju r_2 = 0,2 m od tačkastog naelektrisanja Q_1 = $4 \cdot 10^{-11}$ C i na rastojanju r_2 = 0,4 m od tačkastog naelektrisanja Q_2 = $-6 \cdot 10^{-11}$ C u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

Rešenje:

U ovom zadatku primenićemo princip superpozicije na elektrostatički potencijal. Elektrostatički potencijal je skalarna veličina pa se ukupan potencijal u nekoj tački dobija kao algebarski zbir potencijala koje u toj tački stvaraju pojedina naelektrisanja:

$$V = V_1 + V_2 = 1{,}8\ \text{V} + (-1{,}35\ \text{V}) = 0{,}45\ \text{V},$$

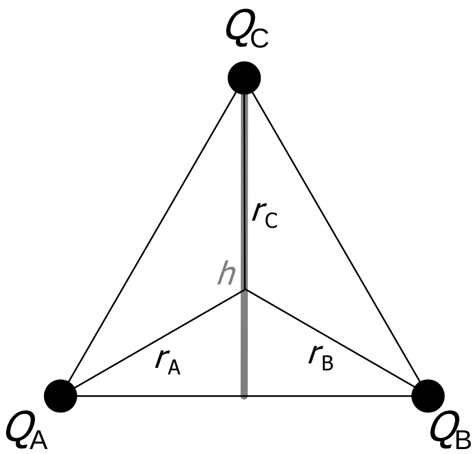
gde su V_1 i V_2 potencijali koje smo odredili u zadacima I.3.1 i I.3.2.

I.3.4 Tri tačkasta naelektrisanja Q_A = 10 pC, Q_B = -10 pC i Q_C = 10 pC nalaze se u vakuumu u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a = \sqrt{3}$ m. Odrediti potencijal u centru (težištu) trougla.

Rešenje:

Na slici I.3.4.1 prikazan je raspored naelektrisanja. Težište trougla je mesto preseka težišnih linija trougla (linija koje spajaju teme sa središtem naspramne stranice). Kod jednakostraničnog trougla težišne linije se poklapaju sa visinama. Poznato je iz matematike da težište deli težišnu liniju u odnosu 1:2, kao i da je visina jednakostraničnog trougla $h = a\sqrt{3}/2$. Odatle zaključujemo da je

$$r_A = r_B = r_C = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\ \text{m}\sqrt{3}}{3} = 1\ \text{m}.$$



Slika I.3.4.1

Potencijali koje u težištu trougla stvaraju naelektrisanja Q_A, Q_B i Q_C su:

$$V_A = k\frac{Q_A}{r_A} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{10\cdot 10^{-12}\text{C}}{1\ \text{m}} = 0{,}09\ \text{V},$$

$$V_B = k\frac{Q_B}{r_B} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{-10\cdot 10^{-12}\text{C}}{1\ \text{m}} = -0{,}09\ \text{V},$$

$$V_C = k\frac{Q_C}{r_C} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{10\cdot 10^{-12}\text{C}}{1\ \text{m}} = 0{,}09\ \text{V},$$

pa je ukupan potencijal u težištu trougla:

$$V = V_A + V_B + V_C = 0{,}09\ \text{V} + (-0{,}09\ \text{V}) + 0{,}09\ \text{V} = 0{,}09\ \text{V}.$$

I.3.5 Odrediti napon između tačke koja se nalazi na rastojanju r_1 = 0,1 m od tačkastog naelektrisanja Q = 3 nC i tačke koja se nalazi na rastojanju r_2 = 0,2 m.

Rešenje:

Potencijal prve tačke je:

$$V_1 = k\frac{Q}{r_1} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{3\cdot 10^{-9}\text{C}}{0{,}1\ \text{m}} = 270\ \text{V},$$

a potencijal druge tačke je:

$$V_2 = k\frac{Q}{r_2} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{3\cdot 10^{-9}\text{C}}{0{,}2\ \text{m}} = 135\ \text{V}.$$

Napon između dve tačke predstavlja razliku potencijala te dve tačke, pa je napon jednak:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = 270\ \text{V} - 135\ \text{V} = 135\ \text{V}.$$

I.3.6 Dva mala naelektrisana tela naelektrisanja Q_1 = 4 pC i Q_2 = 2 pC, nalaze se u vazduhu na rastojanju r = 30 cm, kao na slici.

a) Odrediti vektor jačine elektrostatičkog polja u tački A koja se nalazi na pravoj između ova dva naelektrisanja, a udaljena je od naelektrisanja Q_1 za r_1 = 20 cm.

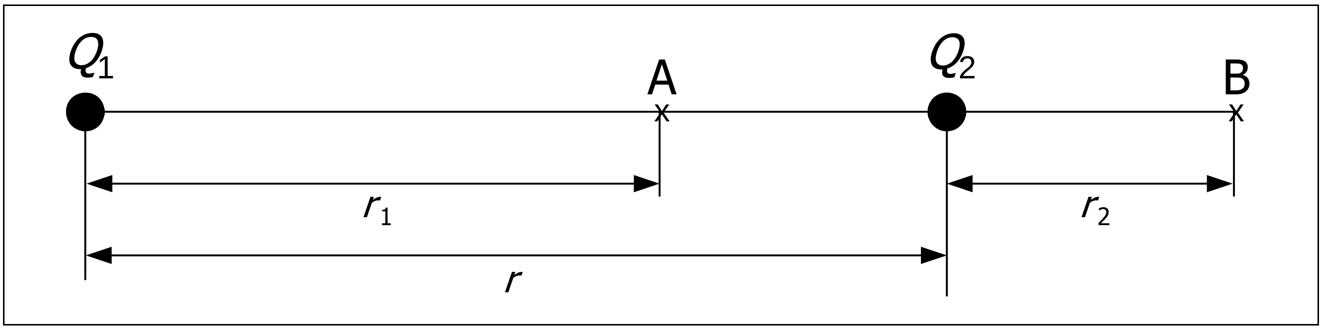
b) Odrediti vektor jačine elektrostatičkog polja u tački B koja se nalazi na pravoj koju određuju ova dva naelektrisanja, sa strane naelektrisanja Q_2, a udaljena je od njega za r_2 = 10cm.

c) Odrediti potencijale tačaka A i B.

d) Odrediti napon U_{AB}. Koliki je napon U_{BA}?

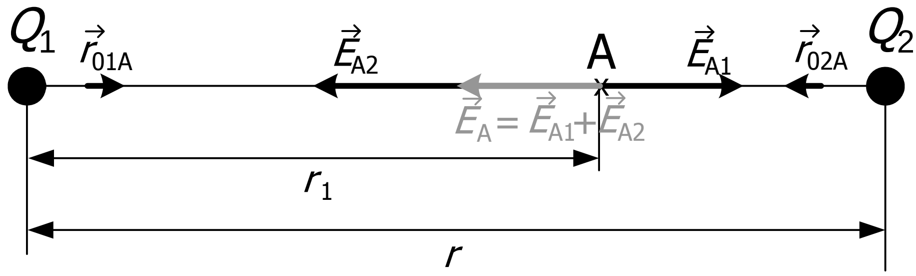
e) Odrediti silu (njen pravac, smer i intenzitet) koja bi delovala na naelektrisanje Q_{pA} = 1 pC kada bi se postavilo u tačku A.

f) Odrediti silu (njen pravac, smer i intenzitet) koja bi delovala na naelektrisanje Q_{pB} = -1 pC kada bi se postavilo u tačku B.



<u>*Rešenje:*</u>

a)



Slika I.3.6.1

Na slici I.3.6.1 prikazan je vektor jačine elektrostatičkog polja u tački A ($\vec{E}_A$), kao i njegove dve komponente $\vec{E}_{A1}$ i $\vec{E}_{A2}$, koje potiču od naelektrisanja Q_1 i Q_2:

$$\vec{E}_{A1} = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{r}_{01A} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(20 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{01A} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-2}} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{01A} = 0{,}9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{01A} \,,$$

$$\vec{E}_{A2} = k \cdot \frac{Q_2}{\left(r - r_1\right)^2} \cdot \vec{r}_{02A} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{02A} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-12}}{1 \cdot 10^{-2}} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02A} = 1{,}8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02A} \,,$$

gde su $\vec{r}_{01A}$ i $\vec{r}_{02A}$ jedinični vektori koji su usmereni od naelektrisanja Q_1, odnosno naelektrisanja Q_2 ka tački A.

Kao u zadatku I.2.3 vektor jačine elektrostatičkog polja u tački A dobijamo vektorskim zbirom vektora $\vec{E}_{A1}$ i $\vec{E}_{A2}$:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A1} + \vec{E}_{A2} = 0{,}9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{01A} + 1{,}8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02A} = 0{,}9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \left(-\vec{r}_{02A}\right) + 1{,}8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02A} = 0{,}9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02A} = -0{,}9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{01A} \,,$$

gde važi da je $\vec{r}_{01A} = -\vec{r}_{02A}$.

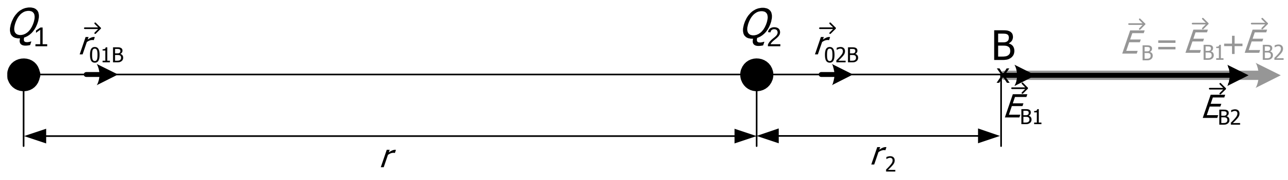
Dakle, vektori $\vec{E}_{A1}$ i $\vec{E}_{A2}$ su istog pravca a suprotnog smera, pa je intenzitet rezultujućeg vektora $\vec{E}_A$ jednak razlici intenziteta vektora $\vec{E}_{A1}$ i $\vec{E}_{A2}$, a smer mu se poklapa sa smerom vektora većeg intenziteta, u ovom slučaju vektora $\vec{E}_{A2}$.

b) Na slici I.3.6.2 prikazan je vektor jačine elektrostatičkog polja u tački B ($\vec{E}_B$), kao i njegove dve komponente, $\vec{E}_{B1}$ i $\vec{E}_{B2}$, koje potiču od naelektrisanja Q_1 i Q_2:

$$\vec{E}_{B1} = k \cdot \frac{Q_1}{\left(r + r_2\right)^2} \cdot \vec{r}_{01B} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(40 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{01B} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{16 \cdot 10^{-2}} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{01B} = 0{,}225 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{01B} \,,$$

$$\vec{E}_{B2} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{r}_{02B} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2} \vec{r}_{02B} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-12}}{1 \cdot 10^{-2}} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02B} = 1{,}8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \vec{r}_{02B} \,.$$

$\vec{r}_{01\text{B}}$ i $\vec{r}_{02\text{B}}$ su jedinični vektori koji su usmereni od naelektrisanja Q_1, odnosno naelektrisanja Q_2 ka tački B.



Slika I.3.6.2

Vektor jačine elektrostatičkog polja u tački B dobijamo vektorskim zbirom vektora $\vec{E}_\text{B1}$ i $\vec{E}_\text{B2}$:

$$\vec{E}_\text{B} = \vec{E}_\text{B1} + \vec{E}_\text{B2} = 0{,}225\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{01\text{B}} + 1{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{02\text{B}} = 0{,}225\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{01\text{B}} + 1{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{01\text{B}} = 2{,}025\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{01\text{B}} = 2{,}025\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{02\text{B}},$$

gde važi da je $\vec{r}_{02\text{B}} = \vec{r}_{01\text{B}}$.

c) Potencijal koji u tački A stvara naelektrisanje Q_1 je:

$$V_\text{A1} = k\frac{Q_1}{r_1} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{4\cdot10^{-12}\text{C}}{20\cdot10^{-2}\text{m}} = 0{,}18\ \text{V}.$$

Potencijal koji u tački A stvara naelektrisanje Q_2 je:

$$V_\text{A2} = k\frac{Q_2}{r-r_1} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{2\cdot10^{-12}\text{C}}{10\cdot10^{-2}\text{m}} = 0{,}18\ \text{V},$$

pa je ukupni potencijal u tački A:

$$V_\text{A} = V_\text{A1} + V_\text{A2} = 0{,}18\ \text{V} + 0{,}18\ \text{V} = 0{,}36\ \text{V}.$$

Potencijal koji u tački B stvara naelektrisanje Q_1 je:

$$V_\text{B1} = k\frac{Q_1}{r+r_2} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{4\cdot10^{-12}\text{C}}{40\cdot10^{-2}\text{m}} = 0{,}09\ \text{V}.$$

Potencijal koji u tački B stvara naelektrisanje Q_2 je:

$$V_\text{B2} = k\frac{Q_2}{r_2} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\frac{2\cdot10^{-12}\text{C}}{10\cdot10^{-2}\text{m}} = 0{,}18\ \text{V},$$

pa je ukupni potencijal u tački B:

$$V_\text{B} = V_\text{B1} + V_\text{B2} = 0{,}09\ \text{V} + 0{,}18\ \text{V} = 0{,}27\ \text{V}.$$

d) Napon U_AB je jednak razlici potencijala tačaka A i B:

$$U_\text{AB} = V_\text{A} - V_\text{B} = 0{,}36\ \text{V} - 0{,}27\ \text{V} = 0{,}09\ \text{V}$$

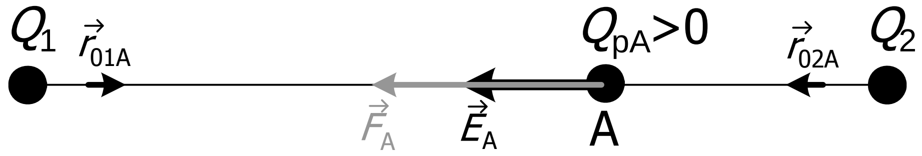
Napon U_BA je jednak razlici potencijala tačaka B i A:

$$U_\text{BA} = V_\text{B} - V_\text{A} = -U_\text{AB} = -0{,}09\ \text{V}$$

e) Na osnovu poznatog vektora jačine elektrostatičkog polja u tački A, $\vec{E}_\text{A}$, sila koja deluje na naelektrisanje Q_pA postavljeno u tačku A je:

$$\vec{F}_\text{A} = \vec{E}_\text{A}\cdot Q_\text{pA} = 0{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\vec{r}_{02\text{A}}\cdot 1\cdot10^{-12}\text{C} = 0{,}9\cdot10^{-12}\text{N}\ \vec{r}_{02\text{A}} = 0{,}9\ \text{pN}\ \vec{r}_{02\text{A}} = -0{,}9\ \text{pN}\ \vec{r}_{01\text{A}}.$$

Dakle, sila $\vec{F}_\text{A}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{E}_\text{A}$, jer je naelektrisanje Q_pA pozitivno.

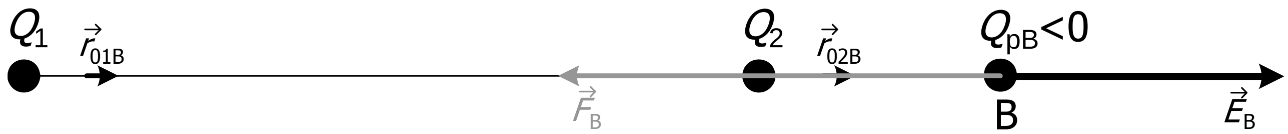


Slika I.3.6.3

f) Sila koja deluje na naelektrisanje Q_{pA} postavljeno u tačku B u kojoj je jačina elektrostatičkog poja $\vec{E}_B$ je:

$$\vec{F}_B = \vec{E}_B \cdot Q_{pB} = 2{,}025\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{01B} \cdot \left(-1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}\right) = -2{,}025 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}\ \vec{r}_{01B} = -2{,}025\ \mathrm{pN}\ \vec{r}_{01B} = -2{,}025\ \mathrm{pN}\ \vec{r}_{02B}\ .$$

Sila $\vec{F}_B$ je suprotnog smera od vektora $\vec{E}_B$, jer je naelektrisanje Q_{pB} negativno.



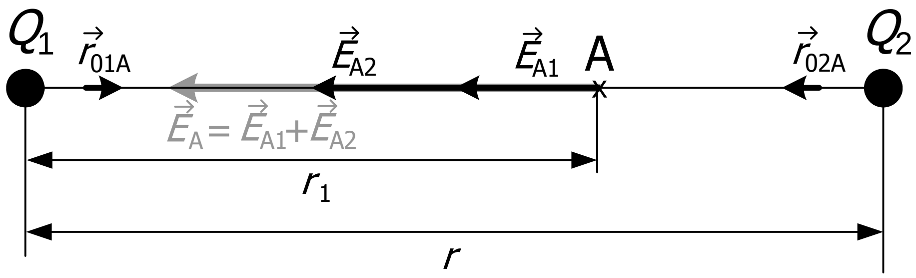
Slika I.3.6.4

I.3.7 Uraditi prethodni zadatak za vrednosti naelektrisanja Q_1 = -4 pC i Q_2 = 2 pC.

Rešenje:

Razlika u odnosu na prethodni zadatak je u znaku naelektrisanja Q_1, pa su samim tim komponente vektora elektrostatičkog polja koje potiču od ovog naelektrisanja, istog pravca i intenziteta, a suprotnog smera u odnosu na prethodni zadatak.

a)



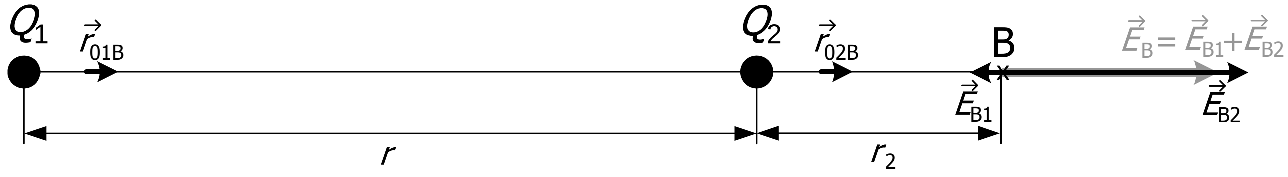
Slika I.3.7.1

$$\vec{E}_{A1} = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{r}_{01A} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\ \frac{-4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(20 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}\ \vec{r}_{01A} = -0{,}9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{01A}$$

$$\vec{E}_{A2} = k \cdot \frac{Q_2}{\left(r - r_1\right)^2} \cdot \vec{r}_{02A} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\ \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{\left(10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}\ \vec{r}_{02A} = 1{,}8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{02A}$$

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A1} + \vec{E}_{A2} = -0{,}9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{01A} + 1{,}8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{02A} = -0{,}9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\left(-\vec{r}_{02A}\right) + 1{,}8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{02A} = 2{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{02A} = -2{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{01A}$$

b)



Slika I.3.7.2

$$\vec{E}_{B1} = k \cdot \frac{Q_1}{(r+r_2)^2} \cdot \vec{r}_{01B} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{-4 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{(40 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2} \vec{r}_{01B} = -0{,}225 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{01B}$$

$$\vec{E}_{B2} = k \cdot \frac{Q_2}{{r_2}^2} \cdot \vec{r}_{02B} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{(10 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2} \vec{r}_{02B} = 1{,}8 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{02B}$$

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2} = -0{,}225 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{01B} + 1{,}8 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{02B} = -0{,}225 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{01B} + 1{,}8 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{01B} = 1{,}575 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{01B} = 1{,}575 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{02B}$$

c)

$$V_{A1} = k \frac{Q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{-4 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{20 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = -0{,}18 \text{ V}$$

$$V_{A2} = k \frac{Q_2}{r - r_1} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = 0{,}18 \text{ V}$$

$$V_A = V_{A1} + V_{A2} = -0{,}18 \text{ V} + 0{,}18 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

$$V_{B1} = k \frac{Q_1}{r + r_2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{-4 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{40 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = -0{,}09 \text{ V}$$

$$V_{B2} = k \frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\text{C}}{10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = 0{,}18 \text{ V}$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B2} = -0{,}09 \text{ V} + 0{,}18 \text{ V} = 0{,}09 \text{ V}$$

d)

$$U_{AB} = V_A - V_B = 0 \text{ V} - 0{,}09 \text{ V} = -0{,}09 \text{ V}$$

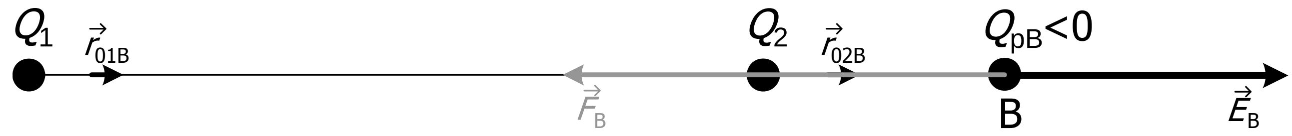
$$U_{BA} = V_B - V_A = -U_{AB} = 0{,}09 \text{ V}$$

e)

Slika I.3.7.3

$$\vec{F}_A = \vec{E}_A \cdot Q_{pA} = 2{,}7 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{r}_{02A} \cdot 1 \cdot 10^{-12}\,\text{C} = 2{,}7 \cdot 10^{-12}\,\text{N} \ \vec{r}_{02A} = 2{,}7 \text{ pN} \ \vec{r}_{02A} = -2{,}7 \text{ pN} \ \vec{r}_{01A}$$

f)



Slika I.3.7.4

$$\vec{F}_B = \vec{E}_B \cdot Q_{pB} = 1{,}575\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \vec{r}_{01B} \cdot \left(-1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}\right) = -1{,}575 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}\ \vec{r}_{01B} = -1{,}575\ \mathrm{pN}\ \vec{r}_{01B} = -1{,}575\ \mathrm{pN}\ \vec{r}_{02B}$$

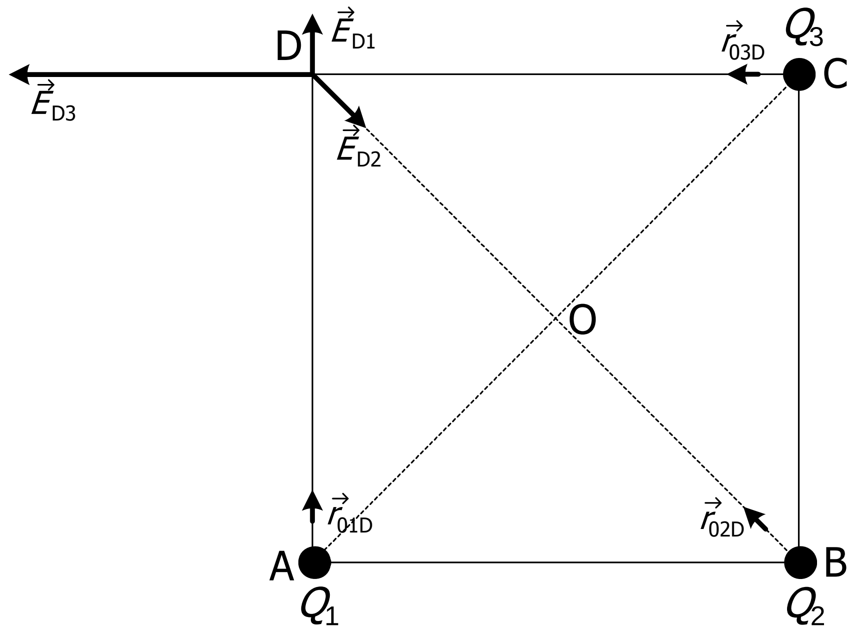
I.3.8. Tri tačkasta naelektrisanja Q_1 = 2 nC, Q_2 = -5 nC i Q_3 = 10 nC nalaze se u vakuumu u temenima kvadrata stranice a = 10 cm.

a) Odrediti potencijal četvrtog temena kvadrata.

b) Odrediti razliku potencijala između četvrtog temena kvadrata i centra kvadrata.

c) Nacrtati i izračunati komponente elektrostatičkog polja u tački D koje potiču od pojedinih naelektrisanja.

Rešenje:



Slika I.3.8.1

a) Obeležimo temena kvadrata kao na slici I.3.8.1. Potencijal četvrtog temena kvadrata, D, je:

$$V_D = V_{D1} + V_{D2} + V_{D3} = k\frac{Q_1}{r_{D1}} + k\frac{Q_2}{r_{D2}} + k\frac{Q_3}{r_{D3}} = k\frac{Q_1}{a} + k\frac{Q_2}{a\sqrt{2}} + k\frac{Q_3}{a} = \frac{k}{a}\left(Q_1 + \frac{Q_2}{\sqrt{2}} + Q_3\right) =$$

$$\frac{9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}}{10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}\left(2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} + \frac{-5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{\sqrt{2}} + 10 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right) = 9 \cdot 10^{9-(-1)}\left(2 - 3{,}54 + 10\right) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{V} = 761\ \mathrm{V}\,.$$

b) Centar kvadrata, obeležen sa O, polovi dijagonale kvadrata. Potencijal centra kvadrata je:

$$V_O = V_{O1} + V_{O2} + V_{O3} = k\frac{Q_1}{r_{O1}} + k\frac{Q_2}{r_{O2}} + k\frac{Q_3}{r_{O3}} = k\frac{Q_1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + k\frac{Q_2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + k\frac{Q_3}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{k}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\left(Q_1 + Q_2 + Q_3\right) =$$

$$\frac{9\cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}}{\frac{10\cdot 10^{-2}\mathrm{m}\sqrt{2}}{2}}\left(2\cdot 10^{-9}\mathrm{C} - 5\cdot 10^{-9}\mathrm{C} + 10\cdot 10^{-9}\mathrm{C}\right) = 1{,}27\cdot 10^{11}\cdot 7\cdot 10^{-9}\mathrm{V} = 889\ \mathrm{V}\,.$$

Napon između tačaka D i O je:

$$U_{DO} = V_D - V_O = 761\ \mathrm{V} - 889\ \mathrm{V} = -128\ \mathrm{V}\,.$$

c) Na slici I.3.8.1 prikazane su i komponente elektrostatičkog polja koje potiču od pojedinih naelektrisanja:

$$\vec{E}_{D1} = k\cdot\frac{Q_1}{r_{D1}^{\ 2}}\cdot\vec{r}_{01D} = k\cdot\frac{Q_1}{a^2}\cdot\vec{r}_{01D} = 9\cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\frac{2\cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{\left(10\cdot 10^{-2}\mathrm{m}\right)^2}\vec{r}_{01D} = 1800\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{01D}\,,$$

$$\vec{E}_{D2} = k\cdot\frac{Q_2}{r_{D2}^{\ 2}}\cdot\vec{r}_{02D} = k\frac{Q_2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}\cdot\vec{r}_{02D} = k\frac{Q_2}{2a^2}\cdot\vec{r}_{02D} = 9\cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\frac{-5\cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{2\left(10\cdot 10^{-2}\mathrm{m}\right)^2}\vec{r}_{02D} = -2250\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{02D}\,,$$

$$\vec{E}_{D3} = k\cdot\frac{Q_3}{r_{D3}^{\ 2}}\cdot\vec{r}_{03D} = k\cdot\frac{Q_3}{a^2}\cdot\vec{r}_{03D} = 9\cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\frac{10\cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{\left(10\cdot 10^{-2}\mathrm{m}\right)^2}\vec{r}_{03D} = 9000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{r}_{03D}\,.$$

I.3.9. Ako je napon između tačaka A i B, U_{AB} = 10 V, a napon između tačaka B i C, U_{BC} = 3 V, koliki je napon U_{AC}?

Rešenje:

Napon između dve tačke jednak je razlici potencijala između te dve tačke.

$$U_{AB} = V_A - V_B = 10\ \mathrm{V}$$

$$U_{BC} = V_B - V_C = 3\ \mathrm{V}$$

$$U_{AC} = V_A - V_C = V_A - V_B - V_C + V_B = \left(V_A - V_B\right) + \left(V_B - V_C\right) = U_{AB} + U_{BC} = 10\ \mathrm{V} + 3\ \mathrm{V} = 13\ \mathrm{V}$$

U poslednjem izrazu smo dodali i oduzeli potencijal tačke B, V_B, čime nije promenjena vrednost izraza. Korišćenjem osobina komutacije za sabiranje (premeštanje sabiraka) i asocijacije (grupisanje sabiraka) dobili smo konačni izraz, prema kome je napon U_{AC} jednak zbiru napona U_{AB} i U_{BC}.

I.4 GAUSOV ZAKON

TEORIJSKA OSNOVA

- Kako glasi **Gausov zakon**?

  – Izlazni fluks vektora jačine elektrostatičkog polja kroz bilo koju zamišljenu zatvorenu površinu jednak je količniku ukupnog slobodnog naelektrisanja obuhvaćenog tom površinom i dielektrične konstante vakuuma ε_0:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Šta se izračunava Gausovim zakonom?

  – Vektor elektrostatičkog polja $\vec{E}$.

- U kojoj sredini važi Gausov zakon?

  – U vakuumu. Približno važi i u vazduhu.

- A u drugim dielektričnim sredinama?

  – U drugim dielektričnim sredinama važi **uopšteni Gausov zakon**.

- Pa u čemu je razlika? Zašto dva zakona?

  – Uopšteni Gausov zakon važi za sve dielektrične sredine pa i za vazduh i vakuum. On uključuje i polarizaciju dielektrika.

- A kako glasi?

  – Izlazni fluks vektora električne indukcije (dielektričnog pomeraja) $\vec{D}$ kroz bilo koju zatvorenu zamišljenu površinu jednak je ukupnom slobodnom naelektrisanju obuhvaćenom tom površinom.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

- Koja su naelektrisanja slobodna?

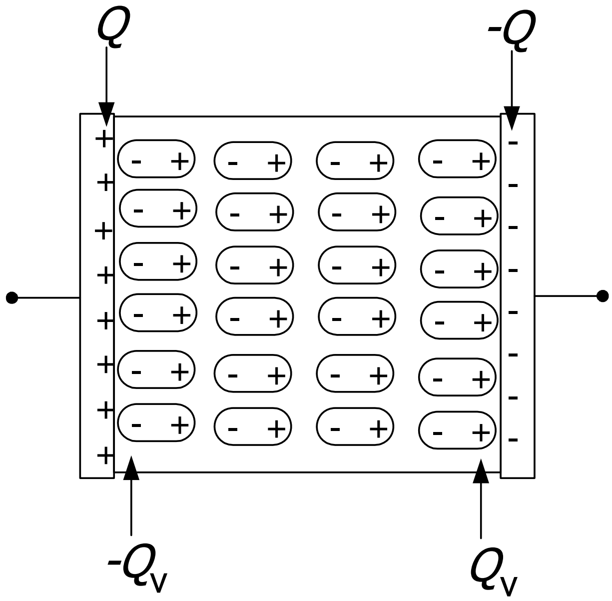
  – Na primer elektroni u provodniku.

- Da li to znači da postoje i vezana naelektrisanja?

  – Da. To su ona naelektrisanja koja se izdvajaju uz samu ivicu dielektrika unetog u polje. Vezana naelektrisanja su posledica polarizacije dielektrika.

- Šta je polarizacija dielektrika?

  – Pojava pri kojoj dolazi do razdvajanja centara pozitivnih i negativnih naelektrisanja u atomu dielektrika. Od neutralnih atoma stvaraju se električni dipoli i orijentišu se u smeru polja u koje smo uneli dielektrik, kao što je prikazano na slici. Spolja gledano pozitivni i negativni krajevi susednih dipola u dielektriku se poništavaju. Ostaju neponištena samo vezana naelektrisanja u sloju dielektrika neposredno uz površinu. Negativna su u onom sloju koji je najbliži pozitivnom izvoru polja, a pozitivna naelektrisanja su na suprotnom kraju dielektrika (koji je najbliži negativnom izvoru elektrostatičkog polja).



- Šta je vektor električne indukcije?
  – Vektorska veličina koja objedinjuje vektor polja i polarizaciju dielektrika unetog u polje.

- U linearnim homogenim dielektricima vektor električne indukcije $\vec{D}$ linearno zavisi od vektora jačine polja $\vec{E}$, a linearnost je izražena preko apsolutne dielektrične konstante ε

$$\vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$$

$\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$, gde je ε apsolutna dielektrična konstanta,
ε_0 dielektrična konstanta vakuuma i vazduha,
ε_r relativna dielektrična konstanta.

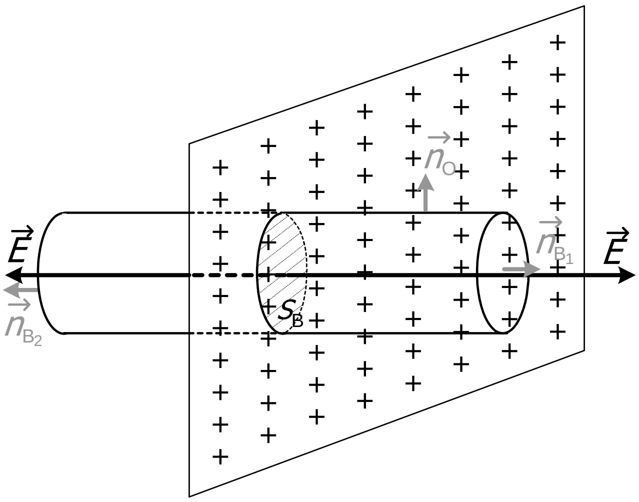
- Koje su jedinice za ove tri dielektrične konstante?
  – Jedinica za dielektričnu konstantu vakuuma ε_0 je $\frac{C^2}{Nm^2}$ ili $\frac{F}{m}$.
  – Relativna dielektrična konstanta ε_r je neimenovan broj. Znači nema jedinicu.
  – Samim tim se iz formule vidi da je jedinica za apsolutnu dielektričnu konstantu ε ista kao za ε_0, dakle $\frac{C^2}{Nm^2}$ ili $\frac{F}{m}$.

ZADACI

I.4.1. Odrediti vektor jačine električnog polja u okolini beskonačne tanke ravnomerno naelektrisane ploče u vazduhu.

Rešenje:

Pretpostavimo da je ploča pozitivno naelektrisana. Ploča je beskonačna, a naelektrisanje je ravnomerno raspoređeno po ploči i linije vektora jačine električnog polja normalne na ploču, a vektor $\vec{E}$ je usmeren od ploče (pozitivno je naelektrisana). Intenzitet vektora $\vec{E}$ je isti u svim tačkama, tj. polje je homogeno. Dakle, odredili smo pravac i smer vektora $\vec{E}$. Da bismo odredili intenzitet ovog vektora primenićemo Gausov zakon. Odredićemo najpre površinu S kroz koju određujemo fluks vektora $\vec{E}$, $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$. To može biti bilo koja zatvorena površina, ali ćemo izabrati takvu površinu kroz koju je najlakše odrediti taj fluks. Jedna takva površina je valjak koji probija ploču, a čiji omotač je normalan na ploču i osnove paralelne sa pločom, kao što je prikazano na slici I.4.1. Vektor $d\vec{S}$ ima intenzitet koji je jednak površini dS, pravac je normalan na površinu dS, a usvojeno je da je uvek usmeren od zatvorene površine S. Vektor normale $\vec{n}$ je vektor čiji je intenzitet jednak 1, pa je $d\vec{S} = \vec{n}\cdot dS$.



Slika I.4.1.1

Integral $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ rešavamo tako što valjak podelimo na tri površine, dve osnove i omotač:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{B_1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{B_2}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_O} \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_{S_{B_1}} E\cdot dS\cdot \cancelto{1}{\cos\left(\vec{E},\vec{n}_{B_1}\right)} + \int_{S_{B_2}} E\cdot dS\cdot \cancelto{1}{\cos\left(\vec{E},\vec{n}_{B_2}\right)} + \int_{S_O} E\cdot dS\cdot \cancelto{0}{\cos\left(\vec{E},\vec{n}_O\right)}.$$

S obzirom da je vektor $\vec{E}$ paralelan sa omotačem valjka ugao između vektora $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ jednak je $\pi/2$, pa je kosinus jednak nuli. Vektor $\vec{E}$ je normalan na osnove valjka pa je ugao između vektora $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ jednak nuli, a kosinus je jednak jedinici. Dakle, fluks je:

$$\int_{S_{B_1}} E\cdot dS + \int_{S_{B_2}} E\cdot dS = E\int_{S_{B_1}} dS + E\int_{S_{B_1}} dS = E\left(\int_{S_{B_1}} dS + \int_{S_{B_1}} dS\right) = 2E\cdot S\,,$$

gde je intenzitet vektora $\vec{E}$ izvučen ispred integrala jer je konstantan. Intergral $\int_{S_B} dS$ predstavlja zbir elementarnih površina dS po površini osnove valjka S_B, pa je integral upravo jednak površini S_B.

Sa desne strane jednakosti Gausovog zakona nalazi se količina naelektrisanja obuhvaćena površinom S podeljena dielektričnom konstantom vakuuma ε_0:

$$2E \cdot S = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0},$$

odakle se dobija izraz za intenzitet električnog polja oko beskonačne naelektrisane ravni:

$$E = \frac{\Delta Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

U ovom izrazu σ predstavlja površinsku gustinu naelektrisanja i jednaka je količniku naelektrisanja i površine koja obuhvata to naelektrisanje. Jedinica za površinsku gustinu naelektrisanja je $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$.

I.5 PROVODNICI

TEORIJSKA OSNOVA

- Šta su provodnici?

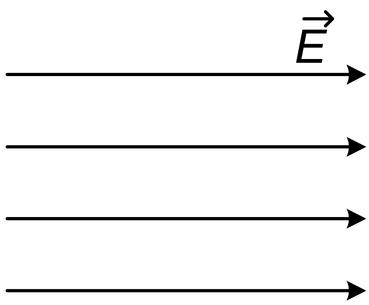
  – Vrsta materijala u kojima i na sobnoj temperaturi postoji veliki broj slobodnih nosilaca naelektrisanja.

- Postoje provodnici prve i druge vrste. Provodnici prve vrste su metali, a nosioci naelektrisanja u njima su elektroni. Provodnici druge vrste su elektroliti. Elektroliti su rastvori kiselina, baza i soli. Nosioci naelektrisanja u njima su joni (pozitivni i negativni).

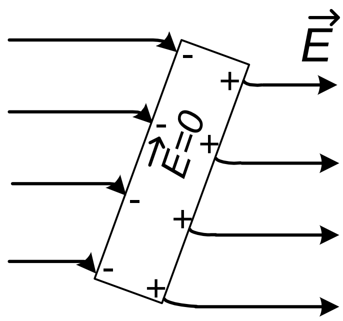
- Šta se dešava kada se metalna šipka unese u elektrostatičko polje?

  – U provodniku dolazi do razdvajanja pozitivnog i negativnog naelektrisanja uz samu površinu provodnika (negativna naelektrisanja se izdvajaju prema pozitivnom izvoru elektrostatičkog polja). Ova pojava zove se **elektrostatička indukcija**.

  – Stvara se unutrašnje polje između tih naelektrisanja. To polje se poništava sa spoljašnjim poljem tako da **u provodniku nema elektrostatičkog polja**.



elektrostatičko polje
pre unošenja metalne ploče



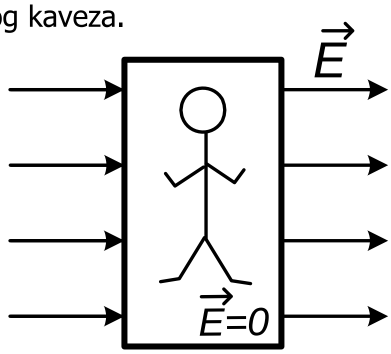
elektrostatičko polje
nakon unošenja metalne ploče

  – Linije elektrostatičkog polja menjaju pravac tako da ulaze u provodnik i izlaze iz njega pod pravim uglom.

- Šta je Faradejev kavez?

  – Metalni kavez zatvoren sa svih strana u kome kada ga unesemo u spoljašnje električno polje nema polja. To je posledica činjenice da se u provodniku koji unesemo u spoljašnje elektrostatičko polje unutrašnje elektrostatičko polje poništava.

  – Faradejev kavez služi za zaštitu ljudi i opreme od uticaja električnog polja (groma i slično). Automobil je primer Faradejevog kaveza.



I.6 KONDENZATORI

TEORIJSKA OSNOVA

- Šta je kondenzator?
  - Kondenzator je sistem od dve provodne elektrode između kojih je ubačen dielektrik.

- Kondenzatori se razlikuju po obliku, po vrsti dielektrika između elektroda, po vrsti metala od kog su napravljene elektrode.

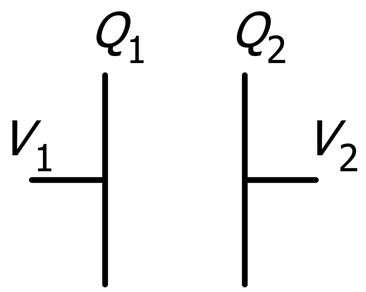
- Koja je najvažnija karakteristika kondenzatora?
  - Kapacitivnost.

- Od čega zavisi kapacitivnost?
  - Od oblika, dimenzija kondenzatora i vrste dielektrika u njemu.

- Kada se elektrode kondenzatora priključe na razliku elektrostatičkog potencijala doći će do procesa njihovog naelektrisavanja. Ona elektroda koja je priključena na viši elektrostatički potencijal naelektrisaće se pozitivno, a ona druga koja je priključena na niži potencijal, naelektrisaće se negativno. Taj prelazni proces naelektrisavanja kondenzatora trajaće sve dok se elektrode ne naelektrišu tolikom količinom naelektrisanja da je zadovoljena relacija:

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{U}}$$

Ova relacija važi uvek i za sve tipove kondenzatora.



$$\boldsymbol{V_1 > V_2}$$
$$\boldsymbol{Q_1 > 0}$$
$$\boldsymbol{Q_2 < 0}$$

- Naelektrisanja na elektrodama kondenzatora su uvek jednakog intenziteta, a suprotnog znaka

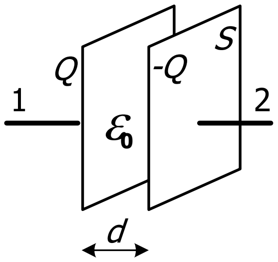
$$\boldsymbol{Q_1 = -Q_2}$$

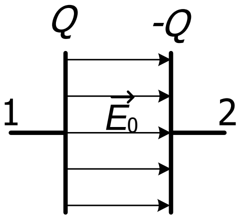
nezavisno od oblika kondenzatora.

- Kada se kondenzator naelektriše i odvoji od izvora napajanja na njegovim elektrodama ostaje konstantan napon.

- Mi proučavamo samo pločast kondenzator. U njemu je elektrostatičko polje **homogeno** što znači da je vrednost polja ista u svakoj tački. Linije takvog polja su paralelne.

VAZDUŠNI PLOČAST KONDENZATOR





- Elektrostatičko polje u kondenzatoru je:

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

- Napon na krajevima kondenzatora je:

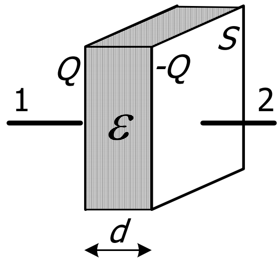
$$U = E \cdot d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$

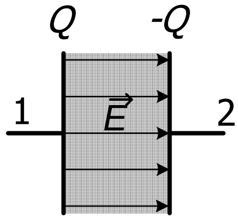
- Kapacitivnost kondenzatora je:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

gde je : S površina elektrode
d rastojanje između elektroda
ε_0 dielektrična konstanta vakuuma

PLOČAST KONDENZATOR SA DIELEKTRIKOM





- Elektrostatičko polje u kondenzatoru je:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot S}$$

- Napon na krajevima kondenzatora je:

$$U = E \cdot d = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_0 \cdot S} d$$

- Kapacitivnost kondenzatora je:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot S}{d}$$

gde je : S površina elektrode
d rastojanje između elektroda
ε apsolutna dielektrična konstanta
ε_r relativna dielektrična konstanta

- Kapacitivnost kondenzatora može se povećati ako se poveća površina elektroda, smanji rastojanje između elektroda ili upotrebi dielektrik sa što većom dielektričnom konstantom.

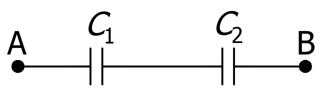
- Postoje kondenzatori sa čvrstim dielektrikom (papir, liskun, polimeri, keramike, staklo), tečnim dielektrikom (prirodna i sintetička ulja) i gasovitim dielektrikom (vazduh).

- Koja je jedinica za kapacitivnost?
  – Farad (F).

- Ponekad se kondenzatori povezuju u grupu.

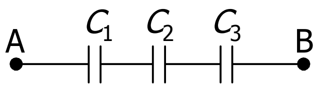
- Šta znači transfigurisati grupu kondenzatora?
  - To znači naći ekvivalentnu kapacitivnost kondenzatora koja bi zamenila celu grupu.

REDNA VEZA



$$\frac{1}{C_{AB}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_{AB}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

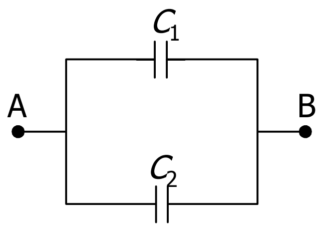
Karakteristika redne veze je da su elementi vezani u istoj grani, što znači da kondenzatori imaju istu količinu naelektrisanja na elektrodama, pod uslovom da nisu bili opterećeni pre nego što su vezani u kolo.



$$\frac{1}{C_{AB}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow$$

$$C_{AB}=\frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2+C_2C_3+C_1C_3}$$

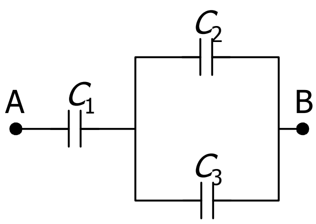
PARALELNA VEZA



$$C_{AB}=C_1+C_2$$

Karakteristika paralelne veze je da su elementi vezani između dve iste tačke, što znači da je napon na njima isti.

MEŠOVITA VEZA



$$C_{AB}=\frac{(C_2+C_3)C_1}{C_1+C_2+C_3}$$

I.7 ENERGIJA ELEKTROSTATIČKOG POLJA

TEORIJSKA OSNOVA

- Šta je energija kondenzatora?
  - To je energija koju poseduje kondenzator. Jednaka je radu uloženom za naelektrisavanje elektroda kondenzatora. Energija kondenzatora može se izračunati prema obrascima:

$$W_e = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{U}$$

- Energija elektrostatičkog polja može da se izrazi i preko zapreminske gustine energije w_e:

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV$$

gde je:

$$w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon}$$

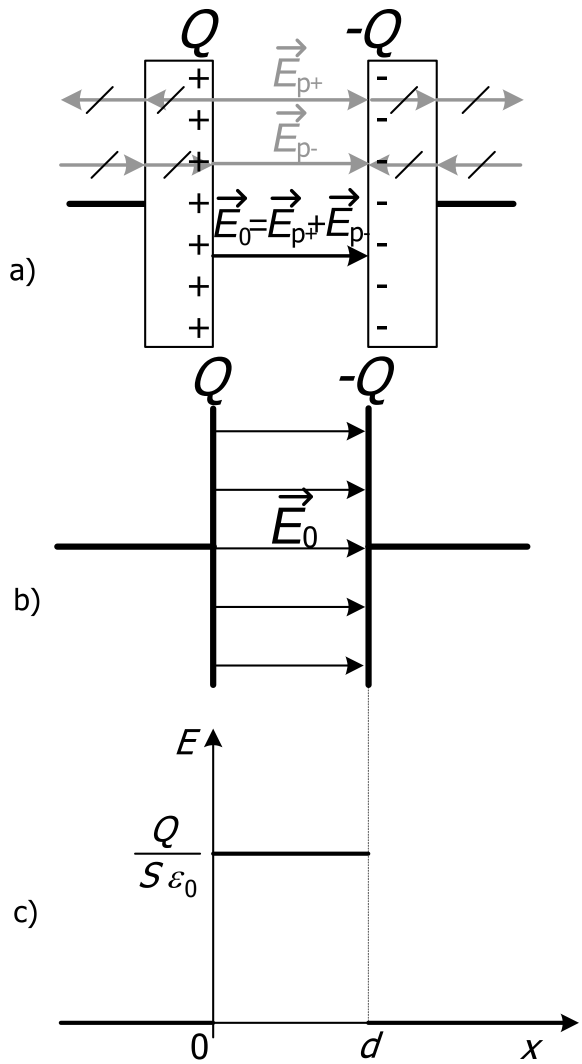
- Koja je jedinica za energiju u elektrostatičkom polju?
  - Džul [J].

ZADACI

KAPACITIVNOST I ENERGIJA PLOČASTOG VAZDUŠNOG KONDENZATORA

I.7.1. Odrediti kapacitivnost pločastog vazdušnog kondenzatora površine elektroda $S = 20\ \text{cm}^2$, koje se nalaze na rastojanju $d = 1$ cm.

<u>Rešenje:</u>



Slika I.7.1.1

Kondenzator čine dve provodne elektrode između kojih se nalazi dielektrik. Elektrode su naelektrisane istom količinom naelektrisanja suprotnog znaka. Pločast kondenzator prikazan je na slici 1.7.1.1. Elektrode pločastog kondenzatora su dve metalne ploče istih dimenzija. Bez obzira na debljinu elektroda uz primenu Gausovog zakona i činjenicu da je električno polje u provodnicima u elektrostatici jednako nuli, može se pokazati da je sve slobodno naelektrisanje *Q*, kojim su naelektrisane elektrode, ravnomerno raspoređeno po samoj površini unutrašnjih strana elektroda kao što je prikazano na slici 1.7.1.1a (sam dokaz prevazilazi okvire ove knjige). Pri tome su zanemareni ivični efekti na krajevima kondenzatora. Zbog toga to površinsko naelektrisanje elektroda posmatramo kao beskonačno tanku naelektrisanu ploču kao u zadatku I.4.1, za jednu elektrodu pozitivno, a za drugu negativno. Električno polje u okolini takve ploče je homogeno, a linije polja su normalne na površinu ploče, kao što je prikazano na slici 1.4.1.1. Intenzitet električnog polja je:

$$E_{p+} = E_{p-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0}.$$

Pošto je sve naelektrisanje raspoređeno u tankom sloju uz unutrašnje strane elektroda pločasti kondenzator se predstavlja kao na slici 1.7.1.1b , kao da su elektrode beskonačno tanke.

Ukupno električno polje unutar i izvan pločastog kondenzatora dobijamo vektorskim sabiranjem električnog polja od pozitivne elektrode, $\vec{E}_{p+}$, i električnog polja od negativne elektrode, $\vec{E}_{p-}$.

Pošto su polja istog pravca možemo im algebarski sabrati intenzitete, ako su istog smera (kao unutar kondenzatora), odnosno oduzeti ako su suprotnog smera (kao izvan kondenzatora). Dolazimo do zaključka da se polja izvan kondenzatora potiru, odnosno da, uz zanemarivanje ivičnih efekata, **nema električnog polja izvan kondenzatora**, a da je **električno polje unutar kondenzatora homogeno i ima intenzitet**:

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Grafik zavisnosti intenziteta električnog polja je prikazan na slici I.7.1.1c.

