

Ана Савић

Светлана Штрбац – Савић

Ивана Стефановић

ИНЖЕЊЕРСКА МАТЕМАТИКА
УЦБЕНИК СА ЗБИРКОМ РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

-ПРВО ИЗДАЊЕ-



Висока школа електротехнике и
рачунарства струковних студија

Београд, 2016.

Др Ана Савић
Др Светлана Штрбац – Савић
Инж Ивана Стефановић

Инжењерска математика уџбеник са збирком решених задатака

Рецензенти: др Слободан Обрадовић, професор, Висока школа електротехнике и рачунарства струковних студија
проф. др Хранислав Милошевић, Природно математички факултет
др Љубица Диковић, професор, Висока пословно-техничка школа струковних студија

Насловна страна: Владимир Церић

Сва права су задржана. Није дозвољено да ниједан део овог уџбеника буде снимљен, емитован, или репродукован на било који начин, укључујући, али не и ограничавајући се на фотокопирање, фотографију, магнетни или било који други вид записа, без претходне писмене дозволе издавача.

Издавач

Висока школа електротехнике и рачунарства струковних студија,

Војводе Степе 283, Београд

Штампарија: Развојно – истраживачки центар графичког инжењерства ТМФ, Београд

Тираж: 50 примерака

CIP - Каталогизација у публикацији -
Народна библиотека Србије, Београд
51(075.8)
САВИЋ, Ана, 1974-
Инжењерска математика: уџбеник са збирком решених задатака / Ана Савић, Светлана Штрбац-Савић, Ивана Стефановић. - 1. изд. - Београд: Висока школа електротехнике и рачунарства струковних студија, 2016
(Београд: Развојно-истраживачки центар графичког инжењерства ТМФ). - 280 стр.: граф. прикази, табеле; 25 cm
Тираж 50. - Библиографија: стр. [281].
ISBN 978-86-7982-251-2
1. Штрбац-Савић, Светлана [аутор], 1972- 2. Стефановић, Ивана, 1988- [аутор]
а) Математика
COBISS.SR-ID 226401292

Наставно веће Високе школе електротехнике и рачунарства, на својој седници одржаној 22.10.2015. године одобрило је издавање и коришћење овог уџбеника у настави.

“Ми никада не постајемо математичари, чак и ако научимо напамет све туђе доказе, ако наш ум није оспособљен да самостално решава постављене проблеме”

Декарт

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник са збирком задатака написан је за студенте прве године Високе школе електротехнике и рачунарства у Београду који слушају једносеместрални курс Инжењерска математика. Прилагођен је плану и програму овог предмета. Подељен је у шест глава. Дефинисани су исходи учења на почетку сваке главе.

Уџбеник обједињује теорију и задатке, што је стандард у савременој литератури. Идеја аутора је била да се изложи кратак преглед теорије, односно најважније дефиниције и теореме које су неопходне студентима технике. Докази су лишени често оптерећујућих детаља, са жељом да овај начин излагања буде прихватљив за што шири круг читалаца. Осим теорије уџбеник садржи велики број решених задатака који помажу да се изложена теорија лакше савлада.

Аутори позивају све читаоце да дају своје сугестије, да би наредна издања била још квалитетнија и садржајнија.

У Београду
2016.

АУТОРИ

САДРЖАЈ

1. УВОД.....1

- 1.1. **Језик математике**
- 1.2. **Основни појмови математичке логике**
- 1.3. **Основни појмови теорије скупова**
- 1.4. **Елементарне функције**
- 1.5. **Појам и особине логаритама**
- 1.6. **Тригонометријске функције**
- 1.7. **Аритметички и геометријски низ**
- 1.8. **Аналитичка геометрија**

2. ТЕОРИЈА БРОЈЕВА.....25

- 2.1. Реални бројеви**
- Природни бројеви; Цели бројеви;
Рационални бројеви; Ирационални
бројеви; Реални бројеви; Биномна
формула
- 2.3. Комплексни бројеви**
- Алгебарски облик комплексног броја;
Тригонометријски облик
комплексног броја;
Експоненцијални облик комплексног
броја
- 2.3. Задаци**

3. ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА.....55

- ### 3.1. Матрице
- #### Операције са матрицама

- 3.2. Детерминанте**
Израчунавање детерминанти; Особине детерминанти
- 3.3. Ранг матрице**
- 3.4. Инверзна матрица**
- 3.5. Задаци**
- 3.6. Системи линеарних једначина**
Гаусова метода; Крамерова метода;
Кронекер Капелијева теорема;
Хомогени систем линеарних једначина;
Матрична метода
- 3.7. Задаци**

4. ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ.....95

- 4.1. Функције једне променљиве**
Појам функције; Реалне функције једне променљиве; Инверзна функција;
Слагање функција; Особине функција
- 4.2. Задаци**
- 4.3. Низови**
Гранична вредност низа; Особине конвергентних низова; Операције са граничним вредностима низова; Тачка нагомилавања низа; Број e
- 4.4. Задаци**
- 4.5. Гранична вредност функције**
Особине граничних вредности функција; Непрекидност функције;
Асимптоте функције
- 4.6. Задаци**

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН.....133

5.1. Извод функције

Дефиниција извода функције; Основна правила диференцирања; Извод инверзне функције; Извод сложене функције; Логаритамски извод; Извод имплицитне функције; Геометријско тумачење извода ; Диференцијал функције; Изводи и диференцијали вишег реда

5.2. Задачи

5.3. Тејлорова формула

5.4. Задачи

5.5. Основне теореме диференцијалног рачуна

Ролова теорема; Кошијева теорема; Лагранжова теорема; Лопиталова теорема

5.6. Задачи

5.7. Испитивање функција помоћу извода

Монотоност функције ; Екстремне вредности функције; Одређивање екстрема функције помоћу другог извода; Конвексност и конкавност функције; Превојне тачке функције; Испитивање тока функције

5.8. Задачи

6. ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН.....207

6.1. Неодређени интеграл

Дефиниција примитивне функције; Особине неодређеног интеграла; Основна правила интеграције; Методе интеграције

6.2. Задачи

6.3. Одређени интеграл

Појам одређеног интеграла; Особине одређеног интеграла

6.4. Веза одређеног и неодређеног интеграла

Методе интеграције

6.5. Несвојствени интеграли

6.6. Задаци

6.7. Примене одређеног интеграла

Израчунавање површина равних фигура;
Израчунавање запремина обртних тела;
Дужина лука криве

6.8. Задаци

1. ГЛАВА

УВОД

1. ЈЕЗИК МАТЕМАТИКЕ
2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ
МАТЕМАТИЧКЕ
ЛОГИКЕ
3. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ
ТЕОРИЈЕ СКУПОВА
4. ЕЛЕМЕНТАРНЕ
ФУНКЦИЈЕ

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када савладате ово поглавље требало би да знате:

1. шта сачињава језик математике,
2. дефиницију исказа,
3. дефиниције логичких операција,
4. приоритете логичких операција,
5. шта су таутологије, а шта контрадикције,
6. основне логичке законе,
7. дефиниције основних скуповних релација и операција,
8. особине и графички приказ елементарних функција.

ЈЕЗИК МАТЕМАТИКЕ

Током свог развоја математика је развила специфичан језик који се разликује од обичног, говорног језика. Математички језик је настајао постепено, са циљем да одговори потребама математичког расуђивања и самим тиме је прецизнији и краћи од говорног језика. Како су у његовом стварању учествовали математичари широм света добијен је језик који је међународни.

Математички језик и математички модели расуђивања нашли су своје примене у природним и техничким наукама. У новије време математика се примењује и у наукама као што су психологија, социологија, лингвистика и многим другим.

- Језик математике чине:

Константе: $2, 3, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{2}, \dots$;

Променљиве: $x, y, a, b, \alpha, \beta, \dots$;

Операцијски знаци:

алгебарске операције: $+, -, \cdot, /$, **логичке операције:** $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$, **скуповне операције:** $\cup, \cap, \setminus, \dots$;

Релацијски знаци: $\rho: =, \leq, \geq, \perp, \parallel, \dots$;

Специјални знаци: $(,), [,], \{, \}, \exists, \forall, !, \dots$

- Коришћењем ових симбола дефинишемо математичке *изразе* и *формуле*.
- *Изрази* садрже константе, променљиве и операцијске знаке.

Пример:

$x + 2$ је израз. Изрази у обичном језику су речи.

- *Формуле* садрже изразе и релацијске знаке.

Пример:

$x + 2 = 5$ је формула. Формуле су у обичном језику су реченице.

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

Оснивач логики је грчки филозоф Аристотел(384-322 п.н.е.). Логика је наука о закључивању, и као таква користи се у најразличитијим областима, а поготово у математици. На основу основних претпоставки, које називамо аксиомама, одређује се који су искази тачни, а који не. У информатици логика се користи код писања рачунарских програма и доказивања да они раде тачно оно зашта су пројектовани.

Творци математичке логики су Георге Бооле (1815-1864) и Аугустус де Морган (1801-1864).

Математичка логика је савремена математичка дисциплина настала у другој половини 19. века. До скора је сматрана за апстрактну дисциплину, без практичне примене. Данас се без ње не могу решити веома практични проблеми везани за конструкције електронских рачунара и других аутомата. Уз апстрактну алгебру она је данас веза између човека и електронских рачунара. Применом математичке логики може се постићи материјализација најапстрактнијих математичких изтраживања.

- Афирмативна реченица која има истинитосну вредност назива се **исказ**.
- Искази се обележавају малим словима $p, q, r, \dots$ која се називају **исказна слова**.

- **Истинитосна вредност** исказа је $\tau(p) = \begin{cases} 1, & p \text{ је тачан исказ} \\ 0, & p \text{ је нетачан исказ} \end{cases}$

Уместо 1 и 0, користе се и ознаке Т и $\perp$. Симболе 1 и 0 не треба схватати као бројеве 1 и 0 у уобичајеном смислу.

Пример:

Реченица $p: 2-1=1$ је исказ и има тачну истинитосну вредност, $\tau(p)=1$.

Пример:

Реченица $2-1=-1$ је исказ и има нетачну истинитосну вредност, $\tau(p)=0$.

Пример:

Реченица $x^2=1$ није исказ јер не можемо да одредимо њену истинитосну вредност. За $x=\pm 1$ формула је тачна, а за све остале вредности је нетачна.

ОСНОВНЕ ЛОГИЧКЕ ОПЕРАЦИЈЕ

операција	симбол	исказ
<i>Конјункција (и)</i>	$\wedge$	$p \wedge q$
<i>Дисјункција (или)</i>	$\vee$	$p \vee q$
<i>Импликација (ако онда)</i>	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$
<i>Еквиваленција (ако и само ако)</i>	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$
<i>Негација (не)</i>	$\neg$	$p \neg q$

ИСТИНИТОСНА ВРЕДНОСТ ЛОГИЧКИХ ОПЕРАЦИЈА

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$	$\tau(\neg p)$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

- **Формуле** су сложени изрази кога чине исказна слова и логичке операције.

Пример:

Формуле су $(p \Rightarrow q) \wedge p$, $p \vee q \vee r$, $\neg p(p \Leftrightarrow q)$.

Пример:

Дати су искази

$$p \equiv (4x^4y^3)^3 : (2x^2y)^5 = 2x^2y^3, q \equiv (3x^4y^2)^2 : (3x^6y)^2 = 3xy^4,$$

$$r \equiv (2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2 \text{ и } s \equiv (x - 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Одредити њихову тачност и на основу тога одредити истинитосну вредност следећих изказа:

$$(p \wedge q) \vee r, (p \vee q) \vee (r \wedge s), (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s), (p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s).$$

Како је

$$\tau(p) = 0, \tau(q) = 0, \tau(r) = 1, \tau(s) = 0, \text{ добијамо да је}$$

$$\tau((p \wedge q) \vee r) = 1,$$

$$\tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) = 0,$$

$$\tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) = 1,$$

$$\tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) = 0.$$

- Исказна формула која је увек тачна назива се **таутологија**. Таутологије су математички закони.

- Важније таутологије:

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ ($p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$) **закон комутације**;

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ **закон асоцијације**;

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

закон дистрибуције;

$p \wedge p \Leftrightarrow p$, $p \vee p \Leftrightarrow p$

закон идемпотенције;

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

закон двоструке негације;

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ **закон апсорпције**;

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ **Де Морганови закони**.

С.Е. Шанон је 1938. године открио везу између таблица истинитости и електричних кола.

- Исказне формуле у којима се појављују само операције $\wedge, \vee, \neg$, при чему $\neg$ делује само на исказна слова, имају једну занимљиву интерпретацију која се користи у техници, у пројектовању дигиталних кола и назива **прекидачка алгебра**.
- Исказна слова се третирају као **нормално отворени прекидачи**, а њихова негација као **нормално затворени прекидачи**. Ако исказно слово има вредност $p=1$ сматра се да је прекидач затворен, тј. да проводи струју, а за $p=0$ је отворен.

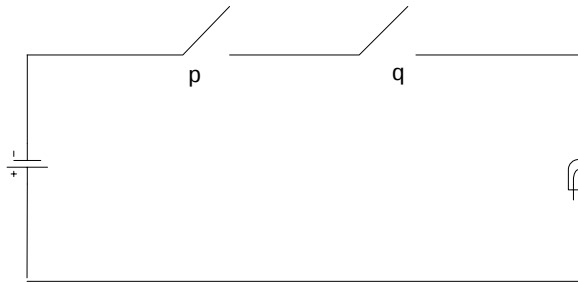


Формула се третира као мрежа са два краја састављена од прекидача који су повезани паралелно или серијски. Таутологијама одговарају мреже које увек проводе струју.