Napon između ploča kondenzatora računa se kao razlika potencijala elektroda, odnosno:

$$U = V_+ - V_- = \int_0^d \vec{E}_0 \cdot d\vec{x} = \int_0^d E_0 \cdot dl \cancelto{1}{\cos\left(\vec{E}_0, d\vec{x}\right)} = \int_0^d E_0 \cdot dx = E_0 \int_0^d dx = E_0 \cdot d = \frac{Q \cdot d}{S \cdot \varepsilon_0},$$

gde je $d\vec{x}$ vektor beskonačno malog intenziteta, a pravac i smer se poklapaju sa pravcem i smerom x ose.

Kapacitivnost se definše kao odnos naelektrisanja na elektrodama i napona između elektroda:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\dfrac{Q \cdot d}{S \cdot \varepsilon_0}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Zamenom brojnih vrednsti iz zadatka dobijamo kapacitivnost ovog kondenzatora:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\ \frac{20 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 1{,}77 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 1{,}77\ \mathrm{pF}.$$

I.7.2. Dve jednake metalne ploče naelektrisane su jednakim količinama naelektrisanja suprotnog znaka, Q = 8 pC. Ploče su postavljene paralelno jedna drugoj u vazduhu, na međusobnom rastojanju d = 2 mm. Površina ploča je S = 20 cm^2.

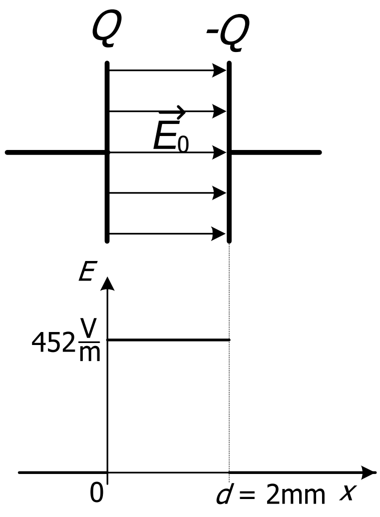
a) Nacrtati grafik zavisnosti električnog polja u zavisnosti od rastojanja od pozitivne elektrode.

b) Odrediti napon između ploča.

c) Odrediti kapacitivnost kondenzatora.

d) Odrediti energiju kondenzatora.

Rešenje:



Slika I.7.1.2

a) Ove dve metalne ploče, sa vazduhom između njih, čine vazdušni pločasti kondenzator. Prema prethodnom zadatku, električno polje postoji samo unutar kondenzatora i njegov intenzitet je:

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 20 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 452\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

b) Napon između ploča kondenzatora je :

$$U = E_0 \cdot d = 452\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 0{,}904\ \mathrm{V}.$$

c) Pošto su nam poznati svi parametri kapacitivnost kondenzatora može se računati bilo preko obrasca

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{0{,}904\ \mathrm{V}} = 8{,}85\ \mathrm{pF}\,,$$

bilo preko obrasca

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\, \frac{20 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 8{,}85\ \mathrm{pF}\,.$$

d) Energija kondenzatora je:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}904\ \mathrm{V} = 3{,}616 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 3{,}616\ \mathrm{pJ}$$

I.7.3. Odrediti energiju vazdušnog pločastog kondenzatora čija je površina elektroda S = 10 cm^2, a rastojanje između elektroda d = 1 mm, ako je napon između elektroda U = 5 V. Odrediti količinu naelektrisanja na elektrodama.

Rešenje:

Na osnovu zadatih parametara može se izračunati kapacitivnost kondenzatora:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\, \frac{10 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 8{,}85\ \mathrm{pF}\,.$$

Energija kondenzatora je :

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot (5\ \mathrm{V})^2 = 11{,}06 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} = 110{,}6\ \mathrm{pJ}\,.$$

Količina naelektrisanja na pločama kondenzatora je:

$$Q = C \cdot U = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot 5\ \mathrm{V} = 44{,}25 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} = 44{,}25\ \mathrm{pC}$$

I.7.4. Energija pločastog vazdušnog kondenzatora je W_e = 5 pJ. Kondenzator je priključen na napon U = 5 V. Rastojanje između ploča kondenzatora je d = 2 cm. Odrediti:

a) jačinu električnog polja u kondenzatoru;

b) količinu naelektrisanja na elektrodama;

c) kapacitivnost kondenztora.

Rešenje:

a) $$U = E \cdot d \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{d} = \frac{5\ \mathrm{V}}{2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 250\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

b) $$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} QU \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2W_\mathrm{e}}{\mathrm{U}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}}{5\ \mathrm{V}} = 2\mathrm{pC}$$

c) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{5\ \mathrm{V}} = 0{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 0{,}4\ \mathrm{pF}$$

I.7.5. Energija pločastog kondenzatora je W_e = 25 pJ. Kondenzator je priključen na napon U = 10 V. Površina ploča kondenzatora je S = 10 cm^2. Odrediti jačinu električnog polja u kondenzatoru.

Rešenje:

Zadatak se može uraditi na dva načina:

I način:

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2W_e}{U^2} = \frac{2\cdot 25\cdot 10^{-12}\,\text{J}}{100\ \text{V}^2} = 0{,}5\ \text{pF}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \varepsilon_0 \frac{S}{C} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}}\,\frac{10\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{0{,}5\cdot 10^{-12}\,\text{F}} = 1{,}77\ \text{cm}$$

$$U = E\cdot d \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{d} = \frac{10\ \text{V}}{0{,}177\ \text{m}} = 565\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

II način:

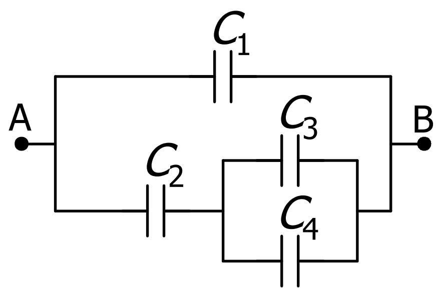
$$W_e = \frac{1}{2}QU \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2W_e}{\text{U}} = \frac{2\cdot 25\cdot 10^{-12}\,\text{J}}{10\ \text{V}} = 5\ \text{pC}$$

$$E = \frac{Q}{S\cdot\varepsilon_0} = \frac{5\cdot 10^{-12}\,\text{C}}{10\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}}} = 565\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

TRANSFIGURACIJE GRUPE KONDENZATORA

I.7.6. Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost C_e grupe kondenzatora prikazane na slici, ako je

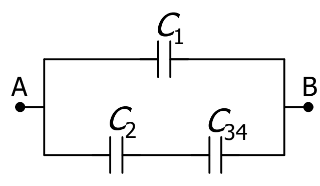
C_1 = 20 nF, C_2 = 30 nF, C_3 = 45 nF, C_4 = 15 nF.



Rešenje:

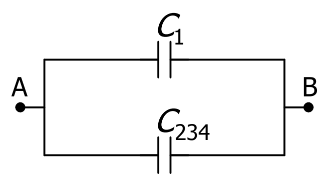
Ekvivalentnu kapacitivnost određivaćemo postupno, zamenjujući grupe kondenzatora ekvivalentnim kapacitivnostima:

– kondenzatori C_3 i C_4 su vezani paralelno pa je ekvivalentna kapacitivnost:



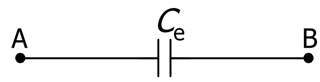
$$C_{34} = C_3 + C_4 = 45\ \text{nF} + 15\ \text{nF} = 60\ \text{nF}\,;$$

– kondenzatori C_2 i C_{34} su vezani redno pa je:



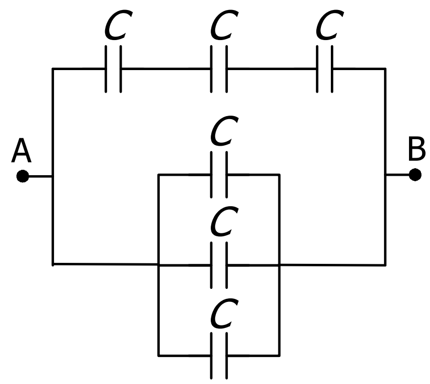
$$\frac{1}{C_{234}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{34}} \quad \Rightarrow \quad C_{234} = \frac{C_2 C_{34}}{C_2 + C_{34}} = \frac{30\ \text{nF}\cdot 60\ \text{nF}}{30\ \text{nF} + 60\ \text{nF}} = 20\ \text{nF}\,;$$

– kondenzatori C_1 i C_{234} su vezani paralelno pa je ekvivalentna kapacitivnost:



$$C_e = C_{1234} = C_1 + C_{234} = 20\text{ nF} + 20\text{ nF} = 40\text{ nF}.$$

I.7.7. Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost C_e grupe kondenzatora prikazane na slici, ako je C = 30 pF.



Rešenje:

Zadatak rešavamo na isti način kao i prethodni. Između tačaka A i B imamo dve paralelne grane:

– u jednoj se nalazi redna veza tri ista kondenzatora pa ako obeležimo ekvivalentnu kapacitivnost ove grane sa C_1 , važi da je:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{C}{3} = 10\text{ pF};$$

– u drugoj se nalazi paralelna veza tri ista kondenzatora pa je ekvivalentna kapacitivnost ove grane:

$$C_2 = C + C + C = 3C = 90\text{ pF}$$

Kapacitivnosti C_1 i C_2 su vezane paralelno pa je ekvivalentna kapacitivnost jednaka zbiru ove dve kapacitivnosti:

$$C_e = C_1 + C_2 = 10\text{ pF} + 90\text{ pF} = 100\text{ pF}.$$

I.7.8. Dva kondenzatora, C_1 = 100 nF i C_2 = 25 nF, vezana su paralelno i priključena na napon U_{AB} = 10 V.

a) Odrediti količine naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima, kao i količinu naelektrisanja na ekvivalentnom kondenzatoru priključenom na isti napon.

b) Odrediti energije pojedinih kondenzatora, kao i energiju ekvivalentnog kondenzatora priključenog na isti napon.

Rešenje:

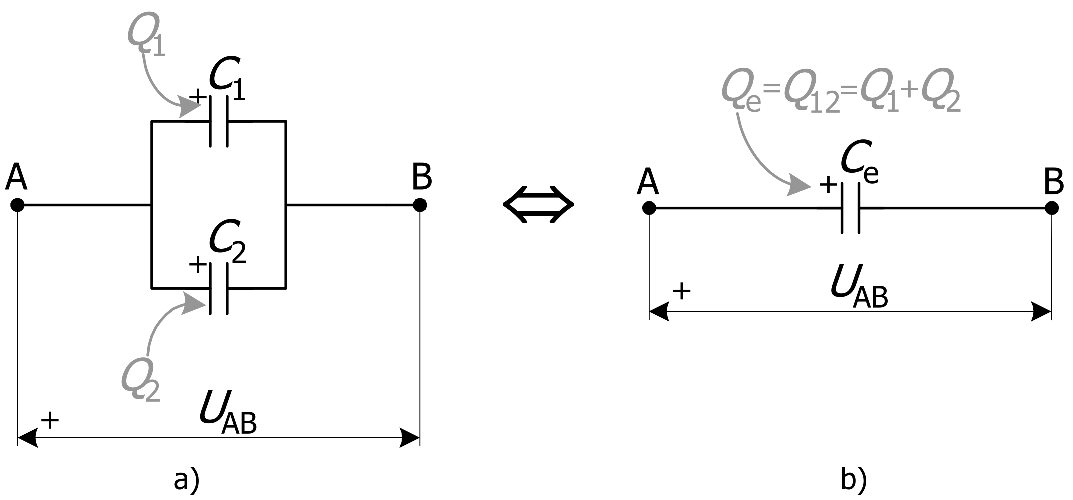
Ono što je bitno da se zapamti kod redne i paralelne veze kondenzatora jeste sledeće:

– **naponi na kondenzatorima koji su vezani paralelno su jednaki, a ukupna količina naelektrisanja paralelne veze jednaka je zbiru količina naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima,**

– **količine naelektrisanja na kondenzatorima koji su vezani redno su iste** (ovo važi pod uslovom da kondenzatori nisu bili opterećeni pre vezivanja u kolo, a to će biti slučaj u svim ovim zadacima)**, a ukupan napon redne veze jednak je zbiru napona na pojedinim kondenzatorima,**

– **energija sadržana u ekvivalentnom kondenzatoru jednaka je zbiru energija sadržanih u pojedinim kondenzatorima analizirane grupe.**

a) Na slici I.7.8.1a prikazana je paralelna veza kondenzatora C_1 i C_2, a na istoj slici pod b prikazana je ekvivalentna kapacitivnost C_e.



Slika I.7.8.1

Ekvivalentna kapacitivnost ova dva kondenzatora je:

$$C_e = C_1 + C_2 = 100 \text{ nF} + 25 \text{ nF} = 125 \text{ nF} .$$

Pošto su kondenzatori vezani paralelno napon na oba kondenzatora je isti:

$$U_1 = U_2 = U_{AB} = 10 \text{ V} ,$$

pa su količine naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima:

$$Q_1 = U_1 \cdot C_1 = U_{AB} \cdot C_1 = 10 \text{ V} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{F} = 1 \ \mu\text{C} ,$$

$$Q_2 = U_2 \cdot C_2 = U_{AB} \cdot C_2 = 10 \text{ V} \cdot 25 \cdot 10^{-9} \text{F} = 0{,}25 \ \mu\text{C} .$$

Količina naelektrisanja na ekvivalentnom kondenzatoru paralelne veze jednaka je zbiru količina naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima

$$Q_e = U_{AB} \cdot C_e = U_{AB}(C_1 + C_2) = U_{AB}C_1 + U_{AB}C_2 = U_1C_1 + U_2C_2 = Q_1 + Q_2 = 1{,}25 \ \mu\text{C} .$$

(Iz ove činjenice se upravo i izvodi izraz za ekvivalentnu kapacitivnost paralelne veze.)

Dakle, važi:

$$U_{AB} = \frac{Q_e}{C_e} = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-6} \text{C}}{125 \cdot 10^{-9} \text{F}} = 10 \text{ V} .$$

b) Poznati su nam svi parametri (količina naelektrisanja, napon i kapacitivnost), pa za izračunavanje energije kondenzatora možemo primeniti bilo koju od tri poznate formule za izračunavanje energije. Pošto je paralelna veza u pitanju najbolje je u izraz za energiju uvrstiti zajednički parametar – napon. Dakle, energije pojedinih kondenzatora su:

$$W_{e1} = \frac{1}{2} C_1 \cdot U_{AB}{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-9}\text{F} \cdot (10\ \text{V})^2 = 5\ \mu\text{J}\,,$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2} C_2 \cdot U_{AB}{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 10^{-9}\text{F} \cdot (10\ \text{V})^2 = 1{,}25\ \mu\text{J}\,.$$

Energija ekvivalentnog kondenzatora je:

$$W_{ee} = \frac{1}{2} C_e \cdot U_{AB}{}^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \cdot U_{AB}{}^2 = \frac{1}{2} C_1 \cdot U_{AB}{}^2 + \frac{1}{2} C_2 \cdot U_{AB}{}^2 = W_{e1} + W_{e2} = 6{,}25\ \mu\text{J}\,.$$

I.7.9. Dva kondenzatora, C_1 = 100 nF i C_2 = 25 nF, vezana su redno i priključena na napon U_{AB} = 10 V.

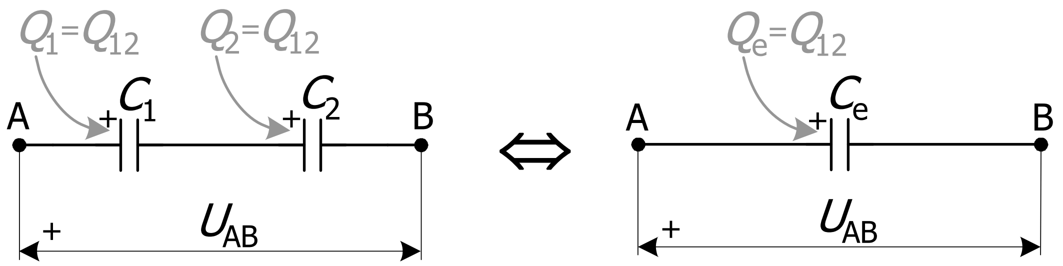
a) Odrediti količine naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima, kao i količinu naelektrisanja na ekvivalentnom kondenzatoru priključenom na isti napon.

b) Odrediti napone na pojedinim kondenzatorima.

c) Odrediti energije pojedinih kondenzatora, kao i energiju ekvivalentnog kondenzatora priključenog na isti napon.

Rešenje:

a) Na slici I.7.9.1a prikazana je redna veza kondenzatora C_1 i C_2, a na istoj slici pod b prikazana je ekvivalentna kapacitivnost C_e.



a) b)

Slika I.7.9.1

Za rednu vezu kondenzatora važi da je:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\,,$$

pa je ekvivalentna kapacitivnost:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100\ \text{nF} \cdot 25\ \text{nF}}{100\ \text{nF} + 25\ \text{nF}} = 20\ \text{nF}\,.$$

Pošto su kondenzatori vezani redno količina naelektrisanja na oba kondenzatora je ista i jednaka je količini naelektrisanja na ekvivalentnom kondenzatoru:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{12} = Q_e = U_{AB} \cdot C_e = 10\ \text{V} \cdot 20 \cdot 10^{-9}\text{F} = 200\ \text{nC}\,.$$

b) Iz izračunatih količina naelektrisanja mogu se izračunati naponi na pojedinim kondenzatorima:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{100 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 2\ \mathrm{V},$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 8\ \mathrm{V}.$$

Kod redne veze kondenzatora ukupan napon na rednoj vezi kondenzatora jednak je zbiru napona na pojedinim kondenzatorima:

$$U_{\mathrm{AB}} = \frac{Q_{\mathrm{e}}}{C_{\mathrm{e}}} = \frac{Q_{\mathrm{e}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}} = Q_{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q_{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{C_1} + Q_{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = U_1 + U_2 = 10\ \mathrm{V}.$$

(Iz ove činjenice se upravo i izvodi izraz za ekvivalentnu kapacitivnost redne veze.)

c) Poznati su nam svi parametri (količina naelektrisanja, napon i kapacitivnost), pa za izračunavanje energije kondenzatora možemo primeniti bilo koju od tri poznate formule za izračunavanje energije. Pošto je redna veza u pitanju najbolje je u izraz za energiju uvrstiti zajednički parametar – količinu naelektrisanja. Dakle, energije pojedinih kondenzatora su:

$$W_{\mathrm{e1}} = \frac{Q_1^{\,2}}{2C_1} = \frac{Q_{12}^{\,2}}{2C_1} = \frac{\left(200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right)^2}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 200\ \mathrm{nJ},$$

$$W_{\mathrm{e2}} = \frac{Q_2^{\,2}}{2C_2} = \frac{Q_{12}^{\,2}}{2C_2} = \frac{\left(200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right)^2}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 800\ \mathrm{nJ}.$$

Energija ekvivalentnog kondenzatora je:

$$W_{\mathrm{ee}} = \frac{Q_{\mathrm{e}}^{\,2}}{2C_{\mathrm{e}}} = \frac{Q_{12}^{\,2}}{2 \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}} = Q_{12}^{\,2}\left(\frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2}\right) = \frac{Q_{12}^{\,2}}{2C_1} + \frac{Q_{12}^{\,2}}{2C_2} = W_{\mathrm{e1}} + W_{\mathrm{e2}} = 1000\ \mathrm{nJ} = 1\ \mu\mathrm{J}.$$

I.7.10. Veza kondenzatora prikazana na slici priključena je na napon U_{AB} = 80 V. Kapacitivnosti kondenzatora su:

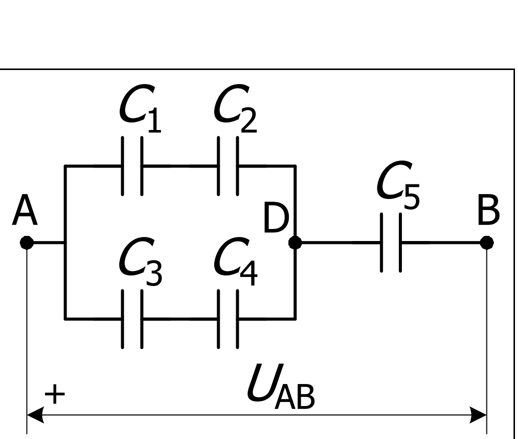
C_1 = 15 pF, C_2 = 30 pF, C_3 = 30 pF,

C_4 = 60 pF, C_5 = 10 pF.

a) Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost veze C_{e}.

b) Izračunati napon U_5 na kondenzatoru C_5.

c) Izračunati energiju W_{e2} kondenzatora C_2.



Rešenje:

a) Kondenzatori C_1 i C_2 su vezani redno pa je:

$$\frac{1}{C_{12}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_{12}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{15\text{ pF}\cdot 30\text{ pF}}{15\text{ pF}+30\text{ pF}}=10\text{ pF}.$$

Kondenzatori C_3 i C_4 su vezani redno pa je:

$$\frac{1}{C_{34}}=\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4} \quad \Rightarrow \quad C_{34}=\frac{C_3C_4}{C_3+C_4}=\frac{30\text{ pF}\cdot 60\text{ pF}}{30\text{ pF}+60\text{ pF}}=20\text{ pF}.$$

Grupe kondenzatora C_{12} i C_{23} su vezane paralelno pa je ekvivalentna kapacitivnost:

$$C_{1234}=C_{12}+C_{34}=10\text{ pF}+20\text{ pF}=30\text{ pF}.$$

Grupa kondenzatora C_{1234} je vezana redno sa kondenzatorom C_5 pa je:

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_{12345}}=\frac{1}{C_{1234}}+\frac{1}{C_5} \quad \Rightarrow \quad C_e=C_{12345}=\frac{C_{1234}C_5}{C_{1234}+C_5}=\frac{30\text{ pF}\cdot 10\text{ pF}}{30\text{ pF}+10\text{ pF}}=7{,}5\text{ pF}.$$

b) S obzirom da smo izračunali ekvivalentnu kapacitivnost cele veze možemo izračunati količinu naelektrisanja Q_e, koja bi se nalazila na ekvivalentnom kondenzatoru C_e:

$$Q_e=U_{AB}\cdot C_e=80\text{ V}\cdot 7{,}5\cdot 10^{-12}\text{F}=600\text{ pC}.$$

Pošto vezu kondenzatora čini kondenzator C_5 redno vezan sa grupom kondenzatora C_{1234}, količina naelektrisanja na ova dva kondenzatora je zakođe Q_e:

$$Q_5=Q_{1234}=Q_e=600\text{ pC}.$$

Na osnovu toga možemo odrediti traženi napon na kondenzatoru C_5:

$$U_5=U_{DB}=\frac{Q_5}{C_5}=\frac{600\cdot 10^{-12}\text{C}}{10\cdot 10^{-12}\text{F}}=60\text{ V}.$$

c) Pošto znamo napon U_{DB} možemo odrediti napon U_{AD}, što je napon na paralelnoj vezi grupe kondenzatora C_{12} i C_{34}:

$$U_{AD}=V_A-V_D=V_A-V_B-V_D+V_B=(V_A-V_B)-(V_D-V_B)=U_{AB}-U_{DB}=80\text{ V}-60\text{ V}=20\text{ V}.$$

(Vezu između napona U_{AB}, U_{DB} i U_{AD} izveli smo slično kao u zadatku I.3.9.)

Na osnovu ovog napona možemo odrediti količinu naelektrisanja na grupi kondenzatora C_{12}, koju čini redna veza kondenzatora C_1 i C_2. Ta količina naelektrisanja ujedno predstavlja količinu naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima:

$$Q_{12}=Q_1=Q_2=U_{AD}\cdot C_{12}=20\text{ V}\cdot 10\cdot 10^{-12}\text{F}=200\text{ pC}.$$

Odatle dobijamo traženu energiju na kondenzatoru C_2:

$$W_{e2}=\frac{Q_2^{\,2}}{2C_2}=\frac{Q_{12}^{\,2}}{2C_2}=\frac{\left(200\cdot 10^{-12}\text{C}\right)^2}{2\cdot 30\cdot 10^{-12}\text{F}}=666{,}7\text{ pJ}$$

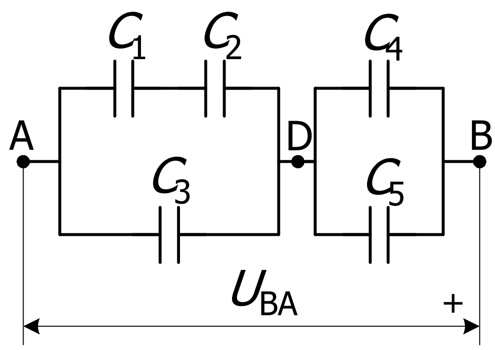
I.7.11. Veza kondenzatora prikazana na slici priključena je na napon U_{BA} = 60 V. Kapacitivnosti kondenzatora su:

C_1 = 10 pF, C_2 = 30 pF, C_3 = 12,5 pF,

C_4 = 10 pF, C_5 = 20 pF.

a) Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost veze C_e.

b) Izračunati napone, količine naelektrisanja i energije svih kondenzatora.



Rešenje:

a) Ekvivalentnu kapacitivnost određujemo postupno, kao u prethodnim zadacima:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10\text{ pF} \cdot 30\text{ pF}}{10\text{ pF} + 30\text{ pF}} = 7{,}5\text{ pF}$$

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = 7{,}5\text{ pF} + 12{,}5\text{ pF} = 20\text{ pF}$$

$$C_{45} = C_4 + C_5 = 10\text{ pF} + 20\text{ pF} = 30\text{ pF}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{12345}} = \frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_{45}} \quad \Rightarrow \quad C_e = C_{12345} = \frac{C_{123} C_{45}}{C_{123} + C_{45}} = \frac{20\text{ pF} \cdot 30\text{ pF}}{20\text{ pF} + 30\text{ pF}} = 12\text{ pF}$$

b) Pošto znamo napon U_{BA} i ekvivalentnu kapacitivnost C_e možemo odrediti količinu naelektrisanja na ekvivalentnom kondenzatoru:

$$Q_e = U_{BA} \cdot C_e = 60\text{V} \cdot 12 \cdot 10^{-12}\text{F} = 720\text{ pC}.$$

Ekvivalentni kondenzator C_e čini redna veza grupe kondenzatora C_{123} i C_{45}, pa će izračunata količina naelektrisanja biti ujedno i količina naelektrisanja na kondenzatorima C_{123} i C_{45}:

$$Q_{123} = Q_{45} = Q_e = 720\text{ pC}.$$

Na osnovu poznate količine naelektisanja na kondenzatoru C_{45} određujemo napon na tom kondenzatoru, koji je istovremeno napon na paralelno vezanim kondenzatorima C_4 i C_5:

$$U_4 = U_5 = U_{BD} = \frac{Q_e}{C_{45}} = \frac{Q_{45}}{C_{45}} = \frac{720 \cdot 10^{-12}\text{C}}{30 \cdot 10^{-12}\text{F}} = 24\text{ V}.$$

Količine naelektrisanja na ova dva kondenzatora su:

$$Q_4 = U_4 \cdot C_4 = U_{DB} \cdot C_4 = 24\text{ V} \cdot 10 \cdot 10^{-12}\text{F} = 240\text{ pC},$$

$$Q_5 = U_5 \cdot C_5 = U_{DB} \cdot C_5 = 24\text{ V} \cdot 20 \cdot 10^{-12}\text{F} = 480\text{ pC},$$

a mora da važi (što je provera da li smo negde pogrešili):

$$Q_{45} = Q_4 + Q_5 = 240\text{ pC} + 480\text{ pC} = 720\text{ pC}.$$

Pošto znamo sve parametre kondenzatora C_4 i C_5 energiju možemo računati pomoću bilo koje formule za energiju, na primer:

$$W_{e4} = \frac{1}{2} Q_4 U_4 = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 10^{-12}\text{C} \cdot 24\text{ V} = 2{,}88\text{ nJ},$$

$$W_{e5} = \frac{1}{2} Q_5 U_5 = \frac{1}{2} \cdot 480 \cdot 10^{-12}\text{C} \cdot 24\text{ V} = 5{,}76\text{ nJ}.$$

Napon na kondenzatoru C_{123}, odnosno na paralelno vezanim kondenzatorima C_{12} i C_3, dobijamo na osnovu poznate količine naelektrisanja:

$$U_3 = U_{\mathrm{DA}} = \frac{Q_\mathrm{e}}{C_{123}} = \frac{Q_{123}}{C_{123}} = \frac{720 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{20 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}} = 36\ \mathrm{V}\,.$$

(Proveravamo da važi $U_{\mathrm{BA}} = U_{\mathrm{DA}} + U_{\mathrm{BD}} = 36\ \mathrm{V} + 24\ \mathrm{V} = 60\ \mathrm{V}$.)

Tada je količina naelektrisanja na kondenzatoru C_3:

$$Q_3 = U_3 \cdot C_3 = U_{\mathrm{DA}} \cdot C_3 = 36\ \mathrm{V} \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 450\ \mathrm{pC}\,,$$

pa je energija:

$$W_{\mathrm{e}3} = \frac{1}{2} Q_3 U_3 = \frac{1}{2} \cdot 450 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \cdot 36\ \mathrm{V} = 8{,}1\ \mathrm{nJ}\,.$$

Količina naelektrisanja na kondenzatoru C_{12}, odnosno redno vezanim kondenzatorima C_1 i C_2, je:

$$Q_{12} = Q_1 = Q_2 = U_{\mathrm{AD}} \cdot C_{12} = 36\ \mathrm{V} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 270\ \mathrm{pC}\,,$$

pa su naponi na pojedinim kondenzatorima:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_{12}}{C_1} = \frac{270 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{10 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}} = 27\ \mathrm{V}\,,$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_{12}}{C_2} = \frac{270 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{30 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}} = 9\mathrm{V}\,,$$

pri čemu treba voditi računa da su pozitivni krajevi napona na svim kondenzatorima sa desne strane kondenzatora (napon U_{BA} je pozitivan).

(Proveravamo da važi:

$$U_{\mathrm{DA}} = U_1 + U_2 = 27\ \mathrm{V} + 9\ \mathrm{V} = 36\ \mathrm{V}$$

$$Q_\mathrm{e} = Q_{123} = Q_{12} + Q_3 = 270\ \mathrm{pC} + 450\ \mathrm{pC} = 720\ \mathrm{pC}\,.)$$

Energije su:

$$W_{\mathrm{e}1} = \frac{1}{2} Q_1 U_1 = \frac{1}{2} \cdot 270 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \cdot 36\ \mathrm{V} = 4{,}86\ \mathrm{nJ}\,.$$

$$W_{\mathrm{e}2} = \frac{1}{2} Q_2 U_2 = \frac{1}{2} \cdot 270 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \cdot 9\ \mathrm{V} = 1{,}215\ \mathrm{nJ}\,.$$

I.7.12. Veza kondenzatora prikazana na slici priključena je na napon U_{AB} = 50 V. Kapacitivnosti kondenzatora su:

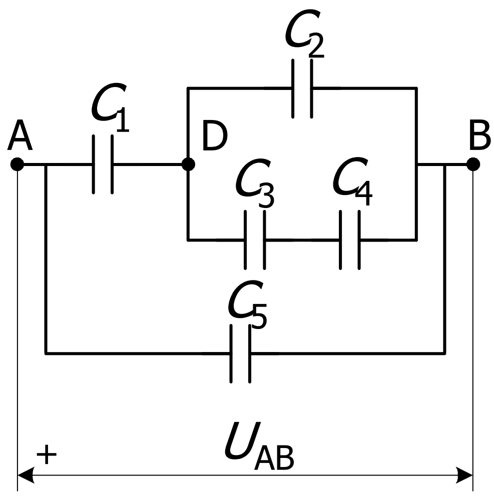
C_1 = 20 pF, C_2 = 12 pF, C_3 = 40 pF,

C_4 = 18 pF, C_5 = 15 pF.

a) Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost veze C_e.

b) Izračunati napon U_1 na kondenzatoru C_1.

c) Izračunati energiju W_{e4} kondenzatora C_4.



Rešenje:

a)
$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \quad \Rightarrow \quad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{40\text{ pF} \cdot 18\text{ pF}}{40\text{ pF} + 18\text{ pF}} = 12{,}41\text{ pF}$$

$$C_{234} = C_2 + C_{34} = 12\text{ pF} + 12{,}41\text{ pF} = 24{,}41\text{ pF}$$

$$\frac{1}{C_{1234}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} \quad \Rightarrow \quad C_{1234} = \frac{C_1 C_{234}}{C_1 + C_{234}} = \frac{20\text{ pF} \cdot 24{,}42\text{ pF}}{20\text{ pF} + 24{,}41\text{ pF}} = 11\text{ pF}$$

$$C_e = C_{12345} = C_{1234} + C_5 = 11\text{ pF} + 15\text{ pF} = 26\text{ pF}$$

b)
$$Q_{1234} = Q_1 = Q_{234} = U_{AB} \cdot C_{1234} = 50\text{ V} \cdot 11 \cdot 10^{-12}\text{F} = 550\text{ pC}$$

$$U_1 = U_{AD} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_{1234}}{C_1} = \frac{550 \cdot 10^{-12}\text{C}}{20 \cdot 10^{-12}\text{F}} = 27{,}5\text{ V}$$

c)
$$U_{DB} = U_{AB} - U_{AD} = 22{,}5\text{ V}$$

$$Q_{34} = Q_3 = Q_4 = U_{DB} \cdot C_{34} = 22{,}5\text{ V} \cdot 12{,}41\text{ pF} = 279{,}22\text{ pC}$$

$$W_{e4} = \frac{Q_4^{\,2}}{2C_4} = \frac{Q_{34}^{\,2}}{2C_4} = \frac{\left(279{,}22 \cdot 10^{-12}\text{C}\right)^2}{2 \cdot 18 \cdot 10^{-12}\text{F}} = 2{,}16\text{ nJ}$$

I.7.13. Za kolo na slici poznato je:

$C_1 = 60\,\mu\text{F}$, $C_2 = 15\,\mu\text{F}$,

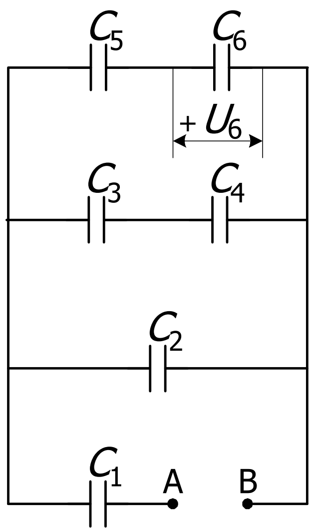
$C_4 = 10\,\mu\text{F}$, $C_5 = 30\,\mu\text{F}$, $C_6 = 15\,\mu\text{F}$.

Napon na kondenzatoru C_6 je U_6 = 5 V,
dok je elektrostatička energija kondenzatora C_4
$W_{e4} = 45 \cdot 10^{-4}$ J.

a) Odrediti kapacitivnost kondenzatora C_3.

b) Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost veze C_e.

c) Izračunati napon U_{AB}.



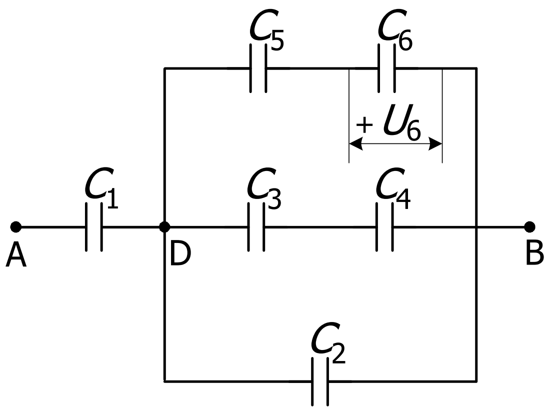
Rešenje:

a) Na slici I.7.13.1 prikazana je šema kola iz zadatka, na kojoj je jednostavnije sagledati veze kondenzatora. Na osnovu poznatog napona na kondenzatoru C_6 određujemo količinu naelektrisanja na ovom kondenzatoru. Pošto su kondenzatori C_5 i C_6 vezani redno količine naelektrisanja na njima su iste:

$$Q_6 = Q_5 = Q_{56} = U_6 \cdot C_6 = 40\ \text{V} \cdot 15 \cdot 10^{-6}\,\text{F} = 600\ \mu\text{C}$$

Iz poznate količine naelektrisanja određujemo napon na kondenzatoru C_5:

$$U_5 = \frac{Q_5}{C_5} = \frac{Q_{56}}{C_5} = \frac{600 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{30 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 20\ \text{V}\,.$$



Slika I.7.13.1

Napon U_{DB} određujemo kao zbir napona U_5 i U_6 (vodeći računa o referentnim smerovima napona):

$$U_{DB} = U_5 + U_6 = 60\ \text{V}\,,$$

Iz poznate energije kondenzatora C_4 možemo odrediti napon i naelektrisanje ovog kondenzatora:

$$W_{e4} = \frac{1}{2} C_4 \cdot U_4^2 \quad \Rightarrow \quad U_4 = \sqrt{\frac{2W_{e4}}{C_4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \cdot 10^{-4}\,\text{J}}{10 \cdot 10^{-6}\,\text{F}}} = 30\ \text{V}\,,$$

$$Q_4 = C_4 \cdot U_4 = 10 \cdot 10^{-6}\,\text{F} \cdot 30\ \text{V} = 300\ \mu\text{C}\,.$$

Pošto su kondenzatori C_3 i C_4 vezani redno, količina naelektrisanja na njima je ista, pa je:

$$Q_3 = Q_4 = Q_{34} = 300\ \mu\text{C}\,.$$

Kako je napon U_{AD} jednak zbiru napona na kondenzatorima C_3 i C_4, možemo izračunati napon na otproniku C_3:

$$U_3 = U_{AD} - U_4 = 30\ \text{V}\,.$$

Na osnovu poznatog napona i količine naelektrisanja na kondenzatoru C_3, možemo odrediti njegovu kapacitivnost:

$$C_3 = \frac{Q_3}{U_3} = \frac{300 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{30\ \text{V}} = 10\ \mu\text{C}\,.$$

b)

$$\frac{1}{C_{56}} = \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} \quad \Rightarrow \quad C_{56} = \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6} = \frac{30\ \mu\text{F} \cdot 15\ \mu\text{F}}{30\ \mu\text{F} + 15\ \mu\text{F}} = 10\ \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \quad \Rightarrow \quad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{10\ \mu\text{F} \cdot 15\ \mu\text{F}}{10\ \mu\text{F} + 15\ \mu\text{F}} = 5\ \mu\text{F}$$

$$C_{23456} = C_2 + C_{34} + C_{56} = 15\ \mu\text{F} + 5\ \mu\text{F} + 10\ \mu\text{F} = 30\ \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{123456}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23456}} \quad \Rightarrow \quad C_e = C_{123456} = \frac{C_1 C_{23456}}{C_1 + C_{23456}} = \frac{60\ \mu\text{F} \cdot 30\ \mu\text{F}}{60\ \mu\text{F} + 30\ \mu\text{F}} = 20\ \mu\text{F}$$

c) S obzirom da nam je poznata ekvivalentna kapacitivnost C_{23456} i napon U_{AD} na toj kapacitivnosti možemo odrediti ukupnu količinu naelektrisanja:

$$Q_{23456} = C_{23456} \cdot U_{DB} = 30 \cdot 10^{-6}\,\text{F} \cdot 60\ \text{V} = 1800\ \mu\text{C}.$$

Kapacitivnost C_{23456} je vezana redno sa kondenzatorom C_1 pa su količine naelektrisanja na njima iste:

$$Q_1 = Q_{23456} = 1800\ \mu\text{C}.$$

Iz poznate količine naelektrisanja na kondenzatoru C_1 i njegove kapacitivnosti možemo odrediti napon na ovom kondenzatoru:

$$U_{AD} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_{23456}}{C_1} = \frac{1800 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{60 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 30\ \text{V},$$

pa je:

$$U_{AB} = U_{AD} + U_{DB} = 30\ \text{V} + 60\ \text{V} = 90\ \text{V}.$$

I.7.14. Kapacitivnosti kondenzatora vezanih kao na slici su:

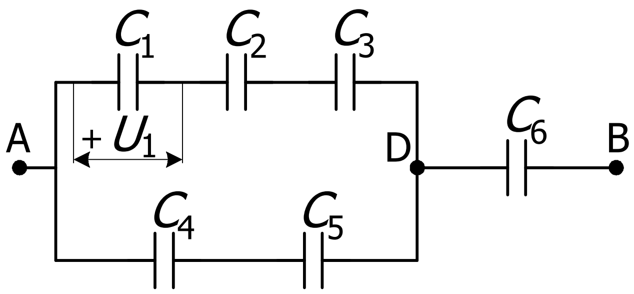
$C_1 = 20\ \mu\text{F}$, $C_2 = 20\ \mu\text{F}$, $C_3 = 10\ \mu\text{F}$,

$C_4 = 15\ \mu\text{F}$, $C_5 = 30\ \mu\text{F}$, $C_6 = 10\ \mu\text{F}$.

Napon na kondenzatoru C_1 je $U_1 = 5$ V.

a) Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost veze C_e.

b) Izračunati napon U_{AB}, kao i napone i količine naelektrisanja svih kondenzatora.



Rešenje:

a) $$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = 0{,}05\frac{1}{\mu\text{F}} + 0{,}05\frac{1}{\mu\text{F}} + 0{,}1\frac{1}{\mu\text{F}} = 0{,}2\frac{1}{\mu\text{F}} \quad \Rightarrow \quad C_{123} = \frac{1}{0{,}2\frac{1}{\mu\text{F}}} = 5\ \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_{45}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} \quad \Rightarrow \quad C_{45} = \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5} = \frac{15\ \mu\text{F} \cdot 30\ \mu\text{F}}{15\ \mu\text{F} + 30\ \mu\text{F}} = 10\ \mu\text{F}$$

$$C_{12345} = C_{123} + C_{45} = 5\ \mu\text{F} + 10\ \mu\text{F} = 15\ \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{123456}} = \frac{1}{C_{12345}} + \frac{1}{C_6} \quad \Rightarrow \quad C_e = C_{123456} = \frac{C_{12345} C_6}{C_{12345} + C_6} = \frac{15\ \mu\text{F} \cdot 10\ \mu\text{F}}{15\ \mu\text{F} + 10\ \mu\text{F}} = 6\ \mu\text{F}$$

b) Zadat je napon na kondenzatoru C_1 pa možemo odrediti količinu naelektrisanja na tom kondenzatoru. Pošto je C_1 vezan redno sa kondenzatorima C_2 i C_3 količina naelektrisanja na sva tri kondenzatora je ista i jednaka količini naelektrisanja na ekvivalentnom kondenzatoru C_{123}:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_{123} = U_1 \cdot C_1 = 5\ \text{V} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\,\text{F} = 100\ \mu\text{C}.$$

Iz poznate količine naelektrisanja određujemo napone na kondenzatorima C_2 i C_3:

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_{123}}{C_2} = \frac{100 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{20 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 5\ \text{V},$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_{123}}{C_3} = \frac{100 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{10 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 10\ \text{V}.$$

Napon U_{AD} određujemo preko zbira napona U_1, U_2 i U_3:

$$U_{\text{AD}} = U_1 + U_2 + U_3 = 20\ \text{V},$$

a to je ujedno napon na kapacitivnosti C_{45}, koju čini redna veza kondenzatora C_4 i C_5, pa odatle određujemo količinu naelektrisanja:

$$Q_{45} = Q_4 = Q_5 = U_{\text{AD}} \cdot C_{45} = 20\ \text{V} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\text{F} = 200\ \mu\text{C}.$$

Iz poznate količine naelektrisanja određujemo napone na kondenzatorima C_4 i C_5:

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_{45}}{C_4} = \frac{200 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{15 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 13{,}33\ \text{V},$$

$$U_5 = \frac{Q_5}{C_5} = \frac{Q_{45}}{C_5} = \frac{200 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{30 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 6{,}67\ \text{V}.$$

(Provera: $U_{\text{AD}} = U_4 + U_5 = 13{,}33\ \text{V} + 6{,}67\ \text{V} = 20\ \text{V}$.)

Ukupna količina naelektrisanja na paralelnoj vezi kondenzatora C_{123} i C_{45} jednaka je zbiru količina naelektrisanja na pojedinim kondenzatorima, a to je ujedno i količina naelektrisanja na kondenzatoru C_6 koji je redno vezan sa ovom paralelnom vezom:

$$Q_{12345} = Q_{123} + Q_{45} = 100\ \mu\text{C} + 200\ \mu\text{C} = 300\ \mu\text{C} = Q_6.$$

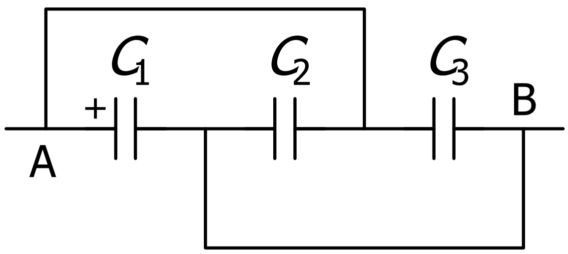
$$U_6 = U_{\text{DB}} = \frac{Q_6}{C_6} = \frac{300 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{10 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 30\ \text{V}$$

$$U_{\text{AB}} = U_{\text{AD}} + U_{\text{DB}} = 20\ \text{V} + 30\ \text{V} = 50\ \text{V}$$

I.7.15. Kondenzatori kapacitivnosti $C_1 = 10$ pF, $C_2 = 20$ pF i $C_3 = 50$ pF vezani su u grupu kao na slici. Odrediti:

a) ekvivalentnu kapacitivnost veze C_e između tačaka A i B;

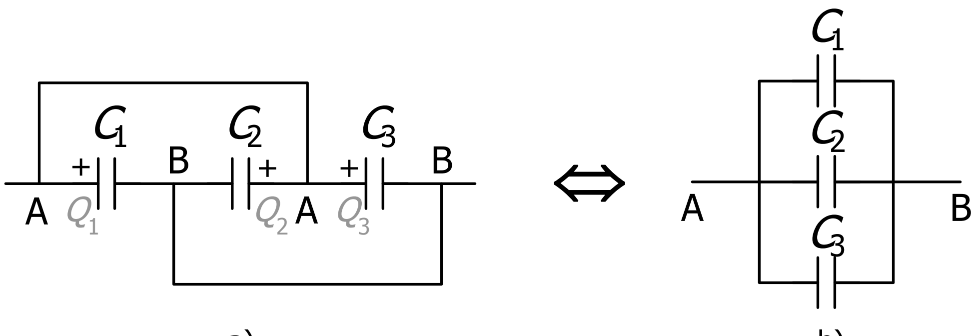
b) napon U_{AB} ako je naelektrisanje na pozitivnoj elektrodi kondenzatora C_1 $Q_1 = 100$ pC. Takođe odrediti količine naelektrisanja na kondenzatorima C_2 i C_3.



Rešenje:

a) Tačka između kondenzatora C_1 i C_2 spojena je provodnikom sa tačkom B, pa je ta tačka istog potencjala kao tačka B i zato je možemo obeležiti sa B (slika I.7.15.1a). Isto tako, tačka između kondenzatora C_2 i C_3 spojena je provodnikom sa tačkom A, pa je ta tačka istog potencjala kao tačka A i obeležićemo je sa A. Dakle, jedna elektroda svakog kondenzatora je vezana za tačku A (potencijala V_A), a druga za tačku B (potencijala V_B), pa su ova tri kondenzatora vezana paralelno (slika I.7.15.1b), a napon na svakom kondenzatoru je U_{AB}. Ekvivalentna kapacitivnost je:

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 = 10 \text{ pF} + 20 \text{ pF} + 50 \text{ pF} = 80 \text{ pF}.$$



Slika I.7.15.1

b) Na osnovu prethodnog je:

$$U_1 = U_{AB} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{100 \cdot 10^{-12}\text{C}}{10 \cdot 10^{-12}\text{F}} = 10 \text{ V},$$

pa je:

$$Q_2 = U_{AB} \cdot C_2 = 10 \text{ V} \cdot 20 \cdot 10^{-12}\text{F} = 200 \text{ pC},$$

$$Q_3 = U_{AB} \cdot C_3 = 10 \text{ V} \cdot 50 \cdot 10^{-12}\text{F} = 500 \text{ pC}.$$

Na slici I.7.15 znakom "+" obeležene su pozitivne elektrode kondenzatora.

METALNA PLOČA U VAZDUŠNOM KONDENZATORU

I.7.16. Rastojanje između elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora je $d = 3$ mm, a površina elektroda je $S = 9\ \text{cm}^2$.

a) Odrediti kapacitivnost kondenzatora C_0.

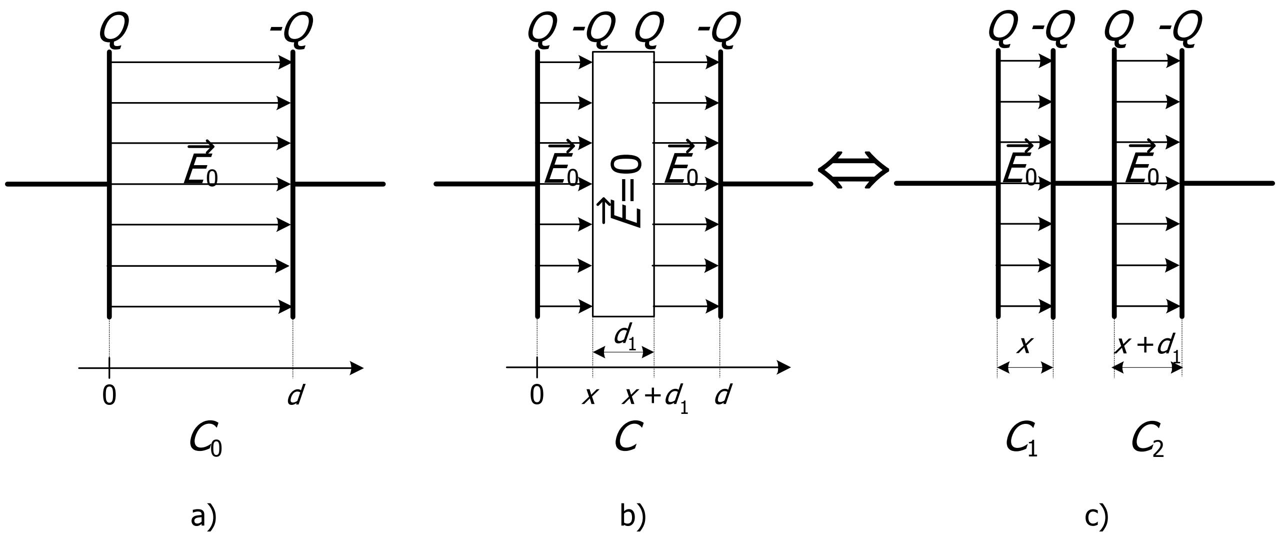
b) Odrediti kapacitivnost kondenzatora C posle ubacivanja metalne ploče debljine $d_1 = 1$ mm između elektroda paralelno sa njima (površina ploče je jednaka površini elektroda).

Rešenje:

a) Kapacitivnost pločastog vazdušnog kondenzatora računamo kao u zadatku I.7.1:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 2{,}65\ \text{pF}$$

b) U poglavlju I.5 rekli smo da se unošenjem provodnika u elektrostatičko polje to polje tako promeni da linije polja uvek budu normalne na površinu provodnika, uz površinu provodnika se izdvajaju slobodna naelektrisanja (elektrostatička indukcija), a u samom provodniku je električno polje jednako nuli. Ako provodnik postavimo normalno na prvobitne linije električnog polja izvan provodnika se električno polje neće promeniti. To je upravo slučaj u ovom zadatku, kao što je prikazano na slici I.7.16. Uz površinu provodnika koja je bliža pozitivnoj elektrodi, količine naelektrisanja Q, izdvojiće se isto toliko negativno naelektrisanje, a uz površinu provodnika koja je bliža negativnoj elektrodi izdvojiće se isto toliko pozitivno naelektrisanje (što se može dokazati primenom Gausovog zakona), slika I.7.16.1b.



Slika I.7.16.1

Dakle, električno polje u kondenzatoru pre unošenja provodnika je bilo:

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

a pošto je metalna ploča postavljena normalno na linije polja isto toliko polje ostaje u delu kondenzatora ispunjenom vazduhom i posle unošenja metalne ploče.

Napon između ploča kondenzatora računamo na isti način kao u zadatku I.7.1, s tom razlikom što je polje u metalnoj ploči jednako nuli:

$$U = V_+ - V_- = \int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{x} = \int_0^x \vec{E}_0 \cdot d\vec{x} + \int_x^{x+d_1} \overbrace{\vec{E}}^{0} \cdot d\vec{x} + \int_{x+d_1}^{d} \vec{E}_0 \cdot d\vec{x} =$$

$$= \int_0^x E_0 \cdot dl\, \overbrace{\cos\left(\vec{E}_0, d\vec{x}\right)}^{1} + \int_{x+d_1}^{d} E_0 \cdot dl\, \overbrace{\cos\left(\vec{E}_0, d\vec{x}\right)}^{1} = \int_0^x E_0 \cdot dx + \int_{x+d_1}^{d} E_0 \cdot dx = E_0\left(\int_0^x dx + \int_{x+d_1}^{d} dx\right) =$$

$$= E_0\left(x - 0 + d - \left(x + d_1\right)\right) = E_0\left(d - d_1\right) = \frac{Q\cdot\left(d-d_1\right)}{S\cdot\varepsilon_0}.$$

Kapacitivnost kondenzatora se promenila i sada je:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\dfrac{Q\cdot\left(d-d_1\right)}{S\cdot\varepsilon_0}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d-d_1} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot\frac{9\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{(3-1)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 3{,}89\ \mathrm{pF}.$$

Dakle, možemo zaključiti da kapacitivnost pločastog kondenzatora, u koji je ubačena metalna ploča paralelno sa elektrodama (iste površine kao elektrode), zavisi od debljine metalne ploče, ali ne i od mesta na koje je postavljena. (Ovo važi i za pločaste kondenzatore sa dielektrikom.)

S obzirom da u metalnoj ploči nema električnog polja ovaj kondenzator se može predstaviti rednom vezom dva pločasta vazdušna kondenzatora istih dimenzija elektroda, a rastojanja između elektroda x i $d-\left(x+d_1\right)$, kao što je prikazano na slici I.7.16.1c:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

gde su:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x} \text{ i } C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{\left(d-\left(x+d_1\right)\right)}.$$

Zamenom ovih izraza za C_1 i C_2 u izraz za C, dobija se već izveden obrazac za C, što se ostavlja studentima da dokažu matematički.

I.7.17. Rastojanje između elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora je d = 5 mm, a površina elektroda je S. Kapacitivnost kondenzatora je C_0 = 100 pF. Između ploča kondenzatora, paralelno sa njima, ubaci se metalna ploča debljine d_1 = 2 mm.

a) Odrediti promenu energije ΔW_e i promenu napona na kondenzatoru ΔU, ako je kondenzator bio priključen na napon U_0 = 1000V, posle opterećivanja isključen i zatim ubačena metalna ploča.

b) Odrediti promenu energije ΔW_e i promenu količine naelektrisanja na elektrodama kondenzatora ΔQ, ako je kondenzator sve vreme priključen na napon U_0 = 1000 V.

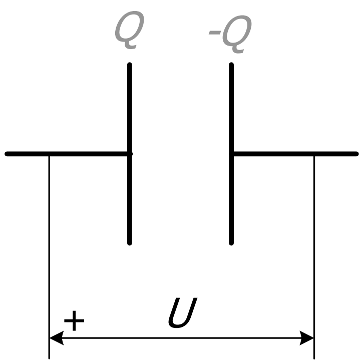
Rešenje:

Imajući na umu vezu između količine naelektrisanja na elektrodama kondenzatora, napona između njih i kapacitivnosti:

$$C = \frac{Q}{U}$$

možemo zaključiti da kada je jedna od tih veličina konstantna, ako se druga promeni, mora i treća da se pomeni. Najčešći je slučaj da se ne menja kapacitivnost kondenzatora, a u zavisnosti od promene napona na koji smo ga vezali njegove elektrode se dopune odgovarajućom količinom naelektrisanja, tako da je odnos ove dve veličine uvek konstantan i jednak kapacitivnosti. Međutim, u ovom zadatku se upravo menja kapacitivnost. Na osnovu prethodnog zadatka znamo da se kapacitivnost pločastog kondenzatora promeni kada između elektroda unesemo metalnu ploču. Uopšte, promenom oblika ili dielektrika pločastog kondenzatora menja mu se kapacitivnost. Tada razlikujemo dva slučaja:

– kondenzator je isključen od izvora napajanja; tada je količina naelektrisanja na njegovim elektrodama konstantna jer nema kuda da dotekne ili odtekne naelektrisanje:

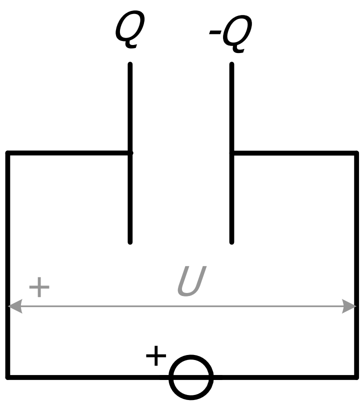


$$Q = C \cdot U = const$$

Slika I.7.17.1

Da bi količina naelektrisanja, kao proizvod ove dve veličine, ostala konstantna, koliko puta poraste kapacitivnost kondenzatora toliko puta mora da se smanji napon na kondenzatoru, i obrnuto.

– kondenzator je priključen na stalni napon, pa je, dakle, napon između elektroda kondenzatora konstantan:



$$U = \frac{Q}{C} = const$$

Slika I.7.17.2

Da bi napon, kao količnik ove dve veličine, ostao konstantan, koliko puta se poveća kapacitivnost toliko puta mora da se smanji količina naelektrisanja, i obrnuto. Ova razlika naelektrisanja dotekne, odnosno otekne kroz izvor.

Prvi deo zadatka i pod a) i pod b) je isti: kondenzator kapacitivnosti C_0 = 100 pF je priključen na konstantan napon U_0 = 1000 V i tada je količina naelektrisanja na njegovim elektrodama:

$$Q_0 = C_0 \cdot U_0 = 100 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot 1000\text{ V} = 100\text{ nC},$$

a energija je:

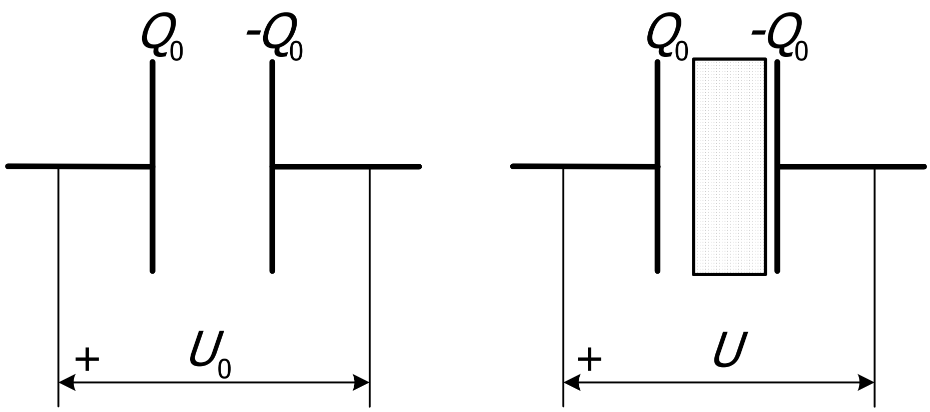
$$W_{e0} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C_0} = \frac{1}{2}C_0 U_0^{\,2} = 50\ \mu\text{J}.$$

Posle ubacivanja metalne ploče kapacitivnost kondenzatora je na osnovu prethodnog zadatka:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{(d-d_1)} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\frac{d}{(d-d_1)} = C_0 \cdot \frac{d}{(d-d_1)} = C_0 \cdot \frac{5\text{ mm}}{3\text{ mm}} = \frac{5}{3}C_0 = \frac{5 \cdot 100\text{ pF}}{3} = 166{,}7\text{ pF}.$$

Dakle, posle ubacivanja metalne ploče kapacitivnost se povećala.

a)



Slika I.7.17.3

Ovaj deo zadatka pripada prvom slučaju, kada je količina naelektrisanja konstantna:

$$Q = C \cdot U = const = Q_0 = C_0 \cdot U_0.$$

Iz ove relacije možemo odrediti novi napon na kondenzatoru:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} = \frac{C_0 U_0}{C} = \frac{C_0}{C}U_0 = \frac{C_0}{\frac{5}{3}C_0}U_0 = \frac{3}{5}U_0 = \frac{3}{5} \cdot 1000\text{ V} = 600\text{ V},$$

gde smo iskoristili vezu između nove i stare kapacitivnosti, izvedenu u prvom delu zadatka.
Rezultat je očekivan: kapacitivnost ser povećala $\frac{5}{3}$ puta pa se napon na kondenzatoru smanjio $\frac{5}{3}$ puta. Promena napona na kondenzatoru je:

$$\Delta U = U - U_0 = 600\text{ V} - 1000\text{ V} = -400\text{ V},$$

pri čemu promenu neke veličine računamo kao razliku krajnje i početne vrednosti te veličine.

Mada su nam poznati svi parametri radi lakšeg poređenja za energiju ćemo koristiti izraz u kome figuriše jedina konstantna veličina, količina naelektrisanja:

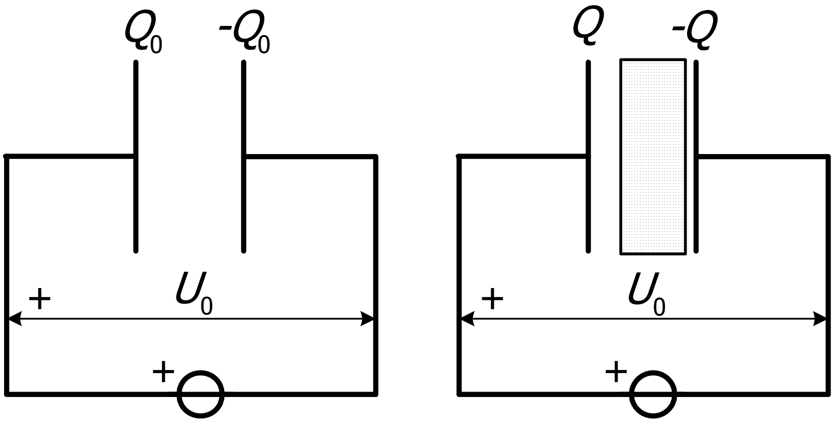
$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C_0}\frac{C_0}{C} = \frac{C_0}{C}W_{e0} = \frac{C_0}{\frac{5}{3}C_0}W_{e0} = \frac{3}{5}W_{e0} = 30\ \mu\text{J}.$$

(Naravno, i napon i energija su se mogli izračunati u jednom koraku prostom zamenom poznatih veličina, ali je rađeno na komplikovaniji način da bi se došlo do izraza koji direktno pokazuju da se napon i energija smanje onoliko puta koliko se kapacitivnost povećala.)

Promena energije sadržane u kondenzatoru je:

$$\Delta W_{\mathrm{e}} = W_{\mathrm{e}} - W_{\mathrm{e0}} = 30\ \mu\mathrm{J} - 50\ \mu\mathrm{J} = -20\ \mu\mathrm{J}.$$

b)



Slika I.7.17.4

Ovaj deo zadatka pripada drugom slučaju, kada je napon konstantan:

$$U = \frac{Q}{C} = const = \frac{Q_0}{C_0} = U_0 .$$

Slično kao u prethodnom delu zadatka, iz ove relacije možemo odrediti novu količinu naelektrisanja na kondenzatoru:

$$Q = C \cdot U = C \cdot U_0 = C \cdot \frac{Q_0}{C_0} = \frac{C}{C_0} Q_0 = \frac{\frac{5}{3} C_0}{C_0} Q_0 = \frac{5}{3} Q_0 = \frac{5}{3} \cdot 100\ \mathrm{nC} = 166{,}7\ \mathrm{nC}.$$

Rezultat je očekivan: kapacitivnost se povećala $\frac{5}{3}$ puta pa se i količina naelektrisanja povećala $\frac{5}{3}$ puta. Promena količine naelektrisanja je:

$$\Delta Q = Q - Q_0 = 166{,}7\ \mathrm{nC} - 100\ \mathrm{nC} = 66{,}7\ \mathrm{nC}.$$

I ovde ćemo radi lakšeg poređenja za energiju koristiti izraz u kome figuriše jedna konstantna veličina, napon:

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} C \cdot U_0^{\,2} = \frac{1}{2} C_0 \cdot U_0^{\,2} \frac{C}{C_0} = \frac{C}{C_0} W_{\mathrm{e0}} = \frac{\frac{5}{3} C_0}{C_0} W_{\mathrm{e0}} = \frac{5}{3} W_{\mathrm{e0}} = 83{,}3\ \mu\mathrm{J}.$$

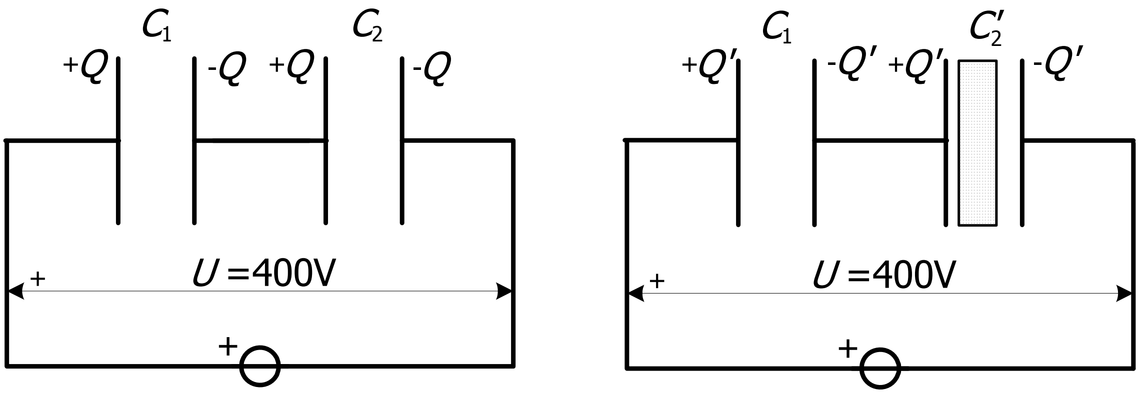
Promena energije sadržane u kondenzatoru je:

$$\Delta W_{\mathrm{e}} = W_{\mathrm{e}} - W_{\mathrm{e0}} = 83{,}3\ \mu\mathrm{J} - 50\ \mu\mathrm{J} = 33{,}3\ \mu\mathrm{J}.$$

Na ovaj način smo pokazali da su se količina naelektrisanja i energija povećali isto onoliko puta koliko se povećala kapacitivnost.

I.7.18. Dva ista pločasta vazdušna kondenzatora vezana su redno na napon $U = 400$ V. Površina elektroda kondenzatora je $S = 27\pi$ cm^2, a rastojanje između njih je $d = 4$ mm. Ako se između elektroda jednog od kondenzatora ubaci metalna ploča debljine $d/2$, odrediti promene količine naelektrisanja i ukupne energije sadržane u ovim kondenzatorima.

Rešenje:



Slika I.7.18.1

Na početku su oba kondenzatora ista i njihova kapacitivnost je:

$$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{27\pi \cdot 10^{-4}\text{m}^2}{4 \cdot 10^{-3}\text{m}} = \frac{3}{16} \cdot 10^{-10}\text{F} = 18{,}75 \text{ pF},$$

pri čemu smo iskoristili vrednost za dielektričnu konstantu vakuuma u obliku $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{F}}{\text{m}}$, koja je ovde pogodnija za izračunavanje.

Ekvivalentna kapacitivnost je :

$$C_\text{e} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 9{,}375 \text{ pF}.$$

Količina naelektrisanja na elektrodama svakog od kondenzatora, kao i ekvivalentnog kondenzatora, je:

$$Q = C_\text{e} \cdot U = 3{,}75 \text{ nC}.$$

Ukupna energija sadržana u kondenzatorima je:

$$W_\text{e} = \frac{1}{2} QU = 750 \text{ nJ}$$

Kada se između elektroda, na primer drugog kondenzatora ubaci metalna ploča, na osnovu prethodnih zadataka znamo da je njegova kapacitivnost:

$$C_2' = \varepsilon_0 \frac{S}{d - \frac{d}{2}} = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{d}{2}} = 2\varepsilon_0 \frac{S}{d} = 2C_2 = 37{,}5 \text{ pF}.$$

Nova ekvivalentna kapacitivnost je :

$$C_\text{e}' = \frac{C_1 C_2'}{C_1 + C_2'} = 12{,}5 \text{ pF}.$$

I količina naelektrisanja na kondenzatorima se promenila:

$$Q' = C'_{\mathrm{e}} \cdot U = 5\ \mathrm{nC},$$

pa je promena količine naelektrisanja:

$$\Delta Q = Q' - Q = 1{,}25\ \mathrm{nC}.$$

Ukupna energija sadržana u kondenzatorima se povećala:

$$W'_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} Q'U = 1000\ \mathrm{nJ},$$

pa je promena energije:

$$\Delta W_{\mathrm{e}} = W'_{\mathrm{e}} - W_{\mathrm{e}} = 1000\ \mathrm{nJ} - 750\ \mathrm{nJ} = 250\ \mathrm{nJ}.$$

KAPACITIVNOST I ENERGIJA PLOČASTOG KONDENZATORA SA DIELEKTRIKOM

I.7.19. Odrediti kapacitivnost pločastog kondenzatora ispunjenog dielektrikom relativne dielektrične konstante $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2$. Površina elektroda je S = 20 cm^2. Elektrode se nalaze na rastojanju d = 1 cm.

Rešenje:

Kada se u vazdušni pločasti kondenzator postavi dielektrik, relativne dielektrične konstante ε_{r}, kapacitivnost kondenzatora se poveća ε_{r} puta:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}.$$

Zamenom brojnih vrednosti u zadatku dobijamo:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 2 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}54 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 3{,}54\ \mathrm{pF}.$$

I.7.20. Rastojanje između elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora je d = 1 cm, a površina elektroda je S = 72π cm^2. Kondenzator se ubaci u ulje relativne dielektrične konstante $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 3$.

a) Odrediti promenu energije ΔW_{e} i promenu napona na kondenzatoru ΔU, ako je kondenzator bio priključen na napon U_0 = 1000V, posle opterećivanja isključen i zatim ubačen u ulje.

b) Odrediti promenu energije ΔW_{e} i promenu količine naelektrisanja na elektrodama kondenzatora ΔQ, ako je kondenzator sve vreme priključen na napon U_0 = 1000 V.

Rešenje:

Ovaj zadatak je sličan zadatku I.7.17, s tom razlikom što se u ovom zadatku kapacitivnost kondenzatora menja zbog ubacivanja dielektrika. Dakle, pre ubacivanja dielektrika kapacitivnost kondenzatora je bila:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{72\pi \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 20\ \mathrm{pF},$$

količina naelektrisanja na elektrodama:

$$Q_0 = C_0 \cdot U_0 = 20 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 1000\ \text{V} = 20\ \text{nC}\,,$$

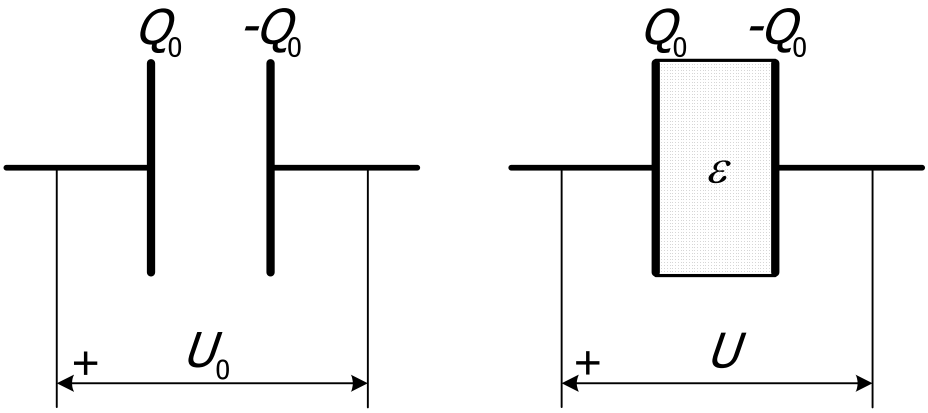
a energija:

$$W_{e0} = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C_0} = \frac{1}{2}C_0{U_0}^2 = 10\ \mu\text{J}\,.$$

Posle ubacivanja kondenzatora u ulje kapacitivnost se promenila:

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_0 = 3 \cdot 20\ \text{pF} = 60\ \text{pF}\,.$$

a)



Slika I.7.20.1

U ovom delu zadatka je konstantna količina naelektrisanja:

$$Q = C \cdot U = const = Q_0 = C_0 \cdot U_0\,.$$

Iz ove relacije možemo odrediti novi napon na kondenzatoru:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} = \frac{C_0U_0}{C} = \frac{C_0}{C}U_0 = \frac{C_0}{\varepsilon_r C_0}U_0 = \frac{1}{\varepsilon_r}U_0 = \frac{1}{3}\cdot 1000\ \text{V} = 333{,}3\ \text{V}\,,$$

gde smo iskoristili vezu između nove i stare kapacitivnosti, izvedenu u prvom delu zadatka. Dakle, kapacitivnost kondenzatora se povećala ε_r puta, pa se napon smanjio ε_r puta. Promena napona na kondenzatoru je:

$$\Delta U = U - U_0 = 333{,}3\ \text{V} - 1000\ \text{V} = -666{,}7\ \text{V}\,.$$

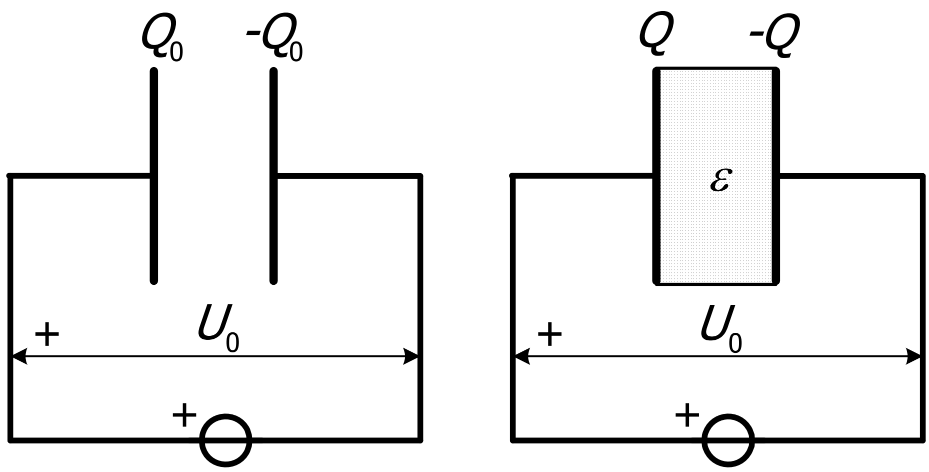
Energiju računamo preko obrasca u kome figuriše konstantna veličina – količina naelektrisanja:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C_0}\frac{C_0}{C} = \frac{C_0}{C}W_{e0} = \frac{C_0}{\varepsilon_r C_0}W_{e0} = \frac{1}{\varepsilon_r}W_{e0} = 3{,}3\ \mu\text{J}\,.$$

Vidimo da se i energija sadržana u kondenzatoru smanjila ε_r puta. Promena energije je:

$$\Delta W_e = W_e - W_{e0} = 3{,}3\ \mu\text{J} - 10\ \mu\text{J} = -6{,}7\ \mu\text{J}\,.$$

b)



Slika I.7.20.1

U ovom delu zadatka je konstantan napon:

$$U = \frac{Q}{C} = const = \frac{Q_0}{C_0} = U_0 .$$

Slično kao u prethodnom delu zadatka iz ove relacije možemo odrediti novu količinu naelektrisanja na kondenzatoru:

$$Q = C \cdot U = C \cdot U_0 = C \cdot \frac{Q_0}{C_0} = \frac{C}{C_0} Q_0 = \frac{\varepsilon_r C_0}{C_0} Q_0 = \varepsilon_r Q_0 = 3 \cdot 20 \text{ nC} = 60 \text{ nC} .$$

Kapacitivnost se povećala ε_r puta, pa se i količina naelektrisanja povećala ε_r puta. Promena količine naelektrisanja je:

$$\Delta Q = Q - Q_0 = 60 \text{ nC} - 20 \text{ nC} = 40 \text{ nC} .$$

I ovde ćemo radi lakšeg poređenja za energiju koristiti izraz u kome figuriše jedna konstantna veličina, napon:

$$W_e = \frac{1}{2} C \cdot U_0^{\ 2} = \frac{1}{2} C_0 \cdot U_0^{\ 2} \frac{C}{C_0} = \frac{C}{C_0} W_{e0} = \frac{\varepsilon_r C_0}{C_0} W_{e0} = \varepsilon_r W_{e0} = 30 \ \mu\text{J} .$$

Promena energije sadržane u kondenzatoru je:

$$\Delta W_e = W_e - W_{e0} = 30 \ \mu\text{J} - 10 \ \mu\text{J} = 20 \ \mu\text{J} .$$

Dakle, količina naelektrisanja i energija su se sada povećali isto onoliko puta koliko se povećala kapacitivnost.

I.7.21. Kada se u vazdušni pločasti kondenzator, koji je priključen na stalni napon *U*, ubaci dielektrik, energija kondenzatora se poveća 5 puta. Kolika je relativna dielektrična konstanta dielektrika?

Rešenje:

Kapacitivnost kondenzatora pre ubacivanja dielektrika je:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} ,$$

a za energiju ćemo koristiti izraz u kome figuriše napon koji je konstantan:

$$W_{e0} = \frac{1}{2} C_0 \cdot U^2 .$$

Kapacitivnost kondenzatora sa dielektrikom je:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_0 ,$$

a energija u tom slučaju je:

$$W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2 .$$

Odnos ove dve energije je:

$$\frac{W_e}{W_{e0}} = \frac{\frac{1}{2} C \cdot U^2}{\frac{1}{2} C_0 \cdot U^2} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon_r = 5 .$$

tj. energija se povećala ε_r puta po ubacivanju dielektrika. Dakle, relativna dielektrična konstanta dielektrika je $\varepsilon_r = 5$.

I.7.22. Naelektrisanje na pločama vazdušnog kondenzatora je *Q*, a kondenzator je odvojen od izvora napona. Energija kondenzatora se smanji 3 puta po ubacivanju dielektrika. Kolika je relativna dielektrična konstanta dielektrika?

Rešenje:

Kapacitivnost kondenzatora pre ubacivanja dielektrika je:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} ,$$

a za energiju ćemo koristiti izraz u kome figuriše količina naelektrisanja koja je konstantna:

$$W_{e0} = \frac{Q^2}{2C_0} .$$

Kapacitivnost kondenzatora sa dielektrikom je:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_0 ,$$

a energija u tom slučaju je:

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} .$$

Odnos ove dve energije je:

$$\frac{W_e}{W_{e0}} = \frac{\frac{Q}{2C}}{\frac{Q}{2C_0}} = \frac{C_0}{C} = \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{1}{3} ,$$

tj. energija se smanjila ε_r puta po ubacivanju dielektrika. Dakle, relativna dielektrična konstanta dielektrika je $\varepsilon_r = 3$.

I.7.23. Kada se u vazdušni pločasti kondenzator kapacitivnosti $C = 30$ pF, koji je priključen na stalni napon $U = 500$ V, ubaci dielektrik, energija kondenzatora se promeni za $\Delta W_\mathrm{e} = 7{,}5\ \mu\mathrm{J}$. Kolika je relativna dielektrična konstanta dielektrika?

Rešenje:

Kao u zadatku I.7.22 kapacitivnost i energija kondenzatora pre i posle ubacivanja dielektrika su:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d},$$

$$W_{\mathrm{e}0} = \frac{1}{2} C_0 \cdot U^2,$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{S}{d} = \varepsilon_\mathrm{r} C_0,$$

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} C \cdot U^2.$$

Razlika ove dve energije je

$$\Delta W = W_\mathrm{e} - W_{\mathrm{e}0} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 - \frac{1}{2} C_0 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_\mathrm{r} C_0 \cdot U^2 - \frac{1}{2} C_0 \cdot U^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_\mathrm{r} C_0 - C_0 \right) \cdot U^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_\mathrm{r} - 1 \right) C_0 \cdot U^2,$$

gde je iskorišćena činjenica da se kapacitivnost kondenzatora povećala ε_r puta. Iz ovog izraza se dobija izraz za relativnu dielektričnu konstantu dielektrika:

$$\varepsilon_\mathrm{r} = \frac{2 \cdot \Delta W}{C_0 \cdot U^2} + 1 = \frac{2 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}}{30 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot (500\ \mathrm{V})^2} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

TEST

I.1. Šta je Kulonova sila?
   a) elektrostatička sila
   b) magnetna sila
   c) gravitaciona sila

I.2. Šta je elektrostatička sila?
   a) sila kojom međusobno deluju naelektrisanja u mirovanju
   b) sila kojom deluju naelektrisanja koja se kreću
   c) sila kojom naelektrisanje koje miruje deluje na naelektrisanje koje se kreće

I.3. Koja je jedinica za Kulonovu silu? ________

I.4. Koja je jedinica za jačinu elektrostatičkog polja? _________

I.5. Koja je jedinica za elektrostatički potencijal? _________

I.6. Koja je jedinica za razliku elektrostatičkog potencijala? ______

I.7. Kakva je veličina Kulonova sila?
   a) skalarna
   b) vektorska

I.8. Kakva je veličina jačina električnog polja?
   a) skalarna
   b) vektorska

I.9. Kakva je veličina elektrostatički potencijal?
   a) skalarna
   b) vektorska

I.10. Kakva je veličina napon?
   a) skalarna
   b) vektorska

I.11. Da li elektrostatički potencijal zavisi od referentne tačke? ______

I.12. Da li napon zavisi od referentne tačke? _______

I.13. Koliki je napon između neke tačke A čiji je potencijal 5 V i referentne tačke u odnosu na koju se taj potencijal računa? ________

I.14. Ako je razlika potencijala dve tačke A i B, $V_A - V_B = 5$ V, koliki je napon U_{BA}? ________

I.15. Šta je količnik potencijalne energije i probnog opterećenja unetog u polje?
   a) Kulonova sila
   b) vektor jačine elektrostatičkog polja
   c) elektrostatički potencijal

I.16. Od čega zavisi kapacitivnost kondenzatora?
   a) od napona na koji je priključen i naelektrisanja na elektrodama
   b) od oblika i dimenzija kondenzatora i vrste dielektrika među elektrodama
   c) samo od vrste dielektrika između elektroda

I.17. Šta je probojni napon kondenzatora?
   a) napon pri kome kondenzator ima maksimalnu kapacitivnost
   b) maksimalni napon pri kome kondenzator još uvek ispravno radi
   c) minimalni napon pri kome kondenzator još uvek ispravno radi

I.18. Šta je kritično polje u dielektriku kondenzatora?
   a) polje pri kome dolazi do proboja dielektrika
   b) vrednost polja pri kojoj kondenzator ima maksimalnu kapacitivnost
   c) minimalno polje koje sme da postoji u kondenzatoru

I.19. Šta je polarizacija?
   a) pojava unošenja dielektrika u elektrostatičko polje
   b) pojava razdvajanja centara pozitivnog i negativnog naelektrisanja kada se dielektrik unese u elektrostatičko polje
   c) stvaranje polarnog kondenzatora

I.20. Šta je elektrostatička indukcija?
   a) pojava unošenja dielektrika u elektrostatičko polje
   b) izdvajanje naelektrisanja na površini nenaelektrisanog provodnika unetog u elektrostatičko polje

I.21. Kako se zovu naelektrisanja koja se izdvajaju na površini dielektrika unetog u polje?
   a) slobodna
   b) vezana

I.22. Kako se zovu naelektrisanja koja se izdvajaju na površini provodnika unetog u polje?
   a) slobodna
   b) vezana

I.23. Kako se promenio napon na pločastom vazdušnom kondenzatoru ako se posle odvajanja od napona napajanja u kondenzator ulije tečan dielektrik relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 5$?
   a) povećao se 5 puta
   b) smanjio se 5 puta
   c) nije se promenio

I.24. Kada se u pločast vazdušni kondenzator, priključen na stalni napon $U = 10$ V, ulije tečan dielektrik relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 5$ kako se menja količina naelektrisanja na elektrodama?

a) poveća se 5 puta
b) poveća se 10 puta
c) smanji se 5 puta
d) smanji se 10 puta
e) ne promeni se

I.25. Kako se promenila kapacitivnost pločastog vazdušnog kondenzatora ako se posle odvajanja od napona napajanja ulije tečan dielektrik relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 5$?

a) povećala se 5 puta
b) smanjila se 5 puta
c) nije se promenila

I.26. Kada se u pločast vazdušni kondenzator, priključen na stalni napon $U = 10$ V, ulije tečan dielektrik relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 5$, kako se menja kapacitivnost kondenzatora?

a) poveća se 5 puta
b) poveća se 10 puta
c) smanji se 5 puta
d) smanji se 10 puta
e) ne promeni se

I.27. Koji od obrazaca služi za određivanje energije kondenzatora?

a) $W_e = \frac{1}{2}QU$
b) $W_e = CU^2$
c) $W_e = \frac{Q}{2C}$

I.28. Kako se zove konstanta ε? __________

I.29. Kako se zove konstanta ε_r? __________

I.30. Kako se zove konstanta ε_0? __________

I.31. Koju jedinicu ima dielektrična konstanta ε_0?

a) $\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$
b) $\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$
c) nema jedinicu

I.32. Koju jedinicu ima dielektrična konstanta ε_r?

a) $\dfrac{C^2}{Nm^2}$

b) $\dfrac{Nm^2}{C^2}$

c) nema jedinicu

I.33. Koju jedinicu ima dielektrična konstanta ε?

a) $\dfrac{C^2}{Nm^2}$

b) $\dfrac{Nm^2}{C^2}$

c) nema jedinicu

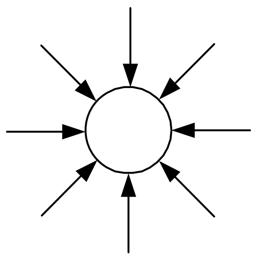
I.34. Koju jedinicu ima konstanta $k_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$?

a) $\dfrac{C^2}{Nm^2}$

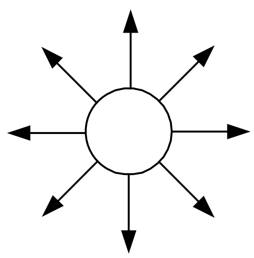
b) $\dfrac{Nm^2}{C^2}$

c) nema jedinicu

I.35. Upiši znak naelektrisanja čije su linije elektrostatičkog polja nacrtane na slici.

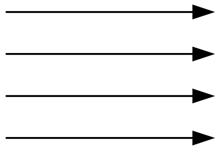


I.36. Upiši znak naelektrisanja čije su linije elektrostatičkog polja nacrtane na slici.



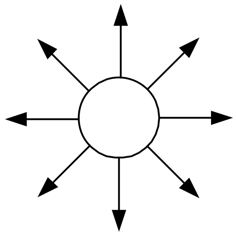
I.37. Kako se zove polje čije su linije prikazane na slici.

a) homogeno
b) radijalno
c) aksijalno

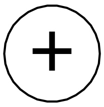


I.38. Kako se zove polje čije su linije prikazane na slici.

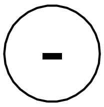
a) homogeno
b) radijalno
c) aksijalno



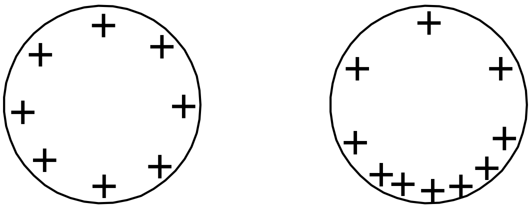
I.39. Ucrtaj linije elektrostatičkog polja za dato naelektrisanje.



I.40. Ucrtaj linije elektrostatičkog polja za dato naelektrisanje.



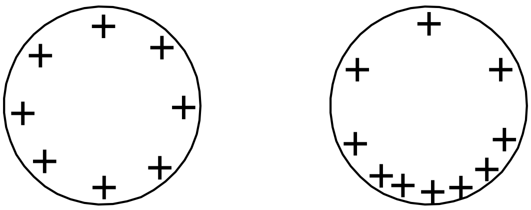
I.41. Na kom telu je površinska gustina naelektrisanja konstantna.



A B

a) A
b) B
c) na oba tela

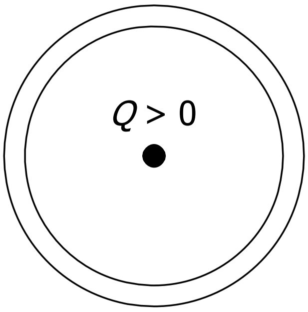
I.42. Na kom telu površinska gustina naelektrisanja nije konstantna.



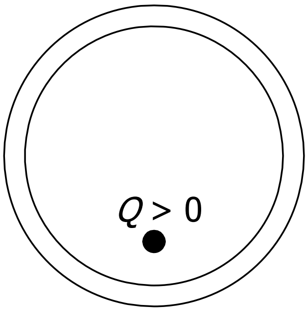
A B

a) A
b) B
c) na oba tela

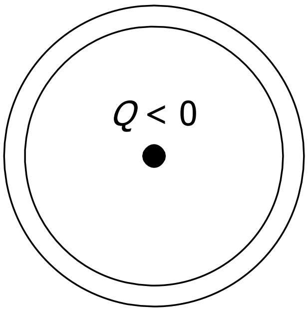
I.43. Ucrtaj raspodelu naelektrisanja na provodnoj nenaelektrisanoj sferi kada se u nju unese pozitivno naelektrisana kuglica.



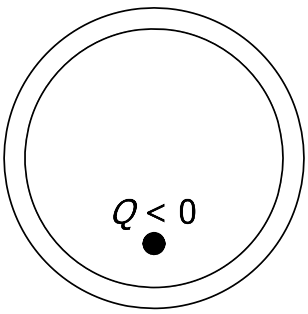
I.44. Ucrtaj raspodelu naelektrisanja na provodnoj nenaelektrisanoj sferi kada se u nju unese pozitivno naelektrisana kuglica.



I.45. Ucrtaj raspodelu naelektrisanja na provodnoj nenaelektrisanoj sferi kada se u nju unese negativno naelektrisana kuglica.



I.46. Ucrtaj raspodelu naelektrisanja na provodnoj nenaelektrisanoj sferi kada se u nju unese negativno naelektrisana kuglica.

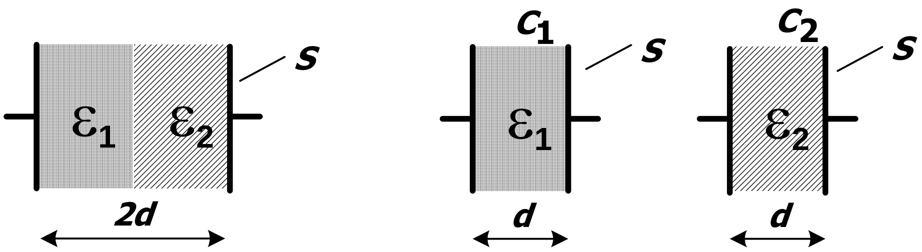


I.47. Pločasti kondenzator datih dimenzija ima kapacitivnost C. Kolika je kapacitivnost kondenzatora istog oblika ali n puta manjih dimenzija? ____________________

I.48. Pločasti kondenzator datih dimenzija ima kapacitivnost C. Kolika je kapacitivnost kondenzatora istog oblika ali n puta većih dimenzija? ____________________

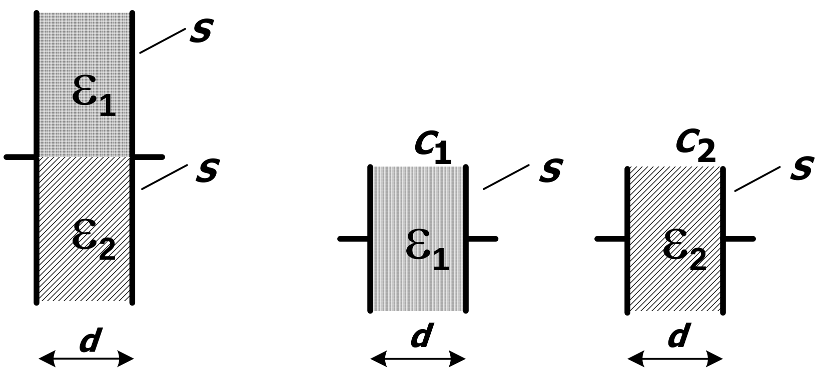
I.49. Kondenzator sa slike odgovara:

a) rednoj vezi kondenzatora C_1 i C_2
b) paralelnoj vezi kondenzatora C_1 i C_2
c) ni jednoj ni drugoj



I.50. Kondenzator sa slike odgovara:

a) rednoj vezi kondenzatora C_1 i C_2
b) paralelnoj vezi kondenzatora C_1 i C_2
c) ni jednoj ni drugoj



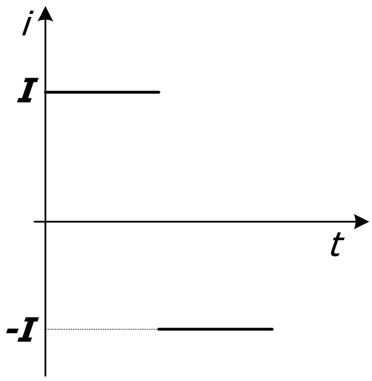
II VREMENSKI NEPROMENLJIVE ELEKTRIČNE STRUJE (JEDNOSMERNE STRUJE)

II.1 UVOD

TEORIJSKA OSNOVA

- Vremenski nepromenljive električne struje ili stalne električne struje su struje nepromenljive tokom vremena. Ne menja im se ni intenzitet ni smer.

Ovo je električna struja stalne vrednosti *I* tokom vremena *t*. Uvek se nalazi sa iste strane ose. Na taj način se grafički prikazuje da električna struja ima isti smer.



Na ovoj slici nisu prikazane pozitivna i negativna električna struja, već je to grafički prikaz električne struje koja je promenila smer.

- Oznaka za stalnu električnu struju je *I*.

- Oznaka za promenljivu električnu struju je *i*.

- Šta je **jačina električne struje**?
  – Protekla količina naelektrisanja kroz poprečni presek provodnika u jedinici vremena.

$$I = \frac{q}{t}$$

- Šta je **gustina električne struje**?
  – Količnik jačine električne struje koja prolazi kroz poprečni presek provodnika i površine poprečnog preseka provodnika.

$$J = \frac{I}{S}$$

- Koja je jedinica za jačinu električne struje?
  – Amper [A].

- Koja je jedinica za gustinu električne struje?
  – $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$.

- Šta je električna otpornost?
  – To je količnik napona na krajevima prijemnika i električne struje koja prolazi kroz njega.

- Kako otpornici pružaju otpor proticanju struje?
  – Atomi metala se razlikuju po broju slobodnih elektrona i broju protona i neutrona u jezgru. Kada se metalna žica priključi na razliku potencijala elektroni se kreću ka kraju žice priključenom na pozitivni potencijal. Prilikom tog kretanja oni se sudaraju sa jezgrima atoma, pri čemu se električna energija pretvara u toplotnu. Taj proces je različit kod različitih metala i definiše se konstantom koja se zove **specifična električna otpornost**, koja se obeležava sa ρ.
  – Kada se od metala napravi otpornik dužine žice l i površine poprečnog preseka S **otpornost tog otpornika** je

$$\boldsymbol{R} = \rho \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{S}}.$$

- Koja je jedinica za električnu otpornost?
  – Om [Ω].

- A za specifičnu električnu otpornost?
  – $\Omega\mathrm{m}$.

- Šta je električna provodnost?
  – Veličina recipročna električnoj otpornosti.

$$\boldsymbol{G} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}}$$

  – Provodnost otpornika, napravljenog od metalne žice, dužine l i površine poprečnog preseka S je:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\mathbf{1}}{\rho} \cdot \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{l}}$$

- Šta je specifična električna provodnost?
  – Veličina recipročna specifičnoj električnoj otpornosti.

$$\sigma = \frac{\mathbf{1}}{\rho}$$

- Koja je jedinica za električnu provodnost?
  – Simens [S].

- Koja je jedinica za specifičnu električnu provodnost?
  – $\frac{1}{\Omega m}$.

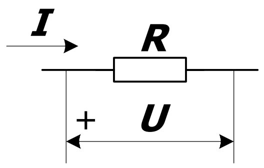
- Šta je otpornik?
  – Električna komponenta određene otpornosti *R*.

II.2 OMOV ZAKON

TEORIJSKA OSNOVA

- Kod otpornika stalne otpornosti *R* postoji linearna veza između napona na krajevima otpornika i električne struje koja prolazi kroz njega. Ta veza je deifisana Omovim zakonom.

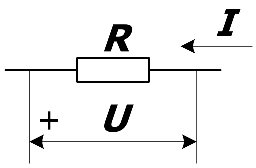
- Usaglašeni referentni smer za napon i električnu struju kroz otpornik je od tačke koja je na pozitivnom potencijalu ka tački koja je na negativnom potencijalu.



$$U = RI$$

$$I = GU$$

- Neusaglašeni referentni smer za napon i električnu struju kroz otpornik je od tačke koja je na negativnom potencijalu ka tački koja je na pozitivnom potencijalu.



$$U = -RI$$

$$I = -GU$$

II.3 DŽULOV ZAKON

TEORIJSKA OSNOVA

- Električna energija koja se pretvori u toplotnu prilikom proticanja električne struje kroz otpornik može se definisati Džulovim zakonom. Snaga Džulovih gubitaka jednaka je proizvodu napona na otporniku i električne struje koja protiče kroz njega prema usaglašenom referentnom smeru.

$$\boldsymbol{P_R = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}}$$

ovi izrazi se češće koriste
jer ne zavise od referentnih smerova

- Koja je jedinica za snagu Džulovih gubitaka?
  - vat [W].

II.3.1 Na otporniku R = 100 Ω, koji je vezan u električno kolo, napon je U = 10 V.

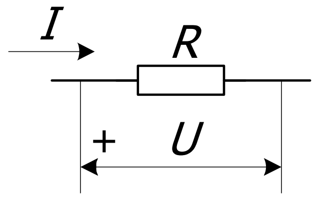
a) Kolika struja protiče kroz otpornik? Nacrtati otpornik, označiti pozitivan kraj napona i nacrtati njemu usaglašen smer struje.

b) Kolika se snaga razvija na ovom otporniku (tj. koliki su Džulovi gubici na otporniku)?

c) Kolika je provodnost ovog otpornika?

Rešenje:

a)



Slika II.3.1.1

Na slici II.3.1.1 prikazani su usaglašeni smerovi napona i struje na otporniku. Prema Omovom zakonu intenzitet struje koja protiče kroz otpornik je:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10\ \text{V}}{100\ \Omega} = 0{,}1\ \text{A} = 100\ \text{mA}\,.$$

b) Prema Džulovom zakonu toplotni gubici na otporniku su:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(10\ \text{V})^2}{100\ \Omega} = 1\ \text{W}\,.$$

c) Provodnost je jednaka recipročnoj vrednosti otpornosti:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{100\ \Omega} = 0{,}01\ \text{S} = 10\ \text{mS}\,.$$

II.3.2 Halogena sijalica snage P = 50 W, priključena je na jednosmerni napon od 12 V. Kolika je otpornost vlakna sijalice?

Rešenje:

Na osnovu jednog od izraza za snagu Džulovih gubitaka:

$$P = \frac{U^2}{R}\,,$$

dobijamo otpornost vlakna:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{(12\ \text{V})^2}{50\ \text{W}} = 2{,}88\ \text{W}\,.$$

II.4 GENERATORI

TEORIJSKA OSNOVA

- Šta su generatori?

  – To su uređaji za generisanje napona i električne struje. U zavisnosti od unutrašnje otpornosti generator se u kolu ponaša kao naponski ili kao strujni.

  – Ako je unutrašnja otpornost generatora zanemarljiva u odnosu na otpornost kola onda ga tretiramo kao naponski.

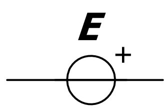
  – Ako je unutrašnja otpornost generatora velika u odnosu na otpornost kola onda ga tretiramo kao strujni.

- U čemu je razlika između naponskog i strujnog generatora?

NAPONSKI GENERATOR

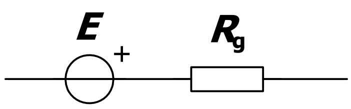
- Osnovna karakteristika naponskog generatora je elektromotorna sila.

IDEALAN NAPONSKI GENERATOR



- Unutrašnja otpornost ovog generatora je 0.
- Napon između njegovih krajeva je uvek jednak elektromotornoj sili *E* bez obzira gde je priključen.
- Struja koja protiče kroz generator zavisi od kola u koje je priključen.

REALAN NAPONSKI GENERATOR

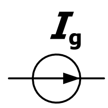


- Realan naponski generator uvek ima unutrašnju otpornost (koja je mala ali ipak nije 0).

STRUJNI GENERATOR

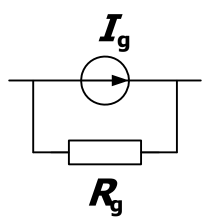
- Osnovna karakteristika strujnog generatora je da generiše stalnu električnu struju u grani u kojoj se nalazi.

IDEALAN STRUJNI GENERATOR



- Unutrašnja otpornost ovog generatora je beskonačna.
- Električna struja koju generiše je uvek jednaka I_g bez obzira gde je priključen.
- Napon na generatoru zavisi od kola u koje je priključen.

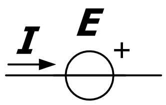
REALAN STRUJNI GENERATOR



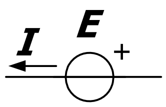
- Realan strujni generator ima unutrašnju otpornost koja je jako velika ali nije beskonačna.