Пример:

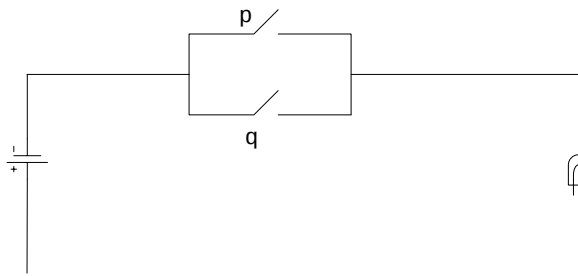
Посматрајмо прекидачко коло које садржи прекидач и сијалицу. Вредност 1 додељујемо прекидачима p и q када су затворени, тј ако кроз њих протиче струја. У супротном додељујемо им вредност 0. Када су прекидачи редно везани, сијалица ће светлети и коло ће имати вредност 1

само ако су оба прекидача p и q затворена. Према томе, ово коло ће одговарати исказу p и q , односно $p \wedge q$.



Пример:

Посматрајмо прекидачко коло у коме су прекидачи p и q везани паралелно. Када су прекидачи паралелно везани, сијалица ће светлети ако је $p=1$ или $q=1$ и коло ће имати вредност 1 ако је бар један прекидача p и q затворен. Према томе, ово коло ће одговарати исказу p или q , односно $p \vee q$.



ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА

Одлучујући корак у систематизацији математичких сазнања представља теорија скупова, тачније теорија бесконачних скупова чији је творац Кантор (1845-1918).

- **Скуп** је основни појам који се не дефинише, већ се узима као основни.
- Сваки скуп састоји се од различитих објеката које ћемо називати његовим *елементима*.

- Скупови се означавају великим словима $A, B, C, \dots$, а елементи малим словима $a, b, c, \dots$ и користимо запис $A = \{a, b, c, \dots\}$.
- Неки елемент a може припадати датом скупу A , што се означава са $a \in A$, или не припадати истом скупу, што се означава са $a \notin A$.
- Скуп који нема елемената назива се **празан скуп** и обележава са $\emptyset$.
- Скуп A је **подскуп** скупа B и пишемо $A \subset B$ ако сваки елемент скупа A припада истовремено и скупу B .

$$A \subset B \Leftrightarrow \{\forall x | x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$

- Два скупа A и B су **једнака** ако сваки елемент скупа A припада и скупу B и ако сваки елемент скупа B истовремено припада и скупу A .

$$A = B \Leftrightarrow \{\forall x | x \in A \Leftrightarrow x \in B\}.$$

- **Партитивни** скуп $P(S)$ датог скупа S је скуп $P(S) = \{X; X \subseteq S\}$.

Пример:

$$S = \{a, b, c\}, P(S) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}.$$

ОПЕРАЦИЈЕ СА СКУПОВИМА

- **Унија** два скупа A и B је скуп $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Пример:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 6, 7\}; A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7\}.$$

- У општем случају, када имамо коначно много скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$, њихова унија је:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

- **Пресек** скупова A и B је скуп $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Пример:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 6, 7\}; A \cap B = \{2\}.$$

- Ако је пресек два скупа A и B празан, $A \cap B = \emptyset$, тада кажемо да су та два скупа **дисјунктна**.
- Ако је дато коначно много скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ њихов пресек је:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

- **Разлика** скупова A и B је skup $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

Пример:

На скупу реалних бројева дати су интервали $A = (1, 3)$ и $B = (2, 5)$.

Према дефиницији разлике скупова имамо да је $A \setminus B = (1, 2]$, а $B \setminus A = [3, 5)$.

- **Симетрична разлика скупова** A и B је унија скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$, тј.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- **Комплемент** скупа A у односу на skup B (допуна скупа A до скупа B) где је $A \subset B$ је skup $B \setminus A = C_B A$.
- Пар елемената (a, b) називамо **уређеним паром** (или уређеном двојком) ако је тачно одређено који је елемент на првом, а који на другом месту.
- Уређени парови (a, b) и (c, d) су једнаки ако и само ако је $a = c$ и $b = d$.
- **Декартовим производом** скупова A и B назива се skup

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Пример:

Дати су скупови $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$.

$$A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\},$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

Очигледно је да $A \times B \neq B \times A$, што значи да за Декартов производ скупова не важи закон комутације.

- Декартов производ $A \times A$ се означава са A^2 .
- Декартов производ $R \times R = R^2$ представља реалну равну, тј.

$$R \times R = \{(x, y) | x \in R \wedge y \in R\}.$$

Пример:

Дат је скуп $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Одредити скупове $A = \{x | x \geq 3\}$ и $B = \{x | x < 8\}$, чији су елементи елементи скупа P , а затим одредити скупове $A \cap B, A \cup B, A / B$.

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A / B = \{8, 9\}.$$

ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

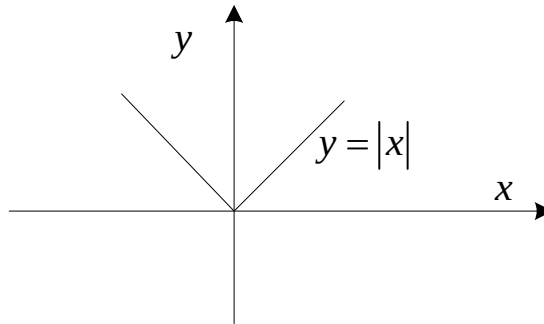
- **Степена функција** $y = x^n$, $n \in R$, $x \in (0, +\infty)$.
- **Експоненцијална функција** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$.
- **Логаритамска функција** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- **Тригонометријске функције:** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
- **Инверзне тригонометријске функције:**
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.
- **Елементарним функцијама** називају се функције које се могу задати помоћу основних елементарних функција и константи помоћу коначно много операција сабирања, одузимања, множења, дељења и композиције функција.

Поновићемо неке од најважнијих основних функција са којима ћемо се сретати у раду.

- **Апсолутна вредност:**

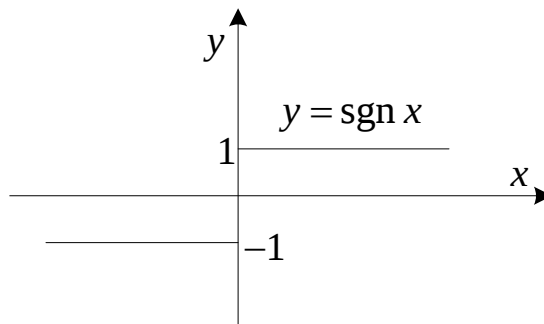
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Функција је дефинисана за $x \in \mathbb{R}$ и $f(x) \geq 0$.



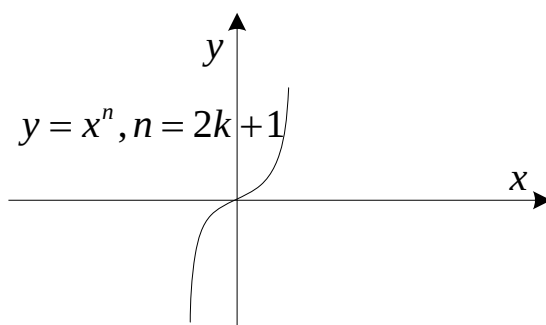
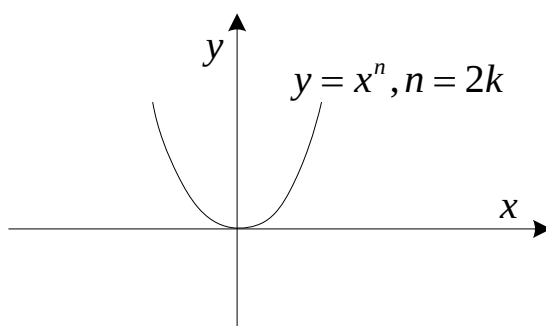
▪ **Функција знака:**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



▪ **Степена функција:** $y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$.

Ако је $n \in \mathbb{N}$ функција представља степене реалног броја $y = x^n$ и та функција ће за $n = 2k$ паран број бити парна и ограничена, а за $n = 2k + 1$ непаран број бити непарна и неограничена.



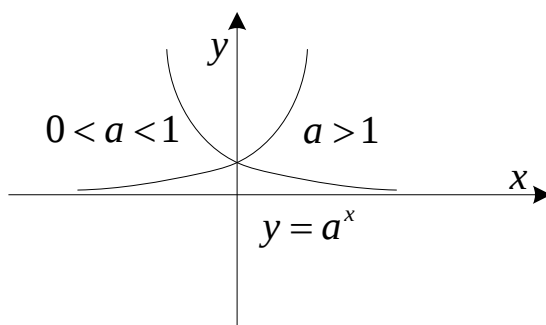
Ако је степен облика $n = \frac{1}{k}$, функција представља корену функцију.

▪ **Експоненцијална функција:** $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.

Домен функције је скуп свих реалних бројева R , а кодомен $(0, \infty)$.

Функција нема нула јер је $a^x \neq 0$ и на целом домену је позитивна, тј. $y > 0$.

Уколико је $0 < a < 1$ функција стално опада, а када је $a > 1$ функција стално расте и самим тим нема екстрема.



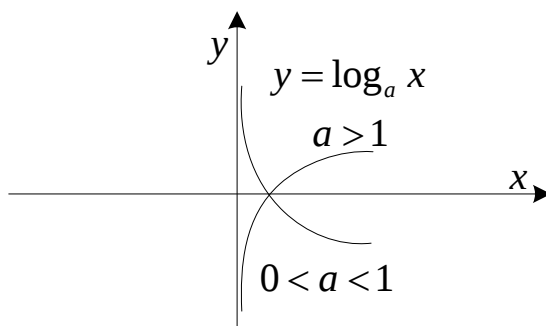
ПОЈАМ И ОСОБИНЕ ЛОГАРИТАМА

- Дефиниција логаритма $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ ако је $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
- $a^{\log_a b} = b$ за $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$.
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
- $\log_a x^s = s \log_a x$; $s \in \mathbb{R}$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
- $\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$, $\log_a x = \log_{a^s} x^s$.
- $\log_{10} x = \log x$ (декадни логаритам).
- $\log_e x = \ln x$, $e \approx 2,718$ (природни логаритам).

- *Логаритамска функција:* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

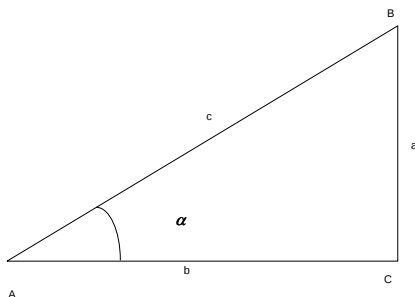
Домен функције је $(0, \infty)$, а кодомен је $\mathbb{R}$.

Функција има нулу за $x=1$ јер је $\log_a 1 = 0$. Уколико је $0 < a < 1$ функција стално опада, а када је $a > 1$ функција стално орасте и самим тим нема екстрема.



ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

- Основне тригонометријске функције оштрог угла у правоуглом троуглу су *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс*, које се дефинишу:



$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin \alpha &= \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \\ \bullet \quad \sin \beta &= \frac{b}{c}, \cos \beta = \frac{a}{c}, \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

МЕРЕЊЕ УГЛОВА РАДИЈАНОМ

- Радијан** је централни угао чији је кружни лук једнак полупречнику круга
- Пун угао износи 2π радијана
- $1^\circ = \frac{\pi}{180} \operatorname{rad} \approx 0,017$ $1 \operatorname{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕМЕНТНИХ УГЛОВА

- Ако су углови **комплементни**, $\alpha + \beta = 90^\circ$, важе следећа правила:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos(90^\circ - \alpha), & \cos \alpha &= \sin(90^\circ - \alpha), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), & \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ УГЛОВА ЗА СПЕЦИЈАЛНЕ УГЛОВЕ

α степени	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°
α радијани	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Напомена: $\pm\infty$ и $\mp\infty$ су граничне вредности функција као на пример:

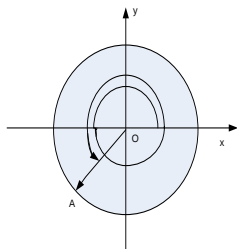
$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \alpha = \pm\infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \alpha = \mp\infty.$$

ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ИДЕНТИТЕТИ

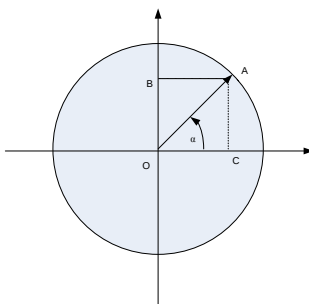
$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \\ \blacksquare \quad & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \end{aligned}$$

ДЕФИНИЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА МА КОГ УГЛА

- Јединични круг са центром у координатном почетку назива се *тригонометријски круг*.
- *Уопштени угао* $\varphi = \alpha + 2k\pi, \alpha \in [0, 2\pi]$ је угао чији је почетни крак позитивни део x – осе, а крајњи крак оријентисана дуж OA .

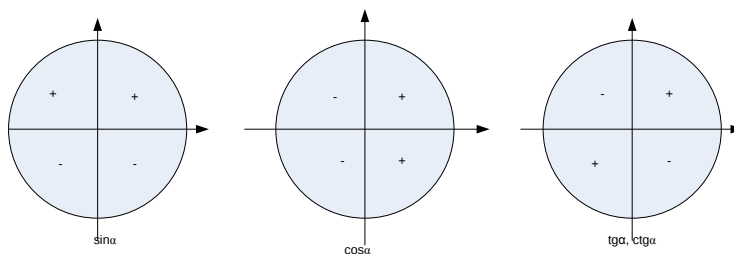


- Нека је α произвољан угао. **Тригонометријске функције угла α** , тј. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ дефинишу:



Ордината тачке A , дуж OB представља **синус** угла α , а апсциса, дуж OC представља **косинус** угла α .