REFERENTNI SMER

- usaglašen referentni smer elektromotorne sile generatora i električne struje koja protiče kroz njega:



- neusaglašen referentni smer elektromotorne sile generatora i električne struje koja protiče kroz njega:



SNAGA NAPONSKOG GENERATORA

- Za usaglašen referentni smer:

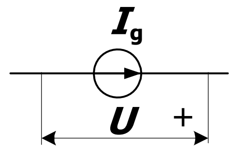
$$\boldsymbol{P_E = E \cdot I}$$

- Za neusaglašen referentni smer:

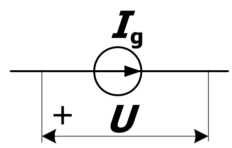
$$\boldsymbol{P_E = -E \cdot I}$$

REFERENTNI SMER

- usaglašen referentni smer električne struje strujnog generatora i napona na njemu:



- neusaglašen referentni smer električne struje strujnog generatora i napona na njemu:



SNAGA STRUJNOG GENERATORA

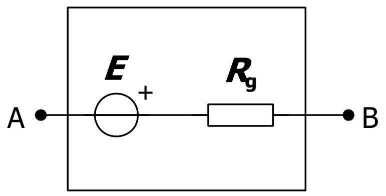
- Za usaglašen referentni smer

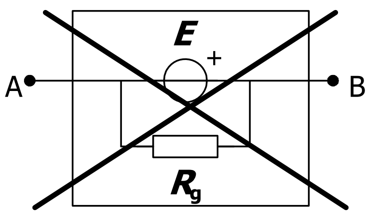
$$\boldsymbol{P_E = I_g \cdot U}$$

- Za neusaglašen referentni smer:

$$\boldsymbol{P_E = -I_g \cdot U}$$

- Zašto smo unutrašnju otpornost generatora kod naponskog nacrtali vezanu na red, a kod strujnog u paraleli?



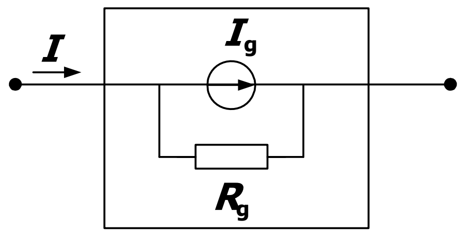


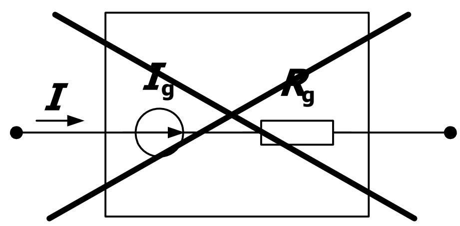
– Kod realnog naponskog unutrašnja je otpornost mala ali konačna i otpornik je ucrtan. Kod idealnog otpornost je 0, pa nema ni otpornika (kratak spoj).

– Sa druge strane, pošto napon na realnom naponskom generatoru ipak zavisi od kola u koje je vezan, otpornik R_g mora biti vezan redno, a ne u paraleli, jer da je vezan paralelno napon na krajevima realnog generatora bio bi konstantan i jednak E u svakom kolu.

– Kod realnog strujnog generatora unutrašnja otpornost je velika ali konačna. Kod idealnog je beskonačna, a beskonačan otpor znači prekid u grani kola. Da je otpornik vezan na red sa generatorom u toj grani onda ne bi bilo struje.

– S druge strane, pošto struja realnog strujnog generatora ipak zavisi od kola u koje je vezan, otpornik R_g mora biti vezan paralelno, a ne redno, jer da je vezan redno struja realnog strujnog generatora bila bi konstantna i jednaka I_g u svakom kolu.



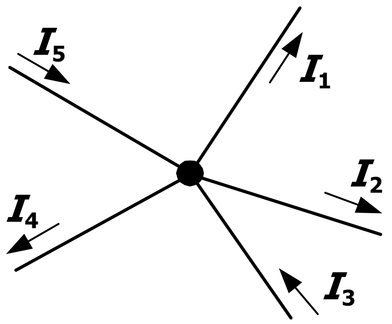


II.5 KIRHOFOVI ZAKONI

TEORIJSKA OSNOVA

- Postoje dva Kirhofova zakona.

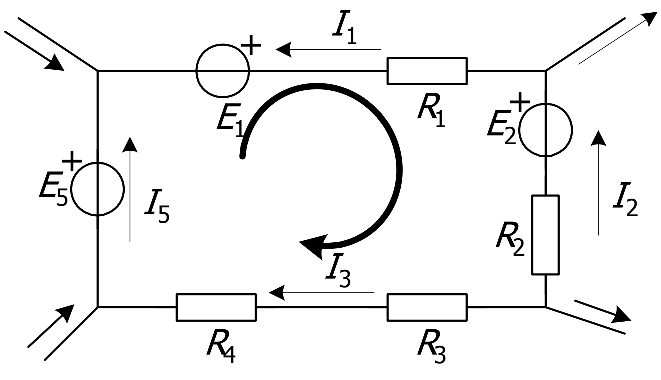
- O čemu govori prvi?
  – Prvi zakon govori o strujama u granama složenog kola: **algebarski zbir jačina električnih struja svih grana kola koje se stiču u jednom čvoru jednak je nuli. Pri tome se struje koje izlaze iz čvora uzimaju sa predznakom +, a struje koje ulaze u čvor sa predznakom -.**



$$\sum_{k} \boldsymbol{I}_k = 0$$

$$\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{I}_5 = 0$$

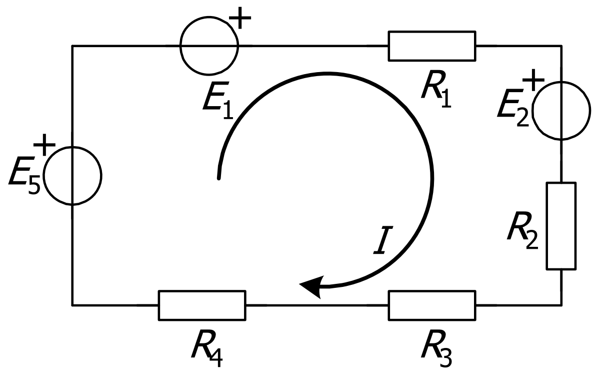
- O čemu govori drugi?
  – Drugi zakon govori o naponima u strujnoj konturi: **algebarski zbir napona u zatvorenoj strujnoj konturi jednak je nuli. Pri tome se elektromotorne sile generatora uzimaju sa predznakom "+" za usaglašeni referentni smer (ako se smer obilaska po konturi poklapa sa referentnim smerom elektromotorne sile), a naponi na otpornicima sa predznakom "-" za usaglašeni referentni smer (kada se smer obilaska po konturi poklapa sa smerom električne struje kroz otpornik).** Naponi strujnih generatora se ne mogu sabirati ovim zakonom jer napon na strujnom generatoru ne možemo odrediti direktno iz generatora (on zavisi od kola u koje je generator vezan).



$$\sum(\boldsymbol{E}_i - \boldsymbol{R}\boldsymbol{I}) = 0 \qquad \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{R}_3\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{R}_4\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{E}_5 = 0$$

II.6 PROSTO KOLO

TEORIJSKA OSNOVA



- Kako se zove kolo prikazano na slici?

  – Prosto kolo. To je kolo koje se sastoji samo od jedne strujne konture. U njoj postoji redna veza naponskih generatora i otpornika.

- Električna struja u ovom kolu se može izračunati i Omovim zakonom za prosto kolo: **Električna struja u prostom kolu jednaka je količniku sume svih elektromotornih sila naponskih generatora prema usaglašenom referentnom smeru, i sume svih otpornika u kolu.** Ukoliko struja protiče kroz generator u usaglašenom referentnom smeru generator ima predznak "+" i obrnuto. Otpornosti otpornika se uvek uzimaju sa predznakom "+".

$$\boldsymbol{I} = \frac{\sum_i \boldsymbol{E}_i}{\sum_i \boldsymbol{R}_i}$$

Za prosto kolo prikazano na gornjoj slici Omov zakon glasi:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_5}{\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_4}.$$

II.7 PRORAČUN NAPONA IZMEĐU DVE TAČKE

TEORIJSKA OSNOVA

- Kako se može izračunati napon između neke dve tačke u električnom kolu?
  - Prema pravilu o sumiranju naponskih članova između te dve tačke:

$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{AB}} = \sum_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} (\boldsymbol{E_i} \boldsymbol{- RI})$$

Napon između tačaka A i B jednak je algebarskom zbiru svih naponskih članova elektromotornih sila naponskih generatora i napona na otpornicima, računatih od B ka A. Pri tome se elektromotorne sile naponskih generatora uzimaju sa predznakom "+" za usaglašen referentni smer, a naponi na otpornicima sa predznakom "-" za usaglašen referentni smer. Ako je smer neusaglašen predznaci su suprotni.

II.7.1 Potrošač otpornosti R_P = 48 Ω vezan je na realan naponski generator elektromotorne sile E = 50V i unutrašnje otpornosti R_g = 2 Ω. Odrediti:

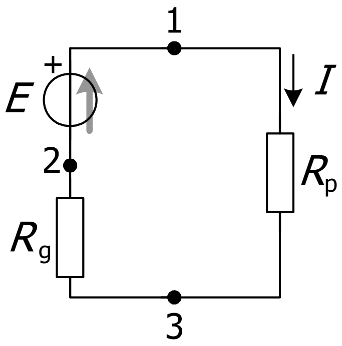
a) napon na potrošaču;

b) snagu koja se razvija na potrošaču;

c) snagu koju razvija generator, kao i snagu koja se gubi na unutrašnjoj otpornosti generatora.

Rešenje:

a)



Slika II.7.1.1

Na slici II.7.1.1 prikazano je električno kolo u koje je vezan potrošač. Struju u kolu određujemo primenom Omovog zakona za prosto kolo. Za usvojeni smer struje u prostom kolu, intenzitet struje dobijamo kao količnik algebarskog zbira elektromotornih sila i zbira otpornika. Pri ovome se određena elektromotorna sila uzima sa pozitivnim predznakom ako se njen referentni smer poklapa sa usvojenim smerom struje, tj. kada su smerovi usklađeni (i obrnuto). Referentni smer elektromotorne sile je od negativnog ka pozitivnom kraju (referentni smer elektromotorne sile E prikazan je na slici II.7.1.1 sivom strelicom). Svi otpornici se uzimaju sa pozitivnim predznakom. Zbog toga što u ovom kolu imamo samo jednu elektromotornu silu usvojili smo smer struje koji se poklapa sa referentnim smerom te elektromotorne sile (dakle, odmah smo usvojili pravi smer struje). Primenjujući Omov zakon za ovo prosto kolo dobijamo:

$$I = \frac{E}{R_P + R_g} = \frac{50\ \mathrm{V}}{48\ \Omega + 2\ \Omega} = 1\ \mathrm{A}.$$

Prema Omovom zakonu napon na potrošaču je:

$$U_{13} = I \cdot R_P = 1\ \mathrm{A} \cdot 48\ \Omega = 48\ \mathrm{V}.$$

b) Prema Džulovom zakonu je:

$$P_{R_P} = R_P I^2 = 48\ \Omega \cdot (1\ \mathrm{A})^2 = 48\ \mathrm{W}$$

c) S obzirom da su referentni smerovi elektromotorne sile i struje usaglašeni snaga koju generator predaje kolu je:

$$P_E = E \cdot I = 50\ \mathrm{V} \cdot 1\ \mathrm{A} = 50\ \mathrm{W}.$$

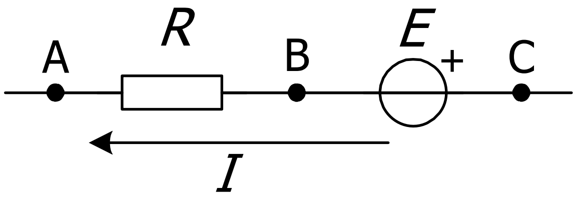
Snaga koja se gubi na unutrašnjoj otpornsti generatora određena je Džulovim zakonom:

$$P_{R_g} = R_g I^2 = 2\ \Omega \cdot (1\ \mathrm{A})^2 = 2\ \mathrm{W}.$$

Uočiti da je, po zakonu održanja energije, snaga koju generator ulaže u kolo jednaka zbiru snaga Džulovih gubitaka na obe otpornosti u kolu:

$$P_E = P_{R_P} + P_{R_g}.$$

II.7.2 Na slici je prikazan deo električnog kola sa stalnom električnom strujom jačine $I = 0{,}5$ A. Odrediti napone U_{AB}, U_{BC} i U_{AC} , ako je $R = 20\ \Omega$ i $E = 2$ V.



Rešenje:

Na osnovu Omovog zakona važi:

$$U_{AB} = -R \cdot I = -10\ \mathrm{V},$$

pri čemu znak "-" potiče od neusaglašenosti smerova napona U_{AB} i struje I.

Elektromotorna sila E je vezana između tačaka B i C, i to pozitivan kraj je vezan za tačku C, pa je:

$$U_{BC} = -E = -2\ \mathrm{V}.$$

Prema pravilu proračuna napona između dve tačke, krećući se od tačke C ka tački A, je:

$$U_{AC} = -E - RI = -2\ \mathrm{V} - 10\ \mathrm{V} = -12\ \mathrm{V},$$

odnosno, kao što je to pokazano u zadatku I.3.9, važi da je:

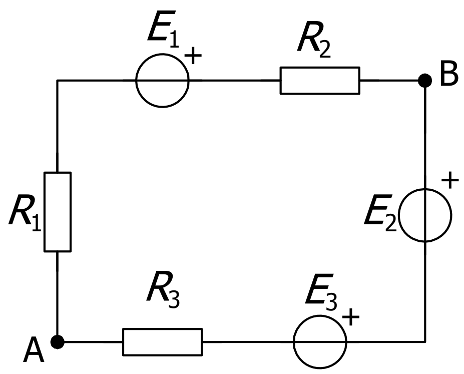
$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}.$$

II.7.3 Generatori $E_1 = 10$ V, $E_2 = 20$ V i $E_3 = 30$ V, zanemarljivih unutrašnjih otpornosti, i otpornici $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$ i $R_3 = 20\ \Omega$ povezani su kao na slici. Odrediti:

a) intenzitet struje u kolu,

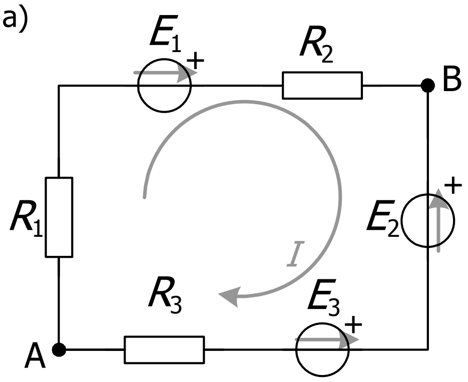
b) napon između tačaka A i B,

c) snage koju razvijaju generatori i snage Džulovih gubitaka u otporicima.



Rešenje:

a)



Slika II.7.3.1

Usvojimo smer struje kao što je prikazano na slici II.7.3.1. Referentni smerovi elektromotornih sila prikazani su sivim strelicama pored generatora. Prema Omovom zakonu za prosto kolo intenzitet struje je:

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10\ \mathrm{V} - 20\ \mathrm{V} - 30\ \mathrm{V}}{15\ \Omega + 5\ \Omega + 20\ \Omega} = \frac{-40\ \mathrm{V}}{40\ \Omega} = -1\ \mathrm{A}.$$

Dobili smo struju negativnog znaka, što znači da smo usvojili smer struje suprotan od pravog. Generalno, u zadacima zadržavamo usvojeni smer struje (bez obzira da li se on poklapa sa pravim smerom struje), pri čemu u krajnjem računu uvrštavamo vrednost struje sa dobijenim znakom (u ovom zadatku je to znak "-").

b) Napon U_{AB} možemo računati od tačke B ka tački A preko gornje ili preko donje grane:

$$U_{AB} = R_2 I - E_1 + R_1 I = -5\text{ V} - 10\text{ V} - 15\text{ V}$$

$$= -E_2 - E_3 - R_3 I = -20\text{ V} - 30\text{ V} + 20\text{ V} = -30\text{ V}.$$

c) Referentni smerovi struje i elektromotorne sile E_1 su usklađeni, pa je snaga koju razvija ova elektromotorna sila:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I = 10\text{ V} \cdot (-1\text{ A}) = -10\text{ W}.$$

Dobijena je negativna snaga pa se elektromotorna sila E_1 ponaša kao potrošač, tj. na uređaju elektromotorne sile E_1 se troši snaga.

Smerovi elektromotornih sila nisu usklađeni sa referentnim smerom struje, pa su odgovarajuće snage:

$$P_{E_2} = -E_2 \cdot I = -20\text{ V} \cdot (-1\text{ A}) = 20\text{ W},$$

$$P_{E_3} = -E_3 \cdot I = -30\text{ V} \cdot (-1\text{ A}) = 30\text{ W}.$$

Snage elektromotornih sila E_2 i E_3 su pozitivne, pa se ove dve elektromotorne sile ponašaju kao generatori.

Snage Džulovih gubitaka u otpornicima su:

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 15\ \Omega \cdot (-1\text{ A})^2 = 15\text{ W},$$

$$P_{R_2} = R_2 I^2 = 5\ \Omega \cdot (-1\text{ A})^2 = 5\text{ W},$$

$$P_{R_3} = R_3 I^2 = 20\ \Omega \cdot (-1\text{ A})^2 = 20\text{ W}.$$

Po zakonu održanja energije zbir snaga generatora u kolu mora biti jednak zbiru snaga Džulovih gubitaka na otpornicima:

$$P_{E_1} + P_{E_2} + P_{E_3} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3},$$

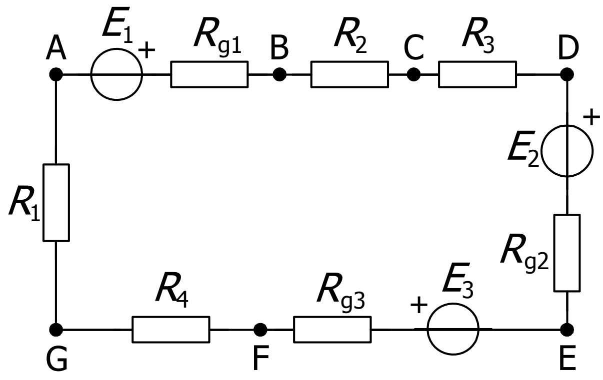
$$-10\text{ W} + 20\text{ W} + 30\text{ W} = 15\text{ W} + 5\text{ W} + 20\text{ W}.$$

II.7.4 Generatori E_1 = 25 V, E_2 = 5 V i E_3 = 30 V, unutrašnjih otpornosti $R_{g1} = R_{g2} = R_{g3} = 1\ \Omega$, i otpornici R_1 = 199 Ω, R_2 = 98 Ω, R_3 = 125 Ω i R_4 = 75 Ω, povezani su kao na slici. Odrediti:

a) intenzitet struje u kolu,

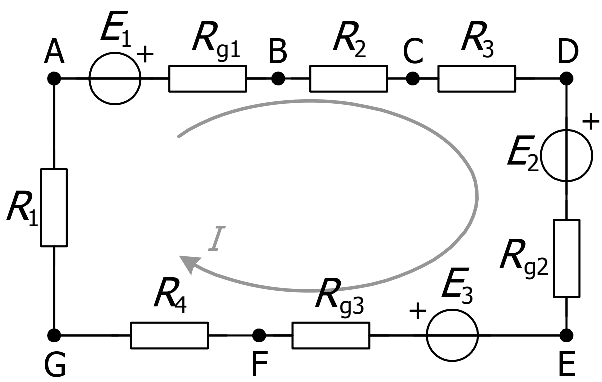
b) napone U_{AE}, U_{DG} i U_{FB}.

c) snage koje razvijaju generatori, snage Džulovih gubitaka u otpornicima, kao i snage koje se troše na unutrašnjim otpornostima genertora.



Rešenje:

a)



Slika II.7.4.1

Na slici II.7.4.1 prikazan je usvojeni smer struje, a njen intenzitet je prema Omovom zakonu za prosto kolo:

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_{g1} + R_{g2} + R_{g3} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{25\text{ V} - 5\text{ V} + 30\text{ V}}{3 \cdot 1\ \Omega + 199\ \Omega + 98\ \Omega + 125\ \Omega + 75\ \Omega} = \frac{50\text{ V}}{500\ \Omega} = 100\text{ mA}.$$

b) Napon između dve tačke određujemo duž najkraće putanje:

- za napon U_{AE} najkraća putanja prolazi preko tačaka E – F – G – A:

$$U_{AE} = E_3 - R_{g3}I - R_4 I - R_1 I = 30\text{ V} - 0{,}1\text{ V} - 7{,}5\text{ V} - 19{,}9\text{ V} = 2{,}5\text{ V}$$

-za napon U_{DG} obe putanje su iste dužine pa ćemo proizvoljno odabrati putanju preko tačaka G – F – E – D:

$$U_{DG} = R_4 I + R_{g3} I - E_3 + R_{g2} I + E_2 = 7{,}5\text{ V} + 0{,}1\text{ V} - 30\text{ V} + 0{,}1\text{ V} + 5\text{ V} = -17{,}3\text{ V}$$

- za napon U_{FB} prolazi preko tačaka B – A – G – F:

$$U_{FB} = R_{g1} I - E_1 + R_1 I + R_4 I = 0{,}1\text{ V} - 25\text{ V} + 19{,}9\text{ V} + 7{,}5\text{ V} = 2{,}5\text{ V}$$

c) Snage generatora su:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I = 25\text{ V} \cdot 0{,}1\text{ A} = 2{,}5\text{ W},$$

$$P_{E_2} = -E_2 \cdot I = -5\text{V} \cdot 0{,}1\text{ A} = -0{,}5\text{ W},$$

$$P_{E_3} = E_3 \cdot I = 30\text{ V} \cdot 0{,}1\text{ A} = 3\text{ W}.$$

Snage Džulovih gubitaka u otpornicima su:

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 199\ \Omega \cdot (0{,}1\ \text{A})^2 = 1{,}99\ \text{W},$$

$$P_{R_2} = R_2 I^2 = 98\ \Omega \cdot (0{,}1\ \text{A})^2 = 0{,}98\ \text{W},$$

$$P_{R_3} = R_3 I^2 = 125\ \Omega \cdot (0{,}1\ \text{A})^2 = 1{,}25\ \text{W},$$

$$P_{R_4} = R_4 I^2 = 75\ \Omega \cdot (0{,}1\ \text{A})^2 = 0{,}75\ \text{W}.$$

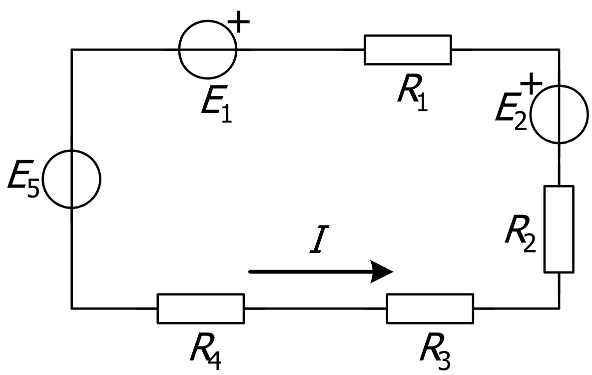
Snage koje se troše na unutrašnjim otpornostima genertora su:

$$P_{R_{g1}} = P_{R_{g2}} = P_{R_{g3}} = R_{g1} I^2 = 1\ \Omega \cdot (0{,}1\ \text{A})^2 = 0{,}01\ \text{W}.$$

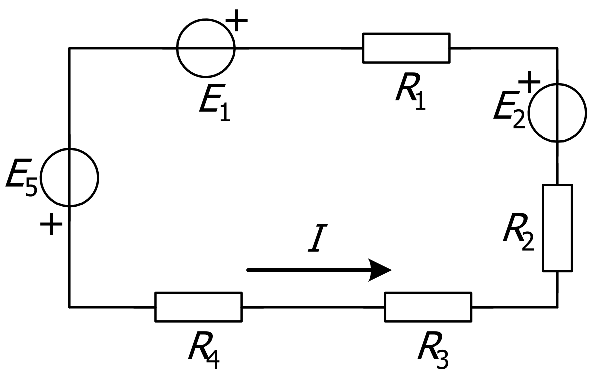
I naravno, važi:

$$P_{E_1} + P_{E_2} + P_{E_3} = P_{R_{g1}} + P_{R_{g2}} + P_{R_{g3}} + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4}.$$

II.7.5 Generatori E_1 = 12 V, E_2 = 24 V i E_5 i otpornici R_1 = 10 Ω, R_2 = 20 Ω, R_3 = 30 Ω i R_4 = 20 Ω obrazuju prosto električno kolo kao na slici. Intenzitet struje u kolu je I = 250 mA. Odrediti nepoznatu elektromotornu silu E_5, kao i snagu tog generatora. Da li se uređaj elektromotorne sile E_5 ponaša kao generator ili kao potrošač?



Rešenje:



Slika II.7.5.1

Najpre treba usvojiti referentni smer nepoznate elektromotorne sile E_5, kao što je prikazano na slici II.7.5.1. Prema tome se može napisati jednačina po Omovom zakonu za prosto kolo:

$$I = \frac{-E_1 + E_2 + E_5}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 250\ \text{mA},$$

odakle se dobija nepoznata elektromotorna sila:

$$E_5 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)I + E_1 - E_2 = 80\ \Omega \cdot 0{,}25\ \text{A} + 12\ \text{V} - 24\ \text{V} = 8\ \text{V}.$$

Dobili smo pozitivan znak elektromotorne sile E_5 tako da se usvojeni referentni smer poklapa s pravim smerom elektromotorne sile.

Referentni smerovi elektromotorne sile E_5 i struje su usaglašeni, pa je snaga tog generatora:

$$P_{E_5} = E_5 \cdot I = 8\ \text{V} \cdot 0{,}25\ \text{A} = 2\ \text{W},$$

i pošto je pozitivna to znači da se uređaj elektromotorne sile E_5 ponaša kao generator.

II.8 METODE I TEOREME ZA REŠAVANJE SLOŽENIH ELEKTRIČNIH MREŽA

TEORIJSKA OSNOVA

- Postoje prosta i složena (razgranata) električna kola. Prosto kolo se sastoji od samo jedne konture, a složena kola se sastoje od većeg broja čvorova i grana, odnosno od dve ili više kontura.

- Šta je čvor električnog kola?
  – Čvor električnog kola je tačka u kojoj se spaja tri ili više grana kola. Broj čvorova u kolu obeležavamo sa $n_č$.

- Šta je grana električnog kola?
  – Grana električnog kola je provodan put koji povezuje dva čvora kola. Broj grana u kolu obeležavamo sa n_g.

- Metode za proračunavanje složenih električnih kola su:
  – metod neposredne primene Kirhofovih zakona,
  – metod konturnih struja,
  – metod potencijala čvorova.

  Mi ćemo proučiti prve dve metode.

- Postoje i različiti postupci za pojednostavljivanje složenih električnih kola:
  – transfiguracije kola,
  – Tevenenova teorema,
  – teorema superpozicije,
  – Nortonova teorema,
  – teorema reciprociteta,
  – teorema linearnosti,
  – teorema kompenzacije.

  Mi ćemo proučiti prva tri navedena postupka.

- Ako u električnom kolu treba izračunati struje svih grana koji od ovih postupaka ćemo primeniti?
  – Kirhofove zakone, metod konturnih struja ili metod potencijala čvorova. (Konkretnu metodu za rešavanje biramo po minimalnom broju jednačina.) Transfiguracije kola i Tevenenova teorema se ne smeju primeniti jer se u tim metodama gube grane kola, a samim tim i njihove struje. Metod superpozicije se u principu može primeniti ali je proračun struja svih grana kola tom metodom suviše obiman.

II.8.1 METOD NEPOSREDNE PRIMENE KIRHOFOVIH ZAKONA

TEORIJSKA OSNOVA

- Po Kirhofovim zakonima broj jednačina koje pišemo je:
  po I Kirhofovom zakonu: $\boldsymbol{n}_{\text{č}} - \mathbf{1}$
  po II Kirhofovom zakonu: $\boldsymbol{n}_{\text{g}} - (\boldsymbol{n}_{\text{č}} - \mathbf{1})$

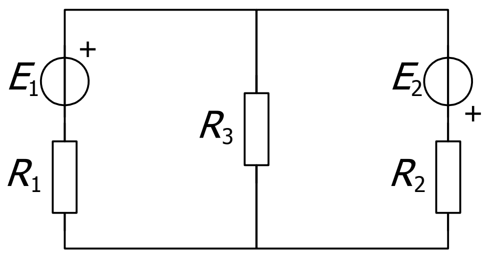
- Ovaj metod ima ukupan broj jednačina isti kao što je i broj nepoznatih struja grana kola.

- Ako kolo ima $n_{I\text{g}}$ strujnih generatora onda je broj jednačina koje pišemo po II Kirhofovom zakonu:
  $$\boldsymbol{n}_{\text{g}} - (\boldsymbol{n}_{\text{č}} - \mathbf{1}) - \boldsymbol{n}_{I\text{g}},$$
  a broj jednačina po I Kirhofovom zakonu ostaje nepromenjen.

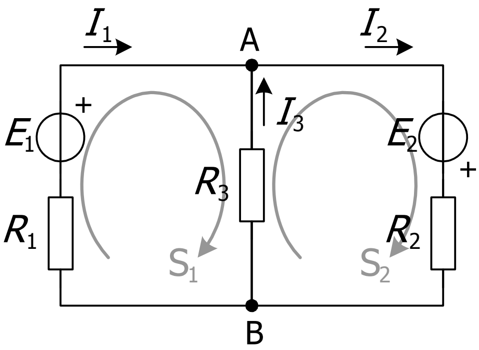
- Nezgodna osobina metode je da ako kolo ima više od 3 grane broj jednačina za rešavanje je vrlo veliki i rešavanje je složeno.

ZADACI

II.8.1.1 Za kolo prikazano na slici odrediti intenzitete struja u svim granama neposrednom primenom Kirhofovih zakona, ako je E_1 = 6 V, E_2 = 20 V i R_1 = 700 Ω, R_2 = 300 Ω, R_3 = 400 Ω.



<u>*Rešenje:*</u>



Slika II.8.1.1.1

Rešavanje zadatka počinjemo usvajanjem referentnih smerova struja u svim granama, kao što je prikazano na slici II.8.1.1.1. Kolo ima $n_{\check{c}}$ = 2 čvora i n_g = 3 grane. Za svaki čvor možemo napisati jednačinu po I Kirhofovom zakonu, ali se jednačina za $n_{\check{c}}$-ti čvor može dobiti sabiranjem jednačina napisanih za ostalih $n_{\check{c}}$ - 1 čvorova, što znači da $n_{\check{c}}$-ta jednačina nije nezavisna od prethodnih $n_{\check{c}}$ - 1 jednačina. Konkretno, kada kolo ima dva čvora kao u ovom zadatku, jednačine napisane po I Kirhofovom zakonu su iste za oba čvora (razlikuju se samo u znaku). Dakle, po I Kirhofovom zakonu za ovo kolo možemo pisati:

$n_{\check{c}}$ - 1= 1 nezavisnu jednačinu.

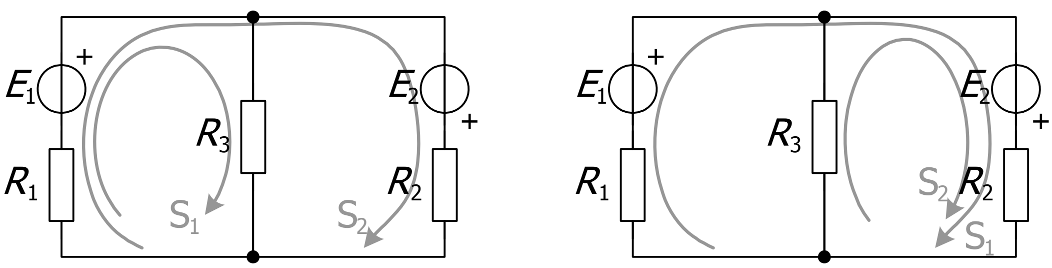
Za čvor A ova jednačina glasi:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0\,.$$

Po II Kirhofovom zakonu možemo napisati:

$n_g - (n_{\check{c}} - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$ jednačine,

odnosno, ovo kolo sadrži dve nezavisne konture po kojima pišemo jednačine po II Kirhofovom zakonu. Konture su nezavisne ako svaka kontura ima bar jednu granu koja ne pripada ni jednoj drugoj konturi. Na slici II.8.1.1.1 obeležene su dve proizvoljno izabrane nezavisne konture, S_1 i S_2, i označeni su njihovi proizvoljno usvojeni smerovi. Na slici II.8.1.1.2 prikazane su još dve mogućnosti izbora nezavisnih kontura za ovo kolo.



Slika II.8.1.1.2

Jednačine po II Kirhofovom zakonu za izabrane konture sa slike II.8.1.1.1 glase:

$$S_1:\ -R_1I_1+E_1+R_3I_3=0$$

$$S_2:\ -R_3I_3+E_2-R_2I_2=0$$

Napomena: Obratiti pažnju da kod primene II Kirhofovog zakona, kao i prilikom računanja napona između dve tačke, predznak elektromotorne sile **ne zavisi** od usaglašenosti referentnih smerova elektromotorne sile i struje (za razliku od Omovog zakona za prosto kolo i metode konturnih struja, sa kojom ćemo se kasnije sresti), već zavisi isključivo od veze između referentnog smera elektromotorne sile i smera obilaska konture. Objašnjenje je sledeće: II Kirhofov zakon se odnosi na zbir napona duž zatvorene konture, a napon između dve tačke se računa sabiranjem napona na pojedinim elementima koji se nalaze između posmatranih tačaka. Napon idealnog naponskog generatora uvek je jednak njegovoj elektromotornoj sili i konstantan je; ne zavisi od struje koja teče kroz generator, odnosno ne zavisi od kola u koje je vezan generator.

Ukupan broj jednačina koje rešavamo neposrednom primenom Kirhofovih zakona je:

$$n_č-1+n_g-(n_č-1)=n_g.$$

Dakle, imamo isti broj jednačina koliko i nepoznatih (n_g grana i njihovih nepoznatih struja).

Napišimo još jednom sistem jednačina koji treba da rešimo:

$$-I_1+I_2-I_3=0$$

$$-R_1I_1+E_1+R_3I_3=0$$

$$-R_3I_3+E_2-R_2I_2=0$$

Zamenimo brojne vrednosti u ovom sistemu jednačina. Pri tome, zbog lakšeg rešavanja, nećemo pisati jedinice ali ćemo voditi računa o jedinicama u kojima je dobijen krajnji rezultat: ako zamenjujemo napone u voltima (V) i otpornosti u omima (Ω) struje ćemo dobiti u amperima (A); ako zamenjujemo napone u voltima (V) i otpornosti u kiloomima ($\mathrm{k}\Omega$) struje ćemo dobiti u miliamperima (mA). Zamenjujući brojne vrednosti u osnovnim jedinicama (voltima i omima), dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$-I_1+I_2-I_3=0 \qquad (1)$$

$$-700I_1+400I_3=-6 \qquad (2)$$

$$-300I_2-400I_3=-20 \qquad (3)$$

Zamenimo nepoznatu I_3 iz jednačine (1):

$$I_3=-I_1+I_2$$

u jednačine (2) i (3). Tada se sistem svodi na dve jednačine sa dve nepoznate:

$$-1100I_1+400I_2=-6$$

$$400I_1-700I_2=-20$$

koji ćemo rešiti Kramerovim pravilima. Determinanta sistema je:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1100 & 400\\ 400 & -700\end{vmatrix}=(-1100)(-700)-400\cdot400=61\cdot10^4 .$$

Determinante promenljivih I_1 i I_2 dobijamo zamenjujući koeficijente uz promenljive slobodnim članovima:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 400 \\ -20 & -700 \end{vmatrix} = (-6)(-700) - (-20) \cdot 400 = 122 \cdot 10^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1100 & -6 \\ 400 & -20 \end{vmatrix} = (-1100)(-20) - 400 \cdot (-6) = 244 \cdot 10^2.$$

Nepoznate promenljive dobijamo iz ovih determinanti (s obzirm da smo zamenjivali napone u voltima i otpornosti u omima struju dobijamo u amperima):

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{122 \cdot 10^2}{61 \cdot 10^4}\,\mathrm{A} = 0{,}02\ \mathrm{A} = 20\ \mathrm{mA},$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{244 \cdot 10^2}{61 \cdot 10^4}\,\mathrm{A} = 0{,}04\ \mathrm{A} = 40\ \mathrm{mA}.$$

Nepoznatu struju I_3 određujemo zamenjujući dobijene vrednosti struja I_1 i I_2 u jednačinu (1):

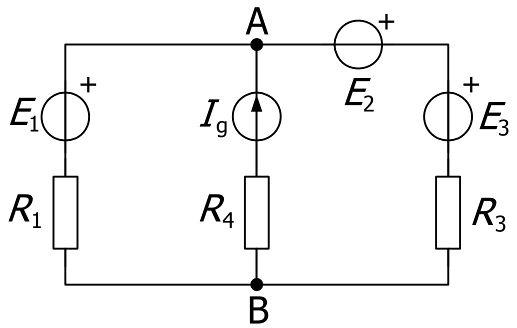
$$I_3 = -I_1 + I_2 = -20\ \mathrm{mA} + 40\ \mathrm{mA} = 20\ \mathrm{mA}$$

Prilikom rešavanja ovog jednostavnog kola direktnom primenom Kirhofovih zakona dobili smo sistem od tri jednačine sa tri nepoznate. Broj jednačina kod nešto složenijeg kola bio bi znatno veći. Zbog toga se metoda direktne primene Kirhofovih zakona gotovo ne koristi za rešavanje složenih kola već se koriste metode koje su izvedene iz Kirhofovih zakona (metod konturnih struja i metod potencijala čvorova), čijom primenom se dobija znatno manji broj jednačina. Videćemo kasnije da ovaj isti zadatak može da se reši primenom metode konturnih struja gde se dobijaju dve jednačine, kao i metodom potencijala čvorova kojom se dobija samo jedna jednačina. Dakle, najpogodniji metod za rešavanje konkretno ovog zadatka bio bi metod potencijala čvorova.

II.8.1.2 Generatori E_1 = 12 V, E_2 = 24 V, E_3 = 24 V i I_g = 60 mA, i otpornici R_1 = 300 Ω, R_3 = 300 Ω i R_4 = 500 Ω vezani su u kolo kao što je prikazano na slici.

a) Odrediti intenzitete struja u svim granama neposrednom primenom Kirhofovih zakona.

b) Odrediti napon U_{AB}.



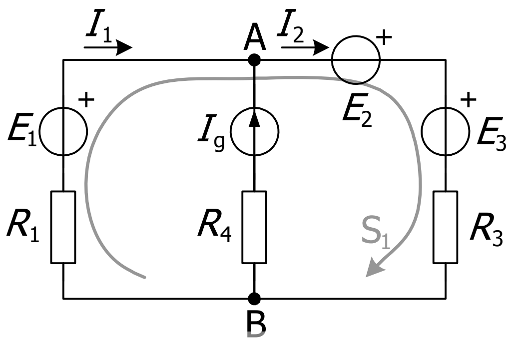
Rešenje:

a) Na slici II.8.1.2.1 prikazani su usvojeni smerovi struja svih grana kola. Ovo kolo ima $n_č$ = 2 čvora i n_g = 3 grane. Po I Kirhofovom zakonu pišemo:

$n_č$ - 1= 1 jednačinu.

Za čvor A ova jednačina glasi:

$$-I_1 - I_g + I_2 = 0.$$



Slika II.8.1.2.1

Analizirano kolo sadrži jedan idealan strujni generator. Broj jednačina koje pišemo po II Kirhofovom zakonu smanjuje se za broj idealnih strujnih generatora n_{Ig}, tako da za ovo kolo po II Kirhofovom zakonu pišemo

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 3 - (2 - 1) - 1 = 1 \text{ jednačinu.}$$

Za razliku od prethodnog zadatka, koji nije sadržao strujne generatore, ovde se nezavisne konture ne mogu prizvoljno birati: **kontura za koju se piše jednačina po II Kirhofovom zakonu ne sme obuhvatati strujni generator** jer su u opštem slučaju naponi na krajevima strujnih generatora nepoznati. (Ovo naravno ne znači da II Kirhofov zakon ne važi za konture koje sadrže strujne generatore!) Dakle, u ovom zadatku biramo samo jednu konturu i postoji samo jedna mogućnost izbora te konture, a da ona ne obuhvati strujni generator. Kontura S_1, sa proizvoljno određenim smerom, prikazana je na slici II.8.1.2.1. Za ovu konturu jednačina po II Kirhofovom zakonu glasi:

$$-R_1 I_1 + E_1 + E_2 - E_3 - R_3 I_2 = 0\,.$$

Zamenjujući brojne vrednosti dobijamo sistem jednačina:

$$-I_1 + I_2 = 0{,}06$$

$$-300 I_1 - 600 I_2 = -12$$

Determinanta sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -300 & -600 \end{vmatrix} = (-1)(-600) - (-300)\cdot 1 = 900\,,$$

dok su determinante promenljivih I_1 i I_2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0{,}06 & 1 \\ -12 & -600 \end{vmatrix} = 0{,}06\cdot(-600) - (-12)\cdot 400 = -24\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0{,}06 \\ -300 & -12 \end{vmatrix} = (-1)(-12) - (-300)\cdot 0{,}06 = 30\,.$$

pa su nepoznate struje:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-24}{900}\ \text{A} = 0{,}0267\ \text{A} = 26{,}7\ \text{mA}\,,$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{900}\ \text{A} = 0{,}0333\ \text{A} = 33{,}3\ \text{mA}\,.$$

b) Napon U_{AB} možemo odrediti duž grane koja sadrži generator E_1 i otpornik R_1, ili duž grane koja sadrži generatore E_2 i E_3 i otpornik R_3. Napon U_{AB} nećemo određivati duž grane sa strujnim generatorom jer ne znamo napon na njemu. Dakle, u opštem slučaju, prilikom određivanja napona između dve tačke putanja ne obuhvata strujni generator jer napon na njemu nije poznat.

$$U_{AB} = R_3 I_2 + E_3 - E_2 =$$

$$= -R_1 I_1 + E_1 = 20\ \text{V}$$

II.8.2 METOD KONTURNIH STRUJA

TEORIJSKA OSNOVA

- Metod konturnih struja ima broj jednačina jednak $\boldsymbol{n_\mathrm{g}} - (\boldsymbol{n_\mathrm{č}} - \mathbf{1})$ (isti broj jednačina kao što se piše po drugom Kirhofovom zakonu), ali nepoznate veličine i u tim jednačinama nisu struje grana već "zamišljene" struje kontura.

- Opšti sistem jednačina, na primer, trećeg reda glasi:

$$\boldsymbol{R_{11}I_\mathrm{I}} + \boldsymbol{R_{12}I_\mathrm{II}} + \boldsymbol{R_{13}I_\mathrm{III}} = \boldsymbol{E_\mathrm{I}}$$

$$\boldsymbol{R_{21}I_\mathrm{I}} + \boldsymbol{R_{22}I_\mathrm{II}} + \boldsymbol{R_{23}I_\mathrm{III}} = \boldsymbol{E_\mathrm{II}}$$

$$\boldsymbol{R_{31}I_\mathrm{I}} + \boldsymbol{R_{32}I_\mathrm{II}} + \boldsymbol{R_{33}I_\mathrm{III}} = \boldsymbol{E_\mathrm{III}}$$

U ovom opštem sistemu članovi se određuju prema precizno definisanim pravilima:

– sve otpornosti sa istim indeksima (na primer R_{11}, R_{22}, R_{33}) uvek su pozitivne i predstavljaju zbir svih otpornosti u konturi čiji je broj u indeksu;

– sve otpornosti sa mešovitim indeksima (na primer R_{12}, R_{23}, R_{13}) predstavljaju zbir otpornosti u granama zajedničkim za dve konture, čiji broj stoji u indeksu. Mogu biti ili pozitivne ili negativne, što zavisi od usmerenja kontura: ako je isti smer obe konture, ove otpornosti dobijaju predznak "+", a za suprotan smer dobijaju predznak "-";

– sve otpornosti sa mešovitim indeksima istih brojeva, a suprotnog redosleda (na primer R_{12} i R_{21}) uvek su jednake;

– elektromotorne sile sa desne strane opšteg sistema jednačina (na primer E_I) predstavljaju zbir svih elektromotornih sila generatora u konturi čiji je broj u indeksu, prema usaglašenom referentnom smeru;

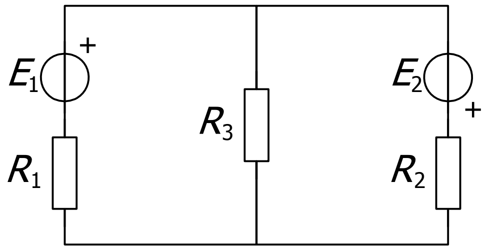
– I_I, I_II i I_III su konturne struje;

– kada se rešavanjem sistema jednačina izračunaju konturne struje onda se preko njih izračunavaju električne struje grana kola.

- Važno je da prilikom izbora i ucrtavanja kontura svaka mora biti nezavisna, tj. da svaka kontura mora imati barem jednu granu koja samo njoj pripada (na taj način će jednačina koju pišemo za tu konturu biti matematički nezavisna).

- Ako postoji strujni generator u kolu, onda obavezno kroz granu sa njim sprovodimo samo jednu konturu. Tako će električna struja te konture biti jednaka struji strujnog generatora. Time se broj jednačina (broj nepoznatih) opšteg sistema smanjuje za broj strujnih generatora u kolu n_{Ig}.

II.8.2.1 Za kolo prikazano na slici metodom konturnih struja odrediti intenzitete struja u svim granama, ako je $E_1 = 6$ V, $E_2 = 20$ V i $R_1 = 700\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 400\ \Omega$.

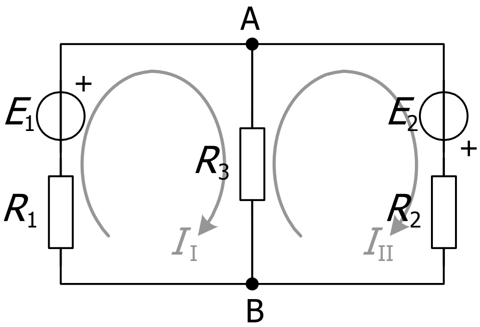


Rešenje:

Metod konturnih struja izveden je iz II Kirhofovog zakona. Kao što smo videli kad smo postavljali jednačine po II Kirhofovom zakonu broj nezavisnih kontura u kolu, koje ima $n_č$ čvorova i n_g grana, jednak je:

$$n_g - (n_č - 1).$$

Po metodi konturnih struja zamišljamo da kroz svaku od nezavisnih kontura prolazi po jedna takozvana konturna struja. Za svaku konturnu struju postavlja se po jedna jednačina.



Slika II.8.2.1.1

Kolo koje analiziramo ima $n_č = 2$ čvora i $n_g = 3$ grane, pa je broj konturnih struja:

$$n_g - (n_č - 1) = 3 - (2 - 1) = 2.$$

Odredimo nezavisne konture (kao što je pokazano u zadatku II.8.1.1) i proizvoljno usvojimo smerove konturnih struja svake konture (slika II.8.2.1.1). Opšti oblik jednačina konturnih struja za ovo kolo je drugog reda (dve konturne struje) i glasi:

$$R_{11} I_{\mathrm{I}} + R_{12} I_{\mathrm{II}} = E_{\mathrm{I}}$$

$$R_{21} I_{\mathrm{I}} + R_{22} I_{\mathrm{II}} = E_{\mathrm{II}}$$

R_{11} predstavlja zbir svih otpornosti kroz koje protiče konturna struja I_{I} i uvek ima pozitivan predznak:

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 1{,}1\ \mathrm{k}\Omega.$$

R_{22} predstavlja zbir svih otpornosti kroz koje protiče konturna struja I_{II} i uvek ima pozitivan predznak:

$$R_{22} = R_2 + R_3 = 0{,}7\ \mathrm{k}\Omega.$$

Otpornosti R_{12} i R_{21} su uvek jednake (imaju iste brojeve u indeksu, različitog redosleda) i predstavljaju ukupnu otpronost grane koja je zajednička za konturnu struju I_{I} i konturnu struju I_{II}. U ovom kolu je to grana sa otpornikom R_3. S obzirom da su smerovi konturnih struja kroz ovu zajedničku granu suprotni, predznak otpornosti R_{12} i R_{21} je negativan:

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -0{,}4\ \mathrm{k}\Omega.$$

E_I je algebarski zbir svih elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja I_I. Ako se smer struje poklapa sa referentnim smerom određene elektromotorne sile, ta elektromotorna sila ima predznak "+", i obrnuto.

$$E_\mathrm{I} = E_1$$

E_II je algebarski zbir svih elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja I_II.

$$E_\mathrm{II} = E_2$$

Ako ove izraze uvrstimo u opšti oblik jednačina za konturne struje dobijamo jednačine konturnih struja za analizirano kolo:

$$(R_1 + R_3)I_\mathrm{I} - R_3 I_\mathrm{II} = E_1$$

$$-R_3 I_\mathrm{I} + (R_2 + R_3)I_\mathrm{II} = E_2$$

Uvrstićemo brojne vrednosti u prethodne dve jednačine vodeći računa o jedinicama krajnjeg rezultata. Uvrstimo otpornosti u kiloomima:

$$1{,}1 I_\mathrm{I} - 0{,}4 I_\mathrm{II} = 6$$

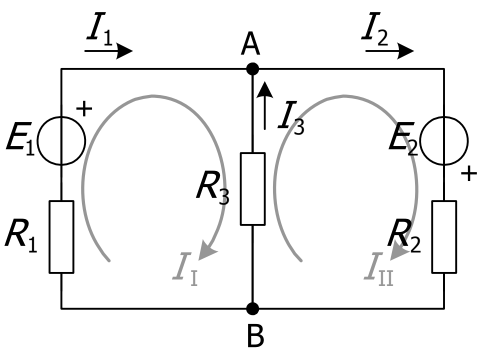
$$-0{,}4 I_\mathrm{I} + 0{,}7 I_\mathrm{II} = 20$$

Dobili smo isti sistem jednačina kao u zadatku II.8.1.1, s tim što će rezultujuće struje biti izražene u miliamperima. Determinante sistema i determinante promenljivih su:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}61, \qquad \Delta_\mathrm{I} = \begin{vmatrix} 6 & -0{,}4 \\ 20 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 12{,}2, \qquad \Delta_\mathrm{II} = \begin{vmatrix} 1{,}1 & 6 \\ -0{,}4 & 20 \end{vmatrix} = 24{,}4,$$

na osnovu čega se dobijaju konturne struje:

$$I_\mathrm{I} = \frac{\Delta_\mathrm{I}}{\Delta} = \frac{12{,}2}{0{,}61}\ \mathrm{mA} = 20\ \mathrm{mA}, \qquad I_\mathrm{II} = \frac{\Delta_\mathrm{II}}{\Delta} = \frac{24{,}4}{0{,}61}\ \mathrm{mA} = 40\ \mathrm{mA}.$$



Slika II.8.2.1.2

Struju svake grane čine konturne struje koje prolaze kroz tu granu. Struja određene grane se stoga dobija algebarskim zbirom konturnih struja koje prolaze kroz tu granu. Ako se smer konturne struje poklapa sa smerom struje grane, konturna struja ima pozitivan predznak, a ako su smerovi struje u grani i konturne struje suprotni, konturna struja ima negativan predznak.

Obeležimo nepoznate struje u granama kola, slika II.8.2.1.2. Kroz granu sa strujom I_1 protiče samo konturna struja I_I i istog je smera kao struja I_1 pa je:

$$I_1 = I_\mathrm{I} = 20\ \mathrm{mA}.$$

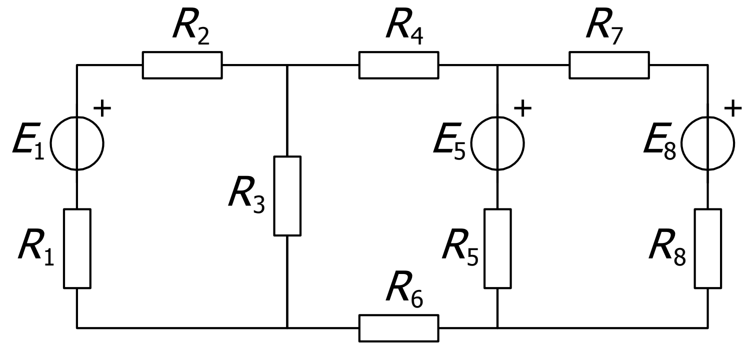
Kroz granu sa strujom I_2 protiče samo konturna struja I_II i istog je smera kao struja I_2, pa je:

$$I_2 = I_\mathrm{II} = 40\ \mathrm{mA}.$$

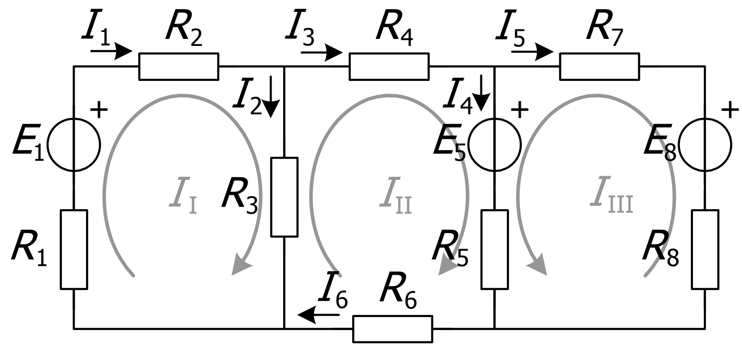
Kroz granu sa strujom I_3 protiču konturne struje I_I i I_II, i to konturna struja I_I protiče u suprotnom smeru od struje I_3, a konturna struja I_II je istog smera kao struja I_3, pa je:

$$I_3 = -I_\mathrm{I} + I_\mathrm{II} = -20\ \mathrm{mA} + 40\ \mathrm{mA} = 20\ \mathrm{mA}.$$

II.8.2.2 Za kolo prikazano na slici napisati jednačine po metodi konturnih struja i izraze za struje pojedinih grana.



Rešenje:



Slika II.8.2.2.1

Posmatrano kolo ima $n_č = 4$ čvora i $n_g = 6$ grana pa je broj konturnih struja (i jednačina koje rešavamo) jednak:

$$n_g - (n_č - 1) = 6 - (4 - 1) = 3.$$

Na slici II.8.2.2.1 prikazana je jedna mogućnost za izbor konturnih struja i obeležene su nepoznate struje grana.

Opšti sistem jednačina konturnih struja trećeg reda je (imamo tri konturne struje):

$$R_{11}I_{\mathrm{I}} + R_{12}I_{\mathrm{II}} + R_{13}I_{\mathrm{III}} = E_{\mathrm{I}}$$

$$R_{21}I_{\mathrm{I}} + R_{22}I_{\mathrm{II}} + R_{23}I_{\mathrm{III}} = E_{\mathrm{II}}$$

$$R_{31}I_{\mathrm{I}} + R_{32}I_{\mathrm{II}} + R_{33}I_{\mathrm{III}} = E_{\mathrm{III}}$$

Otpornosti kroz koje protiču pojedine konturne struje su:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3,$$

$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 + R_6,$$

$$R_{33} = R_5 + R_7 + R_8.$$

Otpornost grane koja je zajednička za konturne struje I_{I} i I_{II} je:

$$R_{12} = R_{21} = -R_3.$$

suprotan smer struja I_{I} i I_{II} kroz granu sa otpornikom R_3

Otpornost grane koja je zajednička za konturne struje I_{II} i I_{III} je:

$$R_{23} = R_{32} = +R_5 .$$

isti smer struja I_{II} i I_{III} kroz granu sa otpornikom R_5

Konturne struje I_I i I_{III} nemaju zajedničkih grana pa je:

$$R_{13} = R_{31} = 0 .$$

Elektromotorne sile kroz koje protiču pojedine konturne struje su:

$$E_I = +E_1$$

isti referentni smer kao struja I_I

$$E_{II} = -E_5$$

suprotan referentni smer od struje I_{II}

$$E_{III} = -E_5 + E_8$$

isti referentni smer kao struja I_{III}

suprotan referentni smer od struje I_{III}

Konačno, sistem jednačina za analizirano kolo glasi:

$$\begin{array}{rrrl}
(R_1 + R_2 + R_3)I_I & -R_3 I_{II} & +0 \cdot I_{III} & = E_1 \\
-R_3 I_I & +(R_3 + R_4 + R_5 + R_6)I_{II} & +R_5 I_{II} & = -E_5 \\
0 \cdot I_I & +R_5 I_{II} & +(R_5 + R_7 + R_8)I_{III} & = -E_5 + E_8
\end{array}$$

odnosno

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_I - R_3 I_{II} = E_1$$

$$-R_3 I_I + (R_3 + R_4 + R_5 + R_6)I_{II} + R_5 I_{III} = -E_5$$

$$R_5 I_{II} + (R_5 + R_7 + R_8)I_{III} = -E_5 + E_8$$

Struje pojedinih grana su:

$$I_1 = +I_I ,$$

isti smer kao struja I_1

$$I_2 = +I_I - I_{II} ,$$

suprotan smer od struje I_2

isti smer kao struja I_2

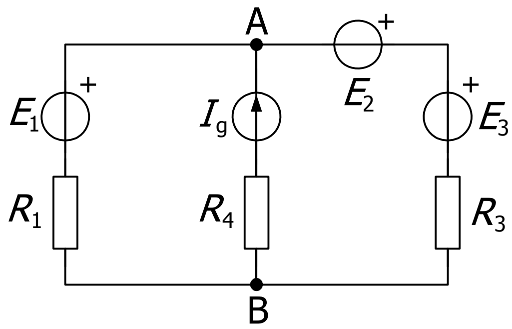
$$I_3 = I_{II} ,$$

$$I_4 = I_{II} + I_{III} ,$$

$$I_5 = -I_{III} ,$$

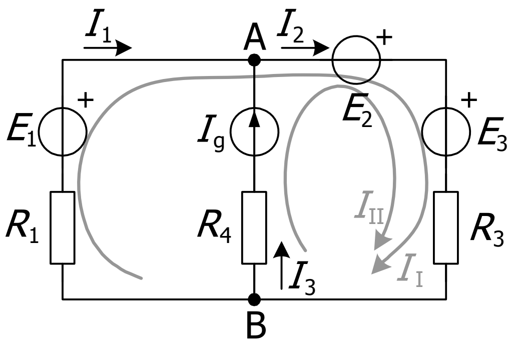
$$I_6 = I_{II} .$$

II.8.2.3 Generatori $E_1 = 12$ V, $E_2 = 24$ V, $E_3 = 24$ V i $I_g = 60$ mA, i otpornici $R_1 = 300\ \Omega$, $R_3 = 600\ \Omega$ i $R_4 = 500\ \Omega$ vezani su u kolo kao što je prikazano na slici. Metodom konturnih struja odrediti intenzitete struja u svim granama kola.



Rešenje:

a)



Slika II.8.2.3.1

Posmatrano kolo ima $n_č = 2$ čvora i $n_g = 3$ grane i sadrži $n_{Ig} = 1$ idealan strujni generator. Broj konturnih struja je:

$$n_g - (n_č - 1) = 2.$$

Po pravilu se tako biraju nezavisne konture da **kroz svaki strujni generator prolazi tačno jedna konturna struja**. Na taj način je konturna struja koja prolazi kroz strujni generator određena vrednošću struje generatora, pa se ukupan broj jednačina koje rešavamo smanjuje za broj idealnih strujnih generatora n_{Ig}. Dakle, u ovom zadatku rešavamo

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 1 \text{ jednačinu.}$$

Na slici II.8.2.3.1 prikazana je jedna mogućnost izbora konturnih struja i obeležene su nepoznate struje grana. Opšti oblik jednačina po metodi konturnih struja je drugog reda (dve konturne struje) i glasi:

$$R_{11} I_I + R_{12} I_{II} = E_I \quad (1)$$

$$I_{II} = I_g \quad (2)$$

Obratiti pažnju da se **za konturnu struju koja prolazi kroz idealni strujni generator** (u ovom slučaju je to struja I_{II}) **ne postavlja jednačina u opštem obliku**.

Zbir svih otpornosti kroz koje protiče konturna struja I_I je

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 900\ \Omega\,.$$

Otpornost grane koja je zajednička za konturne struje I_I i I_{II}, i kroz koju struje teku u istom smeru, je:

$$R_{12} = R_3 = 600\ \Omega\,.$$

Zbir elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja I_I čini desnu stranu jednačine (1):

$$E_I = E_1 + E_2 - E_3 = 12\ \text{V}\,.$$

Dobijeni sistem jednačina glasi:

$$(R_1 + R_3)I_\mathrm{I} + R_3 I_\mathrm{II} = E_1 \qquad (1)$$

$$I_\mathrm{II} = I_\mathrm{g} \qquad (2)$$

Zamenom poznate konturne struje I_II u jednačinu (1) dobijamo izraz za nepoznatu konturnu struju I_I:

$$(R_1 + R_3)I_\mathrm{I} + R_3 I_\mathrm{g} = E_1 \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{I} = \frac{E_1 + E_2 - E_3 - R_3 I_\mathrm{g}}{R_1 + R_3} = \frac{-24\ \mathrm{V}}{900\ \Omega} = -0{,}0267\ \mathrm{A} = -26{,}7\ \mathrm{mA}$$

Struje grana su:

$$I_1 = I_\mathrm{I} = -26{,}7\ \mathrm{mA}, \quad I_2 = I_\mathrm{I} + I_\mathrm{II} = 33{,}3\ \mathrm{mA}, \quad I_3 = I_\mathrm{II} = I_\mathrm{g} = 60\ \mathrm{mA}.$$

II.8.2.4 U kolu na slici poznato je:

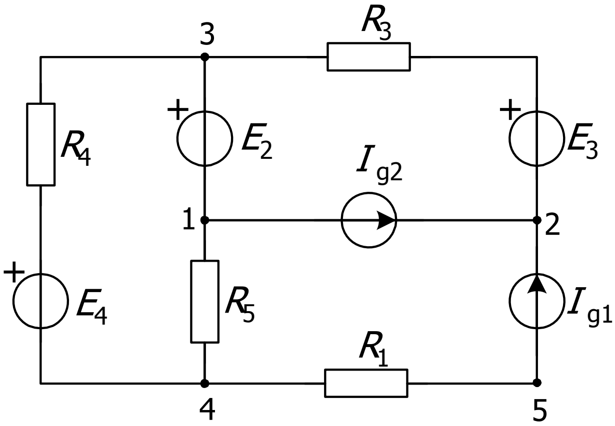
I_{g1} = 12 A, I_{g2} = 6 A,

E_2 = 30 V, E_3 = 20 V, E_4 = 40 V,

R_1 = 10 Ω, R_3 = 40 Ω, R_4 = 20 Ω, R_5 = 30 Ω

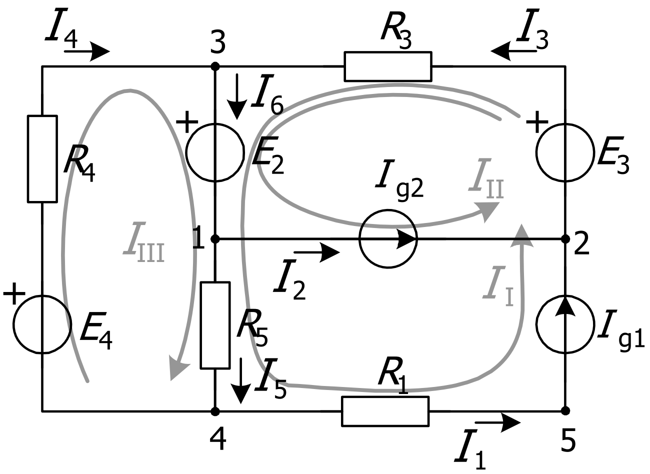
a) Odrediti struje svih grana kola primenom metode konturnih struja.

b) Odrediti snagu strujnog generatora I_{g1}.



Rešenje:

a)



Slika II.8.2.4.1

Posmatrano kolo ima $n_č$ = 4 čvora, n_g = 6 grana i sadrži n_{Ig} = 2 idealna strujna generatora. Broj konturnih struja jednak je broju nezavisnih kontura ovog kola:

$$n_g - (n_č - 1) = 3.$$

Po pravilu kroz svaki strujni generator prolazi tačno jedna konturna struja i njen intenzitet je određen strujom tog strujnog generatora, tako da je broj nepoznatih konturnih struja smanjen za n_{Ig}. Dakle, broj jednačina koje rešavamo je:

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 1.$$

Opšti sistem jednačina glasi:

$$I_\mathrm{I} = I_{g1} \qquad (1)$$

$$I_\mathrm{II} = I_{g2} \qquad (2)$$

$$R_{31} I_\mathrm{I} + R_{32} I_\mathrm{II} + R_{33} I_\mathrm{III} = E_\mathrm{III} \qquad (3)$$

Zbir svih otpornosti kroz koje protiče konturna struja I_{III} je

$$R_{33} = R_4 + R_5 .$$

Otpornost grane koja je zajednička za konturne struje I_{I} i I_{III}, i kroz koju struje teku u istom smeru, je:

$$R_{31} = R_5 .$$

Za konturne struje I_{II} i I_{III} zajednička je grana koja sadrži samo generator E_5. Dakle, otpornost te grane je 0:

$$R_{32} = 0 .$$

Zbir elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja I_{III} je:

$$E_{\mathrm{I}} = E_4 - E_2 .$$

Zamenom koeficijenata i poznatih struja u jednačinu (3) dobijamo nepoznatu konturnu struju I_{III}:

$$R_5 I_{g1} + (R_4 + R_5) I_{\mathrm{III}} = E_4 - E_2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{\mathrm{III}} = \frac{E_4 - E_2 - R_5 I_{g1}}{R_4 + R_5} = \frac{-350\ \mathrm{V}}{50\ \Omega} = -7\ \mathrm{A}$$

Struje grana su:

$$I_1 = I_{\mathrm{I}} = I_{g1} = 12\ \mathrm{A} ,$$

$$I_2 = I_{\mathrm{II}} = I_{g2} = 6\ \mathrm{A} ,$$

$$I_3 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{II}} = 12\ \mathrm{A} + 6\ \mathrm{A} = 18\ \mathrm{A} ,$$

$$I_4 = I_{\mathrm{III}} = -7\ \mathrm{A} ,$$

$$I_5 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{III}} = 12\ \mathrm{A} - 7\ \mathrm{A} = 5\ \mathrm{A} ,$$

$$I_6 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}} = 12\ \mathrm{A} + 6\ \mathrm{A} - 7\ \mathrm{A} = 11\ \mathrm{A} .$$

b) Snaga strujnog generatora jednaka je proizvodu struje generatora i napona na njegovim krajevima pri usaglašenim referentnim smerovima. Prema tome, snaga strujnog generatora I_{g1} je:

$$P_{I_{g1}} = U_{25} \cdot I_{g1} ,$$

pri čemu je:

$$U_{25} = R_1 I_1 + R_5 I_5 + E_2 + R_3 I_3 - E_3 = 120\ \mathrm{V} + 150\ \mathrm{V} + 30\ \mathrm{V} + 720\ \mathrm{V} - 20\ \mathrm{V} = 1000\ \mathrm{V} .$$

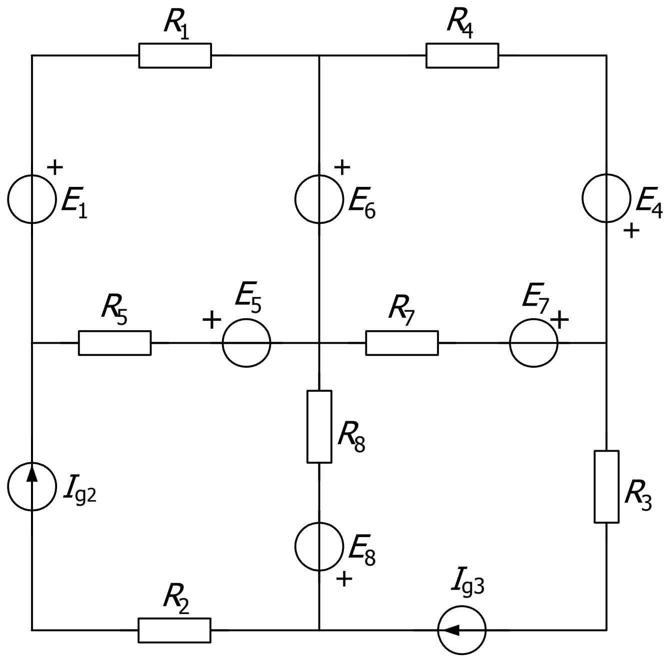
$$\Rightarrow \qquad P_{I_{g1}} = U_{25} \cdot I_{g1} = 1000\ \mathrm{V} \cdot 12\ \mathrm{A} = 12000\ \mathrm{W} = 12\ \mathrm{kW}$$

II.8.2.5 U kolu na slici izračunati:

a) struje u svim granama kola primenom metode konturnih struja,

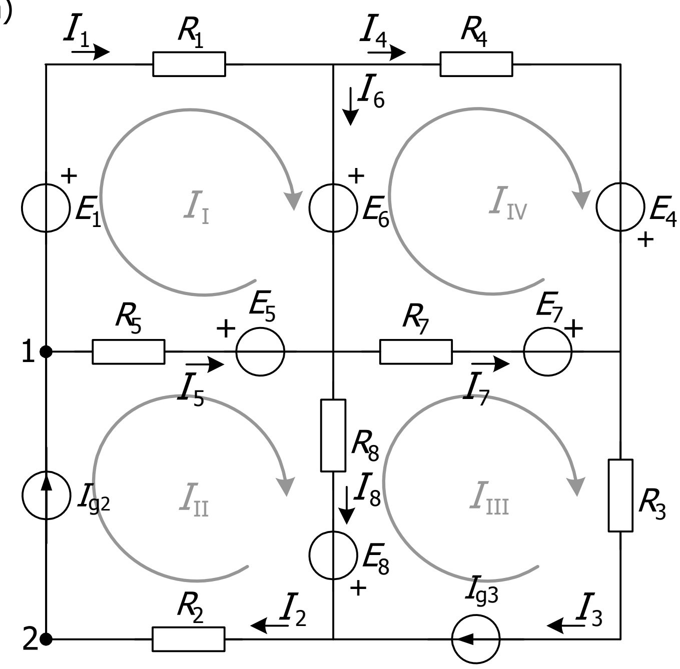
b) snagu strujnog generatora I_{g2}.

Vrednosti elemenata:
$E_1 = 1$ V, $E_4 = 4$ V, $E_5 = 5$ V,
$E_6 = 6$ V, $E_7 = 7$ V, $E_8 = 8$ V,
$I_{g2} = 2$ A, $I_{g3} = 3$ A,
$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 20\ \Omega$,
$R_7 = R_8 = 30\ \Omega$.



Rešenje:

a)



Slika II.8.2.5.1

Posmatrano kolo ima $n_č = 5$ čvorova, $n_g = 8$ grana i sadrži $n_{Ig} = 2$ idealna strujna generatora. Broj nezavisnih kontura je:

$$n_g - (n_č - 1) = 4$$

a broj jednačina koje postavljamo je:

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 2.$$

Vodeći računa o pravilu da kroz svaki strujni generator mora prolaziti tačno jedna konturna struja usvojene su nezavisne konture sa proizvoljno usvojenim referentnim smerovima konturnih struja, kao što je prikazano na slici II.8.2.5.1.

Pošto imamo četiri konturne struje opšti sistem jednačina je četvrtog reda:

$$R_{11}I_{\mathrm{I}} + R_{12}I_{\mathrm{II}} + R_{13}I_{\mathrm{III}} + R_{14}I_{\mathrm{IV}} = E_{\mathrm{I}} \qquad (1)$$

$$I_{\mathrm{II}} = I_{g2} \qquad (2)$$

$$I_{\mathrm{III}} = I_{g3} \qquad (3)$$

$$R_{41}I_{\mathrm{I}} + R_{42}I_{\mathrm{II}} + R_{43}I_{\mathrm{III}} + R_{44}I_{\mathrm{IV}} = E_{\mathrm{IV}} \qquad (4)$$

Koeficijenti su:

$$R_{11} = R_1 + R_5 = 10\ \Omega + 20\ \Omega = 30\ \Omega,$$

$$R_{12} = -R_5 = -20\ \Omega,$$

$$R_{13} = 0 \text{ (struje } I_\mathrm{I} \text{ i } I_\mathrm{III} \text{ nemaju zajedničkih grana),}$$

$$R_{14} = R_{41} = 0 \text{ (struje } I_\mathrm{I} \text{ i } I_\mathrm{IV} \text{ imaju zajedničku granu, koja sarži samo naponski generator),}$$

$$R_{24} = 0 \text{ (struje } I_\mathrm{II} \text{ i } I_\mathrm{IV} \text{ nemaju zajedničkih grana),}$$

$$R_{43} = -R_7 = -30\ \Omega,$$

$$R_{44} = R_4 + R_7 = 20\ \Omega + 30\ \Omega = 50\ \Omega,$$

$$E_\mathrm{I} = E_1 - E_6 + E_5 = 1\ \mathrm{V} - 6\ \mathrm{V} + 5\ \mathrm{V} = 0\ \mathrm{V},$$

$$E_\mathrm{IV} = E_6 + E_4 - E_7 = 6\ \mathrm{V} + 4\ \mathrm{V} - 7\ \mathrm{V} = 3\ \mathrm{V}.$$

Zamenjujući koeficijente dobijamo sistem:

$$(R_1 + R_5)I_\mathrm{I} - R_5 I_\mathrm{II} = E_1 - E_6 + E_5 \qquad (1)$$

$$I_\mathrm{II} = I_{g2} \qquad (2)$$

$$I_\mathrm{III} = I_{g3} \qquad (3)$$

$$-R_7 I_\mathrm{III} + (R_4 + R_7)I_\mathrm{IV} = E_6 + E_4 - E_7 \qquad (4)$$

Zamenjujući poznate struje u jednačinama (1) i (4) dobijamo dve jednačine sa po jednom nepoznatom strujom:

$$(R_1 + R_5)I_\mathrm{I} - R_5 I_{g2} = E_1 - E_6 + E_5 \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{I} = \frac{E_1 - E_6 + E_5 + R_5 I_{g2}}{R_1 + R_5} = \frac{40\ \mathrm{V}}{30\ \Omega} = 1{,}33\ \mathrm{A}$$

$$-R_7 I_{g3} + (R_4 + R_7)I_\mathrm{IV} = E_6 + E_4 - E_7 \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{IV} = \frac{E_6 + E_4 - E_7 + R_7 I_{g3}}{R_4 + R_7} = \frac{93\ \mathrm{V}}{50\ \Omega} = 1{,}86\ \mathrm{A}$$

Struje grana su:

$$I_1 = I_\mathrm{I} = 1{,}33\ \mathrm{A},$$

$$I_2 = I_\mathrm{II} = I_{g2} = 2\ \mathrm{A},$$

$$I_3 = I_\mathrm{III} = I_{g3} = 3\ \mathrm{A}$$

$$I_4 = I_\mathrm{IV} = 1{,}86\ \mathrm{A},$$

$$I_5 = -I_\mathrm{I} + I_\mathrm{II} = 0{,}67\ \mathrm{A},$$

$$I_6 = I_\mathrm{I} - I_\mathrm{IV} = -0{,}53\ \mathrm{A},$$

$$I_7 = -I_\mathrm{IV} + I_\mathrm{III} = 1{,}14\ \mathrm{A},$$

$$I_8 = I_\mathrm{II} - I_\mathrm{III} = -1\ \mathrm{A}.$$

b) Na slici II.8.2.5.1 obeleženi su krajevi strujnog generatora I_{g2} tačkama 1 i 2, pa je napon na njemu pri usaglašenim referentnim smerovima:

$$U_{12} = R_2 I_2 - E_8 + R_8 I_8 + E_5 + R_5 I_5 = 20\ \text{V} - 8\ \text{V} - 30\ \text{V} + 5\ \text{V} + 13{,}4\ \text{V} = 0{,}4\ \text{V},$$

pa je snaga ovog strujnog generatora:

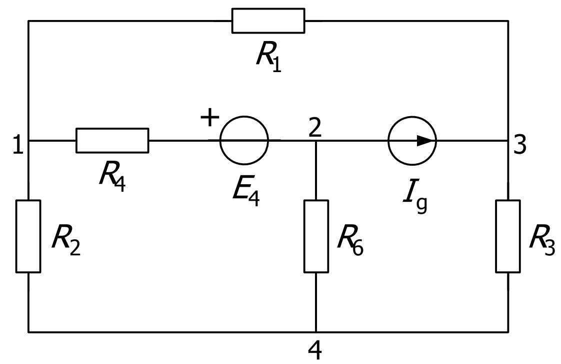
$$P_{I_{g2}} = U_{12} \cdot I_{g2} = 0{,}4\ \text{V} \cdot 2\ \text{A} = 0{,}8\ \text{W}.$$

II.8.2.6 Odrediti struje svih grana kola primenom metode konturnih struja, kao i snage svih elemenata u kolu. Poznato je:

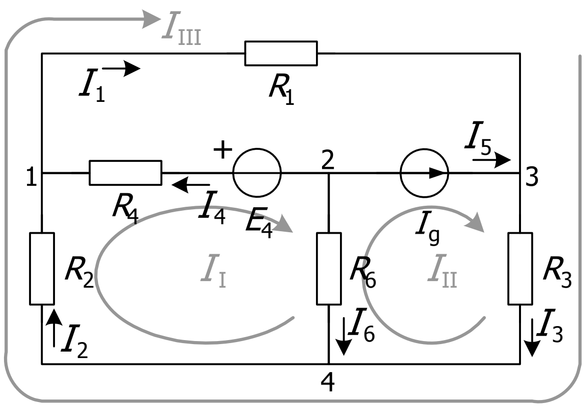
E_4 = 138 V, I_g = 34 mA,

R_1 = 2 kΩ, R_2 = 2 kΩ, R_3 = 3 kΩ,

R_4 = 500 Ω, R_6 = 6 kΩ.



Rešenje:



Slika II.8.2.6.1

Posmatrano kolo ima $n_č$ = 4 čvora, n_g = 6 grana i sadrži n_{Ig} = 1 idealni strujni generator. Broj nezavisnih kontura je:

$$n_g - (n_č - 1) = 3,$$

a broj jednačina koje postavljamo je:

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 2.$$

Posle sređivanja sistem jednačina glasi:

$$(R_2 + R_4 + R_6) I_{\text{I}} - R_6 I_{\text{II}} + R_2 I_{\text{III}} = -E_4 \quad (1)$$

$$I_{\text{II}} = I_g \quad (2)$$

$$R_2 I_{\text{I}} + R_3 I_{\text{II}} + (R_1 + R_2 + R_3) I_{\text{III}} = 0 \quad (3)$$

Zamenom brojnih vrednosti otpornosti (u kΩ), elektromotorne sile i poznate struje, dobijamo sistem dve jednačine sa dve nepoznate:

$$8{,}5 I_{\text{I}} + 2 I_{\text{III}} = 66$$

$$2 I_{\text{I}} + 7 I_{\text{III}} = -102$$

čije su determinante sistema i promenljivih:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8{,}5 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 8{,}5 \cdot 7 - 2 \cdot 2 = 55{,}5\,,$$

$$\Delta_{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} 66 & 2 \\ -102 & 7 \end{vmatrix} = 66 \cdot 7 - (-102) \cdot 2 = 666\,,$$

$$\Delta_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} 8{,}5 & 66 \\ 2 & -102 \end{vmatrix} = 8{,}5 \cdot (-102) - 2 \cdot 66 = -999\,.$$

Nepoznate konturne struje su:

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta_{\mathrm{I}}}{\Delta} = \frac{666}{55{,}5}\ \mathrm{mA} = 12\ \mathrm{mA}\,, \qquad I_{\mathrm{III}} = \frac{\Delta_{\mathrm{III}}}{\Delta} = \frac{-999}{55{,}5}\ \mathrm{mA} = -18\ \mathrm{mA}\,.$$

Struje grana su:

$$I_1 = I_{\mathrm{III}} = -18\ \mathrm{mA}\,,$$

$$I_2 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{III}} = -6\ \mathrm{mA}\,,$$

$$I_3 = I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}} = 16\ \mathrm{mA}$$

$$I_4 = -I_{\mathrm{I}} = -12\ \mathrm{mA}\,,$$

$$I_5 = I_{\mathrm{II}} = 34\ \mathrm{mA}\,,$$

$$I_6 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} = -22\ \mathrm{mA}\,.$$

Za određivanje snage strujnog generatora potrebno je da odredimo napon U_{32}:

$$U_{32} = -R_6 I_6 + R_3 I_3 = 180\ \mathrm{V}\,,$$

pa je snaga:

$$P_{I_\mathrm{g}} = U_{32} \cdot I_\mathrm{g} = 180\ \mathrm{V} \cdot 0{,}034\ \mathrm{A} = 6{,}12\ \mathrm{W}\,.$$

Zbog usaglašenih referentnih smerova struje I_4 i generatora E_4, snaga ovog generatora ima pozitivan predznak:

$$P_{E_4} = E_4 I_4 = 138\ \mathrm{V} \cdot (-\,0{,}012\ \mathrm{A}) = -1{,}656\ \mathrm{W}\,.$$

Pošto je stvaran smer struje I_4 suprotan od usvojenog, konačna brojna vrednost snage je negativna, što znači da se generator E_4 ponaša kao potrošač.

Snage otpornika su:

$$P_{R_1} = R_1 I_1^2 = 2000\ \Omega \cdot \left(-18 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\right)^2 = 0{,}648\ \mathrm{W}\,,$$

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 2000\ \Omega \cdot \left(-6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\right)^2 = 0{,}072\ \mathrm{W}\,,$$

$$P_{R_3} = R_3 I_3^2 = 3000\ \Omega \cdot \left(-16 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\right)^2 = 0{,}768\ \mathrm{W}\,,$$

$$P_{R_4} = R_4 I_4^2 = 500\ \Omega \cdot \left(-12 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\right)^2 = 0{,}072\ \mathrm{W}\,.$$

$$P_{R_6} = R_6 I_6^2 = 6000\ \Omega \cdot \left(-22 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\right)^2 = 2{,}904\ \mathrm{W}\,.$$

I naravno, važi zakon o održanju energije:

$$P_{E_4} + P_{I_g} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_6} .$$

II.8.3 TRANSFIGURACIJE KOLA

TEORIJSKA OSNOVA

- Transfiguracije kola se dele na transfiguracije otpornika i transfiguracije generatora.

- Transfiguracije kola se smeju primeniti ako ne treba odrediti struje u svim granama u kolu.

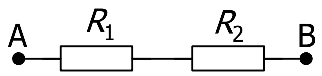
- Pri svim ovim transfiguracijama naponi i struje u delu kola koji se ne transfiguriše moraju ostati nepormenjeni. Zato se transfiguracije rade prema tačno definisanim pravilima.

II.8.3.1 TRANSFIGURACIJE OTPORNIKA

TEORIJSKA OSNOVA

- Šta znači transfigurisati grupu otpornika?
  - To znači naći ekvivalentnu otpornost otpornika koji bi zamenio tu celu grupu.

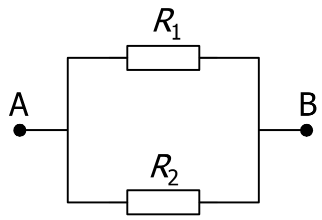
REDNA VEZA



$$\boldsymbol{R_{AB}} = \boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2}$$

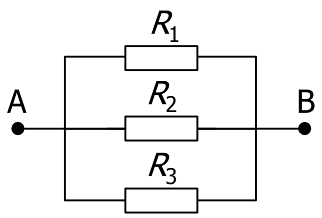
Karakteristika redne veze je da su elementi vezani u istoj grani, što znači da imaju zajedničku struju koja kroz njih prolazi

PARALELNA VEZA



$$\frac{1}{\boldsymbol{R_{AB}}} = \frac{1}{\boldsymbol{R_1}} + \frac{1}{\boldsymbol{R_2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R_{AB}} = \frac{\boldsymbol{R_1 R_2}}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2}}$$

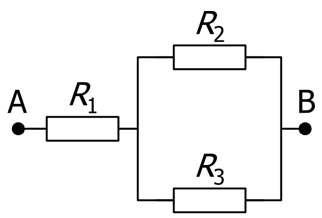
Karakteristika paralelne veze je da su elementi vezani između dve iste tačke, što znači da je napon na njima isti.



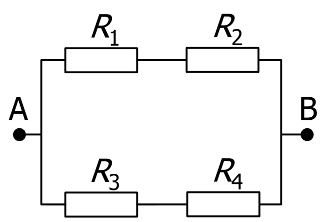
$$\frac{1}{\boldsymbol{R_{AB}}} = \frac{1}{\boldsymbol{R_1}} + \frac{1}{\boldsymbol{R_2}} + \frac{1}{\boldsymbol{R_3}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R_{AB}} = \frac{\boldsymbol{R_1 R_2 R_3}}{\boldsymbol{R_1 R_2} + \boldsymbol{R_2 R_3} + \boldsymbol{R_1 R_3}}$$

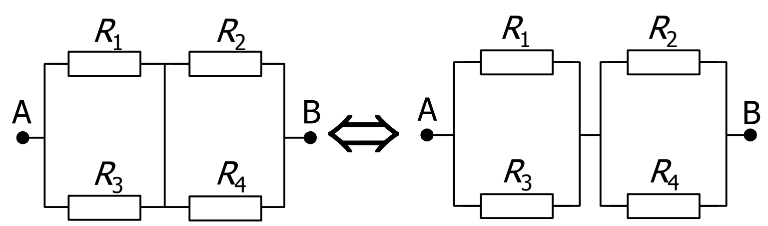
MEŠOVITE VEZE



$$\boldsymbol{R_{AB}} = \boldsymbol{R_1} + \frac{\boldsymbol{R_2 R_3}}{\boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_3}}$$



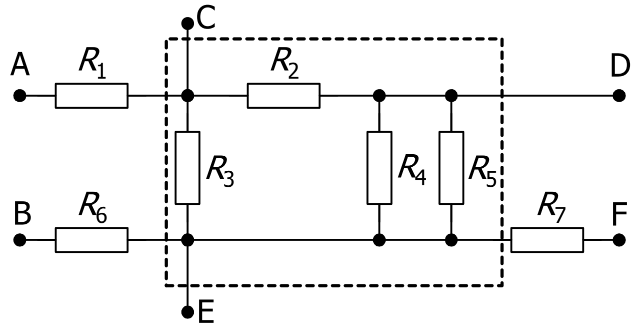
$$\boldsymbol{R_{AB}} = \frac{(\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2})(\boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_4})}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_4}}$$



$$\boldsymbol{R_{AB}} = \frac{\boldsymbol{R_1 R_2}}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2}} + \frac{\boldsymbol{R_3 R_4}}{\boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_4}}$$

– Jako je važno između kojih tačaka u kolu tražimo ekvivalentnu otpornost pošto je ona različita za jednu istu grupu otpornika u zavisnosti od tačaka između kojih se posmatra.

Primer:



Obeležena grupa otpornika sa slike ima potpuno drugačiju ekvivalentnu otpornost u ova tri slučaja, jer se traži ekvivalentna otpornost između različitih tačaka. (Pogledaj zadatak II.8.4.1.3)

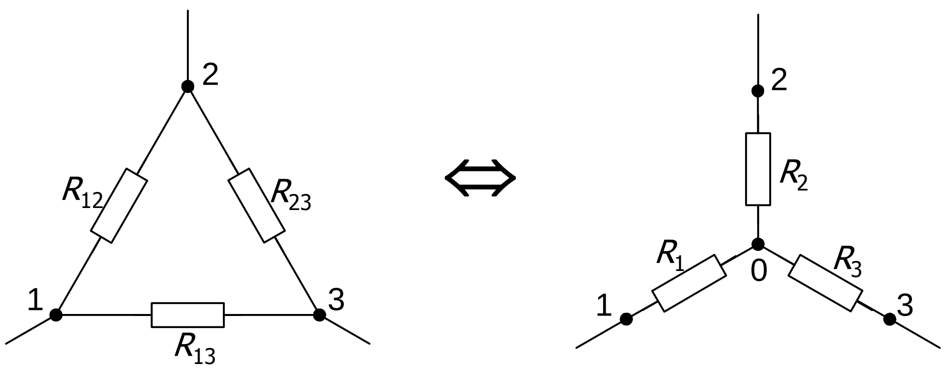
$$R_{AB} = R_1 + \boldsymbol{R_3} \,||\, (\boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_4} \,||\, \boldsymbol{R_5}) + R_6 = R_1 + \frac{\boldsymbol{R_3}\left(\boldsymbol{R_2} + \dfrac{\boldsymbol{R_4 R_5}}{\boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5}}\right)}{\boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_2} + \dfrac{\boldsymbol{R_4 R_5}}{\boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5}}} + R_6$$

$$R_{AD} = R_1 + \boldsymbol{R_2} \,||\, (\boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_4} \,||\, \boldsymbol{R_5}) = R_1 + \frac{\boldsymbol{R_2}\left(\boldsymbol{R_3} + \dfrac{\boldsymbol{R_4 R_5}}{\boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5}}\right)}{\boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_3} + \dfrac{\boldsymbol{R_4 R_5}}{\boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5}}}$$

$$R_{BD} = R_6 + (\boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_2}) \,||\, \boldsymbol{R_4} \,||\, \boldsymbol{R_5} = R_6 + \frac{(R_3 + R_2)R_4 R_5}{(R_3 + R_2)R_4 + (R_3 + R_2)R_5 + R_4 R_5}$$

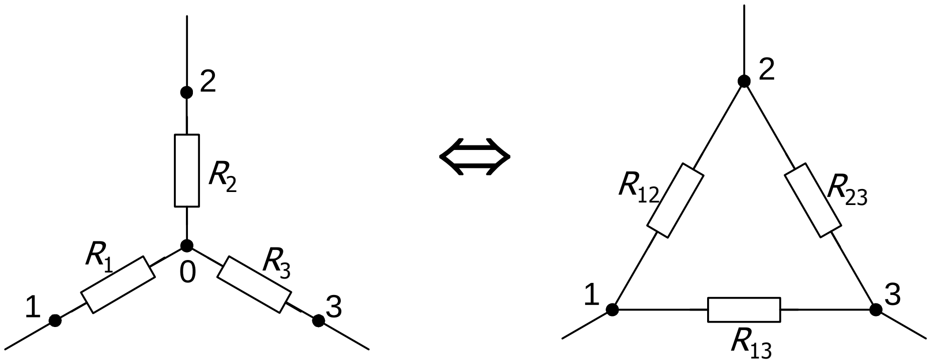
- Postoje i nešto složenije veze otpornika koje nisu ni redne, ni paralelne, ni mešovite. To su otpornici povezani u "trougao" i otpornici povezani u "zvezdu". Koriste se transfiguracija "trougao u zvezdu" i transfiguracija "zvezda u trougao".

TRANSFIGURACIJA "TROUGAO U ZVEZDU"



$$\boldsymbol{R_1} = \frac{\boldsymbol{R_{12} R_{13}}}{\boldsymbol{R_{12}} + \boldsymbol{R_{13}} + \boldsymbol{R_{23}}} \qquad \boldsymbol{R_2} = \frac{\boldsymbol{R_{12} R_{23}}}{\boldsymbol{R_{12}} + \boldsymbol{R_{13}} + \boldsymbol{R_{23}}} \qquad \boldsymbol{R_3} = \frac{\boldsymbol{R_{23} R_{13}}}{\boldsymbol{R_{12}} + \boldsymbol{R_{13}} + \boldsymbol{R_{23}}}$$

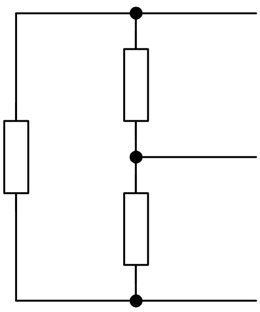
TRANSFIGURACIJA "ZVEZDA U TROUGAO"



$$\boldsymbol{R_{12}} = \boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2} + \frac{\boldsymbol{R_1 R_2}}{\boldsymbol{R_3}} \qquad \boldsymbol{R_{13}} = \boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_3} + \frac{\boldsymbol{R_1 R_3}}{\boldsymbol{R_2}} \qquad \boldsymbol{R_{23}} = \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_3} + \frac{\boldsymbol{R_2 R_3}}{\boldsymbol{R_1}}$$

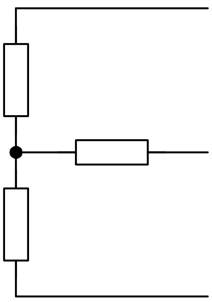
- Transfiguracija "trougao u zvezdu" smanjuje broj kontura za jednu, pa se kolo lakše rešava.

  Najčešći primer za formu trougla u zadacima je:



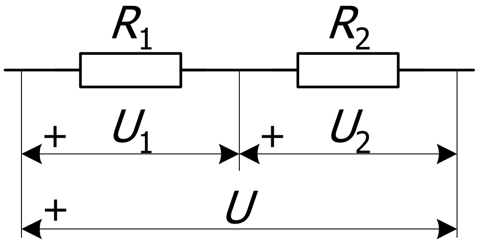
- Transfiguracija zvezda u trougao ne smanjuje broj kontura, naprotiv. Zato na prvi pogled i nije logična. Međutim, dobija se mnoštvo paralelnih veza koje u jednom koraku mogu da se ekvivalentiraju.

  Najčešći primer za formu zvezde u zadacima je:

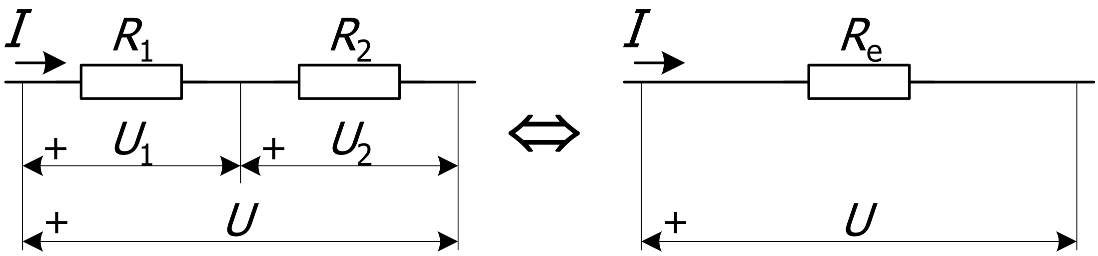


II.8.3.1.1 Za deo kola prikazan na slici odrediti napone na otpornicima R_1 i R_2.

Brojni podaci: $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$, $U = 3$ V.



Rešenje:



Slika II.8.3.1.1.1

Otpornici R_1 i R_2 su vezani redno pa je ekvivalentna otpornost:

$$R_e = R_1 + R_2 = 3\ \Omega + 7\ \Omega = 10\ \Omega .$$

Smer struje u ovoj rednoj vezi prikazan je na slici II.8.3.1.1.1, a intenzitet je, na osnovu Omovog zakona:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{3\ \text{V}}{10\ \Omega} = 0{,}3\ \text{A} .$$

Dakle, prema Omovom zakonu napon na otporniku R_1 je:

$$U_1 = R_1 I = R_1 \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U = \frac{3\ \Omega}{10\ \Omega} 3\ \text{V} = 0{,}9\ \text{V} .$$

Ovakva redna veza dva otpornika, koja su priključena na zajednički napon, naziva se **razdelnik napona**, jer se ukupan napon deli na dva napona na otpornicima u zavisnosti od njihovih vrednosti. Napon na određenom otporniku (na primer na otproniku R_1) dobija se kada se ukupan napon (U) pomnoži sa količnikom otpornosti otpornika na kome se određuje napon (dakle otpornika R_1) i zbira otpornosti (R_1 i R_2). Na osnovu izraza za razdelnik napona, napon na otporniku R_2 je:

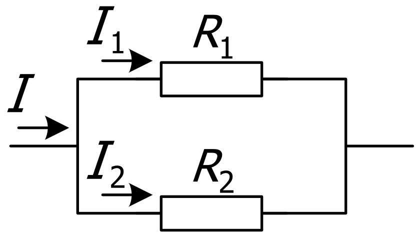
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{7\ \Omega}{10\ \Omega} 3\ \text{V} = 2{,}1\ \text{V} .$$

Dakle, kroz redno vezane otpornike protiče ista struja I, a ukupan napon je jednak zbiru napona na pojedinim otpornicima:

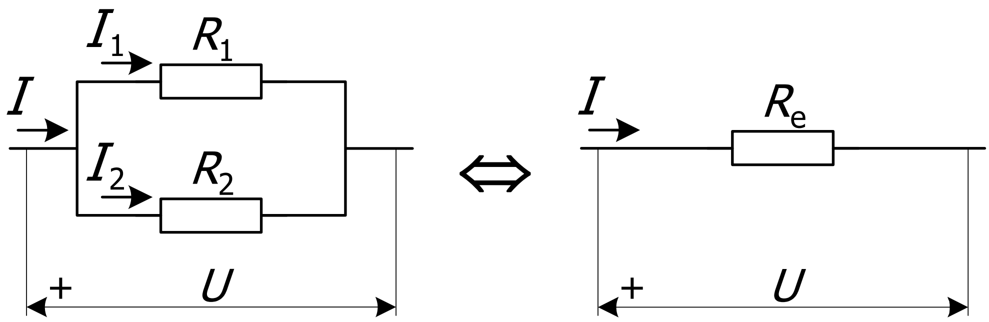
$$U = U_1 + U_2 .$$

II.8.3.1.2 Za deo kola prikazan na slici odrediti struje kroz grane sa otpornicima R_1 i R_2.

Brojni podaci: $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$, $I = 5$ A.



Rešenje:



Slika II.8.3.1.2.1

Otpornici R_1 i R_2 su vezani paralelno, pa važi:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_e = R_1 \,||\, R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3\ \Omega \cdot 7\ \Omega}{3\ \Omega + 7\ \Omega} = 2{,}1\ \Omega .$$

Pozitivan kraj napona na otpornicima prikazan je na slici II.8.3.1.2.1 i prema Omovom zakonu ovaj napon je:

$$U = R_e I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I = 2{,}1\ \Omega \cdot 5\ \text{A} = 10{,}5\ \text{V} .$$

Struja kroz otpornik R_1 je prema Omovom zakonu:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{7\ \Omega}{10\ \Omega} \cdot 5\ \text{A} = 3{,}5\ \text{A} .$$

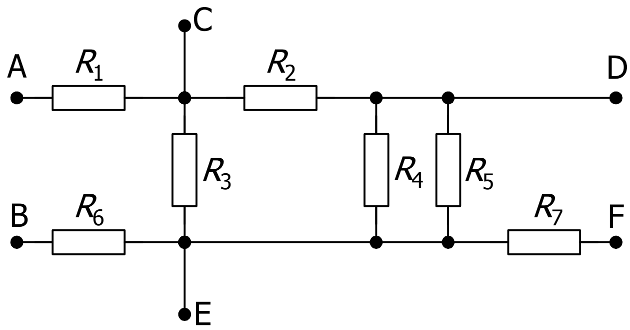
Ovakva paralelna veza dva otpornika pri kojoj se struja napojne grane deli na struje kroz otpornike, čiji intenziteti zavise od vrednosti otpornika, naziva se **strujni razdelnik**. Struja kroz određeni otpornik (na primer kroz otpornik R_1) dobija se kada se ukupna struja (I) pomnoži sa količnikom otpornosti otpornika kroz koji se struja ne traži (u ovom slučaju otpornika R_2), i zbira otpornosti (R_1 i R_2). Na osnovu izraza za strujni razdelnik, struja kroz otpornik R_2 je:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{3\ \Omega}{10\ \Omega} 5\ \text{A} = 1{,}5\ \text{A} .$$

Dakle, napon na paralelno vezanim otpornicima je isti, U, a struja kroz napojnu granu je jednaka zbiru struja kroz pojedine otpornike:

$$I = I_1 + I_2 .$$

II.8.3.1.3 Za grupu otpornika na slici odrediti ekvivalentne otpornosti između svih parova tačaka označenih na slici.