Знак тригонометријских функција по квадрантима:



ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ НЕГАТИВНОГ УГЛА

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$,
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.
- $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ су **нечетне** функције.
- $\cos \alpha$ је **четна** функција.

ПЕРИОДИЧНОСТ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \quad k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0, 2\pi],$
- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha,$
- $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha,$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha.$
- Функције $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ су *периодичне* са *основном периодом* $T = 2\pi$, а $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ са основном периодом $T = \pi$.

СВОЂЕЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА МА КОГ УГЛА НА ОШТАР УГАО

- Ако је $\alpha = \pi \pm 2k\pi, \alpha = 2\pi \pm 2k\pi$ тригонометријска функција *се не мења*, а *знак* функције одређује се помоћу тригонометријског круга.
- Ако је $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \alpha = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$ тригонометријска функција *се мења* у своју кофункцију, а *знак* функције одређује се помоћу тригонометријског круга.

АДИЦИОНЕ ТЕОРЕМЕ

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha,$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}.$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ДВОСТРУКОГ УГЛА

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ПОЛОВИНЕ УГЛА

- $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$,
- $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$.

ТРАНСФОРМАЦИЈА ЗБИРА И РАЗЛИКЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСИХ ФУНКЦИЈА У ПРОИЗВОД И ОБРНУТО

- $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$,
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$,
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$,
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$,
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ КАО ФУНКЦИЈЕ ОД

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

- $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$

- Тригонометријске функције: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Домен функција $y = \sin x$ и $y = \cos x$ је скуп свих реалних бројева R , а кодомен $[-1, 1]$. Домен функција $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ је $x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in R$

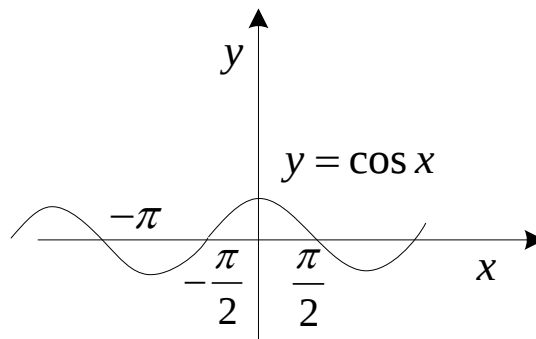
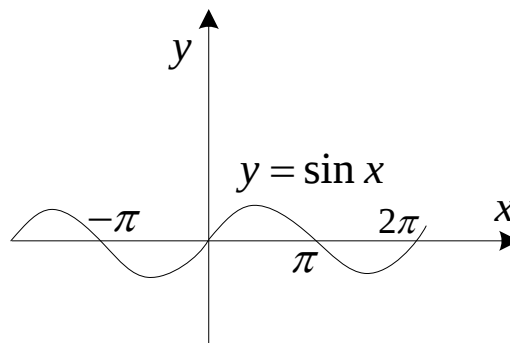
односно, $x \in R, x \neq k\pi$, а кодомен је скуп свих реалних бројева R .

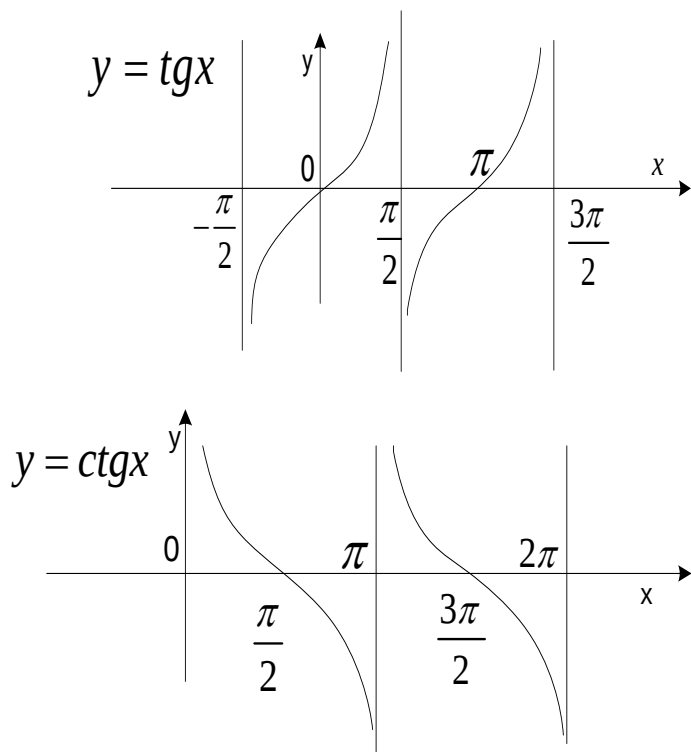
Функције $y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ су непарне, а $y = \cos x$ парна.

Функције $y = \sin x, y = \cos x$ су периодичне са периодом $2k\pi, k \in Z$, а $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ са периодом π .

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \cos(x + 2k\pi) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x.$$





■ **Инверзне тригонометријске функције:**

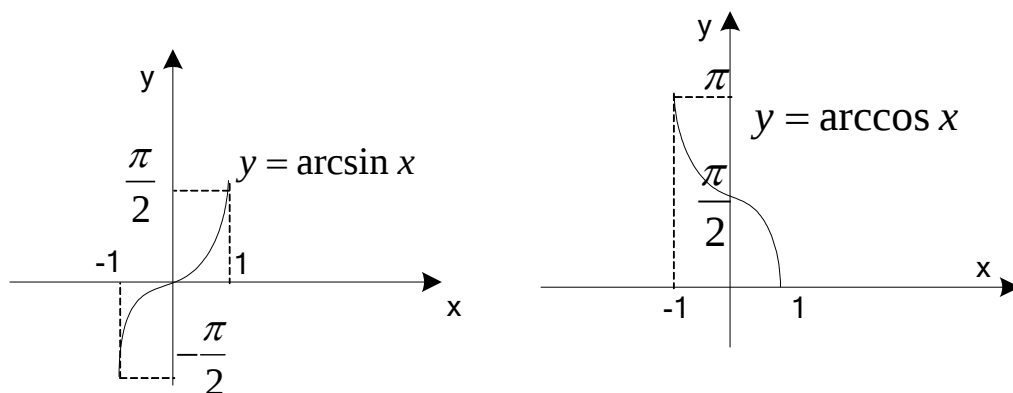
$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

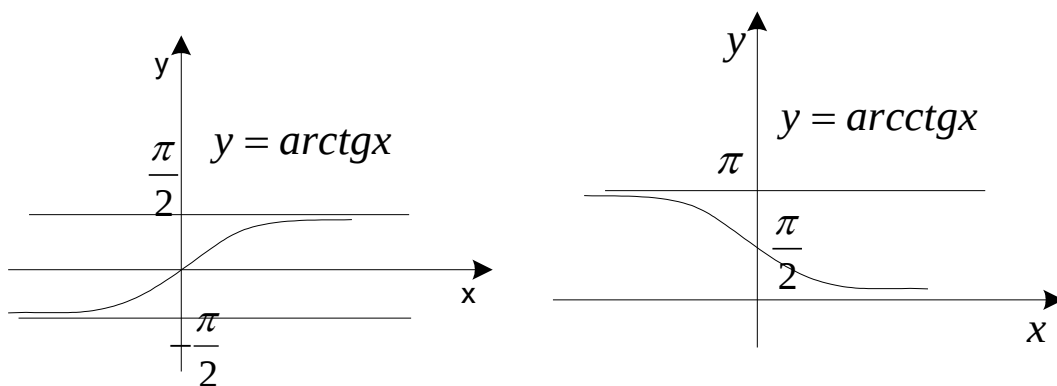
За функцију $y = \arcsin x$ домен је $x \in [-1, 1]$, а кодомен је $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

за $y = \arccos x$ домен је $x \in [-1, 1]$, а кодомен је $y \in [0, \pi]$;

за $y = \operatorname{arctg} x$ домен је $x \in (-\infty, \infty)$, а кодомен је $y \in (0, \pi)$;

за $y = \operatorname{arcctg} x$ домен је $x \in (-\infty, \infty)$, а кодомен је $y \in (0, \pi)$.





АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

- **Аритметички низ** је низ бројева таквих да је разлика свака два узастопна члана константа d , коју називамо **диференција** низа.

- **Општи члан низа:** $a_n = a_1 + (n-1)d$, $d \neq 0$.

- **Збир првих n чланова низа:**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d).$$

- Сваки члан низа је **аритметичка средина** симетричних чланова.

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

- **Геометријски низ** је низ бројева таквих да је количник свака два узастопна члана константа q , коју називамо **количник** низа.

- **Општи члан низа:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $q \neq 1$.

- **Збир првих n чланова низа:**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

- Сваки члан низа је **геометријска средина** симетричних чланова.

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}.$$

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

- **Дужина дужи** AB где је $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

- Координате тачке $S(x_s, y_s)$, **средишта дужи** AB :

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2}, y_s = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- **Општи (имплицитни) облик** једначине праве је: $ax + by + c = 0$.
- **Експлицитни облик** једначине праве је: $y = kx + n$; где је $k = \operatorname{tg} \alpha$ **коефицијент правца** праве, а n је одсечак на y оси.
- **Једначина праве кроз једну тачку** $A(x_A, y_A)$ је: $y - y_A = k(x - x_A)$.
- **Једначина праве кроз две тачке** $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ је:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A); \text{ где је } k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ коефицијент правца праве.}$$

- **Угао између правих** $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ је: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.
- $k_1 = k_2$ је **услов паралелности** правих $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$.
- $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ је **услов нормалности** правих $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$.

- **Једначина круга** са центром у тачки $C(p, q)$, полупречника r је:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0, \quad p = -\frac{d}{2}, \quad q = -\frac{e}{2}, \quad r = \sqrt{p^2 + q^2 - f}.$$

- **Једначина елипсе:** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- **Једначина хиперболе:** $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- **Једначина параболе:** $y^2 = 2px$.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Исказ

Конјункција

Дисјункција

Импликација

Еквиваленција

Негација

Таутологија

Контрадикција

Скуп

Унија

Пресек

Декартов производ

Елементарне функције

2. ГЛАВА

ТЕОРИЈА БРОЈЕВА

1. РЕАЛНИ БРОЈЕВИ
2. КОМПЛЕКСНИ
БРОЈЕВИ

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. природним бројевима,
2. целим бројевима,
3. рационалним бројевима,
4. ирационалним бројевима,
5. реалним бројевима,
6. комплексним бројевима.

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

Историјски развитак појма броја је у непосредној вези са односима који постоје између предмета и појава реалног света. Научна еволуција појма броја може се пратити од староегипатске и вавилонске математике, преко старогрчке, затим индуске, арапске и европске математике средњег века када се без математички прецизних теорија рачунало са реалним бројевима, па све до данашњих дана.

Настанак сваке нове врста бројева био је праћен неповерењем и отпором. Дуго су негативни бројеви сматрани апсурдним бројевима, мада се они појвљују у записима старих Кинеза, Индуса и Арапа, а корени негативних су сматрани лажним.

Све до 19. века теорија бројева се развијала углавном због практичних потреба, да би током 19. и 20. века дошло до прецизног заснивања теорије бројева.

Број је основни појам који се не дефинише већ се интуитивно схвата.

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

- За сваки број $n \in N$ постоји број $n+1 \in N$. Бројеви n и $n+1$ су *узастопни* или *сукцесивни* бројеви.
- Скуп природних бројева N је *ограничен* с доње стране, а *није ограничен* с горње стране, тј. постоји најмањи природни број 1, а не постоји највећи.
- Природан број чији су једини чиниоци он сам и број 1, називамо *простим бројем*, на пример 2, 3, 5, 7, 11, *Узајамно простим* бројевима називамо два природна броја ако им је једини заједнички чинилац број 1.
- Природни број је *паран* ако му је бар један прост чинилац број 2. Ако то није случај број је *непаран*. Парне бројеве обележавамо са $2k$, а непарне са $2k+1$ или $2k-1$, где је $k \in N$.

- Скуп природних бројева је **затворен** у односу на операције **сабирања** и **множења**, тј. резултат сабирања и множења два природна броја увек је природан број.

- За операције сабирања и множења природних бројева важе закони:

$$a + b = b + a, ab = ba \quad \text{комулације,}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc) \quad \text{асоцијације,}$$

$$(a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac \quad \text{дистрибуције.}$$

- Степен** природног броја дефинишемо као $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ пута}}$

и важе правила $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ

Индукција је метод закључивања којим се из ставова који се односе на одређен број појединачних случајева изводи став који се односи на све случајеве те врсте.

Овај метод закључивања често се користи у природним наукама, где се посматрањем или експериментом долази до одређених сазнања о некој појави, па се на основу ових појединачних случајева изводи општи став. Таква индукција се назива **непотпуна** или **емпиријска индукција**. Овакав начин закључивања није добар, јер се често на основу одређеног броја тачних појединачних случајева не добија тачан закључак у општем случају.

Математика је више **дедуктивна** наука, тј. метод закључивања је од општег ка посебном. Међутим, многе математичке проблеме могуће је проучавати **индуктивном методом**. Принцип математичке индукције искључује могућност грешке јер се односи на све могуће случајеве.

- Нека је $T(n)$ теорема чија формулација садржи природни број n .
 - Ако је теорема $T(n)$ тачна за $n = 1$,
 - под претпоставком да је тачна за било који природни број $n = k$,
 - и докажемо да важи за $n = k + 1$,
 онда је теорема $T(n)$ тачна за све природне бројеве.

Пример:

Доказати да важи једнакост: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. За $n=1$ имамо $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, једнакост је тачна.
2. За $n=k$ имамо $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Претпостављамо да је једнакост тачна.
3. За $n=k+1$ је $1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Треба да докажемо, под претпоставком 2, да је једнакост тачна.

Ако обема страна једнакости 2 додамо сабирак $k+1$ добијамо

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\dots+k+(k+1) = (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

чиме смо доказали да је под претпоставком 2, једнакост тачна и за $n=k+1$, одакле закључујемо да је формула тачна за све природне бројеве.

Пример:

Доказати Бернулијеву неједнакост:

$$(1+h)^n > 1+nh, \quad h \neq 1, \quad h > 0, \quad n \geq 2$$

1. За $n=2$ имамо $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$, неједнакост је тачна.
2. За $n=k$ имамо $(1+h)^k > 1+kh$, претпостављамо да је неједнакост тачна.
3. За $n=k+1$ је $(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$. Треба да докажемо, под претпоставком 2, да је једнакост тачна.

Користећи неједнакости 2 добијамо:

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k (1+h) > (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h,$$

чиме смо доказали да је једнакост тачна и за $n=k+1$, одакле закључујемо да је формула тачна за све природне бројеве.

ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Операција *одузимања* се у скупу природних бројева не може увек дефинисати. Разлика два природна броја не мора бити природан број. Та чињеница доводи до проширења скупа природних бројева $\mathbb{N}$ на скуп целих бројева $\mathbb{Z}$.

- *Одузимање* у скупу целих бројева је операција које се дефинише као:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a - b = c \Leftrightarrow a = b + c.$$

- Скуп *целих бројева* садржи све природне бројеве, нулу и бројеве облика $-n$, где $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

- Скуп $\mathbb{Z}$ је надскуп скупа $\mathbb{N}$ и задржава сва правила која смо дефинисали у скупу $\mathbb{N}$, додајући нека нова која важе само у скупу $\mathbb{Z}$. Овај принцип користимо и у дефинисању наредних проширења скупова бројева и зове се *принцип перманенције*.
- Скуп целих бројева је *неограничен* како с доње тако и с горње стране, тј. у скупу $\mathbb{Z}$ не постоји ни најмањи ни највећи цео број.

РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Операција *дељења* се у скупу целих бројева не може увек дефинисати, тј. количник два цела броја не мора да буде цео број, што доводи до проширења скупа целих бројева $\mathbb{Z}$ на скуп *рационалних бројева* $\mathbb{Q}$.

- Скуп *рационалних бројева* је скуп облика:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}.$$

- *Дељење* целих бројева дефинишемо на следећи начин:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0, \frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c.$$

- Сваки рационални број може се представити у облику **коначног или бесконачног периодичног децималног броја**.
- Скуп рационалних бројева је **неограничен** с обе стране, тј. не постоји ни најмањи ни највећи рационалан број.
- Скуп рационалних бројева је **свуда густ** скуп, што значи да се између свака два произвољна рационална броја $a, b \in \mathbb{Q}$ увек може уметнути бар један нови рационалан број, па самим тим и бесконачно много њих.
- Скуп рационалних бројева је **пребројив** скуп тј. између тог скупа и скупа природних бројева може се успоставити обострано једнозначна кореспонденција.

ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Грчки математичари Питагорејске школе су у 5. веку пре нове ере наслутили постојање ирационалног броја, али нису успели да га схвате. Дошли су до сазнања да су страница квадрата дужине 1 и његова дијагонала дужине $\sqrt{2}$ несамерљиве дужи, тј. да немају заједничку меру. Проблем је био у томе јер су број схватили као скуп састављен из јединица и тиме остали на појму природног броја, тврдећи да се несамерљиве величине не односе као бројеви.

- Број који се не може представити у облику разломка називамо **ирационалним бројем**, на пример $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \log 2, \pi, e, \dots$
- Сваки ирационалан број може се представити у облику **бесконачног непериодичног децималног броја**.
- Скуп ирационалних бројева обележавамо са I .
- Скуп ирационалних бројева је неограничен.
- Скуп ирационалних бројева је свуда густ.

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

- Сви рационални и сви ирационални бројеви образују скуп *реалних бројева*, тј. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$.
- Скуп реалних бројева је *непробројив* скуп.
- Скуп реалних бројева је *уређен скуп*, тј. између свака два реална броја постоји само један од следећих односа $a > b$, $a = b$, $a < b$.
- На скупу реалних бројева за неједнакости важе следеће особине:

$$a > b \Leftrightarrow b < a, \quad a > b \Leftrightarrow a + c > b + c,$$

$$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, \quad a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$
- Реални бројеви се могу представити као тачке на бројној правој.

АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ БРОЈА

- Ако је a произвољан реалан број, тада је *апсолутна вредност* броја a :

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Напомена: Апсолутна вредност броја увек је ненегативан број, тј. $|a| \geq 0$.

- За *апсолутну вредност* броја a важе следећа правила:

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

$$|a| = |-a|,$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b,$$

$$|a| > b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a < -b),$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|,$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0.$$

ПРОШИРЕЊЕ СКУПА РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

- Скуп реалних бројева проширује се са два симбола $-\infty$ и $+\infty$, тако да за сваки $a \in \mathbb{R}$ важи неједнакост: $-\infty < a < +\infty$.

За операције са овим симболима важе правила ($a \in \mathbb{R}$):

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad a + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty.$$

За $a > 0$ имамо:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Изрази $(+\infty) - (+\infty)$ и $\frac{+\infty}{\mp\infty}$ нису дефинисани.

ИНТЕРВАЛ

- Ако су $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $a < b$ следећи подскупови називају се:

отворен интервал: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$,

затворен интервал: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$,

полу-отворен интервал: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$,

полу-затворен интервал: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

Ако су a и $\varepsilon > 0$ дати бројеви, интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ зове се ε -*околина* тачке a

Пример:

Одредити интервале у којима се мора налазити променљива x да би биле задовољене неједнакости:

а) $|2x + 3| < 4$; б) $\left|\frac{2}{3}x + 3\right| > 1$.

$$\text{а) } |2x+3| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x+3 < 4 \Leftrightarrow -7 < 2x < 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left|\frac{2}{3}x+3\right| > 1 &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x+3 > 1 \wedge \frac{2}{3}x+3 < -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x > -2 \wedge \frac{2}{3}x < -4 \Leftrightarrow x > -3 \wedge x < -6 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty). \end{aligned}$$

БИНОМНА ФОРМУЛА

- Ако је $n \in \mathbb{N}$ онда $n!$ (**факторијел**) дефинишемо као узастопни производ свих n бројева тј. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

- Израз $\binom{n}{k}$ се назива **биномни коефицијент**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ и } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n).$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1).$$

- **Биномна формула** гласи:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^n + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k; n, k \in \mathbb{N}$$

- Општи члан биномног развоја је облика $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Пример:

Развити по биномној формули $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$.

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 &= x^6 - \binom{6}{1}x^4 + \binom{6}{2}x^2 - \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\frac{1}{x^2} - \binom{6}{5}\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \\ &= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}. \end{aligned}$$

Пример:

Одредити пети члан у развијеном облику бинома $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$.

$$T_5 = \binom{12}{4} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-4} \cdot \left(-x^{\frac{2}{3}}\right)^4 = 495x^{\frac{20}{3}}.$$

Пример:

Доказати: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$

Ако у биномној формули заменимо $a=1$ и $b=1$ добићемо тражену везу.

Пример:

Доказати: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$

Ако у биномној формули заменимо $a=1$ и $b=-1$ добићемо тражену везу.

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Комплексни бројеви представљали су велики проблем математичарима 18. века. Чак је велики математичар Ојлер покушавао да схвати шта комплексни бројеви представљају, али му то не полази за руком и назива их немогућим или имагинарним бројевима јер постоје само у имагинацији. Теорију комплексних бројева дефинише почетком 19. века Гаус уводећи појам комплексног броја помоћу тачака равни.

АЛГЕБАРСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

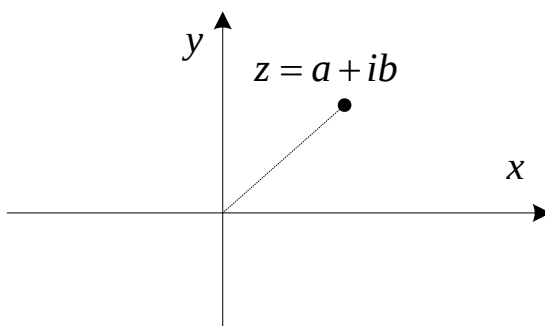
Познато је да све квадратне једначине немају решења у скупу реалних бројева, на пример једначина $x^2 + 1 = 0$. Да бисмо решили ову веома

једноставну једначину морамо скуп реалних бројева проширити новим елементима. Тако долазимо до скупа **комплексних** бројева.

- **Имагинарна јединица** је по дефиницији $i = \sqrt{-1}$.

Решење поменуте једначине постаје сада $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

- Скуп свих уређених парова реалних бројева (a, b) у којем је $z = a + ib$, тј. $z = (a, b)$ назива се скупом **комплексних бројева** $\mathbb{C}$, где је $i = \sqrt{-1}$.



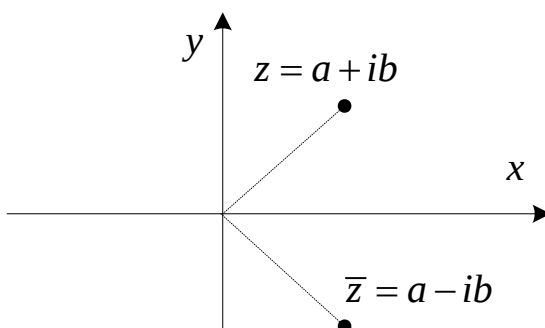
Комплексни бројеви могу се представити као тачке у комплексној, Гаусовој равни.

- **Реални део** комплексног броја је $\operatorname{Re}(z) = a$, **имагинарни део** $\operatorname{Im}(z) = b$.

Ако је $\operatorname{Re}(z) = 0$, комплексни број је **чисто имагинари број**,

ако је $\operatorname{Im}(z) = 0$, комплексни број је **реалан број**.

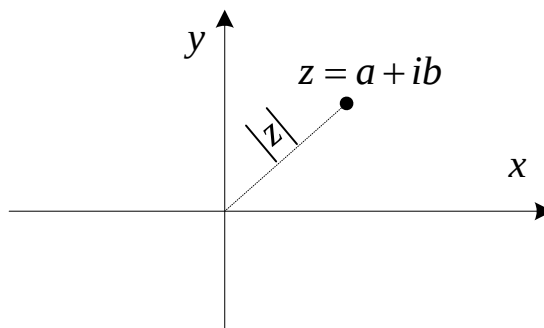
- Сваком комплексном броју $z = a + ib$ одговара **коњуговано комплексни број** у ознаци $\bar{z} = a - ib$.



Пример:

Коњуговано комплексни број броја $z = 2 - i$ је број $\bar{z} = 2 + i$.

- Два комплексна броја $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ су **једнака** ако су им једнаки реални делови за себе, а имагинарни за себе; $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.
- Модуо** комплексног броја $z = a + ib$ дефинише се као $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Геометријски, модуо је растојање комплексног броја од координатног почетка.

**Пример:**

Модуо комплексног броја $z = 2 + i$ износи $\rho = |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

ОПЕРАЦИЈЕ СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА У АЛГЕБАРСКОМ ОБЛИКУ

Нека су дата два комплексна броја $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$.

- Сабирање:** $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.
- Одузимање:** $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$.
- Множење:** $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$.
- Дељење:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}}$.

Пример:

Нека су дата два комплексна броја $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 2 - 3i$.

$$z_1 + z_2 = 1 + 2i + 2 - 3i = 3 - i,$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 2i - (2 - 3i) = -1 + 5i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 - 3i} = \frac{1 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i + 4i + 6i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-4 + 7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$$

- **Степеновање** комплексног броја природним бројем се дефинише као скраћено множење $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ пута}}, n \in \mathbb{N}$.

Напомена: Како је $i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, можемо уопштити да је:

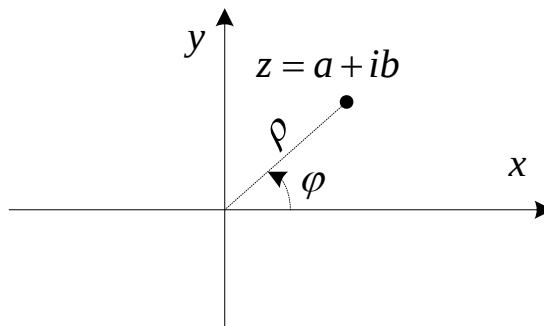
$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

Пример:

$$i^{2016} = (i^4)^{504} = 1^{504} = 1.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

- **Тригонометријски облик** комплексног броја $z = x + iy$ је облика $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где је $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$.
- $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ је **модуо**, а φ је **аргумент** комплексног броја где је $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ и обележава се $\varphi = \operatorname{Arg} z$.



Аргумент комплексног броја није једнозначно одређен. Имајући у виду периодичност тригонометријских функција, аргумент је сваки реални број облика $\varphi + 2k\pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$.

Специјално, број φ који задовољава услов $-\pi < \varphi \leq \pi$ назива се **главни аргумент**.

Пример:

Комплексан број $z = 1 + i$ написати у тригонометријском облику.