Rešenje:

Krenimo od najjednostavnijih ekvivalentnih otpornosti koje se mogu uočiti direktno na slici:

(i) otpornost između tačaka A i C: kada bismo između tačaka A i C vezali generator, struja bi tekla samo kroz otpornik R_1, jer su svi ostali putevi kroz kolo od tačke A ka tački C otvoreni ili kratko spojeni. To znači da je ekvivalentna otpronost između ove dve tačke jednaka otporniku R_1:

$$R_{AC} = R_1$$

(ii) otpornost između tačaka B i E određujemo slično kao otpornost R_{AC}: između tačaka B i E nalazi se samo grana sa otpornikom R_6, pa je:

$$R_{BE} = R_6$$

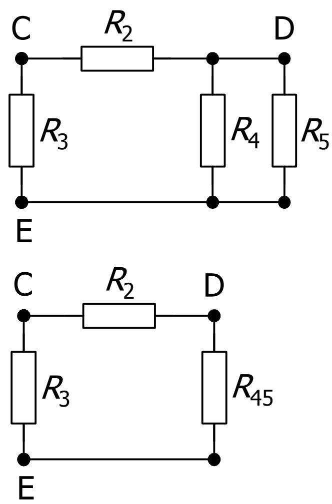
(iii) otpornost između tačaka E i F određujemo slično kao otpornost R_{AC}: između tačaka E i F nalazi se samo grana sa otpornikom R_7, pa je:

$$R_{EF} = R_7$$

(iv) otpornost između tačaka B i F čine redno vezani otpornici R_6 i R_7. Ostali otpornici su u ovoj vezi kratko spojeni ili nisu uključeni u kolo.

$$R_{BF} = R_6 + R_7 = R_{BE} + R_{EF}$$

Posmatrajmo sada grupu otpornika R_2, R_3, R_4, R_5. Cilj ovog zadatka je da uočimo da ista grupa otpornika u istom kolu može imati drugačiju ekvivalentnu otpornost u zavisnosti od tačaka između kojih određujemo ekvivalentnu otpornost. Ekvivalentna otpornost ove grupe otpronika između tačaka C i E, C i D, i D i E se razlikuje. Ono što je zajedničko za svaku od ovih ekvivalentnih otpornosti jeste da otpornici R_1, R_6 i R_7 nisu uključeni u ekvivalentnu otpornost, jer ako bismo između bilo koje od ovih parova tačaka (C i E, C i D, i D i E) vezali generator, kroz R_1, R_6 i R_7 ne bi tekla struja (drugi kraj svakog od otpornika R_1 (tačka A), R_6 (tačka B) i R_7 (tačka F) je slobodan). Takođe, otpornici R_4 i R_5 su u svakoj kombinaciji vezani paralelno:



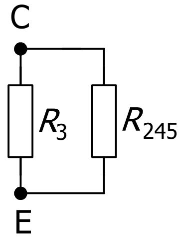
$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \quad \Rightarrow \quad R_{45} = R_4 \,||\, R_5 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

Slika II.8.3.1.3.1

Odredimo svaku od ovih otpornosti:

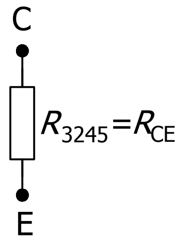
(v) otpornost između tačaka C i E:

– između tačaka C i D nalazi se jedna grana sa otpornikom R_2; otpornik R_2 je redno vezan ekvivalentnoj otpornosti R_{45}:



$$R_{245} = R_2 + R_{45} = R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

– između tačaka C i E nalazi se grana sa otpornikom R_3 i paralelno sa njom ekvivalentna otpornost R_{245}. Ovo u stvari jeste otpornost R_{EC}:

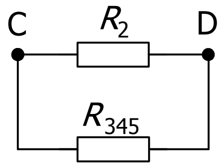


$$\frac{1}{R_{CE}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{245}} \qquad \Rightarrow$$

$$R_{CE} = R_3 \,||\, R_{245} = R_3 \,||\, \left(R_2 + R_4 \,||\, R_5\right) = \frac{R_3\left(R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_3 + R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}$$

(vi) otpornost između tačaka C i D:

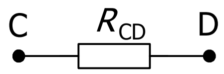
– otpornik R_3 je vezan redno otpornosti R_{45}:



$$R_{345} = R_3 + R_{45} = R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

– otpornik R_2 je vezan paralelno sa ekvivalentnom otpornosti R_{345}:

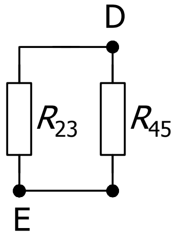
$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{345}} \qquad \Rightarrow$$



$$R_{CD} = R_2 \,||\, R_{345} = R_2 \,||\, \left(R_3 + R_4 \,||\, R_5\right) = \frac{R_2\left(R_3 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_2 + R_3 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}$$

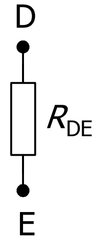
(vii) otpornost između tačaka D i E:

– otpornici R_2 i R_3 su vezani redno:



$$R_{23} = R_2 + R_3$$

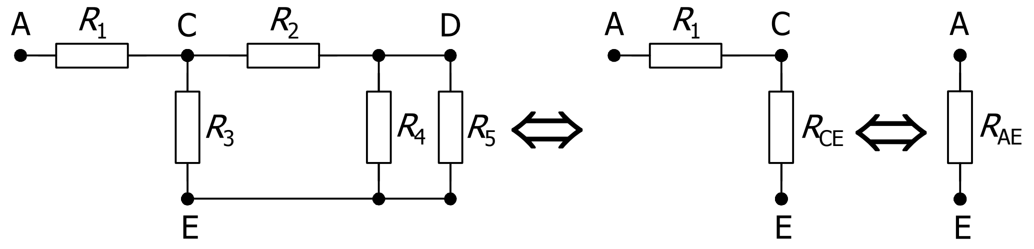
– grupe otpornika R_{23} i R_{45} su vezane paralelno:



$$R_{DE} = \frac{\left(R_2 + R_3\right)\dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}{R_2 + R_3 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}$$

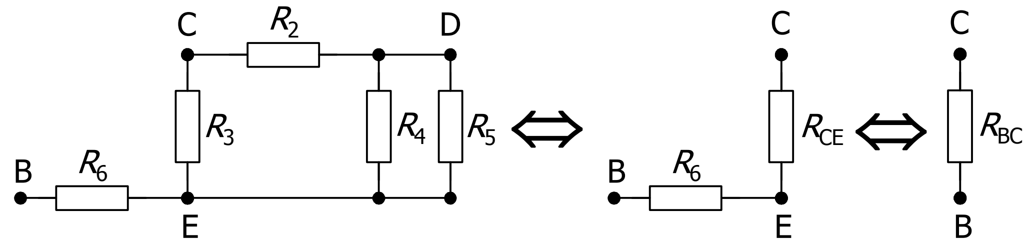
Otpornost R_{CE} se nalazi u sastavu sledećih otpornosti:

– otpornost između tačaka A i E (otpornici R_6 i R_7 nisu uključeni):



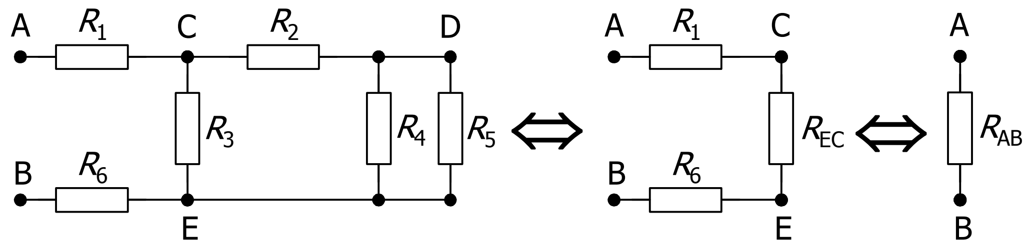
$$R_{AE} = R_1 + R_{CE} = R_1 + R_3 \,||\, (R_2 + R_4 \,||\, R_5) = R_1 + \frac{R_3\left(R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_3 + R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}$$

– otpornost između tačaka C i B (otpornici R_1 i R_7 nisu uključeni):



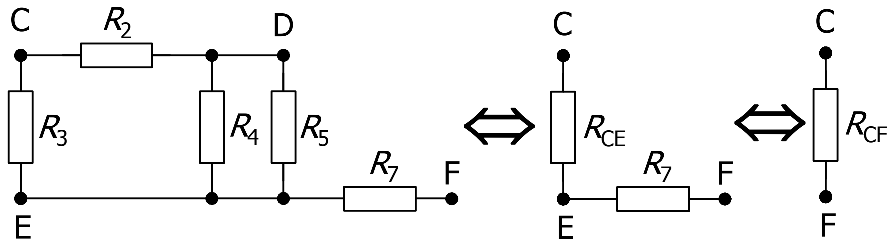
$$R_{BC} = R_{CE} + R_6 = R_3 \,||\, (R_2 + R_4 \,||\, R_5) + R_6 = \frac{R_3\left(R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_3 + R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} + R_6$$

– otpornost između tačaka A i B (otpornik R_7 nije uključen):



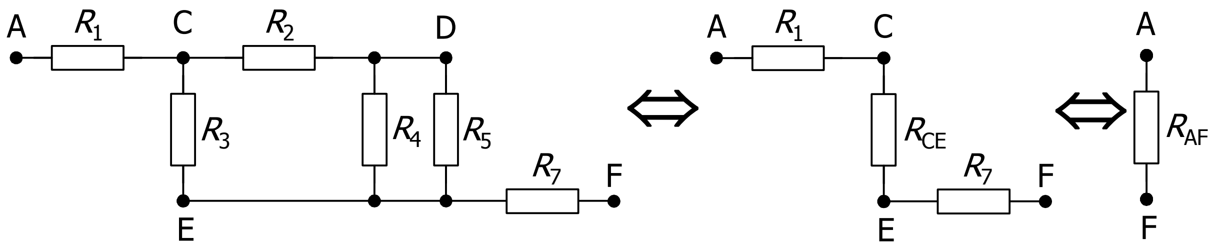
$$R_{AB} = R_1 + R_{CE} + R_6 = R_1 + R_3 \,||\, (R_2 + R_4 \,||\, R_5) + R_6 = R_1 + \frac{R_3\left(R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_3 + R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} + R_6$$

– otpornost između tačaka C i F (otpornici R_1 i R_6 nisu uključeni):



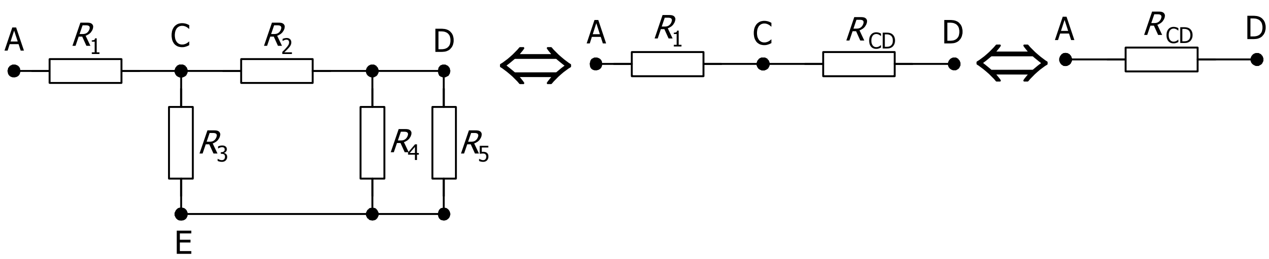
$$R_{CF} = R_{CE} + R_7 = R_3 \,||\, \left(R_2 + R_4 \,||\, R_5\right) + R_7 = \frac{R_3\left(R_2 + \dfrac{R_4R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_3 + R_2 + \dfrac{R_4R_5}{R_4 + R_5}} + R_7$$

– otpornost između tačaka A i F (otpornik R_6 nije uključen):



$$R_{AF} = R_1 + R_{CE} + R_7 = R_1 + R_3 \,||\, \left(R_2 + R_4 \,||\, R_5\right) + R_7 = R_1 + \frac{R_3\left(R_2 + \dfrac{R_4R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_3 + R_2 + \dfrac{R_4R_5}{R_4 + R_5}} + R_7$$

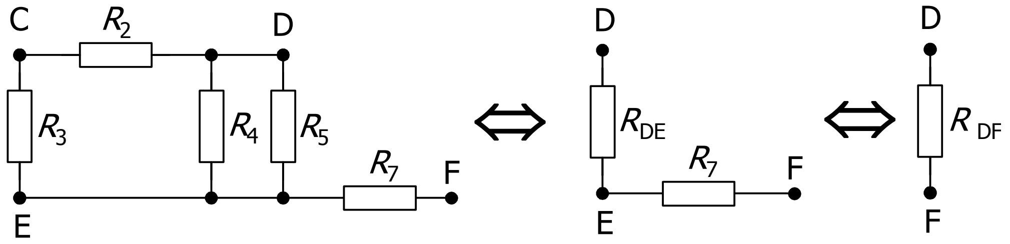
Otpornost R_{CD} se nalazi u sastavu otpornosti između tačaka A i D (otpornici R_6 i R_7 nisu uključeni):



$$R_{AD} = R_1 + R_{CD} = R_1 + R_2 \,||\, \left(R_3 + R_4 \,||\, R_5\right) = R_1 + \frac{R_2\left(R_3 + \dfrac{R_4R_5}{R_4 + R_5}\right)}{R_2 + R_3 + \dfrac{R_4R_5}{R_4 + R_5}}$$

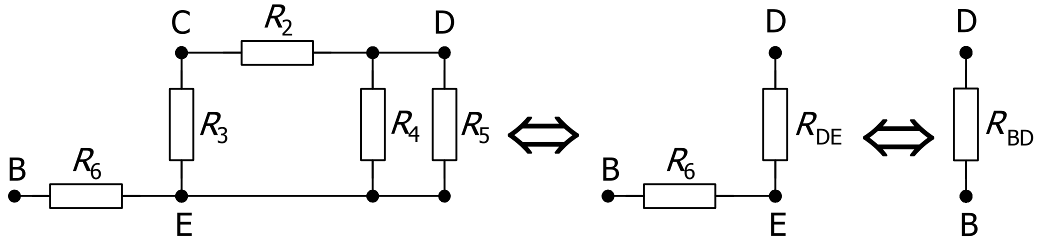
Otpornost R_{DE} se nalazi u sastavu sledećih otpornosti:

– otpornost između tačaka F i D (otpornici R_1 i R_6 nisu uključeni):



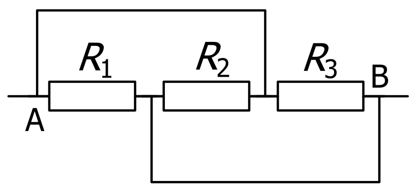
$$R_{DF} = R_{DE} + R_7 = \left(\left(R_2 + R_3\right) || R_4 || R_5\right) + R_7 = \frac{\left(R_2 + R_3\right)\dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}{R_2 + R_3 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} + R_7$$

– otpornost između tačaka B i D (otpornici R_1 i R_7 nisu uključeni):

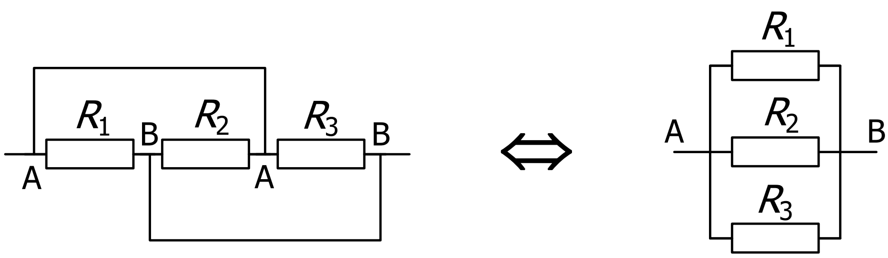


$$R_{BD} = R_6 + R_{DE} = R_6 + \left(\left(R_2 + R_3\right) || R_4 || R_5\right) = R_6 + \frac{\left(R_2 + R_3\right)\dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}{R_2 + R_3 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}$$

II.8.3.1.4 Izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B, ako je $R_1 = 10\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 20\ \mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 60\ \mathrm{k\Omega}$.



Rešenje:



a) b)

Slika II.8.3.1.4.1

Prisetimo se zadatka I.7.15: u tom zadatku smo imali istu vezu kondenzatora. Rekli smo da je tačka između otpornika R_2 i R_3 na istom potencijalu kao tačka A, jer je sa tačkom A spojena provodnikom, i da je tačka između otpornika R_1 i R_2 na istom potencijalu kao tačka B, pa ova veza predstavlja paralelnu vezu posmatranih otpornika, kao što je prikazano na slici II.8.3.1.4.1. S toga važi:

$$\frac{1}{R_e}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{10\ \text{k}\Omega}+\frac{1}{20\ \text{k}\Omega}+\frac{1}{60\ \text{k}\Omega}=0{,}167\frac{1}{\text{k}\Omega}\quad\Rightarrow\quad R_e=R_1\,||\,R_2\,||\,R_3=\frac{1}{0{,}167}\ \text{k}\Omega=6\ \text{k}\Omega$$

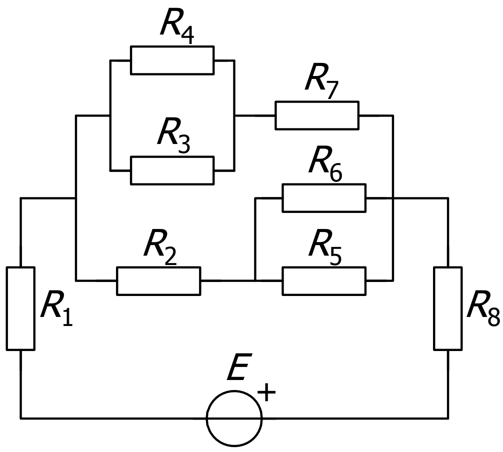
II.8.3.1.5 Izračunati struje u granama kola sa slike, kao i snagu naponskog generatora.

Dato je:

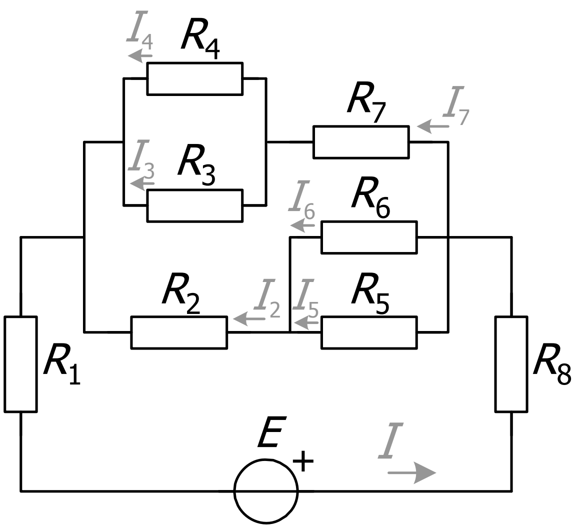
R_1 = 7 kΩ, R_2 = 8 kΩ, R_3 = 10 kΩ, R_4 = 30 kΩ,

R_5 = 3 kΩ, R_6 = 6 kΩ, R_7 = 2,5 kΩ, R_8 = 8 kΩ,

E = 40 V



Rešenje:



Slika II.8.3.1.5.1

Odredimo najpre ekvivalentnu otpornost:

- otpornici R_3 i R_4 su vezani paralelno:

$$\frac{1}{R_{34}}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\quad\Rightarrow\quad R_{34}=R_3\,||\,R_4=\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}=\frac{10\ \text{k}\Omega\cdot 30\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega+30\ \text{k}\Omega}=7{,}5\ \text{k}\Omega$$

- otpornik R_7 je vezan redno s otpornošću R_{34}:

$$R_{347}=R_7+R_{34}=2{,}5\ \text{k}\Omega+7{,}5\ \text{k}\Omega=10\ \text{k}\Omega$$

– otpornici R_5 i R_6 su vezani paralelno:

$$\frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \quad \Rightarrow \quad R_{56} = R_5 \,||\, R_6 = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{3\ \text{k}\Omega \cdot 6\ \text{k}\Omega}{3\ \text{k}\Omega + 6\ \text{k}\Omega} = 2\ \text{k}\Omega$$

– otpornik R_2 je vezan redno s otpornošću R_{56}:

$$R_{562} = R_2 + R_{56} = 8\ \text{k}\Omega + 2\ \text{k}\Omega = 10\ \text{k}\Omega$$

– otpornosti R_{347} i R_{562} su vezane paralelno:

$$\frac{1}{R_{234567}} = \frac{1}{R_{347}} + \frac{1}{R_{562}} \quad \Rightarrow \quad R_{234567} = R_{347} \,||\, R_{562} = \frac{R_{347} R_{562}}{R_{347} + R_{562}} = \frac{10\ \text{k}\Omega \cdot 10\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega + 10\ \text{k}\Omega} = 5\ \text{k}\Omega$$

– otpornici R_1 i R_8 su vezani redno sa otpornošću R_{234567}:

$$R_e = R_1 + R_8 + R_{234567} = 7\ \text{k}\Omega + 8\ \text{k}\Omega + 5\ \text{k}\Omega = 20\ \text{k}\Omega$$

Prema Omovom zakonu intenzitet struje je:

$$I = \frac{E}{R_e} = \frac{40\ \text{V}}{20\ \text{k}\Omega} = 2\ \text{mA}\,.$$

S obzirom da su otpornosti R_{347} i R_{562} vezane paralelno, a da je ukupna struja kroz ove otpornosti I, struje I_7 i I_2 možemo odrediti pomoću strujnog razdelnika:

$$I_7 = \frac{R_{562}}{R_{347} + R_{562}} I = \frac{10\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega + 10\ \text{k}\Omega} \cdot 2\ \text{mA} = 1\ \text{mA}$$

$$I_2 = \frac{R_{347}}{R_{347} + R_{562}} I = \frac{10\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega + 10\ \text{k}\Omega} \cdot 2\ \text{mA} = 1\ \text{mA}$$

Pomoću strujnog razdelnika odredićemo i struje:

$$I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I_7 = \frac{30\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega + 30\ \text{k}\Omega} \cdot 1\ \text{mA} = 0{,}75\ \text{mA}$$

$$I_4 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} I_7 = \frac{10\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega + 30\ \text{k}\Omega} \cdot 1\ \text{mA} = 0{,}25\ \text{mA}$$

$$I_5 = \frac{R_6}{R_5 + R_6} I_2 = \frac{6\ \text{k}\Omega}{3\ \text{k}\Omega + 6\ \text{k}\Omega} \cdot 1\ \text{mA} = 0{,}67\ \text{mA}$$

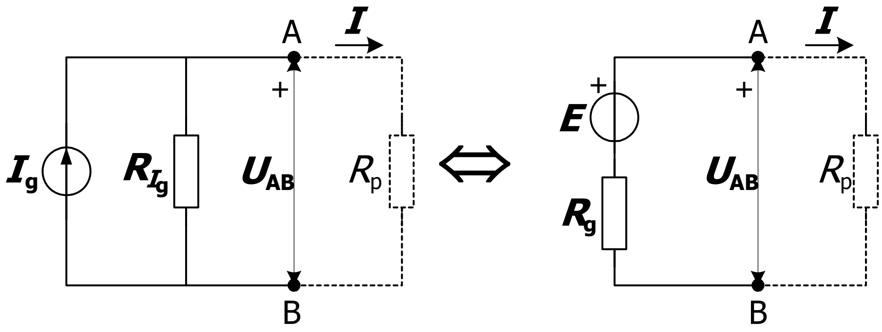
$$I_6 = \frac{R_5}{R_5 + R_6} I_2 = \frac{3\ \text{k}\Omega}{3\ \text{k}\Omega + 6\ \text{k}\Omega} \cdot 1\ \text{mA} = 0{,}33\ \text{mA}$$

II.8.3.2 TRANSFIGURACIJE GENERATORA

TEORIJSKA OSNOVA

- Ovde ćemo proučiti samo transfiguraciju realnih generatora.

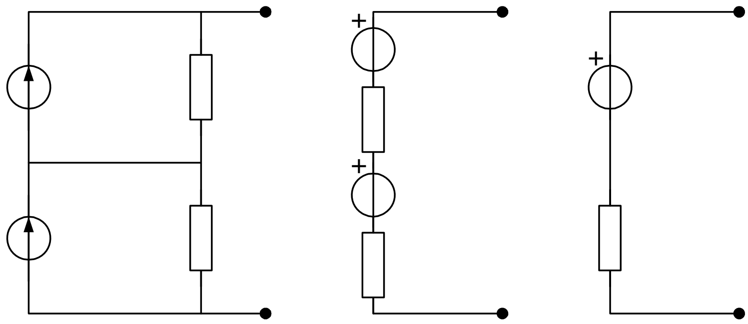
- Kako se transfiguriše realan strujni generator?



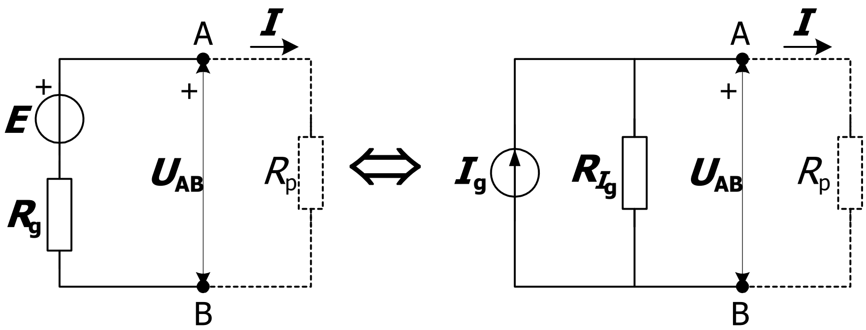
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}_g \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{I}_g}$$

$$\boldsymbol{R}_g = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{I}_g}$$

Ova transfiguracija očigledno uprošćava kolo: smanjuje broj kontura. Primenjujemo je, na primer, u sledećem slučaju:



- Kako se transfiguriše realan naponski generator?

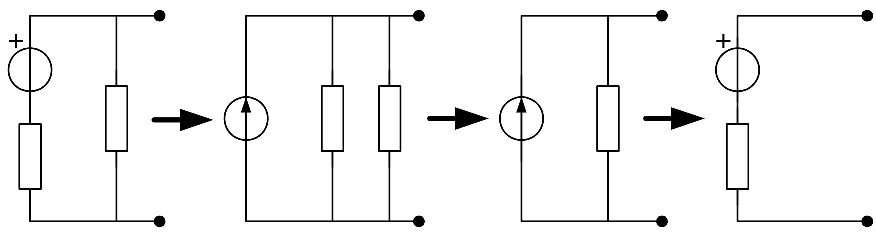


$$\boldsymbol{I}_g = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}_g}$$

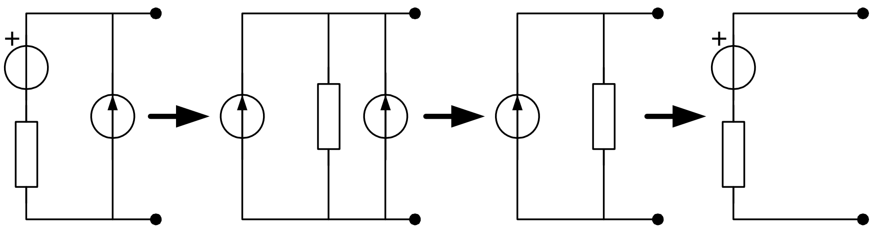
$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{I}_g} = \boldsymbol{R}_g$$

Ovu transfiguraciju primenjujemo u sledećim slučajevima:

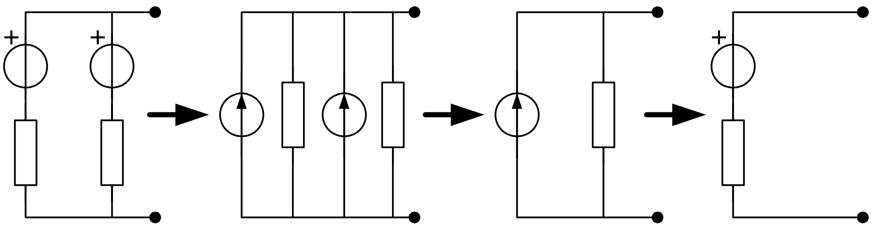
a)



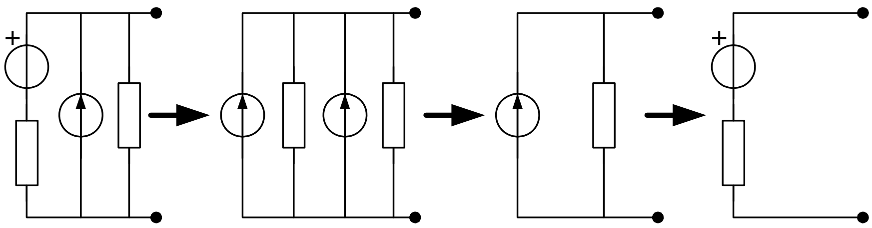
b)



c)



d)



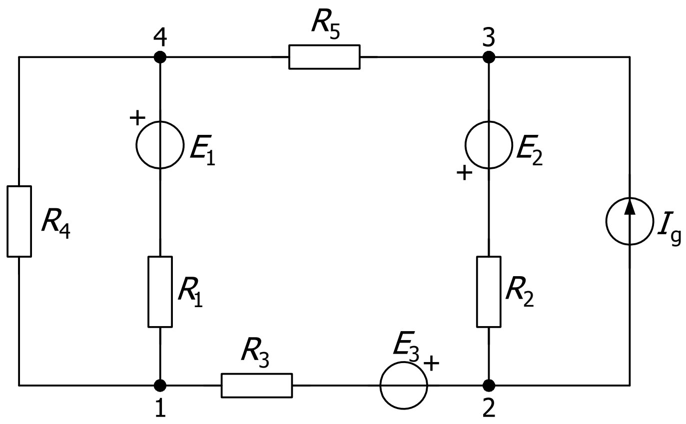
II.8.3.2.1 Za kolo prikazano na slici poznato je:

E_1 = 40 V, E_2 = 100 V, E_3 = 30 V, I_g = 0,2 A,

R_1 = 300 Ω, R_2 = 150 Ω, R_3 = 200 Ω,

R_4 = 100 Ω, R_5 = 75 Ω

Primenom transfiguracija generatora odrediti struju kroz otpornik R_5.



Rešenje:

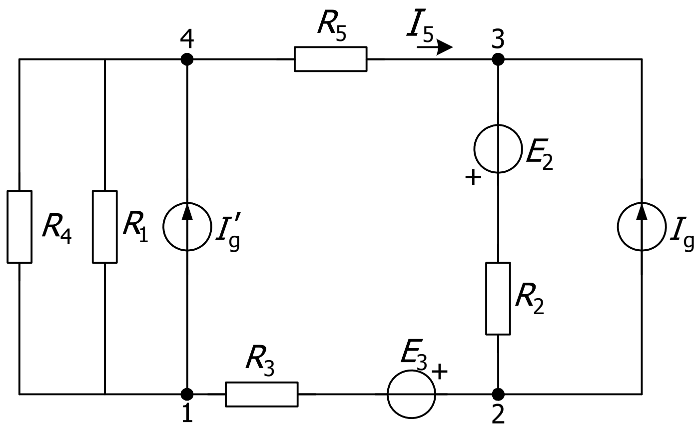
Uočimo karakteristične veze generatora koje ćemo transfigurisati:

– generator E_1 sa redno vezanim otpornikom R_1, paralelno vezan sa otpornikom R_4. Primenićemo transfiguraciju ovog naponskog generatora u ekvivalentni strujni generator. Struja ekvivalentnog strujnog generatora jednaka je odnosu elektromotorne sile generatora i njemu redno vezane otpornosti:

$$I'_g = \frac{E_1}{R_1} = \frac{40\ \text{V}}{300\ \Omega} = 0{,}133\ \text{A}\,,$$

pri čemu treba voditi računa o referentnom smeru strujnog generatora, koji je isti kao i za naponski generator E_1 - od čvora 1 ka čvoru 4. Otpornost strujnog generatora jednaka je otpornosti koja je redno vezana naponskom generatoru:

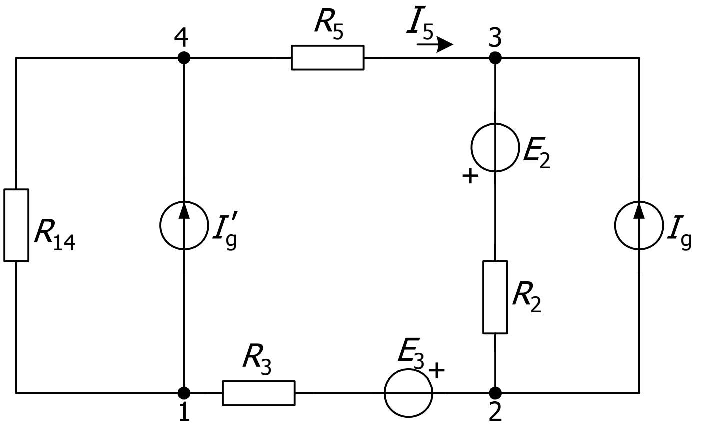
$$R' = R_1 = 300\ \Omega\,.$$



Slika II.8.3.2.1.1

Time dobijamo paralelno vezane otpornike R_1 i R_2, koje ekvivalentiramo jednim otpornikom:

$$R_{14} = R_1 \,||\, R_4 = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 75\ \Omega\,.$$

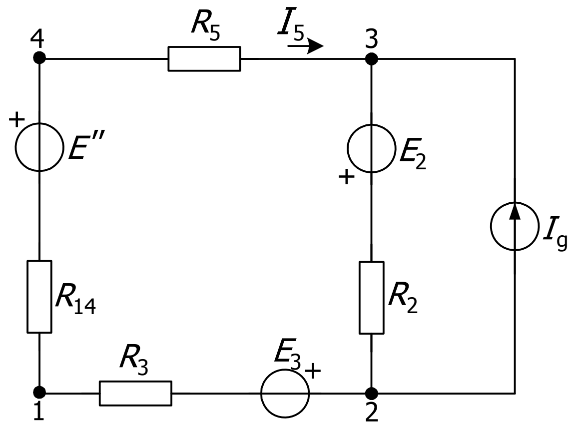


Slika II.8.3.2.1.2

Transfiguracijom generatora E_1 dobili smo realni strujni generator unutrašnje otpornosti R_{14}. U cilju smanjivanja broja kontura u kolu ovaj strujni generator ćemo transfigurisati u ekvivalentni naponski, vodeći računa o referentnom smeru (od čvora 1 ka čvoru 4):

$$E'' = R_{14} I_g' = 75\ \Omega \cdot 0{,}133\ \text{A} = 10\ \text{V}$$

$$R'' = R_{14} = 75\ \Omega$$

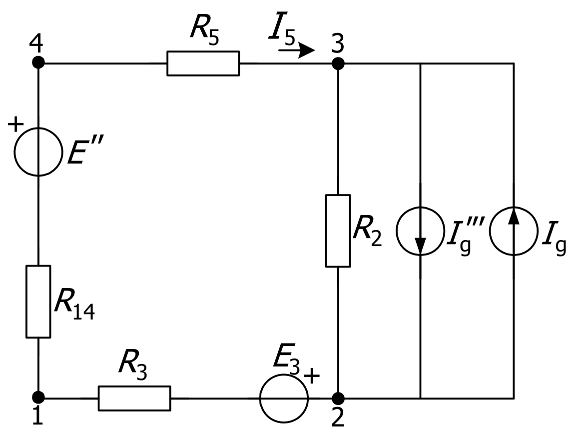


Slika II.8.3.2.1.3

– generator E_2 sa redno vezanim otpornikom R_2, paralelno vezan sa strujnim generatorom I_g. Transfigurisaćemo ovaj naponski generator u ekvivalentni strujni generator vodeći računa o referentnom smeru (od čvora 3 ka čvoru 2):

$$I_g''' = \frac{E_2}{R_2} = \frac{100\ \text{V}}{150\ \Omega} = 0{,}667\ \text{A}$$

$$R''' = R_2 = 150\ \Omega$$



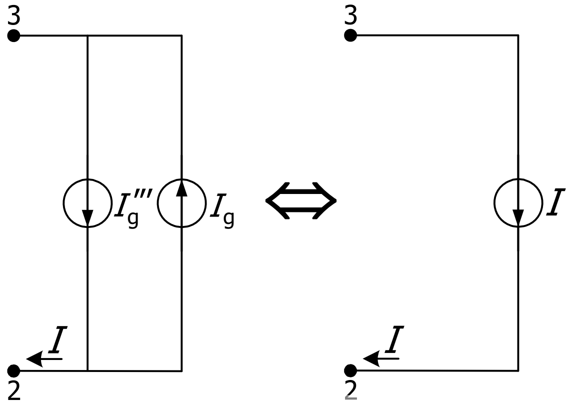
Slika II.8.3.2.1.4

Na ovaj način smo dobili dva paralelno vezana strujna generatora, koja možemo ekvivalentirati jednim. Posmatrajmo sliku II.8.3.2.5 na kojoj se nalaze izdvojena ova dva strujna generatora. Na osnovu I Kirhofovog zakona struja napojne grane je:

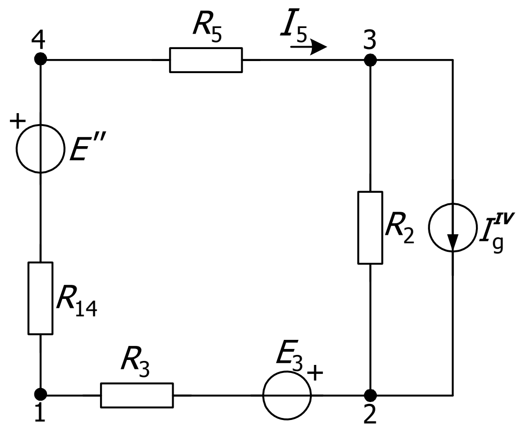
$$I = I_g''' - I_g$$

i konstantna je. Prema tome, u ostatku kola se ništa neće promeniti (sve struje i naponi ostaju isti) ako ova dva strujna generatora ekvivalentiramo jednim generatorom čija je struja:

$$I_g^{IV} = I = I_g''' - I_g = 0{,}667\ \text{A} - 0{,}2\ \text{A} = 0{,}467\ \text{A}\,.$$



Slika II.8.3.2.1.5



Slika II.8.3.2.1.6

Na slici II.8.3.2.6 su strujni generatori I_g i I_g''' ekvivalentirani strujnim generatorom I_g^{IV}. Broj kontura u kolu smanjujemo transfiguracijom ovog strujnog generatora, unutrašnje otpornosti R_2, u naponski generator:

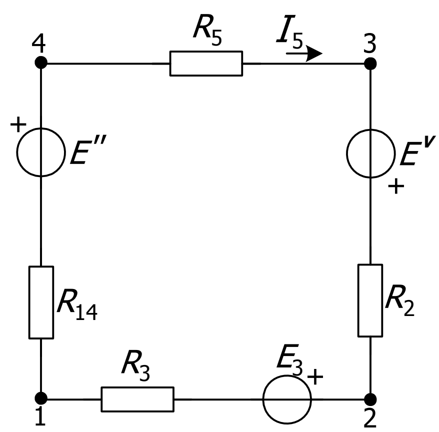
$$E^V = R_2 I_g^{IV} = 150\ \Omega \cdot 0{,}467\ \text{A} = 70\ \text{V}$$

$$R^V = R_2 = 150\ \Omega$$

Dobili smo prosto kolo, prikazano na slici II.8.3.2.7, u kome struju određujemo primenom Omovog zakona za prosto kolo:

$$I_5 = \frac{E^V - E_3 + E''}{R_5 + R_2 + R_3 + R_{14}} =$$

$$= \frac{70\ \text{V} - 30\ \text{V} + 10\ \text{V}}{75\ \Omega + 150\ \Omega + 200\ \Omega + 75\ \Omega} = \frac{50\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0{,}1\ \text{A}$$



Slika II.8.3.2.1.7

II.8.4 TEVENENOVA TEOREMA

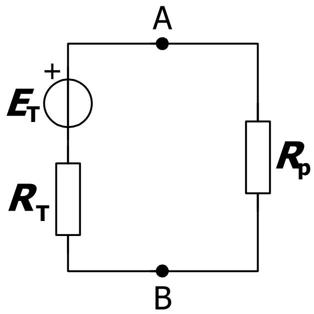
TEORIJSKA OSNOVA

- Ova teorema nam govori da deo kola između neke dve tačke možemo zameniti realnim naponskim generatorom. Zašto? Pa zato što između te dve tačke sigurno postoji napon *U*, a i taj deo kola sigurno ima ekvivalentan otpor *R*.

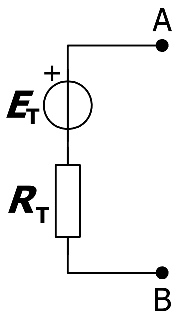
- Prilikom određivanja elektromotorne sile Tevenenovog generatora poštuj proceduru:
  – ako u kolu treba naći struju (ili otpornost potrošača, ili elektromotornu silu naponskog generatora) u jednoj grani onda se prvo ta grana isključi iz kola;
  – obeleže se krajevi koji su ostali otvoreni (na primer sa A i B, ili 1 i 2);
  – reši se napon U_{AB} pri tako otvorenim krajevima. To je onda elektromotorna sila Tevenenovog generatora.

- Zašto?

  Ma kako kolo na početku bilo složeno primenom Tevenenove teoreme možemo ga svesti na prosto.



Kada odvojimo granu sa R_P, ostaje:



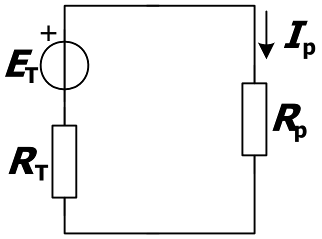
$$\boldsymbol{U_{AB}}\Big|_{\mathbf{OK}} = \boldsymbol{E_T}$$

Ako u proračunu uzmemo da je $E_T = U_{AB}\Big|_{OK}$, onda će pozitivan kraj Tevenenovog generatora biti kod tačke A, i obrnuto. Simbol $\Big|_{OK}$ znači "otvoreno kolo".

Treba uočiti da je $\boldsymbol{U_{AB}}\Big|_{\mathbf{OK}} \neq \boldsymbol{U_{AB}}$ u početnom kolu, jer kad su krajevi otvoreni nema električne struje u toj grani, tj. napon na $\boldsymbol{R_T}$ jednak je 0.

- Prilikom određivanja otpornosti Tevenenovog generatora poštuj proceduru:
  – kada se isključi grana iz kola preostalo kolo sa otvorenim krajevima treba učiniti pasivnim. To znači da treba poništiti dejstvo svih generatora u kolu (odnosno svesti ih na nulu);
    - Kad je napon na naponskom generatoru jednak 0?
      – Onda kad je u kratkom spoju.
    - Kad je struja strujnog generatora jednaka 0?
      – Onda kad je generator u otvorenoj vezi.

  Zato se pasivno kolo pravi tako da se svi naponski generatori kratko spoje, a strujni se izvade iz grana kola. Ako su generatori realni njihove otpornosti ostaju u kolu.
  – nađe se ekvivalentan otpor R_{AB} pri otvorenim krajevima i to će biti otpor Tevenenovog generatora;
  – na kraju se sklopi prosto kolo od Tevenenovog generatora, Tevenenovog otpora i grane koju smo izvadili iz kola na početku. Rešavanjem tog prostog kola dobija se tražena električna struja (ili otpornost potrošača, ili elektromotorna sila naponskog generatora).



$$I = \frac{E_T}{R_T + R_p}$$

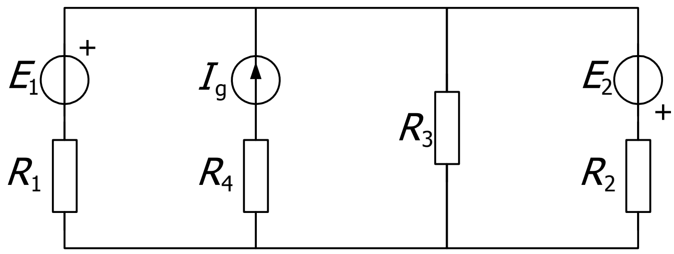
- Tevenenovom teoremom se u opštem slučaju može ekvivalentirati bilo koji deo kola između proizvoljne dve tačke. U tom slučaju se otkači ceo ostatak kola koji se ne ekvivalentira.

II.8.4.1 U kolu sa slike odrediti jačinu struje u grani sa otpornikom R_3, primenom Tevenenove teoreme. Poznato je:

E_1 = 20 V, E_2 = 12 V, I_g = 150 mA,

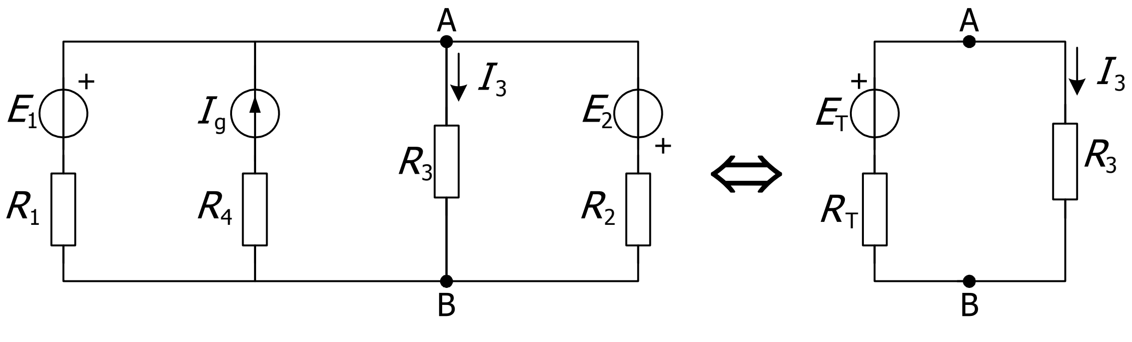
$R_1 = 400\ \Omega$, $R_2 = 600\ \Omega$, $R_3 = 160\ \Omega$,

$R_4 = 100\ \Omega$.



Rešenje:

Prema Tevenenovoj teoremi kolo između bilo koje dve tačke može se zameniti ekvivalentnim realnim naponskim generatorom a da se u ostatku kola ništa ne promeni (sve struje i naponi ostaju isti). Označimo tačke između kojih ćemo ekvivalentirati deo kola Tevenenovim generatorom E_T sa A i B (slika II.8.4.1.1a). To je deo kola koji ne sadrži otpornik R_3 i prikazan je na slici II.8.4.1.2a. Na slici II.8.4.1.1b prikazano je ekvivalentno kolo sa Tevenenovim generatorom na koji je priključen otpornik R_3, i obeležene su tačke A i B koje odgovaraju tačkama A i B sa slike II.8.4.1.1. Zbog čega smo smeli da zamenimo deo kola Tevenenovim generatorom? Zato što se taj deo kola ponaša upravo kao Tevenenov generator i, u ovom slučaju, kroz opornik R_3 će teći ista struja bez obzira da li je povezan u kolo na slici II.8.4.1.1a ili na slici II.8.4.1.1b. Bilo kakav deo nekog kola da vežemo između tačaka A i B u kolo na slici II.8.4.1.1a ili na slici II.8.4.1.1b, sve struje i naponi u posmatranom delu kola biće isti. I, naravno, ako ništa ne vežemo između tačaka A i B napon U_{AB} mora biti isti u oba slučaja – slika II.8.4.1.2. Na slici II.8.4.1.2b napon U_{AB} je jednak elektromotornoj sili Tevenenovog generatora E_T (jer kolo nije zatrvoreno i ne teče struja, pa nema pada napona na unutrašnjoj otpornosti Tevenenovog generatora R_T). Dakle, taj napon, odnosno elektromotorna sila Tevenenovog generatora E_T, mora biti jednaka naponu U_{AB} na slici II.8.4.1.2a. Ovaj napon ćemo zvati naponom otvorene veze (otvorenog kola) $U_{AB}\big|_{OK}$.



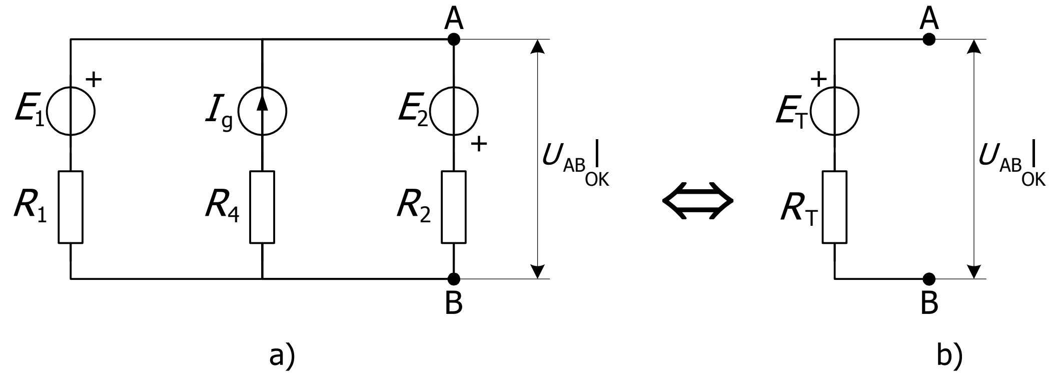
a) b)

Slika II.8.4.1.1

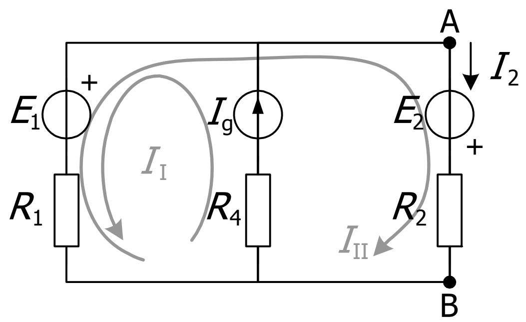
Da rezimiramo: elektromotornu silu Tevenenovog generatora određujemo kada iz kola uklonimo sve ono što ne želimo da ekvivalentiramo Tevenenovim generatorom između određenih tačaka (u ovom slučaju je to grana sa otpornikom R_3 između tačaka A i B):

$$E_T = U_{AB}\big|_{OK},$$

pri čemu treba voditi računa o referentnom smeru Tevenenovog generatora. Za ovaj slučaj referentni smer je od tačke B ka tački A (A je pozitivan kraj).



Slika II.8.4.1.2



Slika II.8.4.1.3

U ovom zadatku treba odrediti napon U_{AB} u kolu na slici II.8.5.1.2a. Kolo ima $n_č$ = 2 čvora, n_g = 3 grane i sadrži n_{Ig} = 1 idealni strujni generator. Rešimo kolo primenom metode konturnih struja. Broj nezavisnih kontura, odnosno broj konturnih struja, je:

$$n_g - (n_č - 1) = 2,$$

a broj jednačina koje postavljamo je:

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 1.$$

Na slici II.8.4.1.4 označene su konturne struje. Podsetimo se da tačno jedna konturna struja mora prolaziti kroz idealni strujni generator. Jednačine konturnih struja glase:

$$I_{\mathrm{I}} = I_g \tag{1}$$

$$-R_1 I_{\mathrm{I}} + (R_1 + R_2) I_{\mathrm{II}} = E_1 + E_2 \tag{2}$$

Zamenom poznate konturne struje u jednačinu 2 dobijamo izraz za nepoznatu konturnu struju:

$$-R_1 I_g + (R_1 + R_2) I_{\mathrm{II}} = E_1 + E_2 \quad \Rightarrow \quad I_{\mathrm{II}} = \frac{E_1 + E_2 + R_1 I_g}{R_1 + R_2} = \frac{92\ \mathrm{V}}{1000\ \Omega} = 92\ \mathrm{mA}$$

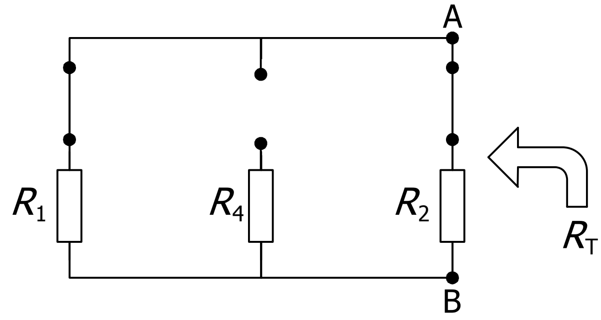
Kroz granu sa elektromotornom silom E_2 i otpornikom R_2 teče samo konturna struja I_{II}, koja je istog smera kao i struja struja I_2, pa je:

$$I_2 = I_{\mathrm{II}} = 92\ \mathrm{mA}\,.$$

Elektromotorna sila Tevenenovog generatora je:

$$E_T = U_{AB}\Big|_{OK} = R_2 I_2 - E_2 = 43{,}2\ \mathrm{V}\,.$$

Otpornost Tevenenovog generatora R_T jednaka je ekvivalentnoj otpornosti između tačaka A i B kada se iz dela kola, koji se ekvivalentira, isključe svi generatori, i to: naponski se kratko spajaju, a umesto strujnih ostaje otvorena veza. Takvo pasivno kolo, napravljeno od kola sa slike II.8.4.1.3 isključivanjem generatora, prikazano je na slici II.8.4.1.4.



Slika II.8.4.1.4

Otpornik R_4 nije priključen u kolo jer mu je jedan kraj slobodan. Otpornici R_1 i R_2 , gledano između tačaka A i B, vezani su paralelno pa je:

$$R_T = R_1 \,||\, R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 240\ \Omega\,.$$

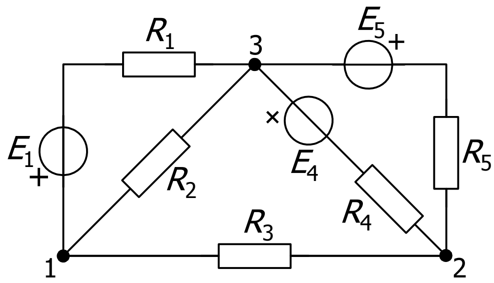
Kada smo odredili elektromotornu silu i otpornost Tevenenovog generatora vratimo se na sliku II.8.4.1.1b. Sada možemo odrediti struju kroz otpornik R_3 na osnovu Omovog zakona za prosto kolo:

$$I_3 = \frac{E_T}{R_T + R_3} = \frac{43{,}2\text{V}}{240\Omega + 160\Omega} = 108\ \text{mA}\,.$$

II.8.4.2 U kolu prikazanom na slici poznata je struja I_{23} = 50 mA kroz otpronik R_4. Primenom Tevenenove teoreme odrediti otpornost R_4, ako je:

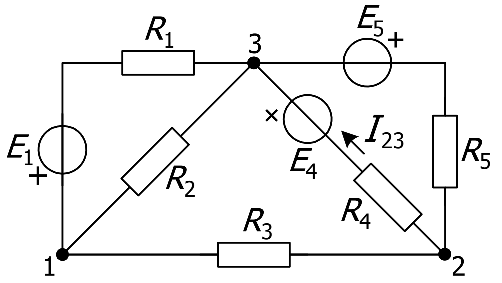
E_1 = 6 V, E_5 = 40,5 V, E_5 = 5 V,

R_1 = 2 kΩ, R_2 = 6 kΩ, R_3 = 750 Ω, R_5 = 750 Ω.