Модуо датог комплексног броја је $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, а аргумент је

$\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, па је тригонометријски облик датог комплексног броја

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Напомена: Једначина $\operatorname{tg} \varphi = 1$ има два решења у интервалу $[0, 2\pi]$ тј $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и

$\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$. Комплексни број припада првом квадранту и решење је $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$.

ОПЕРАЦИЈЕ СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА У ТРИГОНОМЕТРИЈСКОМ ОБЛИКУ

Нека су дата два комплексна броја:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

▪ **Множење:** $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$

▪ **Дељење:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$

▪ **Степеновање:** $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{N}.$

Ова формула се зове **Моаврова формула**.

Моаврова формула се може доказати применом математичке индукције.

Пример:

Користећи Моаврову формулу одредити z^4 , ако је $z = -1 - i$.

Модуо датог комплексног броја је $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а аргумент је $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$, зато што угао припада трећем квадранту, па тригонометријски облик броја $z = -1 - i$ је $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Сада је: $z^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 4(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -4$.

■ **Корен** комплексног броја:

Свако решење једначине $z = \omega^n$, где је $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а $\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, дефинише се као корен комплексног броја,

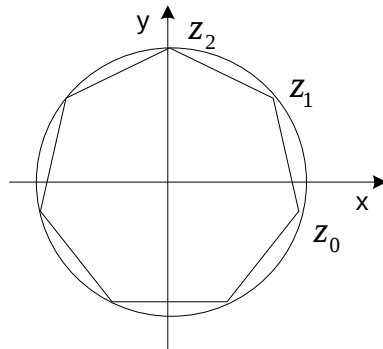
$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказ:

Из једнакости $r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ добијамо:

$$r = \rho^n \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Геометријски ова решења су темена правилног многоугла уписаног у круг полупречника $\sqrt[n]{r}$.



Пример:

Израчунати $\sqrt[3]{-1}$.

Како је $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$, користећи формулу за корен комплексног броја добијамо:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right).$$

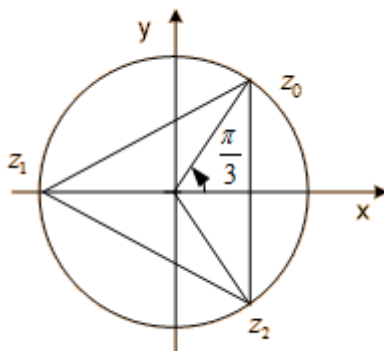
За $k = 0, 1, 2$ добијамо три различите вредности:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решења трећег корена геометријски гледано су темена једнакостраничног троугла уписног у круг полупречника 1.



ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА



L. Ojler (1707-1783)

- *Експоненцијални облик* комплексног броја је $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$.
- *Ојлерова формула*: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

ОПЕРАЦИЈЕ СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА У ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНОМ ОБЛИКУ

Нека су дати комплексни бројеви $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\varphi_2}$.

▪ **Множење:** $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

▪ **Дељење:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

▪ **Логаритам:** $\ln z = \ln \rho + i\varphi$.

Напомена: Коришћењем ове формуле у могућности смо да дефинишемо логаритам негативног реалног броја.

Пример:

Одредити $\ln(-2)$.

$$\ln(-2) = \ln 2 + i\pi.$$

Л. Ојлер је један од најзначајнијих математичара свих времена. Рођен у Швајцарској већи део живота провео је у Петрограду. Написао је око 900 научних радова. Бавио се свим математичким дисциплинама. Скоро половину својих радова написао је као потпуно слеп. Први свој самостални рад написао је са 19 година. Ништа није могло да га одвоји од математике, чак ни тринаесторо деце колико их је имао.

ЗАДАЦИ

1. Решити квадратне једначине:

а) $x^2 + 4 = 0$; б) $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Решење:

а) $x^2 = -4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2i$;

б) $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$.

2. Израчунати: $3\sqrt{-4} + \sqrt{-9} - 2\sqrt{-16}$.

Решење:

$$3i\sqrt{4} + i\sqrt{9} - 2i\sqrt{16} = 6i + 3i - 8i = i.$$

3. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја:

$$\text{а) } z = \frac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i); \quad \text{б) } z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } z &= \frac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i) = \frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \cdot (3+2i) = \frac{2+3i+i^2}{4-i^2} \cdot (3+2i) \\ &= \frac{1+3i}{5} \cdot (3+2i) = \frac{-3+11i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{3}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{11}{5};$$

$$\text{б) } z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \right)^3 = \left(\frac{-2i}{1-i^2} \right)^3 = (-i)^3 = i.$$

4. Доказати да је $z = \left(\frac{2+i}{2-i} \right)^2 - \left(\frac{2-i}{2+i} \right)^2$ чисто имагинаран број.

Решење:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{2+i}{2-i} \right)^2 - \left(\frac{2-i}{2+i} \right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i} - \frac{2-i}{2+i} \right) \cdot \left(\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} \right) \\ &= \frac{(2+i)^2 - (2-i)^2}{5} \cdot \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{5} = \frac{8i}{5} \cdot \frac{8+2i^2}{5} = \frac{8i \cdot 6}{25} = \frac{48i}{25}. \end{aligned}$$

5. Дати су комплексни бројеви $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-i$, израчунати:

$$\text{а) } \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1}; \quad \text{б) } \frac{z_1^2}{z_2} - \frac{z_2^2}{z_1}; \quad \text{в) } z_1^3 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^3.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1} &= \frac{z_1^3 + z_2^3}{z_1 \cdot z_2} = \frac{(1+i)^3 + (1-i)^3}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)}{2} \\ &= \frac{2i(1+i) - 2i(1-i)}{2} = -2; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{z_1^2}{z_2} - \frac{z_2^2}{z_1} = 2i;$$

$$\text{в) } z_1^3 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1^2 + z_2^2) = (1+i)(1-i)(2i-2i) = 0.$$

6. Дати су комплексни бројеви $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 2 + i$, израчунати:

а) $z_1^2 - z_2^2$; б) $\overline{z_1} \cdot z_2 - \overline{z_2} \cdot z_1$.

Решење:

а) $z_1^2 - z_2^2 = (1 + 2i)^2 - (2 + i)^2 = (1 + 4i + 4i^2) - (4 + 4i + i^2) = -6$;

б) $\overline{z_1} \cdot z_2 - \overline{z_2} \cdot z_1 = (1 - 2i)(2 + i) - (2 - i)(1 + 2i) = -6i$.

7. Дат је комплексни број $z_1 = 2 + i$. Одредити комплексни број $z = x + iy$

који задовољава услов $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right) = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{Im}(\overline{z_1} \cdot z) = 1$.

Решење:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{x + iy}{2 + i} = \frac{x + iy}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{2x + y}{5} + i \frac{2y - x}{5}, \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{z_1}\right\} = \frac{2x + y}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\overline{z_1} z = (2 - i)(x + iy) = 2x + y + i(-x + 2y), \quad \operatorname{Im}\{\overline{z_1} z\} = -x + 2y = 1.$$

Решавањем система једначина $2x + y = 3$ и $-x + 2y = 1$ добијамо тражени комплексни број $z = 1 + i$.

8. Решити по z једначину $|z| + z = 2 + i$.

Решење:

$$|z| + z = 2 + i \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i;$$

два комплексна броја су једнака ако су им једнаки реални делови за себе, а имагинарни за себе, па добијамо систем једначина:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \text{ и } y = 1, \text{ чије је решење } (x, y) = \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

Тражени комплексни број гласи $z = \frac{3}{4} + i$.

9. Решити по z једначину $|z| - z = 1 + 2i$.

Резултат: $z = \frac{3}{2} - 2i$.

10. Решити систем једначина $|z^2 - 2i| = 4 \wedge \left|\frac{z + 1 + i}{z - 1 - i}\right| = 1$.

Решење:

$$\begin{aligned}
 |z^2 - 2i| = 4 &\Leftrightarrow |(x + iy)^2 - 2i| = 4 \Leftrightarrow |x^2 - y^2 + i(2xy - 2)| = 4 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2 = 16; \\
 \left| \frac{z+1+i}{z-1-i} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z+1+i| = |z-1-i| \Leftrightarrow |x+1+i(y+1)| = |x-1+i(y-1)| \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x = -y.
 \end{aligned}$$

Решавањем система једначина $(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2 = 16$ и $x = -y$, добијамо $z = \pm\sqrt{3}(1-i)$.

11. Одредити све комплексне бројеве за које је испуњен услов:

а) $\left| \frac{z}{z+1} \right| = 1$ и $z : \bar{z} = 1$; **б)** $z^2 + |\bar{z}| = 0$.

Резултат: **а)** $z = -\frac{1}{2}$; **б)** $z \in \{0, i, -i\}$.

12. Доказати да је $(1+i)^4 - (1-i)^4$ реалан број.

Решење:

Како је $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$, добијамо:

$$(1+i)^4 - (1-i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 - \left((1-i)^2\right)^2 = (2i)^2 - (-2i)^2 = 0.$$

13. Доказати да је $(1+i)^{50} = 2^{25}i$.

14. Израчунати: **а)** $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$; **б)** $\left(\frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

Резултат: **а)** $-\frac{4}{3}$ **б)** 2^{24} .

15. Израчунати $\left((-1+i)(\sqrt{3}-i)\right)^{12}$.

Решење:

$$\left((-1+i)(\sqrt{3}-i)\right)^{12} = \left((-1+i)^2\right)^6 \left((\sqrt{3}-i)^3\right)^4 = (-2i)^6 (-8i)^4 = -2^{18}.$$

16. Доказати да је $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$.

17. Израчунати: $\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1+i\sqrt{3})\right)^{54}$.

Резултат: -2^{54} .

18. Израчунати: а) $\sqrt{15-8i}$; б) $\sqrt{3+4i}$.

Решење:

а) $\sqrt{15-8i} = x + iy \Leftrightarrow 15-8i = x^2 - y^2 + 2xyi$.

На основу особине једнакости комплексних броја добијамо систем једначина:

$$x^2 - y^2 = 15 \wedge 2xy = -8, \text{ чије је решење } x = \pm 4, y = \mp 1.$$

Тражени комплексни бројеви су $z = \pm 4 \mp i$.

б) $z = \pm 1 \pm 2i$.

19. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је испуњен услов $|z-3|=3$.

Решење:

$$|x+iy-3|=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = (x-3)^2 + y^2 = 9,$$

решење је кружница са центром у тачки $C(3,0)$ и полупречником $r=3$.

20. Коју линију у комплексној равни одређује једначина $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$?

Решење:

$$z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) + i(x + yi - x + yi) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 3.$$

Решење је кружница са центром у тачки $C(0,1)$ и полупречником $r = \sqrt{3}$.

21. Представити у комплексној равни скуп тачака z за које је $\operatorname{Re}(z + zi) = 0$.

Решење:

$$z + zi = x + iy + i(x + iy) = x - y + i(x + y)$$

$$\operatorname{Re}(z + zi) = x - y, \text{ због услова задатка је: } x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Тражено геометријско место тачака је права $y = x$.

22. Одредити геометријско место тачака z за које је $|z-i| = |z-1|$.

Решење:

$$|z-i| = |z-1| \Leftrightarrow |x+iy-i| = |x+iy-1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow y=x.$$

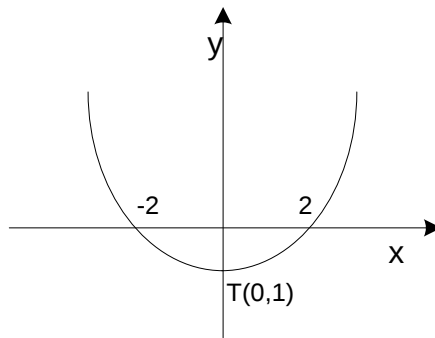
Геометријско место тачака је права $y=x$.

23. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је испуњен услов $|z| = 2 + \operatorname{Im}(z)$. Резултат представити и геометријски.

Решење:

$$|z| = 2 + \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2+y \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4+4y+y^2.$$

Тражено геометријско место тачака је парабола $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.



24. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је испуњен услов $2 \leq |z| \leq 4$.

Резултат: Кружни прстен: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

25. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је $\operatorname{Re}\left\{\frac{z-i}{z-1}\right\} = 0$.

Решење:

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{x+iy-i}{x+iy-1} = \frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy} \cdot \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} = \frac{x^2-x+y^2-y}{(x-1)^2+y^2} = 0,$$

$$x^2-x+y^2-y=0, (x-1)^2+y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, y \neq 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Тражени скуп тачака је круг без тачке $(1,0)$.

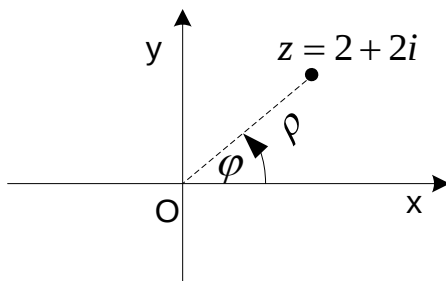
26. Комплексне бројеве представити у тригонометријском облику:

а) $z = 2 + 2i$; б) $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решење:

а) Модуо датог комплексног броја је $\rho = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

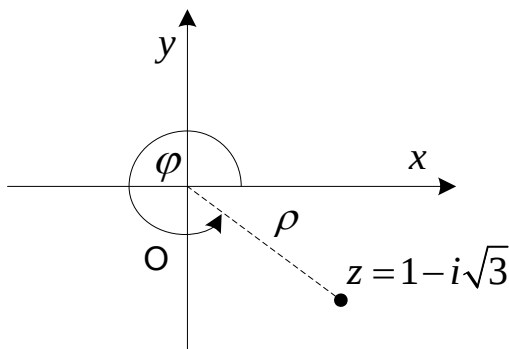
$\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ је аргумент јер угао припада првом квадранту, па је тригонометријски облик датог броја $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.



б) Модуо датог комплексног броја је $\rho = 2$, а аргумент φ је:

$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$, јер угао припада четвртном квадранту.

Тригонометријски облик датог комплексног броја је $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$.



27. Ако је $\arg(1+z) = \frac{\pi}{4}$ и $|1+z| = \sqrt{2}$ одредити комплексан број z .

Решење 1:

$$1+z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1+i, \text{ па је } z = i.$$

Решење 2:

Како је $\arg z = \varphi$, тј $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, добијамо

$$\arg(1+z) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arg(1+x+iy) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{1+x} = 1,$$

$$|1+z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2 + y^2} = \sqrt{2}.$$

Решавањем система једначина $\frac{y}{x+1} = 1$ и $\sqrt{(1+x)^2 + y^2} = \sqrt{2}$, добијамо

$$x=0 \vee x=-2 \text{ и } y=\pm 1.$$

Из услова задатка је $y > 0, x+1 > 0$, и тражени комплексни број гласи $z = i$.

28. Израчунати $I = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (-1+i\sqrt{3}) \right)^{2004}$.

Решење 1:

$$I = (-\sqrt{3}+i)^{2004} = \left((-\sqrt{3}+i)^3 \right)^{668} = (8i)^{668} = 2^{2004} \cdot ((i)^4)^{167} = 2^{2004}.$$

Решење 2:

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (-1+i\sqrt{3}) = -\sqrt{3}+i.$$

Како је $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$, јер је $\rho = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$,

$$\begin{aligned} z^{2004} &= 2^{2004} \left(\cos 2004 \cdot \frac{5\pi}{6} + i \sin 2004 \cdot \frac{5\pi}{6} \right) = 2^{2004} (\cos 835 \cdot 2\pi + i \sin 835 \cdot 2\pi) = \\ &= 2^{2004} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^{2004}. \end{aligned}$$

29. Израчунати:

а) z^{20} ако је $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) z^{10} ако је $z = 1+i$; в) z^{18} ако је $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Решење:

а) Како је $\rho=1$, а $\varphi=\frac{5\pi}{3}$, тригонометријски облик датог броја гласи

$$z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}. \text{ Користећи Моаврову формулу } z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

добивамо:

$$\begin{aligned} z^{20} &= \cos 20 \cdot \frac{5\pi}{3} + i \sin 20 \cdot \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} \\ &= \cos \left(16 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(16 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \end{aligned}$$

б) $z = 32i$;

в) $z = 1$.

30. Израчунати $(1+i)^{2016}$.

Решење 1:

$$\left((1+i)^2 \right)^{1008} = (2i)^{1008} = 2^{1008} \cdot (i^4)^{252} = 2^{1008};$$

Решење 2:

$$\rho = \sqrt{2}, \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Користећи Моаврову формулу добијамо:

$$\begin{aligned} (1+i)^{2016} &= \left(\sqrt{2} \right)^{2016} \cdot \left(\cos 2016 \frac{\pi}{4} + i \sin 2016 \frac{\pi}{4} \right) = 2^{1008} \cdot (\cos 504\pi + i \sin 504\pi) \\ &= 2^{1008} \cdot (\cos (252 \cdot 2\pi + 0) + i \sin (252 \cdot 2\pi + 0)) = 2^{1008} \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{1008}. \end{aligned}$$

31. Израчунати:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[5]{1+i}$; в) $\sqrt[4]{1-i}$.

Решење:

а) $1 = \cos 0 + i \sin 0$, пошто је $\rho=1$ и $\varphi=0$ добијамо:

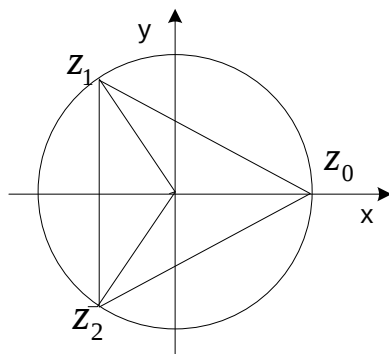
$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3} \right).$$

Постоје три различита решења која добијамо за $k=0, 1, 2$.

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Геометријски гледано решења трећег корена су темена једнакостраничног троугла уписаног у централни круг полупречника $r=1$.



$$\text{б) } \rho = \sqrt{2} \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{4}, \sqrt[5]{z_k} = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\text{в) } z_k = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

32. Решити једначине:

$$\text{а) } z^3 + 1 = 0; \quad \text{б) } (2 + 5i)z^3 - 2i + 5 = 0; \quad \text{в) } z^3 + 4 + \sqrt{48}i = 0.$$

Решење:

$$\text{а) } z^3 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-1},$$

$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$, пошто је $\rho = 1$ и $\varphi = \pi$ добијамо:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

Постоје три различита решења која добијамо за $k = 0, 1, 2$.

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

б) Дата једначина се своди на $z^3 = i$, чија су решења:

$$z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, z_1 = -i, z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2};$$

$$\text{в) } z^3 + 4 + \sqrt{48}i = 0 \Leftrightarrow z^3 = -4 - \sqrt{48}i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-4 - \sqrt{48}i}.$$

$$-4 - \sqrt{48}i = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right),$$

$$\sqrt[3]{-4 - \sqrt{48}i} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9} \right), z_1 = 2 \left(\cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9} \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{16\pi}{9} + i \sin \frac{16\pi}{9} \right).$$

$$33. \text{ Израчунати } \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}}.$$

Решење:

$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{12} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{12} + 2k\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi + 24k\pi}{48} + i \sin \frac{\pi + 24k\pi}{48} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Природан број

Цео број

Рационалан број

Ирационалан број

Реалан број

Биномни коефицијенти

Биномна формула

Општи члан биномне формуле

Комплексан број

Алгебарски облик комплексног броја

Тригонометријски облик комплексног броја

Експоненцијални облик комплексног броја

3. ГЛАВА

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

1. МАТРИЦЕ
2. ДЕТЕРМИНАНТЕ
3. РАНГ МАТРИЦЕ
4. ИНВЕРЗНА МАТРИЦА
5. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ
ЈЕДНАЧИНА

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. матрицама и операцијама са матрицама,
2. детерминантама и особинама детерминанти,
3. адјунгованој матрици,
4. инверзној матрици,
5. регуларној и сингуларној матрици,
6. рангу матрице,
7. Сарусовом правилу за израчунавање вредности детерминанти,
8. Лапласовом правилу за израчунавање вредности детерминанти,
9. системима линеарних једначина,
10. Гаусовом алгоритму за решавање система линеарних једначина,
11. Крамеровој методи за решавање система линеарних једначина,
12. матричној методи за решавање система линеарних једначина,

МАТРИЦЕ

- **Матрица** је правоугаона шема са $m \times n$ елемената распоређених у m врста и n колона:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрице се означавају великим словима латинице: $A, B, C, \dots$

Произвољни елемент матрице a_{ij} припада i -тој врсти и j -тој колони, па матрицу можемо означити као $[a_{ij}]_{m \times n}$.

За матрицу са m врста и n колона кажемо да има **димензију** $m \times n$.

- Две матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ су **једнаке**, тј. $A = B$ ако и само ако је: $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall (i, j)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

- **Матрица врста** је матрица код које је $[a_{ij}]_{m \times n}$ $m = 1, n > 1$,

$$[a_{ij}]_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

- **Матрица колона** је матрица код које је $m > 1, n = 1$,

$$[a_{ij}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- **Нула матрица** је она матрица чији су сви елементи једнаки нули.
- **Квадратна матрица** је матрица код које је број врста једнак броју колона. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ припадају **главној дијагонали**, док елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ припадају **споредној дијагонали** матрице.

- Квадратна матрица у којој су сви елементи ван главне дијагонале нула, а на главној дијагонали су сви различити од нуле, назива се **дијагонална матрица**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Јединична матрица** је дијагонална матрица код које је $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ и означава се словом I .
- **Транспонована матрица** матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ је матрица добијена заменом места свих врста одговарајућим колонама или обрнуто. Обележава се са A^T и $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Пример:

За матрицу $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ транспонована матрица биће матрица $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

ОПЕРАЦИЈЕ СА МАТРИЦАМА

- **Збир** матрица $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, је матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ако и само ако је $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

- Операција сабирања матрица има следеће особине:

$A + B = B + A$, **комутативност**;

$(A + B) + C = A + (B + C)$, **асоцијативност**.

Пример:

Збир матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ је матрица $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$.

- **Производ броја** $\lambda \in R$ и матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ је матрица истих димензија облика:

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}.$$

- Операција множења матрице бројем има следеће особине:

$$\lambda A = A\lambda, \text{ комутативност};$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A); \alpha, \beta \neq 0, \text{ асоцијативност};$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \text{ дистрибутивност с обзиром на збир бројева};$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \text{ дистрибутивност с обзиром на збир матрица}.$$

Пример:

Производ матрице $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ и броја $\lambda = 2$ је матрица $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

- **Производ** $A \cdot B$ матрица $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ и $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ је матрица C , чији се елементи c_{ij} формирају по закону:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Напомена: Матрица C има онолико врста колико их има матрица A и онолико колона колико их има матрица B .

Напомена: Дакле, елемент c_{ij} матрице C који се налази у пресеку i -те врсте и j -те колоне, образује се тако што се елементи i -те врсте матрице A помноже одговарајућим елементима j -те колоне матрице B и добијени производи саберу.

- Операција множења матрица има следеће особине:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \text{ асоцијативност};$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A, \text{ тј. не важи закон комутације};$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Пример:

Производ матрица $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ је матрица $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 19 & -8 \\ 31 & -14 \end{bmatrix}$.

ДЕТЕРМИНАНТЕ

- Свакој квадратној матрици придружујемо реални број који зовемо *детерминанта*.
- *Детерминанта* је квадратна шема бројева од $n \times n$ елемената распоређених у n врста и n колона.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Напомена: Детерминанта је **број**, за разлику од матрице која је само шема произвољних елемената.

- Број $|a_{11}| = a_{11}$ назива се *детерминанта првог реда*.
- Број $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ назива се *детерминанта другог реда*.
- Број $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ назива се *детерминанта трећег реда*.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

САРУСОВО ПРАВИЛО

(Sarrus, 1798.-1861.)

- *Правило* се односи на детерминанте трећег реда и гласи:

$$\begin{vmatrix} + & + & \pm \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Пример:

Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = 0.$$

ЛАПЛАСОВО ПРАВИЛО

P. Laplace (1749-1827)

Француски математичар Лаплас дао је значајан допринос у теорији диференцијалних једначина, вероватноћи, анализи, астрономији и небеској механици. Мада скромног порекла Наполеон га је произвео у грофа, а након његовог пада краљ Луј XVIII у маркиза.

Енглески преводилац његових дела написао је “Увек када сам код Лапласа налазио изјаву, лако је видети, знао сам да ми треба неколико сати напорног рада док се не досетим и не докажем како је то лако видети”.

Сарусово правило се користи само за израчунавање детерминанти трећег реда, а Лапласово правило важи за детерминанте било ког реда.

Основна идеја овог правила је да се израчунавање детерминанте n -тог реда своди на израчунавање детерминанте $n-1$ реда, детерминанта $n-1$ реда своди се на израчунавање детерминанте $n-2$ реда и тај поступак се понавља све док се не дође до детерминанте првог реда.

Да бисмо објаснили ову методу потребно је да дефинишемо појам минора и појам кофактора.

Нека је D детерминанта n -тог реда

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Детерминанта која се добија из детерминанте D одбацивањем i -те врсте и j -те колоне назива се **минор** елемента a_{ij} и обележава се са M_{ij} .
- **Кофактор** елемента a_{ij} је број $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример:

Детреминанта трећег реда има онолико минора колико и елемената, тј. 9. На пример, елементима a_{11} , a_{12} и a_{13} одговарају минори

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

а кофактори су

$$A_{11} = +M_{11}, A_{12} = -M_{12}, A_{13} = +M_{13}$$

- **Лапласово правило:** Детерминанта је једнака збиру производа елемената ма које врсте (односно колоне) и одговарајућих кофактора

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, i=1,2,\dots,n$$

(развој по елементима i -те врсте).

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}, j=1,2,\dots,n.$$

(развој по елементима j -те колоне).

Пример:

Вредност детерминанте $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ се може израчунати развојем по било

којој врсти или колони. Развојем по првој врсти добићемо

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

- Ако две врсте (колоне) узајамно промене места детерминанта мења знак.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -D.$$

- Детерминанта се множи бројем $k \neq 0$ ако се сви елементи само једне врсте (колоне) помноже тим бројем.

$$k \cdot D = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & kb_2 \\ a_1 & kb_1 \end{vmatrix}.$$

- Ако су сви елементи једне врсте (колоне) једнаки нули, вредност детерминанте је једнака нули.
- Ако су две врсте (колоне) једнаке или пропорционалне, тада је вредност детерминанте једнака нули.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = k(a_1 b_1 - a_1 b_1) = k \cdot 0 = 0.$$

- Ако све врсте (колоне) детерминанте реда $n \geq 3$ циклично промене места, детерминанта не мења своју вредност.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

- Вредност детерминанте се не мења ако се сваком елементу једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) помножени једним истим бројем.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ma_1 + b_1 \\ a_2 & ma_2 + b_2 \end{vmatrix}$$

- Ако су елементи једне врсте (колоне) дате детерминанте зборови од два или више сабирака, тада се детерминанта може разложити на збир од две или више детерминаната.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

РАНГ МАТРИЦЕ

- Матрица A има **ранг** $\text{rang}(A) = r$, ако има бар један минор реда r различит од нуле, а сви минори реда $r + 1$ и вишег реда су једнаки нули.