Rešenje:

U kolu sa slike II.8.4.2.1 uklonićemo granu sa generatorom E_4 i otpornikom R_4, jer je poznata struja te grane, i između tačaka 2 i 3 ekvivalentiraćemo ostatak kola Tevenenovim generatorom:

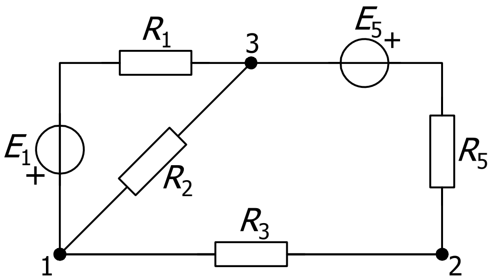


Slika II.8.4.2.1

– na slici II.8.4.2.2a prikazano je kolo za određivanje elektromotorne sile Tevenenovog generatora E_T. U tom kolu odredićemo napon između tačaka 2 i 3, jer je taj napon jednak elektromotornoj sili E_T. Kolo možemo najlakše rešiti transfiguracijama generatora i time kolo od dve konture svesti na prosto kolo. Transfigurisaćemo najpre naponski generator E_1 sa otpornikom R_1 u strujni generator I'_g (slika II.8.4.2.2b). Referentni smer ovog strujnog generatora je isti kao referentni smer elektromotorne sile E_1 (od čvora 3 ka čvoru 1):

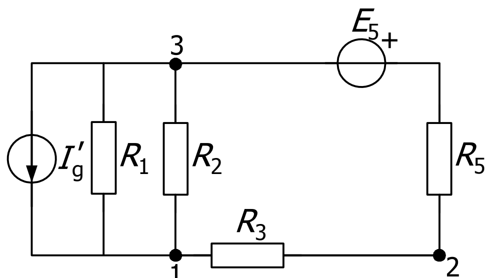
$$I'_g = \frac{E_1}{R_1} = \frac{6\text{V}}{2\text{k}\Omega} = 3\text{mA}\,,$$

a otpornost je jednaka otpornosti transfigurisanog naponskog generatora, R_1.



Kolo za određivanje E_T

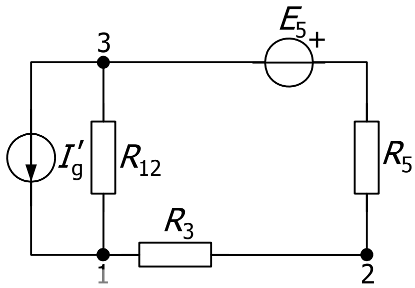
Slika II.8.4.2.2a



Slika II.8.4.2.2b

U kolu na slici II.8.4.2.2b otpornici R_1 i R_2 vezani su paralelno:

$$R_{12} = R_1 \,||\, R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1{,}5\ \text{k}\Omega\,.$$



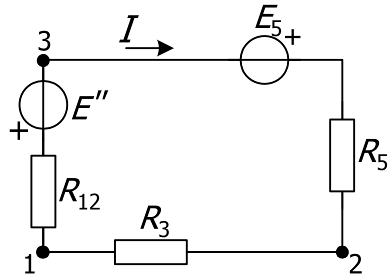
Slika II.8.4.2.2c

U kolu na slici II.8.4.2.3c transfigurisaćemo strujni generator I'_g sa unutrašnjom otpornošću R_{12} u naponski generator E'':

$$E'' = R_{12} I'_\text{g} = 1{,}5\ \text{k}\Omega \cdot 3\ \text{mA} = 4{,}5\ \text{V}\,,$$

čija je unutrašnja otpornost takođe R_{12}. Sada smo dobili prosto kolo prikazano na slici II.8.4.2.3d. Struju u kolu računamo primenom Omovog zakona za prosto kolo:

$$I = \frac{E_5 - E''}{R_{12} + R_3 + R_5} = \frac{36\ \text{V}}{3\ \text{k}\Omega} = 12\ \text{mA}\,.$$

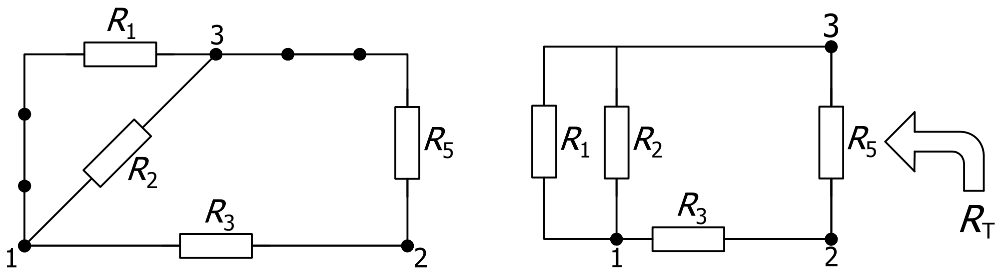


Slika II.8.4.2.2d

Elektromotorna sila Tevenenovog generatora je:

$$E_\text{T} = U_{23}\Big|_{\text{OK}} = E_5 - R_5 I = 31{,}5\ \text{V}\,.$$

– na slici II.8.4.2.3 prikazano je pasivno kolo za određivanje otpornosti Tevenenovog generatora R_T, iz koga su isključeni generatori.

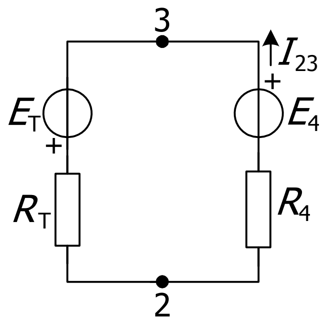


Slika II.8.4.2.3 Kolo za određivanje R_T

$$R_\text{T} = \left(\left(R_1 \,||\, R_2\right) + R_3\right) || \, R_5 = \frac{\left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right) R_5}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_5} = 562{,}5\ \Omega\,.$$

– na slici II.8.4.2.4 prikazano je ekvivalentno kolo sa Tevenenovim generatorom. Obratiti pažnju na referentni smer Tevenenovog generatora: pošto je $E_\text{T} = U_{23}\Big|_{\text{OK}}$, referentni smer je od tačke 3 ka tački 2 (pozitivan kraj je kod tačke 2). Prema Omovom zakonu za prosto kolo je:

$$I_{23} = \frac{E_\text{T} + E_4}{R_\text{T} + R_4}\,,$$



Slika II.8.4.2.4

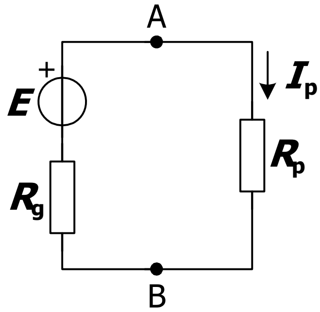
pa je nepoznata otpornost:

$$R_4 = \frac{E_\text{T} + E_4}{I_{23}} - R_\text{T} = 730\ \Omega - 562{,}5\ \Omega = 167{,}5\ \Omega\,.$$

II.8.4.1 PRILAGOĐENJE PRIJEMNIKA PO SNAZI

TEORIJSKA OSNOVA

- Ponekad postoji potreba da se potrošač prilagodi generatoru. Tada se na potrošaču razvija maksimalna snaga. Uslov za to je da se otpornost potrošača izjednači sa otpornošću generatora.

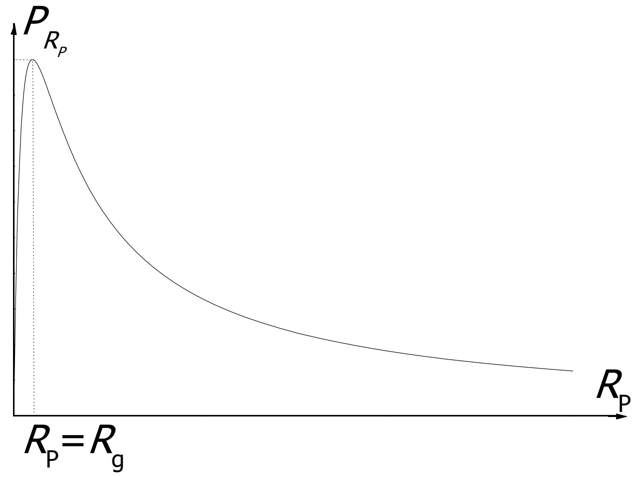


$$P_{R_P} = P_{max} \text{ ako je } R_P = R_g$$

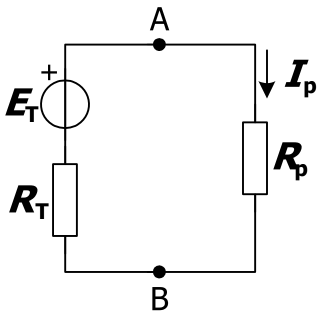
Struja u prilagođenom kolu je $I = \dfrac{E}{R_g + R_P}\Big|_{R_P = R_g} = \dfrac{E}{2R_P}$, pa je maksimalna snaga

$$P_{max} = I^2 R_P = \left(\frac{E}{R_g + R_P}\right)^2 R_P \Big|_{R_P = R_g} = \left(\frac{E}{2R_P}\right)^2 R_P = \frac{E^2}{4R_P}$$

Na slici je prikazana zavisnost snage na potrošaču u zavisnosti od vrednosti otpornika R_P.



- Kola najčešće nisu prosta već složena. Na prvi pogled ovo prilagođenje je teško izvesti. Ali, ako se setimo Tevenenove teoreme, zaključujemo da svako složeno kolo možemo transfigurisati u prosto:



$$P_{R_P} = P_{max} \text{ ako je } R_P = R_T$$

ZADACI

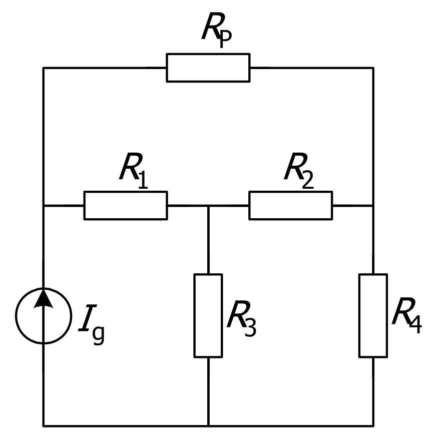
II.8.4.1.1 U kolu sa slike poznato je:

$R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$,

$R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$,

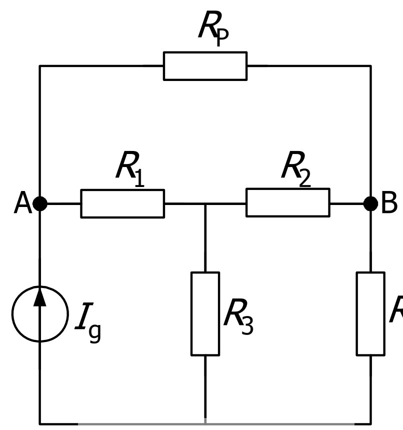
$I_{g1} = 2{,}6$ A

Odrediti otpornost prijemnika R_p tako da se na njemu razvija maksimalna snaga. Kolika je ta snaga?



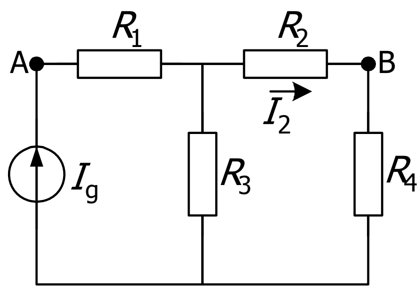
<u>*Rešenje:*</u>

Jedna od primena Tevenenove teoreme je kod rešavanja problema prilagođenja prijemnika po snazi. Kada je prijemnik vezan u složeno kolo bez primene Tevenenove teoreme veoma teško bismo odredili njegovu otpornost tako da se na njemu razvije maksimalna snaga. Zato se ostatak kola (bez prijemnika) ekvivalentira Tevenenovim generatorom i tada je uslov maksimalne snage na prijemniku jednostavan: na prijemniku se razvija maksimalna snaga kada je njegova otpornost jednaka otpornosti Tevenenovog generatora.



Slika II.8.4.1.1.1

Odredimo najpre tu otpornost. Označimo tačke između kojih je priključen prijemnik R_p sa A i B, slika II.8.4.1.1.1. Tevenenovim generatorom ekvivalentiramo deo kola iz kog je izvađen prijemnik R_p, slika II.8.4.1.1.2. Na slici II.8.4.1.1.3 prikazano je pasivno kolo za određivanje otpornosti Tevenenovog generatora, koje je dobijeno isključivanjem strujnog generatora iz kola sa slike II.8.4.1.1.2. Lako se uočava da se otpornici R_3 i R_4 nalaze u istoj grani, pa su vezani redno. Grana sa otpornicima R_3 i R_4 nalazi se između istih tačaka kao i grana sa otpornikom R_2, pa su ove dve grane paralelno vezane. Redno ovoj paralelnoj vezi je priključen otpornik R_1.



Kolo za određivanje E_T

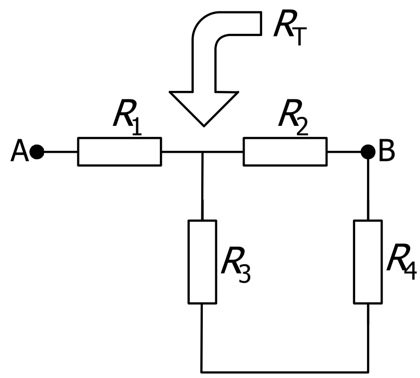
Slika II.8.4.1.1.2

$$R_T = (R_3 + R_4) \,||\, R_2 + R_1 = \frac{(R_3 + R_4)R_2}{R_3 + R_4 + R_2} + R_1 = 26\ \Omega$$

Dakle, uslov prilagođenja prijemnika po snazi je:

$$R_p = R_T = 26\ \Omega\,.$$

Da bismo odredili kolika je ta maksimalna snaga, koja se razvija na otporniku, treba da odredimo elektromotornu silu Tevenenovog generatora, odnosno napon U_{AB} u kolu sa slike II.8.4.1.1.2. Ovo kolo najlakše je rešiti primenom strujnog razdelnika (zadatak II.8.3.1.2):



Kolo za određivanje R_T

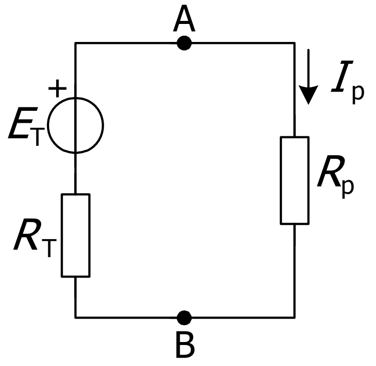
Slika II.8.4.1.1.3

$$I_2 = \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} I_g = \frac{15\ \Omega}{25\ \Omega} \cdot 2{,}6\ \text{A} = 1{,}56\ \text{A}.$$

$$E_T = U_{AB}\Big|_{OK} = R_2 I_2 + R_1 I_g = 67{,}6\ \text{V}$$

Na slici II.8.4.1.1.4 prikazano je ekvivalentno kolo sa Tevenenovim generatorom (referentni smer Tevenenovog generatora od tačke B ka tački A). Struja u kolu određena je Omovim zakonom za prosto kolo:

$$I_p = \frac{E_T}{R_T + R_p} = \frac{67{,}6\ \text{V}}{52\ \Omega} = 1{,}3\ \text{A},$$



Slika II.8.4.1.1.4

pa je snaga koja se razvija na prijemniku:

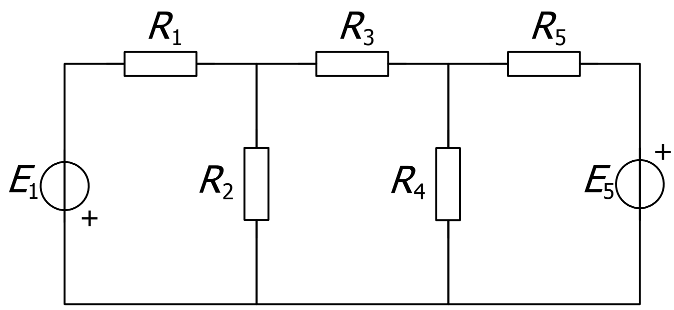
$$P_{R_p} = I_p^2 R_p = 43{,}94\ \text{W}.$$

II.8.4.1.2 U kolu prikazanom na slici odrediti otpornost otpornika R_3 tako da se na njemu razvije maksimalna snaga. Odrediti tu snagu.

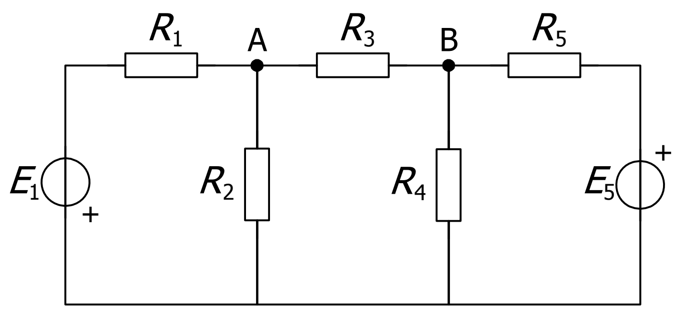
$E_1 = 10$ V, $E_5 = 100$ V,

$R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$,

$R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 20\ \Omega$



<u>*Rešenje:*</u>



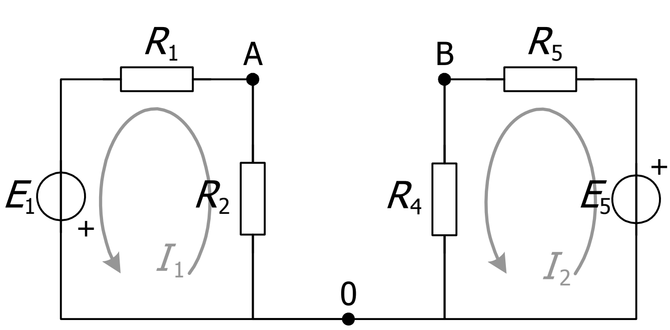
Slika II.8.4.1.2.1

Na slici II.8.4.1.2.1 označene su tačke A i B između kojih ćemo ekvivalentirati deo kola Tevenenovim generatorom. Na slici II.8.4.1.2.2 prikazano je kolo za određivanje elektromotorne sile Tevenenovog generatora. Na slici II.8.4.1.2.3 prikazano je pasivno kolo za određivanje otpornosti Tevenenovog generatora. Sa slike se vidi da je otpornost:

$$R_T = (R_1 \,||\, R_2) + (R_4 \,||\, R_5) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 1{,}9\ \Omega + 10\ \Omega = 11{,}9\ \Omega.$$

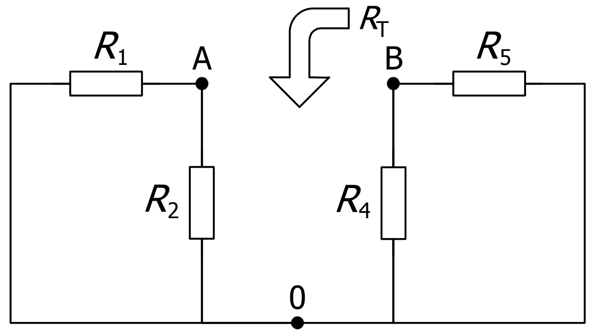
Uslov prilagođenja prijemnika po snazi je:

$$R_p = R_T = 11{,}9\ \Omega.$$



Kolo za određivanje E_T

Slika II.8.4.1.2.2



Kolo za određivanje R_T

Slika II.8.4.1.2.3

Odredimo elektromotornu silu E_T iz kola na slici II.8.4.1.2.2. Označene su struje I_1 i I_2, koje možemo odrediti na osnovu Omovog zakona za prosto kolo, jer levi i desni deo kola predstavljaju dva prosta kola koja imaju jednu zajedničku tačku – tačku O.

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{10\ \text{V}}{42\ \Omega} = 0{,}24\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{E_5}{R_4 + R_5} = \frac{100\ \text{V}}{40\ \Omega} = 2{,}5\ \text{A}$$

Na osnovu određenih struja, dobijamo:

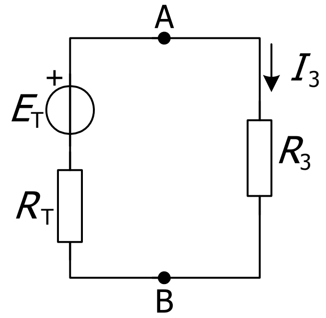
$$E_T = U_{AB}\Big|_{OK} = U_{OB} + U_{AO} = -R_4 I_2 - R_2 I_1 = -59{,}6\ \text{V}\,.$$

Prema Omovom zakonu za prosto kolo sa slike II.8.4.1.2.4 struja je:

$$I_p = \frac{E_T}{R_T + R_p} = \frac{-59{,}6\ \text{V}}{23{,}8\ \Omega} = -2{,}5\ \text{A}\,,$$

pa je snaga koja se razvija na prijemniku:

$$P_{R_p} = I_p^{\,2} R_p = 74{,}375\ \text{W}\,.$$



Slika II.8.4.1.2.4

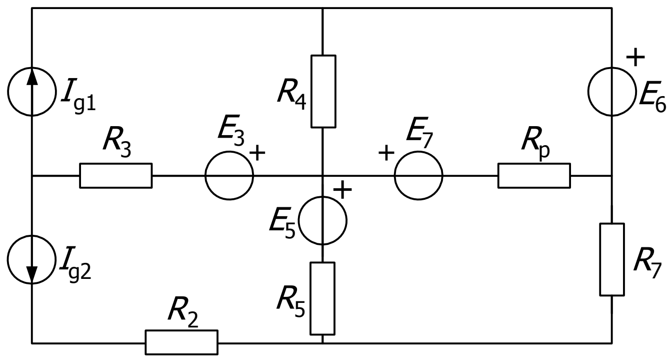
II.8.4.1.3 U kolu prikazanom na slici odrediti otpornost potrošača R_p tako da se na njemu razvije maksimalna snaga. Odrediti tu snagu.

E_3 = 1,5 V, E_5 = 1,2 V, E_6 = 0,9 V, E_7 = 0,4 V

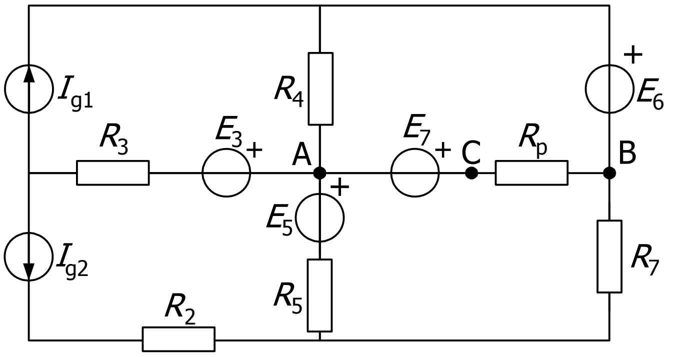
I_{g1} = 60 mA, I_{g2} = 100 mA

$R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$,

$R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 20\ \Omega$, $R_7 = 10\ \Omega$

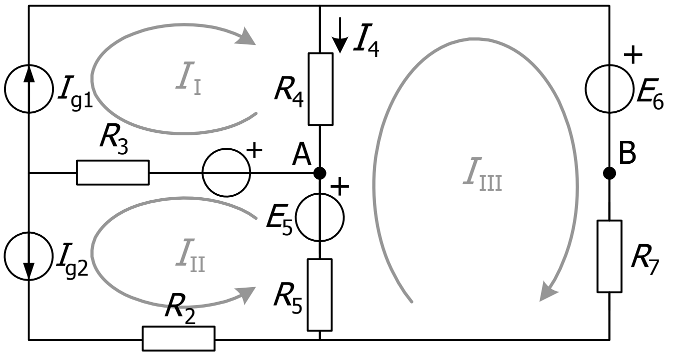


Rešenje:



Slika II.8.4.1.3.1

Za određivanje Tevenenovog generatora otkačićemo iz kola celu granu u kojoj se nalazi potrošač R_p i ekvivalentiraćemo kolo između tačaka A i B. Na slici II.8.4.1.3.2 prikazano je kolo za određivanje elektromotorne sile Tevenenovog generatora.



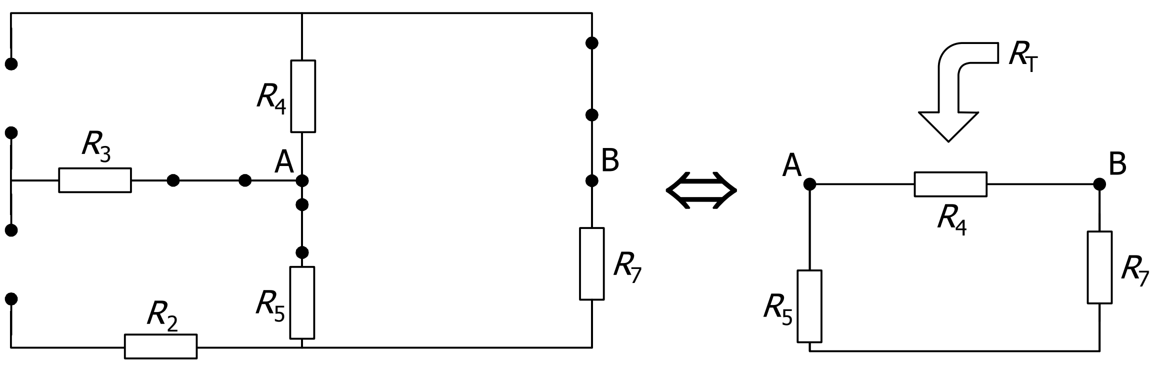
Slika II.8.4.1.3.2

Na slici II.8.4.1.3.3 prikazano je pasivno kolo za određivanje otpornosti Tevenenovog generatora. Sa slike se vidi da je jedan kraj otpornika R_3 i R_2 slobodan, pa ova dva otpornika nisu vezana u kolo. Otpornost je:

$$R_T = R_4 \,||\, (R_5 + R_7) = \frac{R_4 (R_5 + R_7)}{R_4 + R_5 + R_7} = 12\ \Omega .$$

Uslov prilagođenja prijemnika po snazi je:

$$R_p = R_T = 12\ \Omega .$$



Slika II.8.4.1.3.3

Elektromotornu silu E_T određujemo iz kola na slici II.8.4.1.3.2. Primenimo metod konturnih struja. Kolo ima $n_č$ = 4 čvora, n_g = 6 grana i sadrži n_{Ig} = 2 idealna strujna generatora. Broj nezavisnih kontura, odnosno broj konturnih struja, je:

$$n_g - (n_č - 1) = 3,$$

a broj jednačina koje postavljamo je:

$$n_g - (n_č - 1) - n_{Ig} = 1.$$

Na slici II.8.4.1.3.2 označene su konturne struje. Tačno jedna konturna struja mora prolaziti kroz svaki idealni strujni generator. Jednačine konturnih struja glase:

$$I_{\mathrm{I}} = I_{g1} \tag{1}$$

$$I_{\mathrm{II}} = I_{g2} \tag{2}$$

$$-R_4 I_{\mathrm{I}} + R_5 I_{\mathrm{II}} + (R_4 + R_5 + R_7) I_{\mathrm{III}} = E_5 - E_6 \tag{3}$$

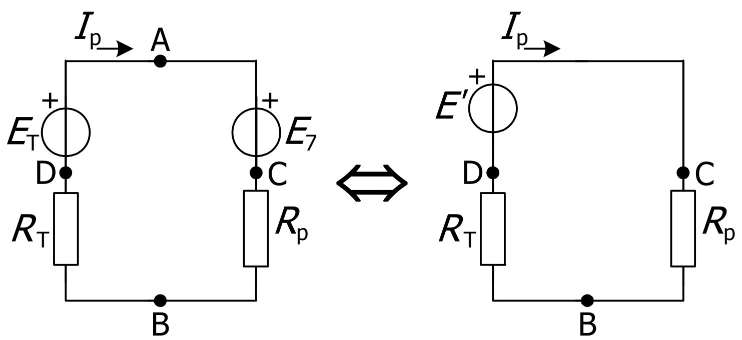
Zamenimo poznate konturne struje u jednačinu 3:

$$-R_4 I_{g1} + R_5 I_{g2} + (R_4 + R_5 + R_7) I_{\mathrm{III}} = E_5 - E_6 \Rightarrow I_{\mathrm{III}} = \frac{E_5 - E_6 + R_4 I_{g1} - R_5 I_{g2}}{R_4 + R_5 + R_7} = \frac{-0{,}5\ \mathrm{V}}{50\ \Omega} = -10\ \mathrm{mA}$$

Napon U_{AB} je najbolje izračunati duž najkraće putanje, a to je u ovom slučaju putanja preko otpornika R_4 i elektromotorne sile E_6. Označimo struju kroz otpornik R_4 sa I_4 (slika II.8.4.1.3.2). Ovu struju čine konturne struje I_{I} (u istom smeru kao struja I_4) i I_{III} (suprotnog smera od struje I_4):

$$I_4 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{III}} = 60\ \mathrm{mA} - (-10\ \mathrm{mA}) = 70\ \mathrm{mA}.$$

$$E_T = U_{AB}\Big|_{OK} = E_6 - R_4 I_4 = -0{,}5\ \mathrm{V}.$$



Slika II.8.4.1.3.4

Pošto smo otkačili celu granu u kojoj se nalazi potrošač R_p, kao i generator E_7, dobijamo kolo na slici II.8.4.1.3.4, u kome postoje dva generatora, E_T i E_7. Ova dva generatora možemo ekvivalentirati jednim generatorom, čija je elektromotorna sila jednaka razlici elektromotornih sila, kao što je prikazano na slici II.8.4.1.3.5. Naime, napon između tačaka C i D je

$$U_{CD} = E_T - E_7,$$

pa se u ostatku kola neće ništa promeniti (svi naponi i struje ostaju isti) ako ova dva generatora zamenimo jednim idealnim naponskim generatorom, elektromotorne sile:

$$E' = U_{CD} = E_T - E_7 = -0{,}5\ \mathrm{V} - 0{,}4\ \mathrm{V} = -0{,}9\ \mathrm{V}$$

(slično kao što smo u zadatku II.8.3.2.1 (slika II.8.3.2.1.5) ekvivalentirali dva paralelno vezana strujna generatora).

Dakle, i dalje važi uslov prilagođenja po snazi. Struja u kolu je:

$$I_{\mathrm{p}} = \frac{E'}{R_{\mathrm{T}} + R_{\mathrm{p}}} = \frac{-0{,}9\ \mathrm{V}}{24\ \Omega} = 37{,}5\ \mathrm{mA}\ ,$$

pa je snaga koja se razvija na prijemniku:

$$P_{R_{\mathrm{p}}} = I_{\mathrm{p}}^{2} R_{\mathrm{p}} = 16{,}875\ \mathrm{mW}\,.$$

Napomena: Kolo sa slike II.8.4.1.3.1 moglo se ekvivalentirati i između tačaka C i B. Tada bi elektromotorna sila Tevenenovog generatora bila jednaka:

$$E_{\mathrm{T}} = U_{\mathrm{CB}}\Big|_{\mathrm{OK}} = U_{\mathrm{AB}} - E_7\ ,$$

jer bi u ovom slučaju tačka C bila na nižem potencijalu od tačke A za E_7. Dakle, elektromotorna sila Tevenenovog generatora u ovom slučaju bila bi jednaka elektromotornoj sili E', koju smo dobili ekvivalentirajući kolo između tačaka A i B. Kao što je i očekivano krajnji rezultat je isti, samo je drugačiji redosled rešavanja.

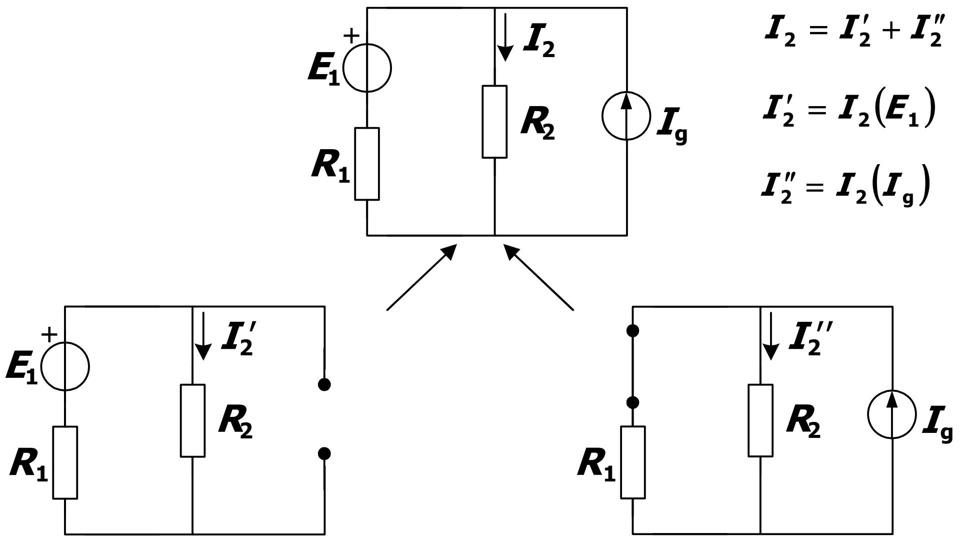
II.8.5 TEOREMA SUPERPOZICIJE

TEORIJSKA OSNOVA

- Ova teorema govori o tome da svaki generator u linearnom kolu generiše električnu struju u svakoj grani kola i, ako kolo ima dva ili više generatora, moguće je električnu struju u pojedinoj grani odrediti sabirajući električne struje koje u datoj grani stvaraju pojedini generatori.

- Kada kažemo da je kolo linerano?
  - Onda kada se kolo sastoji od linearnih elemenata. To su elementi kod kojih postoji linearna zavisnost između napona na krajevima elementa i električne struje koja protiče kroz njih.

  Primer: Primena teoreme superpozicije na kolo sa dva generatora za izračunavanje električne struje I_2:



$$I_2 = I_2' + I_2''$$

$$I_2' = I_2(E_1)$$

$$I_2'' = I_2(I_g)$$

  Znači, prvo napravimo kolo u kome deluje samo naponski generator E_1 i nađemo električnu struju I_2 prema usvojenom referentnom smeru (I_2'). Strujni generator se tom prilikom isključi iz kola (u grani ostaje otvorena veza). Zatim napravimo kolo u kome deluje samo strujni generator I_g i nađemo struju I_2 u tom slučaju, prema usvojenom referentnom smeru (I_2''). Naponski generator se tada kratko spaja.

  Na kraju te dve električne struje (I_2' i I_2'') saberemo i dobijamo električnu struju I_2.

- Teorema superpozicije važi i za napone.

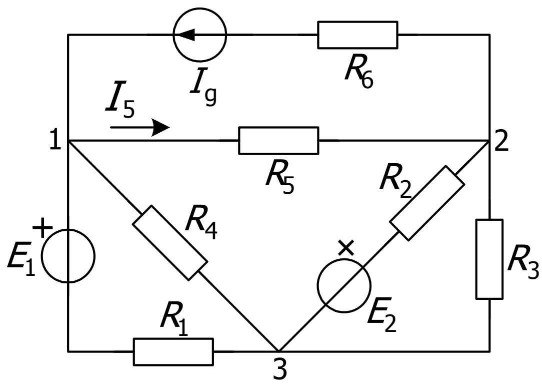
II.8.5.1 Primenom teoreme superpozicije odrediti struju I_5.

Poznato je:

E_1 = 10 V, E_2 = 30 V, I_g = 80 mA,

R_1 = 200 Ω, R_2 = 2 kΩ, R_3 = 1 kΩ, R_4 = 2 kΩ,

R_5 = 2,5 kΩ.

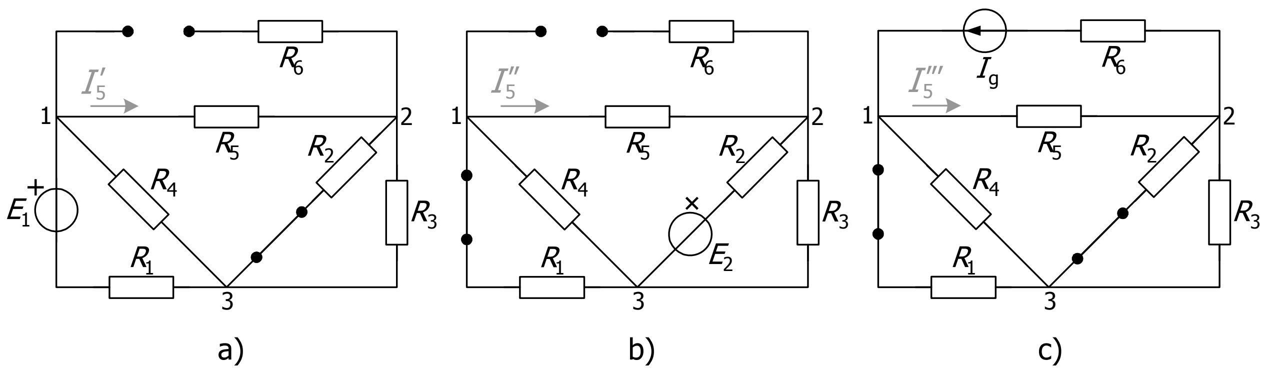


Rešenje:

Princip superpozicije generalno važi u svim linearnim sistemima, a tu spadaju i linearna električna kola.

Prema teoremi superpozicije za linearna električna kola struju u jednoj grani kola možemo dobiti kao algebarski zbir struja (prema istom referentnom smeru) koje u posmatranoj grani stvaraju pojedini generatori ili grupe pojedinih generatora. Teorema superpozicije važi i za napone.

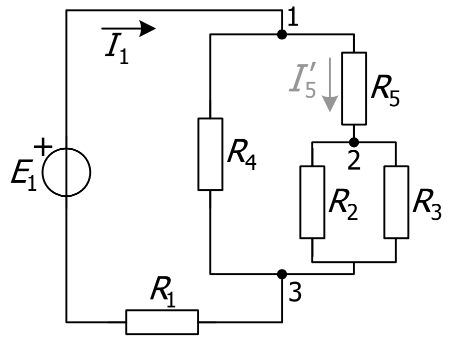
Dakle, električno kolo možemo predstaviti kao superpoziciju stanja koja postoje u kolu kada se uključe pojedini generatori ili grupe generatora (tako da je svaki generator uključen tačno jednom). Ostali generatori se isključuju, i to naponski generatori se kratko spajaju (elektromotorna sila se svodi na nulu), a umesto strujnih ostaje otvorena veza (struja strujnih generatora se svodi na nulu).



Slika II.8.5.1.1

Na slici II.8.5.1.1 prikazana su pojedina kola nastala od analiziranog kola: u kolu na slici pod a) uključen je samo naponski generator E_1, u kolu na slici pod b) uključen je samo naponski generator E_2 i u kolu na slici pod c) uključen je samo strujni generator. Rešimo pojedina kola i odredimo struju u grani sa otpornikom R_5 u svakom kolu:

(a) Na slici II.8.5.1.2 prikazano je kolo sa slike II.8.5.1.1a, nacrtano u pogodnijem obliku za rešavanje. Rešimo kolo primenom strujnog razdelnika (zadatak II.8.3.1.2). Izračunajmo ekvivalentnu otpornost R_{E_1} na koju je vezan generator E_1.



Slika II.8.5.1.2

$$R_{23} = R_2 \,||\, R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}67\ \text{k}\Omega$$

$$R_{523} = R_5 + R_{23} = 3{,}17\ \text{k}\Omega$$

$$R_{4523} = R_4 \,||\, R_{523} = \frac{R_4 R_{523}}{R_4 + R_{523}} = 1{,}23\ \text{k}\Omega$$

$$R_{E_1} = R_1 + R_{4523} = R_1 + \left(R_4 \,||\, \left(R_5 + R_2 \,||\, R_3\right)\right) = R_1 + \frac{R_4\left(R_5 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}\right)}{R_4 + R_5 + \dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}} = 1{,}43\ \text{k}\Omega$$

Struja kroz generator E_1 je:

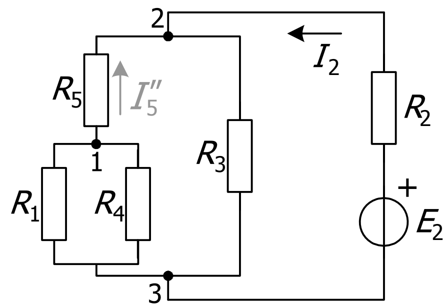
$$I_1 = \frac{E_1}{R_{E_1}} = \frac{10\ \text{V}}{1{,}43\ \text{k}\Omega} = 7\ \text{mA}\,.$$

Posmatrajmo paralelne grane: granu sa otpornikom R_4 i granu sa ekvivalentnom otpornošću R_{523}, koje čine strujni razdelnik. Struja I_5' je:

$$I_5' = \frac{R_4}{R_4 + R_{523}} I_1 = 2{,}7\ \text{mA}\,.$$

Obratiti pažnju na referentni smer struje I_5' koji je od tačke 1 ka tački 2, isto kao zadati referentni smer struje I_5.

(b) Na slici II.8.5.1.3 prikazano je kolo sa slike II.8.5.1.1b, nacrtano u pogodnijem obliku za rešavanje. Rešimo i ovo kolo primenom strujnog razdelnika. Izračunajmo ekvivalentnu otpornost R_{E_2} na koju je vezan generator E_2.



Slika II.8.5.1.3

$$R_{14} = R_1 \,||\, R_4 = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 0{,}18\ \text{k}\Omega$$

$$R_{514} = R_5 + R_{14} = 2{,}68\ \text{k}\Omega$$

$$R_{3514} = R_3 \,||\, R_{514} = \frac{R_3 R_{514}}{R_3 + R_{514}} = 0{,}73\ \text{k}\Omega$$

$$R_{E_2} = R_2 + R_{3514} = R_2 + \left(R_3 \,||\, \left(R_5 + R_1 \,||\, R_4\right)\right) = R_2 + \frac{R_3\left(R_5 + \dfrac{R_1R_4}{R_1 + R_4}\right)}{R_3 + R_5 + \dfrac{R_1R_4}{R_1+R_4}} = 2{,}73\ \text{k}\Omega$$

Struja kroz generator E_2 je:

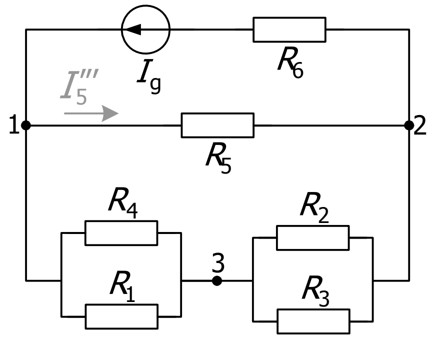
$$I_2 = \frac{E_2}{R_{E_2}} = \frac{30\text{V}}{2{,}73\text{k}\Omega} = 11\ \text{mA}\,.$$

Posmatrajmo paralelne grane: granu sa otpornikom R_3 i granu sa ekvivalentnom otpornošću R_{514}. Na osnovu strujnog razdelnika struja I_5'' je:

$$I_5'' = -\frac{R_3}{R_3 + R_{514}} I_2 = -3\ \text{mA}\,.$$

I ovde se, naravno, referentni smer struje I_5'' poklapa sa zadatim referentnim smerom struje I_5, od tačke 1 ka tački 2 (iako se na prvi pogled, zbog drugačije nacrtane slike, može učiniti da nije tako). Zbog toga se dobija negativan predznak za struju I_5'' (generator E_2 stvara struju od tačke 2 ka tački 1 kroz otpornike R_5 u ovom kolu).

(c) Na slici II.8.5.1.4 prikazano je kolo sa slike II.8.5.1.1c, nacrtano u pogodnijem obliku za rešavanje. Primenimo strujni razdelnik i na ovo kolo, i to na granu sa otpornikom R_5 i njoj paralelno vezanu granu sa ekvivalentnom otpornošću R_{1423}.



Slika II.8.5.1.4

$$R_{1423} = R_{14} + R_{23} = R_1 \,||\, R_4 + R_2 \,||\, R_3 =$$
$$= 0{,}18\ \text{k}\Omega + 0{,}67\ \text{k}\Omega = 0{,}85\ \text{k}\Omega$$

$$I_5''' = \frac{R_{1423}}{R_5 + R_{1423}} I_\text{g} = 20{,}3\ \text{mA}$$

(Referentni smer je od tačke 1 ka tački 2.)

Prema teoremi superpozicije struju I_5 dobijamo kao zbir izaračunate tri struje:

$$I_5 = I_5' + I_5'' + I_5''' = 2{,}7\ \text{mA} - 3\ \text{mA} + 20{,}3\ \text{mA} = 20\ \text{mA}\,.$$

TEST

II.1. Šta su slobodni nosioci naelektrisanja u metalnom provodniku?
- a) šupljine
- b) elektroni
- c) joni

II.2. Šta su slobodni nosioci naelektrisanja u elektrolitima?
- a) šupljine
- b) elektroni
- c) joni

II.3. Šta je jačina električne struje?
- a) proteklo naelektrisanje kroz poprečni presek provodnika
- b) proteklo naelektrisanje kroz poprečni presek provodnika u jedinici vremena
- c) količnik proteklog naelektrisanja kroz poprečni presek provodnika i površine poprečnog preseka provodnika

II.4. Šta je gustina električne struje?
- a) proteklo naelektrisanje kroz poprečni presek provodnika
- b) proteklo naelektrisanje kroz poprečni presek provodnika u jedinici vremena
- c) količnik jačine električne struje koja protiče kroz poprečni presek provodnika i površnine poprečnog preseka provodnika

II.5. Šta je električna otpornost?
- a) količnik napona na krajevima otpornika i struje koja kroz njega protiče
- b) količnik električne struje koja protiče kroz otpornik i napona na otporniku

II.6. Šta je električna provodnost?
- a) količnik napona na krajevima otpornika i električne struje koja kroz njega protiče
- b) količnik električne struje koja protiče kroz otpornik i napona na otporniku

II.7. Koja je jedinica za električnu otpornost?
- a) Ω
- b) $\Omega \cdot \mathrm{m}$
- c) S

II.8. Koja je jedinica za specifičnu električnu otpornost?
- a) Ω
- b) $\Omega \cdot \mathrm{m}$
- c) S

II.9. Koja je jedinica za električnu provodnost?
- a) $\dfrac{1}{\Omega \cdot \mathrm{m}}$
- b) $\Omega \cdot \mathrm{m}$
- c) S

II.10. Koja je jedinica za specifičnu električnu provodnost?

a) $\dfrac{1}{\Omega \cdot \mathrm{m}}$

b) $\Omega \cdot \mathrm{m}$

c) S

II.11. Šta je otpornik?

a) sposobnost provodnika da pruža otpor proticanju struje

b) električna komponenta sa nazivnom vrednošću otpora

II.12. O čemu govori Omov zakon?

a) o linearnoj vezi između napona na krajevima otpornika i struje koja protiče kroz njega

b) o transformisanju električne energije u toplotnu prilikom proticanja električne struje kroz otpornik

II.13. O čemu govori Džulov zakon?

a) o linearnoj vezi između napona na krajevima otpornika i struje koja protiče kroz njega

b) o transformisanju električne energije u toplotnu prilikom proticanja električne struje kroz otpornik

II.14. Kako glasi prvi Kirhofov zakon?

a) algebarski zbir jačina električnih struja svih grana kola, koje se stiču u jednom čvoru jednak je nuli. Pri tome se električne struje koje izlaze iz čvora uzimaju sa predznakom "+", a električne struje koje ulaze u čvor sa predznakom "-".

b) algebarski zbir napona u zatvorenoj strujnoj konturi je jednak nuli. Pri tome se elektromotorne sile generatora uzimaju sa predznakom "+" za usaglašeni referentni smer, a naponi na otpornicima sa predznakom "-" za usaglašeni referentni smer.