Пример:

Како су сви минори трећег реда матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ су једнаки нули

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 16 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -3 & 16 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

а постоји минор другог реда који је различит од нуле $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$,

закључујемо да је ранг матрице A једнак 2.

Елементарне трансформације матрица су

- Множење свих елемената било које врсте (колоне) матрице једним истим реалним бројем $\lambda \neq 0$.
- Узајамна промена места две врсте (колоне).
- Транспонованье матрице.
- Додавање елементима једне врсте (колоне) одговарајућих елемената неке друге врсте (колоне) помножених произвољним бројем.
- Елементарне трансформације коначно много пута примењене на матрицу не мењају ранг матрице.

- Матрице A и B , су **еквивалентне**, (пишемо $A \sim B$), ако и само ако се могу трансформисати једна у другу помоћу коначно много узастопних елементарних трансформација, тј. ако је $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

Пример:

Применом елементарних трансформација превешћемо матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ у еквивалентну матрицу, која има исти ранг.}$$

Прва колона помножена је са -1 и редом додата другој, трећој и четвртој колони.

Прва врста помножена је са -2 , односно -3 и додата другој односно трећој врсти.

Друга врста је помножена са -1 и додата трећој врсти.

Друга колона помножена је са 3 и додата трећој колони, односно друга колона је додата четвртој колони.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрице једнак је броју не нултих чланова на главној дијагонали, тј $\text{rang}(A) = 2$.

ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

- Инверзна матрица** дате квадратне матрице A је матрица A^{-1} која има особину да је $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, где је I одговарајућа јединична матрица.
- За квадратну матрицу A кажемо да је **регуларна** ако је $\det A \neq 0$, а **сингуларна** ако је $\det A = 0$.

- **Адјунгована матрица** матрице A у ознаци $\text{adj}A$ је транспонована матрица матрице кофактора матрице A .

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Инверзна матрица** квадратне регуларне матрице A је матрица

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}.$$

- За регуларне матрице A и B истог реда важе правила:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Пример:

Инверзна матрица дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ је облика $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$.

Како је $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, значи да постоји матрица A^{-1} .

Кофактори матрице A су $A_{11} = 5$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$.

Налазимо да је: $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Пример:

Како је детерминанта матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$, а

кофактори матрице су:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

добијамо да је $A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

ЗАДАЦИ

1. Наћи збир матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+(-2) \\ 3+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Наћи матрицу $C = 2 \cdot A - B$, ако су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ и

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$C = 2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Наћи производе $A \cdot B$ и $B \cdot A$ матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 5 & -4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Производ $B \cdot A$ не постоји, јер димензије матрица A и B нису одговарајуће.

4. Доказати да за матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ важи

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2.$$

Решење:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}; (A+B)^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=A^2+B^2.$$

5. Ако је $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, израчунати $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I$.

Решење:

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+(ad-bc)I &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a^2-ad & -ab-bd \\ -ac-cd & -ad-d^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Ако је $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, наћи њену транспоновану матрицу A^T .

Решење: $A^T=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$

7. Ако је $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, наћи све матрице које су комутативне са матрицом A .

Решење:

Нека је X матрица таква да је $AX=XA$.

Узмимо да је матрица $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, добијамо

$$AX=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ x+z & y+t \end{bmatrix}, XA=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{bmatrix}.$$

Из услова $AX=XA$ добијамо систем једначина:

$x=x+y, y=y, x+z=z+t, y+t=t$, односно $y=0, x=t$ одакле налазимо

решење $X=\begin{bmatrix} x & 0 \\ z & x \end{bmatrix}.$

8. Проверити следеће резултате:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [13],$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -39 & 29 \\ 24 & -48 & 32 \\ 58 & 24 & 56 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Дат је полином $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ и матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, наћи

$$P(A).$$

Решење:

$$P(A) = 3A^2 - 2A + 5I.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

10. Дат је полином $P(x) = 2x^2 + 3x + 5$ и матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, наћи $P(A)$.

Решење:

$$P(A) = 2A^2 + 3A + 5I.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 3 & 14 & 3 \\ 12 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

11. Ако је $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$, одредити $f(A)$ за $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Резултат:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 29 & 6 & 6 \\ 27 & 38 & 15 \\ 15 & 9 & 26 \end{bmatrix}.$$

12. Израчунати вредност детерминанти:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решење:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 1 - 12 = -11;$$

б) Користећи Сарусово правило добијамо

$$\begin{vmatrix} + & + & \pm \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 40;$$

в) Користећи Лапласово правило, развијањем по првој врсти добијамо

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (9 - 8) - (15 - 2) + 3 \cdot (20 - 3) = 40;$$

г) Користећи Лапласово правило, развијањем по другој врсти добијамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-9) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -34;$$

д) Користећи једну од особина детерминанти, можемо прву колону да помножимо са -3 и додамо трећој колони. Детерминанту сада развијамо по првој врсти која садржи две нуле.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -34.$$

13. Проверити резултате:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} = 27;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3.$$

14. Одредити ранг следећих матрица:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решење:

а) Сви минори трећег реда су једнаки нули,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 16 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Како постоји бар један минор другог реда који је различит од нуле

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ закључујемо да је ранг ове матрице } \text{rang}(A) = 2.$$

б) Како је детерминанта матрице A различита од нуле,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 6 = 5 \neq 0,$$

закључујемо да је ранг матрице $\text{rang}(A) = 3$.

в) Применом елементарних трансформација превешћемо матрицу A у еквивалентну матрицу.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{rang}(A) = 2. \end{aligned}$$

15. Проверити резултате:

$$\text{а) } \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3; \quad \text{б) } \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3.$$

16. Наћи инверзну матрицу матрица:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решење:

а) Како је $\det A = -1 \neq 0$, постоји матрица A^{-1} .

Кофактори матрице A су: $A_{11} = 1, A_{12} = 3, A_{21} = 1, A_{22} = 2$,

па је $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

б) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

Кофактори матрице A су:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

17. Проверити решење:

а) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix};$ б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ не постоји.

Решити матричне једначине :

18. $XA = B$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Решење:

Како је $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$ постоји A^{-1} .

Решење дате матричне једначине је $X = BA^{-1}$.

$$A^{-1} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Значи,

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 16 & 11 \\ 4 & -23 & -15 \end{bmatrix}.$$

$$19. \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$\text{Матрична једначина гласи } AX = B, \text{ где је } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Како је $\det(A) = -4 \neq 0$, постоји матрица A^{-1} , па је решење дате матричне једначине $X = A^{-1}B$.

$$\text{Како је } A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ добијамо}$$

$$X = \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$20. \quad A \cdot X + X - B = 0, \text{ ако је } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$AX + X - B = 0 \Leftrightarrow (A + I)X = B \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1} \cdot B$$

$$\det(A + I) = 4 \neq 0$$

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 & -12 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \\ 11 & 28 & 11 \end{bmatrix}.$$

21. $XA + X = A^T$ ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$XA + X = A^T \Leftrightarrow X(A+I) = A^T \Leftrightarrow X = A^T(A+I)^{-1}$$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A+I) = -3, \quad (A+I)^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

22. $(A+I)X = A-I$, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$\text{Нека је } B = A+I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = A-I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тада једначина постаје $BX = C$.

$$\text{Како је } \det(B) = 6 \neq 0, \text{ постоји } B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ па је решење дате}$$

матричне једначине $X = B^{-1}C$.

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

23. Провити решења:

а) $X(A - 3I) = A + I$, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $AX = B$, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

в) $AX - 2X - A = I$ где је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Резултат:

а) $X = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 10 \\ 4 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; б) $X = \begin{bmatrix} -7 & -16 \\ 7 & 15 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$; в) $X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Конјункцију линеарних једначина коју пишемо у облику

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

где је $m > n$, $m = n$ или $m < n$, зовемо *систем од m линеарних једначина од n непознатих*.

Бројеви a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ су *коэффицијенти* уз непознате $x_1, \dots, x_n$, а бројеви $b_1, \dots, b_m$ су *слободни чланови*.

Свака уређена n -торака $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ реалних бројева која задовољава систем зове се *решење система*.

Систем је *сагласан* ако има бар једно решење, а *немогућ* ако нема решења. Ако систем има тачно једно решење он је *одређен*, а ако има више решења он је *неодређен*.

Два система су *еквивалентна* ако имају иста решења.

ГАУСОВА МЕТОДА

■ Гаусова метода се састоји у сукцесивном елиминисању непознатих из система и трансформацијом у троугаони или трапезни еквивалентни систем из кога се добија решење или се установи да систем нема решења.

Претпоставимо да је коефицијент $a_{11} \neq 0$. Искључимо непознату x_1 из свих једначина система осим прве.

Да бисмо то реализовали потребно је прву једначину помножити са $-a_{21}/a_{11}$ и додати је другој једначини, затим прву једначину помножити са $-a_{31}/a_{11}$ и додати је трећој једначини, итд. На тај начин се уместо полазног система добија еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)} \end{aligned}$$

Ако сада претпоставимо да је $a_{22}^{(1)} \neq 0$, применићемо исти поступак за искључивање променљиве x_2 из последњих $m-2$ једначина система и добићемо еквивалентан систем једначина:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n &= b_m^{(2)} \end{aligned}$$

Ако би продужили исти поступак $k-1$ пута добили би систем:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
 &\vdots \\
 a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)}
 \end{aligned}$$

Ако су сви коефицијенти добијеног система једнаки нули, а слободни члан није нула, систем је несагласан и нема решења.

Ако је $k = n$, систем има јединствено решење.

Ако је $k < n$ систем има бесконачно решења. Тада су $x_{k+1}, \dots, x_n$ слободне променљиве које преносимо на десну страну, а затим се одређују везане променљиве $x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$.

Трансформације које се користе у описаној методи: пермутовање једначина, множење једначина и њихово међусобно сабирање зову се **елементарне трансформације** система.

Пример:

Гаусовом методом решити системе једначина:

$$\begin{aligned}
 x + 2y - 3z &= -4 \\
 2x - y + z &= 3 \\
 -2x + y + 2z &= 6
 \end{aligned}$$

Након множења прве једначине редом са -2 и 2 и додавањем редом другој и трећој једначини добијамо систем:

$$\begin{aligned}
 x + 2y - 3z &= -4 \\
 -5y + 7z &= 11 \\
 5y - 4z &= -2
 \end{aligned}$$

Додавањем друге једначине трећој добијамо систем:

$$\begin{aligned}
 x + 2y - 3z &= -4 \\
 -5y + 7z &= 11 \\
 3z &= 9
 \end{aligned}$$

Ово је систем троугаоног облика из којег се непосредно добија јединствено решење $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Пример:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 10 \\2x + y + z &= 6 \\10x - y + 3z &= 2\end{aligned}$$

Након множења прве једначине редом са -2 и -10 и додавањем редом другој и трећој једначини добијамо систем:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 10 \\-3y - z &= -14 \\-21y - 7z &= -98\end{aligned}$$

Множењем друге једначине са -7 и додавањем трећој добијамо систем:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 10 \\-3y - z &= -14 \\0 \cdot z &= 0\end{aligned}$$

Ово је неодређен систем. Стављајући $z = t$ непосредно се добија решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{2-t}{3}, \frac{14-t}{3}, t \right), t \in \mathbb{R}.$$

КРАМЕРОВА МЕТОДА

(Kramer, 1704-1752)

Дат је систем од n једначина са n непознатих:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Уочимо следеће детерминанте:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ детерминанта система.}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ детерминанта која одговара непознатој } x_k; k = \overline{1, n}.$$

Крамерово правило:

- Ако је детерминанта система $D \neq 0$, тада систем има **јединствено решење**.

$$x_k = \frac{D_k}{D}, k = 1, 2, \dots, n.$$

- Ако је детерминанта система $D = 0$, а бар једна од детерминанти $D_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, систем **нема решења**.
- Ако је детерминанта система $D = 0$, и све детерминанте $D_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, систем је **неодређен** и ако има решења може их имати само бесконачно много.

Пример:

Решити систем једначина:

$$x + 3y - 2z = 1$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x + 2z = 7$$

Детерминанта система је: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$

Детерминанте D_x , D_y , D_z добијамо када у детерминанти D заменимо редом прву, другу и трећу колону колоном слободних чланова.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -26, D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -39.$$

Решење система је:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-39}{-13} = 3.$$

КРОНЕКЕР КАПЕЛИЈЕВА ТЕОРЕМА

(Kronecker 1823-1891, Capelli 1855-1910)

Нека је дат систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

где је A је *матрица система*, а A_p је *проширена матрица система*.

Кронекер-Капелијева теорема:

- Дати систем је сагласан и има *једнозначно решење* ако је

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p) = n.$$

- Систем је сагласан и има *бесконечно много решења* ако је

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p) < n.$$

- Систем је *противречан* и *нема решења* ако је

$$\text{rang}(A) < \text{rang}(A_p),$$

где је n број непознатих.

Пример:

Решити систем једначина:

$$3x - 2y - z = 2$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-5x + 8y + 5z = 1$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 8 & 5 \end{bmatrix} = 2, \text{ a } \text{rang}(A_p) = \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

закључујемо да је систем противречан и нема решења.

Пример:

Решити систем једначина:

$$x - y + z = 6$$

$$2x + y + z = 3$$

$$x + y + 2z = 5$$

$$\text{Како је } \text{rang}(A) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3, \text{ a } \text{rang}(A_p) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 3,$$

закључујемо да је систем сагласан и има јединствено решење које можемо добити неком од већ изложених метода.