II.15. Struje grana koje izlaze iz čvora prema I Kirhofovom zakonu dobijaju u jednačinama:

a) predznak "+"

b) predznak "-"

II.16. Struje grana koje ulaze u čvor prema I Kirhofovom zakonu dobijaju u jednačinama:

a) predznak "+"

b) predznak "-"

II.17. Elektromotorne sile u konturi prema II Kirhofovom zakonu dobijaju u jednačinama (za usaglašeni referentni smer):

a) predznak "+"

b) predznak "-"

II.18. Naponi na otpornicima u konturi prema II Kirhofovom zakonu dobijaju u jednačinama (za usaglašeni referentni smer):

a) predznak "+"

b) predznak "-"

II.19. Otpornost idealnog naponskog generatora je:

a) 0
b) mala , ali konačna
c) velika, ali konačna
d) ∞

II.20. Otpornost realnog naponskog generatora je:

a) 0
b) mala , ali konačna
c) velika, ali konačna
d) ∞

II.21. Otpornost idealnog strujnog generatora je:

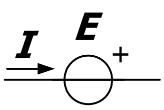
a) 0
b) mala , ali konačna
c) velika, ali konačna
d) ∞

II.22. Otpornost realnog strujnog generatora je:

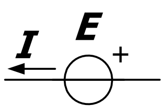
a) 0
b) mala , ali konačna
c) velika, ali konačna
d) ∞

II.23. Usaglašeni referentni smer električne struje i elektromotorne sile kod naponskog generatora je:

a)

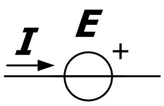


b)

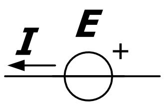


II.24. Neusaglašeni referentni smer električne struje i elektromotorne sile kod naponskog generatora je:

a)

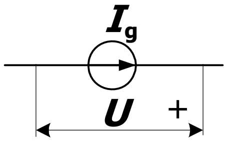


b)

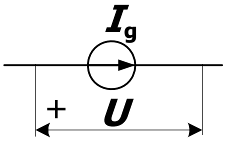


II.25. Neusaglašeni referentni smer napona na strujnom generatoru i njegove struje je:

a)

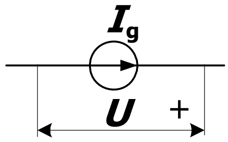


b)

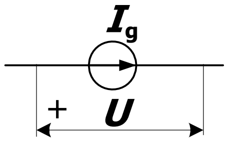


II.26. Usaglašeni referentni smer na strujnom generatoru i njegove struje je:

a)

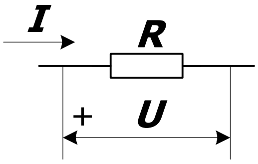


b)

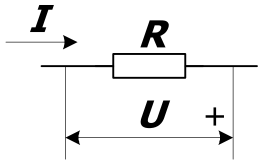


II.27. Usaglašen referentni smer za napon na krajevima otpornika i električnu struju koja kroz njega protiče je:

a)

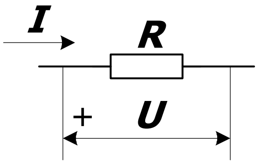


b)

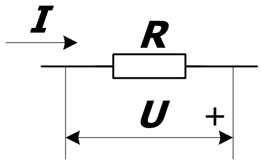


II.28. Neusaglašeni referentni smer za napon na krajevima otpornika i električnu struju koja kroz njega protiče je:

a)

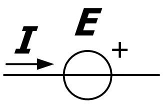


b)

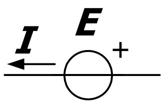


II.29. Na kojoj slici je snaga naponskog generatora $P_E = E \cdot I$:

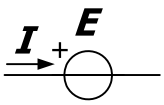
a)



b)

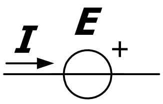


c)

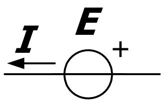


II.30. Na kojoj slici je snaga naponskog generatora $P_E = -E \cdot I$:

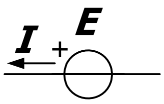
a)



b)

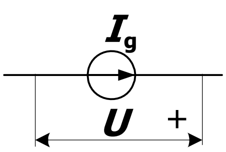


c)

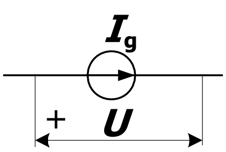


II.31. Na kojoj slici je snaga strujnog generatora $P_{Ig} = U \cdot I_g$:

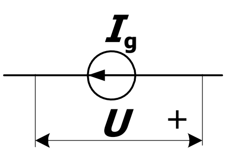
a)



b)

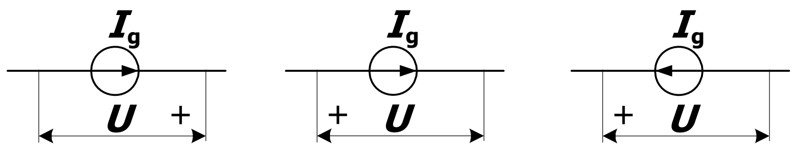


c)



II.32. Na kojoj slici je snaga strujnog generatora $P_{Ig} = -U \cdot I_g$:

a) b) c)

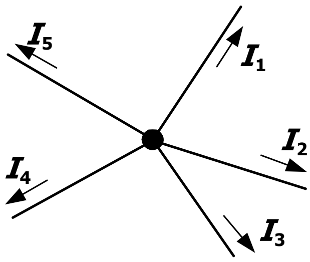


II.33. Jednačina po I Kirhofovom zakonu za kolo nacrtano na slici glasi:

a) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$

b) $-I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$

c) $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$

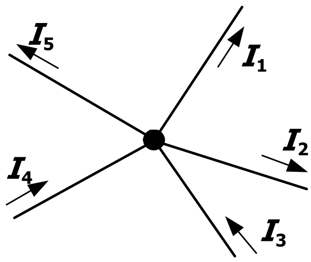


II.34. Jednačina po I Kirhofovom zakonu za kolo nacrtano na slici glasi:

a) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$

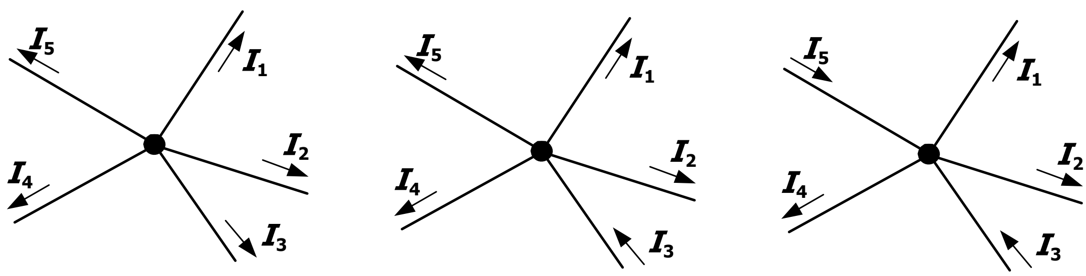
b) $-I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$

c) $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$



II.35. Zaokruži sliku za koju važi jednačina $I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$:

a) b) c)

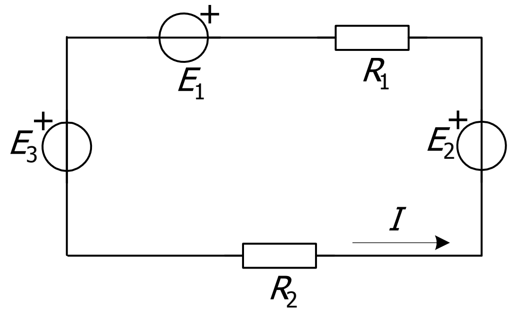


II.36. Jednačina po II Kirhofovom zakonu za kolo nacrtano na slici glasi:

a) $E_1 + R_1 \cdot I - E_2 + R_2 \cdot I + E_3 = 0$

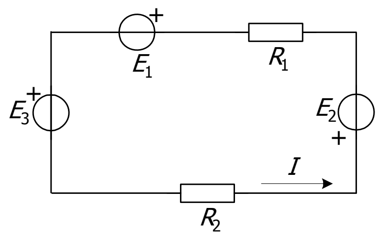
b) $E_1 - R_1 \cdot I + E_2 + R_2 \cdot I - E_3 = 0$

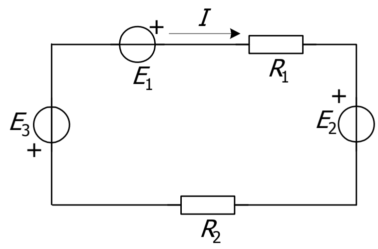
c) $-E_1 - R_1 \cdot I + E_2 + R_2 \cdot I - E_3 = 0$

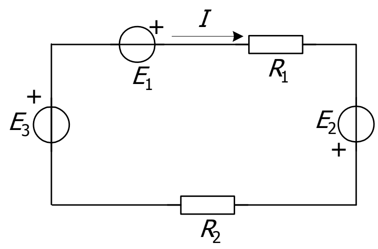


II.37. Zaokruži sliku za koju važi jednačina $E_1 - R_1 \cdot I + E_2 - R_2 \cdot I + E_3 = 0$:

a) b) c)





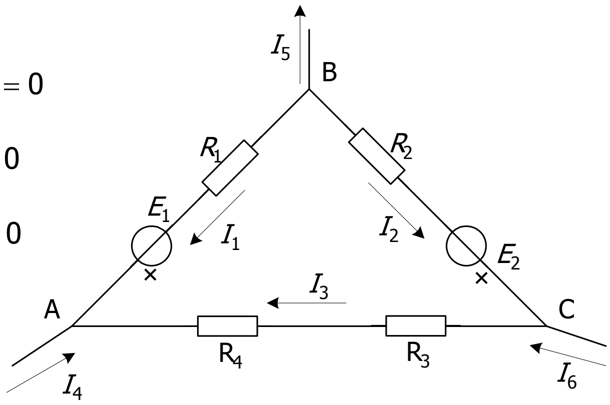


II.38. Jednačina po II Kirhofovom zakonu za konturu nacrtanu na slici glasi:

a) $-E_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 + E_2 - R_3 I_3 - R_4 I_3 = 0$

b) $E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 + E_2 - R_3 I_3 - R_4 I_3 = 0$

c) $E_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 + E_2 + R_3 I_3 + R_4 I_3 = 0$

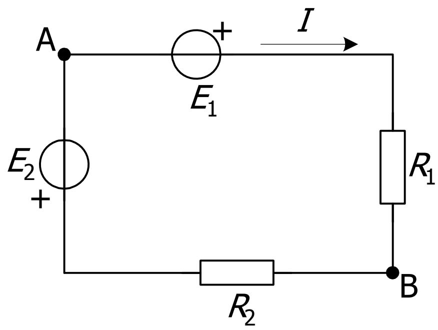


II.39. Kako glasi Omov zakon za prosto kolo prikazano na slici?

a) $I = \dfrac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$

b) $I = \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$

c) $I = \dfrac{-E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$

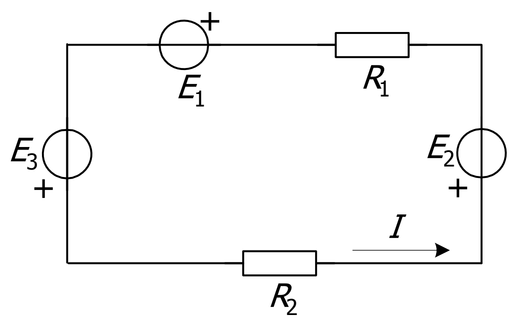


II.40. Kako glasi Omov zakon za prosto kolo prikazano na slici?

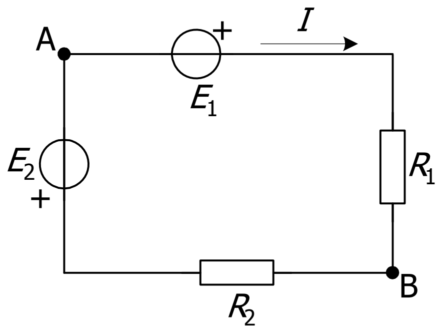
a) $I = \dfrac{-E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2}$

b) $I = \dfrac{E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_2}$

c) $I = \dfrac{E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2}$



II.41. Odredi napon U_{AB} u kolu sa slike:

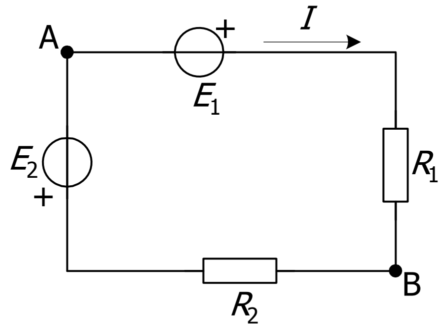


a) $U_{AB} = R_1 \cdot I - E_1$

b) $U_{AB} = -R_1 \cdot I + E_1$

c) $U_{AB} = R_1 \cdot I + E_1$

II.42. Odredi napon U_{AB} u kolu sa slike:

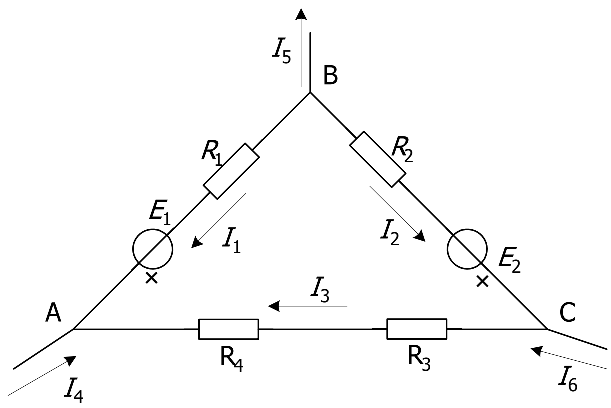


a) $U_{AB} = -R_2 \cdot I - E_2$

b) $U_{AB} = R_2 \cdot I + E_2$

c) $U_{AB} = -R_2 \cdot I + E_2$

II.43. Odredi napon U_{BC} u delu kola sa slike:

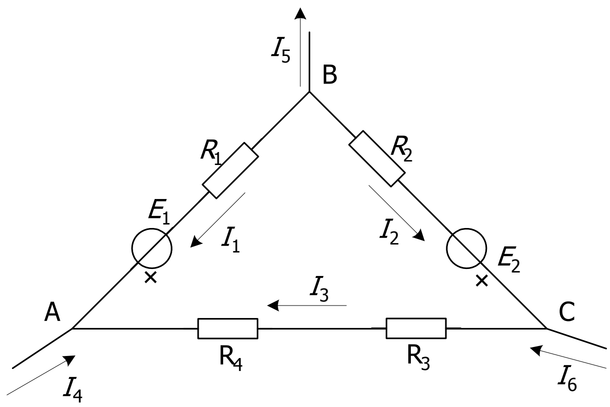


a) $U_{BC} = R_2 I_2 + E_2$

b) $U_{BC} = R_2 I_2 - E_2$

c) $U_{BC} = -R_2 I_2 + E_2$

II.44. Odredi napon U_{BA} u delu kola sa slike:



a) $U_{BA} = -R_1 I_1 + E_1$

b) $U_{BA} = (R_3 + R_4) I_3 - E_2 + R_2 I_2$

c) $U_{BA} = -R_2 I_2 + E_2 - (R_3 + R_4) I_3$

II.45. Ako složeno kolo ima 3 čvora i 6 grana koliko jednačina treba napisati po I Kirhofovom zakonu?

a) 3

b) 2

c) 4

II.46. Ako složeno kolo ima 3 čvora i 6 grana i nema idealnih strujnih generatora, koliko jednačina treba napisati po II Kirhofovom zakonu?

a) 3
b) 2
c) 4

II.47. Koliko jednačina treba napisati po metodi konturnih struja ako u kolu nema strujnih generatora?

a) $n_{\mathrm{j}} = n_{\mathrm{č}} - 1$
b) $n_{\mathrm{j}} = n_{\mathrm{g}} - (n_{\mathrm{č}} - 1)$
c) $n_{\mathrm{j}} = n_{\mathrm{g}} - (n_{\mathrm{č}} - 1) - n_{Ig}$

II.48. Koliko jednačina treba napisati po metodi konturnih struja ako u kolu ima strujnih generatora?

a) $n_{\mathrm{j}} = n_{\mathrm{č}} - 1$
b) $n_{\mathrm{j}} = n_{\mathrm{g}} - (n_{\mathrm{č}} - 1)$
c) $n_{\mathrm{j}} = n_{\mathrm{g}} - (n_{\mathrm{č}} - 1) - n_{Ig}$

II.49. Koliko kontura sme da se "provuče" kroz granu sa strujnim generatorom ako rešavamo kolo metodom konturnih struja?

a) 1
b) 2
c) nije bitno koliko

II.50. U opštem sistemu jednačina kod metode konturnih struja otporni član R_{11} je:

a) zbir svih otpornosti u prvoj konturi
b) zbir svih otpornosti u granama koje se stiču u čvoru 1
c) otpornik R_1 u prvoj konturi

II.51. U opštem sistemu jednačina kod metode konturnih struja otporni članovi R_{11}, R_{22}, R_{33} su:

a) uvek pozitivni
b) uvek negativni
c) mogu biti pozitivni ili negativni

II.52. U opštem sistemu jednačina kod metode konturnih struja član R_{12} je:

a) zbir svih otpornosti u prvoj i drugoj konturi
b) zbir svih otpornosti u granama koje su zajedničke za prvu i drugu konturu
c) otpornik R_{12} u prvoj ili drugoj konturi

II.53. U opštem sistemu jednačina kod metode konturnih struja otporni članovi R_{12}, R_{13}, R_{23} su:

a) uvek pozitivni
b) uvek negativni
c) mogu biti pozitivni ili negativni

II.54. Ako su dva otpornika povezana u istoj grani onda je to:

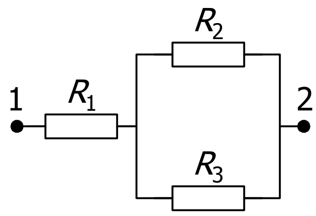
a) redna veza
b) paralelna veza
c) mešovita veza

II.55. Ako su dva otpornika povezana između dva čvora u različitim granama onda je to:

a) redna veza
b) paralelna veza
c) mešovita veza

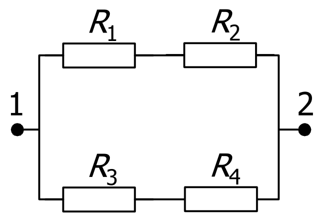
II.56. Veza otpornika na slici je

a) redna veza
b) paralelna veza
c) mešovita veza



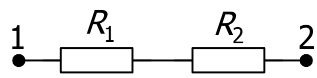
II.57. Veza otpornika na slici je

a) redna veza
b) paralelna veza
c) mešovita veza



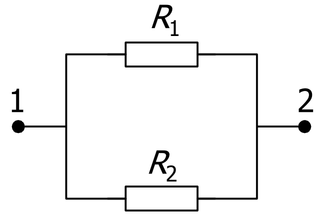
II.58. Veza otpornika na slici je

a) redna veza
b) paralelna veza
c) mešovita veza



II.59. Veza otpornika na slici je

a) redna veza
b) paralelna veza
c) mešovita veza



II.60. Karakteristika redne veze je:

a) ista električna struja prolazi kroz otpornike
b) isti napon je na oba otpornika

II.61. Karakteristika paralelne veze je:

a) ista električna struja prolazi kroz otpornike
b) isti napon je na oba otpornika

II.62. Koja transfiguracija otpornika smanjuje broj kontura:
  a) "trougao" u "zvezdu"
  b) "zvezda" u "trougao"

II.63. Koja transfiguracija smanjuje broj kontura:
  a) realan strujni generator u realan naponski
  b) realan naponski generator u realan strujni

II.64. Čemu je jednaka elektromotorna sila Tevenenovog generatora?
  a) naponu između otvorenih krajeva u kolu kod kojeg smo prethodno odstranili granu sa traženom električnom strujom
  b) naponu između čvorova kola među kojima je priključena grana u kojoj tražimo električnu struju

II.65. Čemu je jednaka otpornost Tevenenovog generatora:
  a) ekvivalentnoj otpornosti kola posmatranoj između otvorenih krajeva pasivne mreže kojoj smo prethodno odstranili granu sa traženom strujom
  b) ekvivalentne otpornosti celog kola

II.66. Šta je pasivno električno kolo?
  a) kolo koje se sastoji samo od idealnih generatora
  b) kolo koje se sastoji samo od otpornika
  c) kolo koje se sastoji i od generatora i od otpornika

II.67. Čemu je jednaka otpornost otpornika na kome se razvije maksimalna snaga u prostom kolu?
  a) otpornosti generatora
  b) ekvivalentnoj otpornosti kola

II.68. Teorema superpozicije primenjuje se:
  a) samo na električne struje u kolu
  b) samo na napone u kolu
  c) i na električne struje i na napone u kolu

MATEMATIČKI PODSETNIK

EKSPONENTI

1) $\mathbf{10^{x}}$:

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ ...

2) $\mathbf{10^{-x}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^{x}}}$:

$10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{10 \cdot 10} = \dfrac{1}{100}$ ...

3) $\mathbf{10^{x} \cdot 10^{y} = 10^{x+y}}$:

$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$

4) $\mathbf{(10^{x})^{y} = 10^{x \cdot y}}$:

$(10^2)^3 = 10^6$

5) $\dfrac{\mathbf{10^{x}}}{\mathbf{10^{y}}} = \mathbf{10^{x-y}}$:

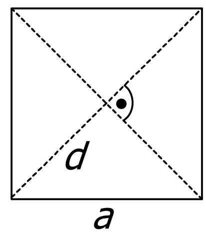
$\dfrac{10^5}{10^3} = 10^2$

6) $\sqrt[x]{\mathbf{10}} = \mathbf{10^{\frac{1}{x}}}$

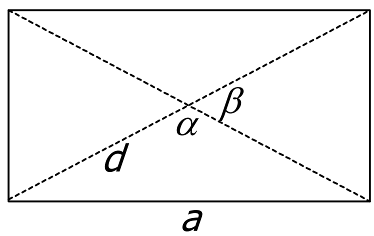
$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

GEOMETRIJA

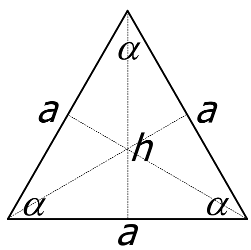
- **Kvadrat**
  - stranica dužine a,
  - obim $O = 4a$,
  - površina $P = a^2$,
  - dijagonala $d = a\sqrt{2}$; obe dijagonale su iste i seku se pod pravim uglom.



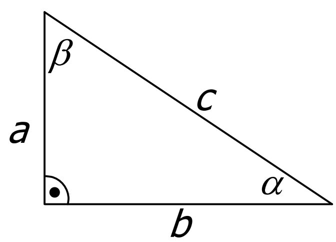
- **Pravougaonik**
  - stranice dužina a i b,
  - obim $O = 2a + 2b$,
  - površina $P = ab$,
  - dijagonala $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; obe dijagonale su iste i seku se pod proizvoljnim uglom (koji nije prav, a zavisi od a i b).



- **Jednakostranični trougao**
  - sve tri stranice dužine a,
  - sva tri ugla jednaka $\frac{\pi}{3}$ (60^O)
  - obim $O = 3a$,
  - površina $P = \frac{ah}{2}$,
  - visina $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
  - preseci visina i težišnih linija, centar upisane i centar opisane kružnice su u istoj tački; ta tačka deli visinu u razmeri 2:1,
  - visine polove uglove i polove stranice.

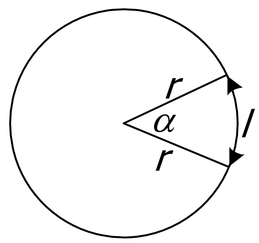


- **Pravougli trougao**
  - katete dužina a i b,
  - hipotenuza dužine c,
  - važi Pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$
  - obim $O = a + b + c$,
  - površina $P = \frac{ab}{2}$,

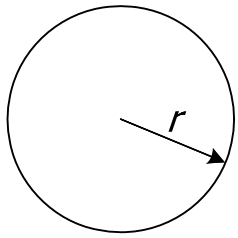


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

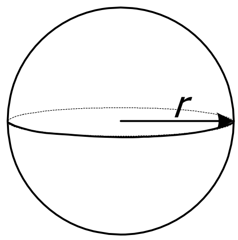
- **Ravanski ugao** $\alpha = \frac{l}{r}$



- **Krug**
  - poluprečnik r,
  - obim $O = 2r\pi$,
  - površina $P = r^2\pi$,



- **Lopta**
  - poluprečnik r,
  - površina sfere $P = 4\pi r^2$,
  - zapremina $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

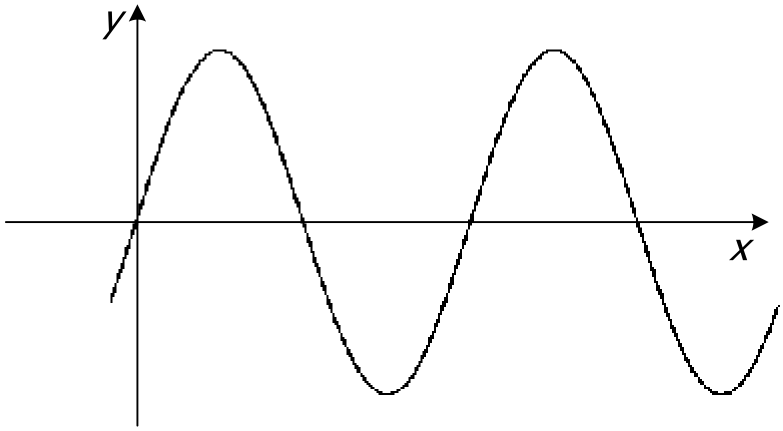


FUNKCIJE

- Šta je funkcija?

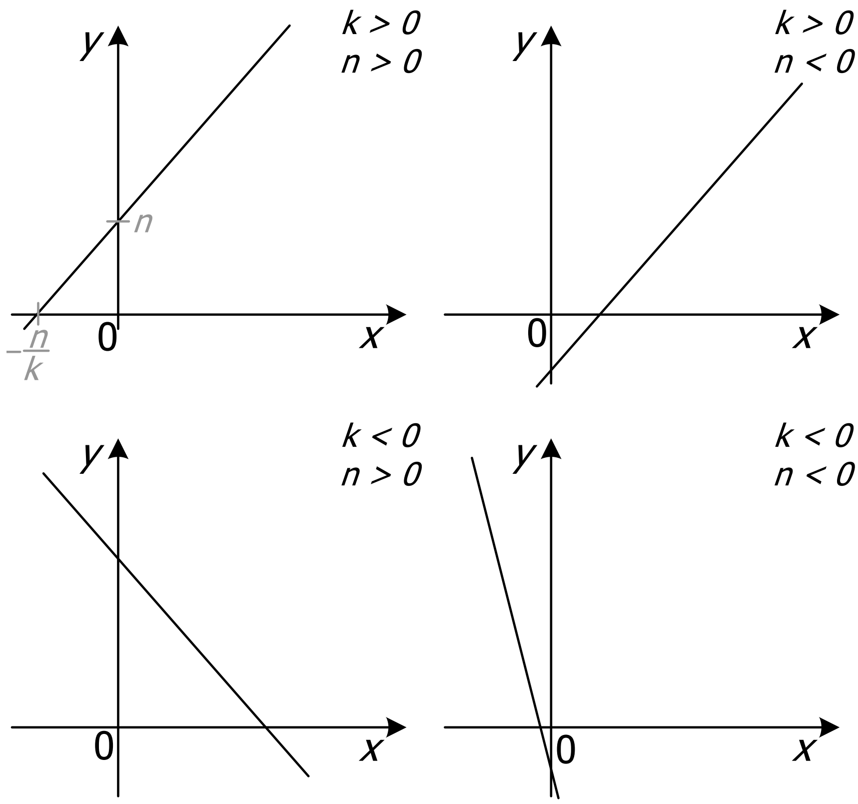
  – Preslikavanje jednog skupa u drugi. Svakom elementu prvog skupa (koji se najčešće obeležava sa *x*) odgovara tačno jedan element drugog skupa (koji se najčešće obeležava sa *y*).

  Primer: $y = f(x) = \sin x$



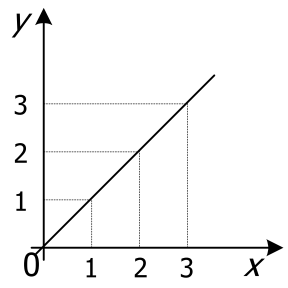
- Šta je linearna funkcija?

  – Funkcija oblika $y = f(x) = kx + n$, gde su k i n realni brojevi.



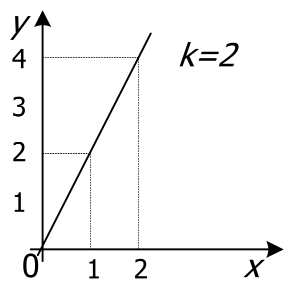
- Šta znači ″direktno srazmerno″, a šta ″obrnuto srazmerno″?
  – Kod linearne funkcije $y = f(x) = kx$ promenljiva *y* je direktno srazmerna promenljivoj *x*, a konstanta srazmernosti je *k*.
  – Ako je $k = 1$ tada je *y = x*, (*y* i *x* su jednaki). Grafik ove funkcije je prava koja je nagnuta pod uglom od 45^O (ili $\pi / 4$) u odnosu na *x* osu.

- za *x = 1* je *y = 1*;
- za *x = 2* je *y = 2*...



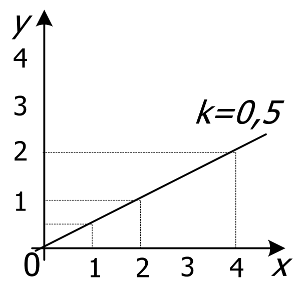
– Ako je na primer $k = 2$ tada je $y = 2x$

- za *x = 1* je *y = 2*;
- za *x = 2* je *y = 4*...



– Ako je na primer $k = 0,5$ tada je $y = 0,5x$

- za $x = 1$ je $y = 0,5$;
- za $x = 2$ je $y = 4$...



– Posmatrajmo funkciju dve promenljive $y = \dfrac{k_1 x}{k_2 z}$; promenljive su *x* i *z*.

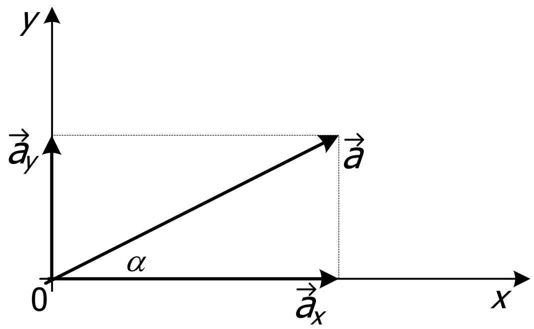
y* je direktno srazmerno *x, a to znači da koliko puta *poraste* promenljiva *x* toliko puta *poraste* promenljiva *y*;

y* je obrnuto srazmerno *z, a to znači da koliko puta *poraste* promenljiva *z* toliko puta *se smanji* premenljiva *y*.

- Šta znači ″direktno srazmerno″, a šta ″obrnuto srazmerno″ sa nekim stepenom (na primer sa kvadratom)?
  – Na primer, u funkciji $y = \dfrac{k_1 x^2}{k_2 z^3}$ *y* je direktno srazmerno x^2, a obrnuto srazmerno z^3.

SKALARI I VEKTORI

- **Skalari** su brojne vrednosti.
- **Vektori** su usmerene duži. Definišu se intenzitetom, pravcem i smerom.
- **Intenzitet vektora** (ili **moduo vektora**) je dužina vektora.



$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2}$$

- **Pravac vektora** je definisan uglom u odnosu na jednu od osa koordinatnog sistema (*x* ili *y*).
- Svaki pravac može imati dva **smera**, na primer: udesno ili ulevo, nagore ili nadole, ka ili od.
- Svaki vektor ima i sebi **suprotan vektor**. To je vektor istog intenziteta, istog pravca, a suprotnog smera.

$\vec{a}$ $-\vec{a}$

- **Jedinični vektor** (ili **ort**) je vektor koji ima intenzitet jednak jedinici, a pravac i smer su zadati. Svaki vektor se može prikazati proizvodom svog algebarskog intenziteta i jediničnog vektora. Algebarski intenzitet je intenzitet koji može biti pozitivan i negativan, za razliku od intenziteta koji je isključivo pozitivan.

  Primer:

  $\vec{r}_0$ jedinični vektor

  $\vec{a}$ $\vec{a} = 3\vec{r}_0$
  intenzitet je 3
  algebarski intenzitet je 3

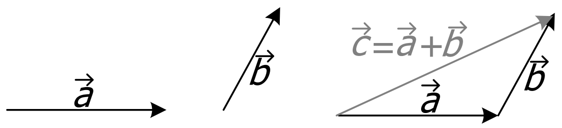
  $\vec{b}$ $\vec{b} = -3\vec{r}_0$
  intenzitet je 3
  algebarski intenzitet je -3

  Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog pravca a suprotnog smera; istog intenziteta, a algebarski intenziteti su im suprotnog znaka.

RAČUNSKE OPERACIJE SA VEKTORIMA

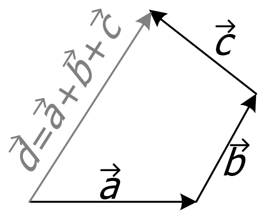
- **Sabiranje vektora** se može vršiti nadovezivanjem i po paralelogramu.

SABIRANJE VEKTORA NADOVEZIVANJEM

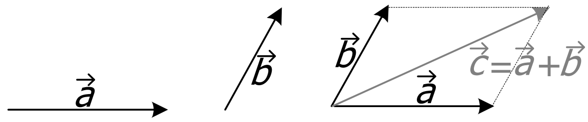


• Zbirni vektor se dobija kada se početak narednog vektora nadoveže na kraj prethodnog, a onda se spoji početak prvog i kraj poslednjeg.

• Na ovaj način se može sabrati neograničen broj vektora odjednom.



SABIRANJE VEKTORA PO PRAVILU PARALELOGRAMA

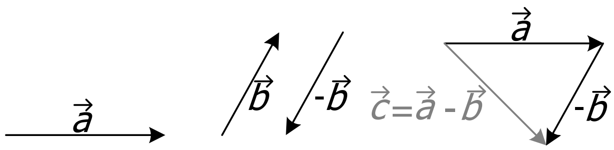


• Vektori se dovedu na zajednički početak. Na njih se docrta paralelogram. Zbirni vektor predstavlja dijagonalu paralelograma koja polazi iz zajedničke tačke vektora.

• Na ovaj način se mogu sabrati najviše dva vektora odjednom.

- **Oduzimanje vektora** se može vršiti nadovezivanjem i po paralelogramu.

ODUZIMANJE VEKTORA NADOVEZIVANJEM



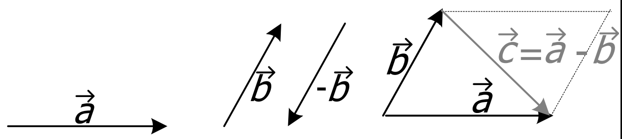
• Vektor razlike se dobija sabiranjem vektora $\vec{a}$ i suprotnog vektora vektoru $\vec{b}$ (to je vektor $-\vec{b}$).

• Početak vektora $-\vec{b}$ se nadoveže na kraj vektora $\vec{a}$, a onda se spoji početak prvog i kraj poslednjeg.

• Na ovaj način se može oduzeti neograničen broj vektora odjednom.

• Nadovezivanjem vektora se istovremeno može i sabirati i oduzimati neograničen broj vektora.

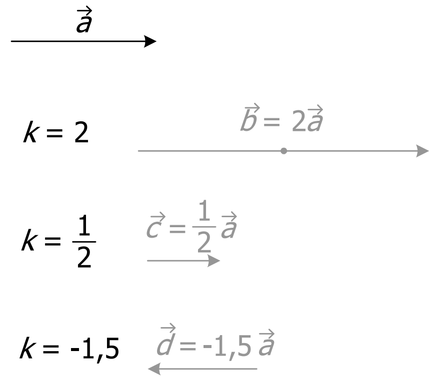
ODUZIMANJE VEKTORA PO PRAVILU PARALELOGRAMA



• Vektor $\vec{a}$ i vektor $\vec{b}$ se dovedu na zajednički početak. Na njih se docrta paralelogram. Vektor razlike predstavlja dijagonalu paralelograma koja ne polazi iz zajedničke tačke vektora (smer je od kraja vektora $\vec{b}$ ka kraju vektora $\vec{a}$).

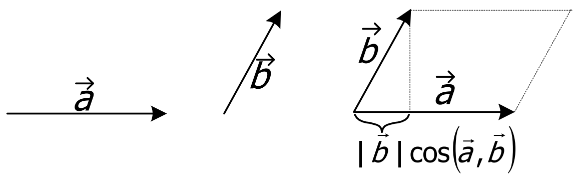
• Na ovaj način se mogu oduzeti najviše dva vektora odjednom.

- **Množenje vektora skalarom.** Ako vektor $\vec{a}$ pomnožimo nekim brojem k dobićemo vektor istog pravca i smera, a intenzitet novog vektora biće k puta veći od intenziteta vektora $\vec{a}$. (Ukoliko je k negativan broj vektor će biti suprotnog smera.)



- **Proizvodi vektora.** Definišu se skalarni i vektorski proizvod dva vektora.

SKALARNI PROIZVOD $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$



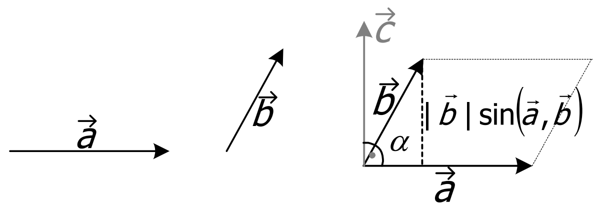
- Skalarni proizvod dva vektora je skalar čiji je intenzitet jednak

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

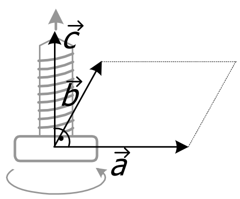
To je površina pravougaonika stranice $|\vec{a}|$ i stranice $|\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

- Skalarni prizvod dva vektora koristimo kada tražimo koliki doprinos daje vektorska veličina $\vec{a}$ u pravcu neke druge vektorske veličine $\vec{b}$.

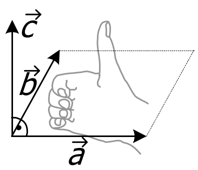
VEKTORSKI PROIZVOD $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$



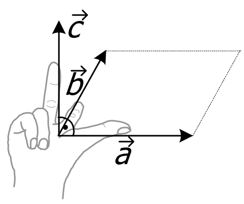
- Vektorski proizvod dva vektora je vektor čiji je:
  - intenzitet $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ (i jednak je površini paralelograma koji određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$),
  - pravac normalan na ravan koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
  - smer određen jednim od sledeća tri pravila:



▪ pravilom desne zavojnice: smer vektora $\vec{c}$ poklapa se sa smerom kretanja zavojnice, ako bi se ona okretala zajedno vektorom $\vec{a}$ tako da se najkraćim putem poklopi sa vektorom $\vec{b}$;



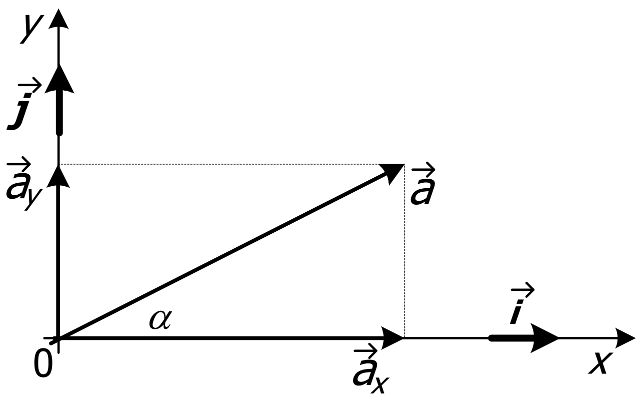
▪ pravilom desne ruke: ispruženi palac će pokazivati smer vektora $\vec{c}$ ako savijeni prsti pokaziju smer okretanja vektora $\vec{a}$, kojim bi se najkraćim putem poklopio sa vektorom $\vec{b}$;



▪ pravilom tri prsta: ako palac usmerimo kao vektor $\vec{a}$, kažiprst kao vektor $\vec{b}$, srednji prst će pokazivati smer vektora $\vec{c}$.

RAZLAGANJE VEKTORA NA OSE

- Svaki vektor se može razložiti u Dekartovom koordinatnom sistemu na svoju x i y komponentu:



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = |\vec{a}_x| \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = |\vec{a}_y| \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

gde je $\vec{i}$ - jedinični vektor x-ose (ima intenzitet jednak 1, pravac i smer x-ose),

$\vec{j}$ - jedinični vektor y-ose (ima intenzitet jednak 1, pravac i smer y-ose),

$|\vec{a}|$ - intenzitet vektora $\vec{a}$.

- Za ove veličine važi da je:

$$|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{|\vec{a}_y|}{|\vec{a}_x|}$$

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

- Za proračun linearnih sistema jednačina drugog i trećeg reda koristićemo determinante:

SISTEM JEDNAČINA I DETERMINANTA DRUGOG REDA

- Sistem linearnih nezavisnih jednačina drugog reda je:

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = c_2$$

- Glavna determinanta ovog sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Pojedinačne determinante promenljivih su:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1a_{22} - a_{12}c_2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = a_{11}c_2 - c_1a_{21}$$

- Nepoznate u jednačinama se izračunavaju Kramerovim pravilima:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

SISTEM JEDNAČINA I DETERMINANTA TREĆEG REDA

- Sistem linearnih nezavisnih jednačina trećeg reda je:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

- Glavna determinanta ovog sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- Pojedinačne determinante promenljivih su:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

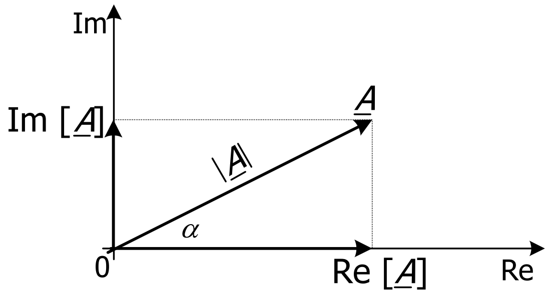
- Nepoznate u jednačinama se izračunavaju Kramerovim pravilima:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

KOMPLEKSNI BROJEVI

- Šta je kompleksni broj?
  – Broj koji ima svoj realan i svoj imaginaran deo u kompleksnoj ravni.

- Koliko kompleksni broj ima oblika?
  Tri:
  – analitički $\underline{A} = x + jy$,
  – trigonometrijski $\underline{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$,
  – eksponencijalni $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$.



- Šta je j?

$$j = \sqrt{-1}$$

- Analitički i trigonometrijski oblik mogu se direktno prevoditi jedan u drugi.

- Eksponencijalni i trigonometrijski oblik se mogu direktno prevoditi jedan u drugi. Veze između ta dva oblika su **moduo** A i **argument** α kompleksnog broja:

  $A = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{A}] + \mathrm{Im}^2[\underline{A}]} = \sqrt{x^2 + y^2}$, moduo je isključivo pozitivan;

  $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}[\underline{A}]}{\mathrm{Re}[\underline{A}]} = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, argument može biti i pozitivan i negativan.

  Ovo proističe iz Ojlerove formule:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha.$$

- Šta je konjugovani broj kompleksnom broju?
  – To je broj koji ima isti znak realnog dela a suprotan znak imaginarnog dela datog kompleksnog broja, odnosno broj koji ima isti moduo a suprotan znak argumenta datog kompleksnog broja.

$$\underline{A}^* = x - jy = Ae^{-j\alpha}$$

- Za kompleksne brojeve važi još i:

  $\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2$

  $j^2 = -1$

  $j^3 = -j$

  $j^4 = 1$

  $\dfrac{1}{j} = -j$

RAČUNSKE OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

- **Sabiranje.** Zbir dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Sabiraju se realan deo sa realnim i imaginaran sa imaginarnim:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x_3 + jy_3$$

- **Oduzimanje.** Razlika dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Oduzimaju se realan deo od realnog i imaginaran od imaginarnog:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) = x_3 + jy_3$$

- **Množenje.** Množenje dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Množe se realni i imaginarni delovi kompleksnih brojeva, svaki član sa svakim:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) = x_3 + jy_3$$

Ili ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku:

$$\underline{A} = A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{e}^{j\beta} = AB \cdot \mathrm{e}^{j(\alpha+\beta)} = C \cdot \mathrm{e}^{j\gamma}$$

- **Deljenje.** Količnik dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Brojilac i imenilac količnika pomnožimo sa konjugovano kompleksnim brojem imenioca:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \cdot \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{x_1x_2 - jx_1y_2 + jx_2y_1 - j^2y_1y_2}{x_2^2 + jx_2y_2 - jx_2y_2 - j^2y_2^2} =$$
$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = x_3 + jy_3$$

Ili ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku:

$$\underline{A} = A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$$

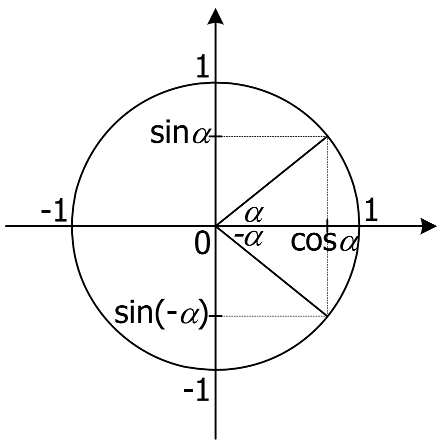
$$\underline{B} = B \cdot \mathrm{e}^{j\beta}$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}}{B \cdot \mathrm{e}^{j\beta}} = \frac{A}{B}\mathrm{e}^{j(\alpha-\beta)} = C \cdot \mathrm{e}^{j\gamma}$$

- Za proračun sa kompleksnim brojevima korisno je znati još i:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	0
$\mathbf{e}^{j\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$	j	-1	-1	$-j$	1

– **Trigonometrijski krug** je krug čiji je poluprečnik jednak 1, a centar se nalazi u koordinatnom početku. Za dati ugao α kosinus očitavamo na x osi, a sinus na y osi.



Iz trigonometrijskog kruga se vidi da je

sinus – neparna funkcija: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

cosinus – parna funkcija: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

tangens – neparna funkcija: $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

INTEGRALI

- Šta je integral?
  - Može se shvatiti kao suma beskonačno mnogo beskonačno malih veličina.
  - Oznaka integrala je $\int$.

- Kakvi integrali postoje?
  - Određeni i neodređeni.

- Šta je rešenje neodređenog integrala?
  - Funkcija.

  Primer: $\int dx = x = f(x)$, rešenje ovog integrala je linearna funkcija.

- Šta je rešenje određenog integrala?
  - Brojna vrednost.

$$\int_A^B dx = x \Big|_A^B = B - A = C$$

- Za integrale važi:

  1) $\int_A^B \; = -\int_B^A$

  2) $\int_A^B \; + \int_B^C \; = \int_A^C$

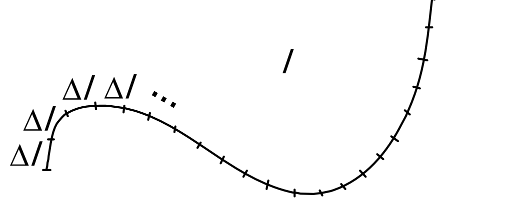
- U matematici postoji nekoliko osnovnih integrala čija se rešenja uče tablično. Mi ćemo koristiti samo dva:

$$\int dx = x$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

- Pojam određenog integrala se može razumeti na primeru linijskog i površinskog integrala.
  - *Linijski integral.* Posmatrajmo liniju čiju dužinu želimo da odredimo. Podelimo liniju na male (elementarne) delove dužine Δl (neka ih ima n). Dužina linije jednaka je zbiru dužina svih malih delova Δl:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \; .$$



Ako podelimo liniju na jako veliki broj ovih delova ($n \to \infty$) dužina ovih delova postaje jako mala ($\Delta l \to 0$) i pišemo je kao *dl*, a sumu pišemo kao **linijski integral** (čija je podintegralna funkcija jednaka 1):

$$l = \sum_{\substack{\Delta l \to 0 \\ n \to \infty}} \Delta l = \int_l dl \,,$$

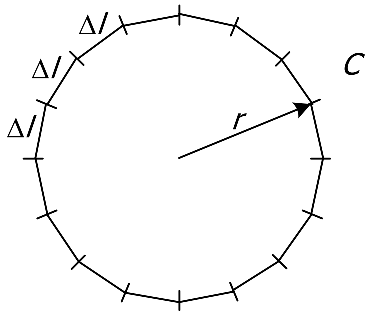
gde je ispod integrala označeno da se sabiranje vrši po liniji *l*.

– Ako je linija zatvorena obično je obeležavamo sa *C* (zatvorena kontura), a oznaka linijskog integrala je $\oint$, i označava integraljenje (sabiranje) po zatvorenoj konturi:

$$l = \oint_C dl \,,$$

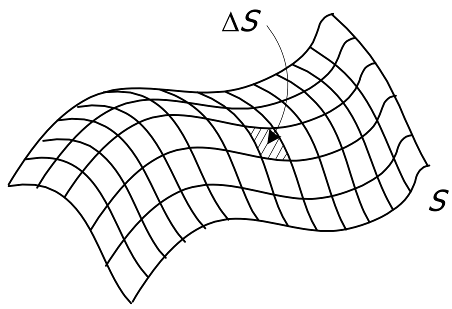
Primer: Ako je zatvorena kontura *C* krug poluprečnika *r* tada je linijski integral po konturi *C* jednak obimu kruga:

$$l = \oint_C dl = 2\pi r \,.$$



– *Površinski integral.* Posmatrajmo površ čiju površinu želimo da odredimo. Podelimo površ na male delove (elementarne) površine ΔS (neka ih ima *n*). Ukupna površina *S* jednaka je zbiru površina svih malih delova ΔS:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \,.$$



Ako podelimo površ na jako veliki broj ovih delova ($n \to \infty$), površina ovih delova postaje jako mala ($\Delta S \to 0$) i pišemo je kao *dS*, a sumu pišemo kao **površinski integral** (čija je podintegralna funkcija jednaka 1):

$$S = \sum_{\substack{\Delta S \to 0 \\ n \to \infty}} \Delta S = \int_S dS \,,$$

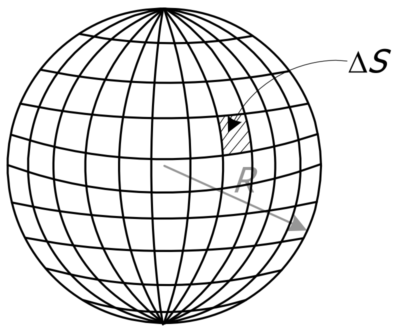
gde je ispod integrala označeno da se sabiranje vrši po površi *S*.

– Ako je površ zatvorena oznaka površinskog integrala je $\oint$, i označava integraljenje (sabiranje) po zatvorenoj površini:

$$S = \oint_S dS \,,$$

Primer: Ako je zatvorena površ S sfera poluprečnika R tada je površinski integral po sferi S jednak površini sfere:

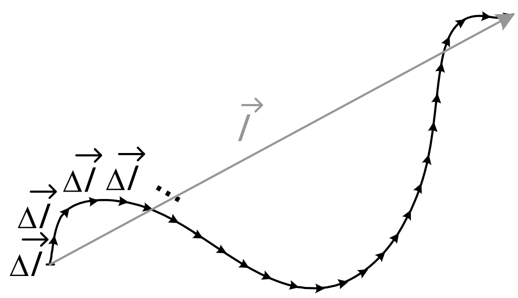
$$S = \oint_S dS = 4\pi r^2 .$$



- Linijski i površinski integral mogu biti vektorski:

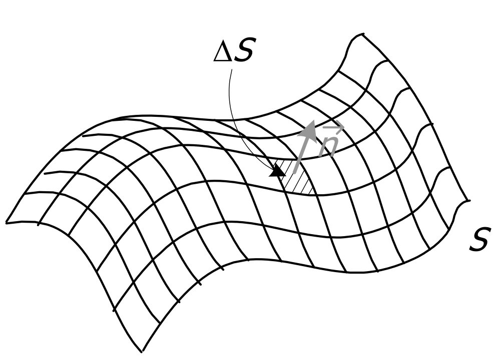
– Svakom elementarnom delu dl dodeljuje se pravac koji se poklapa sa pravcem tangente na liniju l u posmatranoj tački, a smer po liniji se usvaja. Integral tada predstavlja vektorski zbir vektora $d\vec{l}$:

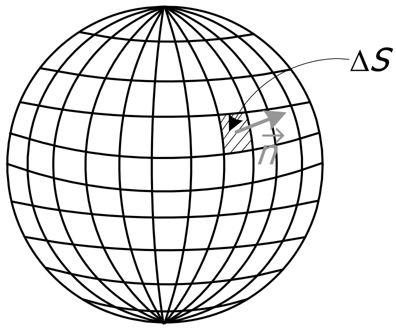
$$\vec{l} = \int_l d\vec{l}$$



– Svakom elementarnom delu dS dodeljuje se pravac koji se poklapa sa pravcem normale na površinu S u posmatranoj tački, a smer se usvaja, pa se može napisati da je $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$. Ako je S zatvorena površina usvojen je dogovor da je normala uvek usmerena iz površine. Integral tada predstavlja vektorski zbir vektora $d\vec{S}$:

$$\int_S d\vec{S}$$





- Linijski i površinski integral mogu imati i podintegralne funkcije različite od jedinice.
Na primer: $\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$, $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$.

LITERATURA

1. Surutka, J. *Osnovi elektrotehnike*, Akademska misao, Beograd, 2002.

2. Popović, B. *Osnovi elektrotehnike I i II*, Akademska misao, Beograd, 2004.

3. Božilović, H., Spasojević, Ž., Božilović, G. *Zbirka zadataka iz osnova elektrotehnike*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

4. Popović, B., Đorđević, A. *Osnovi elektrotehnike III*, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.

5. Gavrilović, A. *Osnovi elektrotehnike, zbirka rešenih zadataka*, Viša elektrotehnička škola, Beograd, 2003.