ХОМОГЕНИ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Дат је систем од m једначина са n променљивих:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

- Како је $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, овај систем се зове **систем хомогених једначина**.
- Он је је увек сагласан јер је $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p)$.
- Сваки хомогени систем има **тривијално** решење $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

- Хомогени систем има и *нетривијално* решење ако и само ако је $\text{rang}(A) < n$.

Претходни став о сагласности и броју решења хомогеног система, је последица Кронекер-Капелијеве теореме.

Пример:

Хомогени систем једначина

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x + y + 4z = 0$$

има само тривијално решење $(0, 0, 0)$, јер је, $\text{rang}(A) = 3$ и једнак је броју непознатих.

Пример:

$$x + y + 2z + u = 0$$

$$2x - y + z - 2u = 0$$

$$x - 2y - z - 3u = 0$$

Како је $\text{rang}(A) = 2$, а $n = 3$ систем једначина има и нетривијалних решења и своди се на систем од две једначине са две непознате:

$$x + y = -2z - u$$

$$2x - y = -z + 2u$$

чије је решење $(x, y, z, u) = \left(-t + \frac{r}{3}, -t - \frac{4r}{3}, t, r \right); t, r \in R$.

МАТРИЧНА МЕТОДА

Дат је систем од n једначина са n променљивих:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Систем се може написати у матричном облику као:

$$AX = B$$

где је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Под претпоставком да је матрица A регуларна, тј. да јој је детерминанта различита од нуле, систем има јединствено решење $X = A^{-1}B$.

Пример:

Матричном методом решити систем једначина:

$$2x - 3y + z = 7$$

$$3x - 2y - z = 3$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\det A = 10 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -7 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2).$$

ЗАДАЦИ

1. Гаусовом методом решити системе једначина:

$$x + y + z = 6 \quad 2x - y + z = 8 \quad x + 2y + 2z = 1$$

а) $2x + y + 3z = 13$; б) $x + 3y - 2z = -7$; в) $2x + 3y + z = 0$.

$$-x + 5y - 2z = 3 \quad 3x + 2y - z = 1 \quad ax + y - z = 1$$

$$x - 4y + 3z = 15$$

Решење:

$$x + y + z = 6$$

$$\text{a)} \quad 2x + y + 3z = 13$$

$$-x + 5y - 2z = 3$$

Ако се прва једначина помножи са -2 и дода другој једначини и прва једначина дода трећој добићемо систем:

$$x + y + z = 6$$

$$-y + z = 1$$

$$6y - z = 9$$

Множењем друге једначине са 6 и додавањем трећој добијамо систем:

$$x + y + z = 6$$

$$-y + z = 1$$

$$5y = 10$$

Ово је систем троугаоног облика из којег се непосредно види да је јединствено решење $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

б) Ако у полазном систему прву једначину помножену редом са 2 , 1 и -3 додамо другој, трећој односно четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем:

$$2x - y + z = 8$$

$$5x + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + z = 8$$

$$5x + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + y = 9$$

$$-5x - y = -9$$

Ово је систем од две једначине са три непознате који не може да има јединствено решење. Нека је $x = t \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада из друге једначине система добијамо $y = 9 - 5t$ и заменом обе вредности у прву једначину добијамо $z = 17 - 7t$.

Дакле скуп решења је $(x, y, z) = (t, 9 - 5t, 17 - 7t)$.

в)

$$2x + 3y + z = 0 \quad 2x + 3y + z = 0$$

$$-3x - 4y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3x - 4y = 1$$

$$(a+2)x + 4y = 1 \quad (a-1)x = 2$$

Скуп решења задатог система једначина гласи:

$$\text{За } a \neq 1 \text{ имамо } (x, y, z) = \left(\frac{2}{a-1}, \frac{-a-5}{4(a-1)}, \frac{3a-1}{4(a-1)} \right).$$

За $a = 1$ систем нема решења.

2. Гаусовом методом решити системе једначина:

$$x + 2y - 6z = -13 \quad x + 2y - 3z = 5 \quad 2x - y + z = -1$$

а) $2x + 5y + 4z = 24$; б) $2x + 3y - 5z = 8$; в) $x + 2y - 3z = 8$.

$$3x + 10y + z = 26 \quad 5x + y - 8z = 7 \quad ax + y - 2z = 7$$

Резултат:

а) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$; б) $(x, y, z) = (1, 2, 0)$;

в) За $a \neq 3$ је $(x, y, z) = (0, -5, -6)$, за $a = 3$ је $(x, y, z) = (t, 7t - 5, 5t - 6)$.

3. Крамеровом методом решити системе једначина:

$$3x + 2y + z = 5 \quad x + 2y + z = 10$$

а) $2x + 3y + z = 1$

б) $2x + y + z = 6$

$$2x + y + 3z = 11$$

$$10x - y + 3z = 2$$

$$x + y + z = 3$$

$$2x + y + z = -1$$

в) $x - 2y + 2z = 1$

г) $-x + y + 2z = 3$

$$-2x + y - 3z = 4$$

$$3x + 2y + 4z = 1$$

Решење:

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

Како је $D \neq 0$ систем има јединствено решење:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{24}{12} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-24}{12} = -2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{36}{12} = 3, \quad (x, y, z) = (2, -2, 3).$$

б) $D = 0, D_x = D_y = D_z = 0$. Закључујемо да је систем неодређен.

Систем се трансформише у еквивалентни систем:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

чије је решење $(x, y, z) = \left(\frac{2+t}{3}, \frac{14-t}{3}, t \right)$, где је $t \in \mathbb{R}$.

в) $D = 0, D_x = 32$, па према Крамеровој теореме систем нема решења.

г) $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

4. Дискутовати и решити системе једначина у зависности од реалног параметра a :

$$ax + y + z = 1 \quad 3x - 2y + z = 0 \quad x + y + az = 1 \quad ax + y + 2z = 1$$

а) $x + ay + 2z = 2$; б) $-x + y - 2z = 2$; в) $x + ay + z = 1$ г) $x + ay + z = a$

$$2x + y + z = 0 \quad ax - y - z = 0 \quad ax + y + z = 1 \quad x + y + 2z = a^2$$

Решење:

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-2)^2;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 2;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1;$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 - 4a.$$

За $D \neq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$ систем има јединствено решење:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{a-2}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{2a-1}{(a-2)^2}, z = \frac{D_z}{D} = \frac{5-4a}{(a-2)^2}.$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a-2}, \frac{2a-1}{(a-2)^2}, \frac{5-4a}{(a-2)^2} \right).$$

За $D = 0$, односно за $a = 2$ добијамо $D_y = 3 \neq 0$, па је систем немогућ.

б) $D = 3(a-2)$, $D_x = -6$, $D_y = -2(a+3)$, $D_z = -2(2a-3)$.

За $D = 3(a-2) \neq 0$, тј. за $a \neq 2$ имамо јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2}{a-2}, -\frac{2(a+3)}{3(a-2)}, \frac{-2(2a-3)}{3(a-2)} \right).$$

За $D = 0$, тј. за $a = 2$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, $D_z \neq 0$ систем је немогућ и нема решења.

в) $D = -(a-1)^2(a+2)$, $D_x = -(a-1)^2$, $D_y = -(a-1)^2$, $D_z = -(a-1)^2$.

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right).$$

$D = 0$ за $a = 1 \vee a = -2$.

За $a = -2$ је $D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$ систем је немогућ и нема решења.

За $a = 1$ је $D_x = 0, D_y = 0, D_z = 0$ систем је неодређен и своди се на три исте једначине:

$$x + y + z = 1, x + y + z = 1, x + y + z = 1.$$

Ако уведемо смену да је $x = t \in R$ и $y = r \in R$, добијамо $z = 1 - t - r$, па је решење облика $(x, y, z) = (t, r, 1 - t - r)$.

$$\text{г) } D = 2a^2 - 3a + 1 = (a-1)(2a-1),$$

$$D_x = -2a^3 + a^2 + 2a - 1 = -(a-1)(a+1)(2a-1),$$

$$D_y = -a^3 + 4a^2 - 2a - 1 = -(a-1)(a^2 - 3a - 1), D_z = (a^2 - 1)^2.$$

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(-(a+1), \frac{-(a^2 - 3a - 1)}{(2a-1)}, \frac{(a+1)^2(a-1)}{(2a-1)} \right).$$

$$D = 0 \text{ за } a = 1 \vee a = \frac{1}{2}.$$

За $a = 1$ систем се своди на:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow z = 0, y = 1 - x, \text{ па је } (x, y, z) = (t, 1 - t, 0), t \in R.$$

За $a = \frac{1}{2}, D_z \neq 0$ систем нема решења.

5. Решити системе једначина:

$$x + y + az = 2$$

$$x + y + z = a$$

$$\text{а) } x + ay + z = -1;$$

$$\text{б) } x + (1+a)y + z = 2a \quad ;$$

$$ax + y + z = -1$$

$$x + y - (1+a)z = 0$$

$$x + y + az = 3$$

$$x + y + az = 1$$

$$\text{в) } x + ay + z = 0;$$

$$\text{г) } x + ay + az = 1.$$

$$ax + y + z = 0$$

$$ax + ay + az = 1$$

Решење:

а) $D = -(a-1)^2(a+2)$, $D_x = (a-1)(a+2)$, $D_y = (a-1)(a+2)$,
 $D_z = -2(a-1)(a+2)$.

За $D \neq 0$, тј. за $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1} \right).$$

$D = 0$ за $a = -2 \vee a = 1$.

За $a = -2$ је $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$ и систем се своди на:

$$x + y - 2z = 2$$

$$x - 2y + z = -1$$

$$-2x + y + z = -1$$

Решавањем било којом од познатих метода добијамо решење:

$$(x, y, z) = (t+1, t+1, t).$$

За $a = 1$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$, систем је контрадикција.

$$x + y + z = 2, x + y + z = -1, x + y + z = -1 \text{ и нема решења.}$$

б) $D = -a(a+2)$, $D_x = a(-a^2+2)$, $D_y = -a(a+2)$, $D_z = -a^2$.

За $D \neq 0$, тј. за $a \neq 0 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a^2-2}{a+2}, 1, -\frac{a}{a+2} \right).$$

$D = 0$ за $a = -2 \vee a = 0$.

За $a = -2$ систем је немогућ.

За $a = 0$ систем је неодређен и решење је $(x, y, z) = (t, -t, 0) t \in \mathbb{R}$.

в) За $D \neq 0$, односно за $a \neq 1 \wedge a \neq -2$, систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{(a-1)(a+2)}, -\frac{3}{(a-1)(a+2)}, \frac{3(a+1)}{(a-1)(a+2)} \right).$$

За $D = 0$, односно за $a = -2$ систем није могућ и нема решења.

За $D = 0$, односно за $a = 1$ систем није могућ и нема решења.

г) $D = a(a-1)^2$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = (a-1)^2$.

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ је $(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{1}{a} \right)$.

За $D = 0$, односно за $a = 1$ је $(x, y, z) = (1-t-r, t, r)$, $t, r \in \mathbb{R}$.

За $D = 0$, односно за $a = 0$ систем није могућ и нема решења.

6. У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$x - 2y + z = 1 \quad x + y + z = 3 \quad x + 2y + z = 1$$

а) $3x + 2y + z = 0$ б) $x - ay + 2z = 1$ в) $3x + 2y + z = 0$

$$5x - 2y + az = 1 \quad 2x + 2y - az = 6 \quad 5x - 2y + az = 1.$$

Решење:

а) Ако је $a \neq 3$, решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{a-1}{4(a-3)}, \frac{7-3a}{8(a-3)}, \frac{1}{3-a} \right)$.

Ако је $a = 3$, онда систем нема решења.

б) Ако је $a \neq -1 \wedge a \neq -2$, тада систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(3 - \frac{2}{a+1}, \frac{2}{a+1}, 0 \right).$$

Ако је $a = -2$, онда систем има бесконачно много решења облика

$$(x, y, z) = (5, -2-t, t), t \in \mathbb{R}.$$

Ако је $a = -1$, тада систем нема решења.

в) $D = -4(a+1)$, $D_x = 2(a+1)$, $D_y = -3a+7$, $D_z = 20$.

Ако је $a \neq -1$ систем има јединствено решење облика

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3a-7}{4(a+1)}, -\frac{5}{a+1} \right).$$

Ако је $a = -1$ тада систем нема решења ($D_z = 20 \neq 0$).

7. Решити хомогени систем једначина и дискутовати решења у зависности од параметра a .

$$2x + 2y + 3z = 0 \quad x + y + z = 0$$

а) $3x + ay + 5z = 0$; б) $ax + 4y + z = 0$;

$$x + 7y + 3z = 0 \quad 6x + (a+2)y + 2z = 0$$

$$x + 2y + z = 0 \quad x + y + z = 0$$

в) $x + y + z = 0$; г) $x + (a+1)y + 2z = 0$.

$$ax + y + z = 0 \quad x + (a+1)z = 0$$

Решење:

а) Услов да хомоген систем има нетривијална решења је да детерминанта матрице система буде једнака нули или како смо већ нагласили да ранг матрице система није једнак броју непознатих.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & a & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

За $a = 5$ матрица система је $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ и њен ранг је једнак 2, што значи да се

систем своди на две једначине са три непознате:

$$2x + 2y = -3z$$

$$3x + 5y = -5z$$

Према томе, решење система је $(x, y, z) = (-5t/4, -t/4, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

б) $D = a^2 - a - 12$.

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 4 \wedge a \neq -3$, систем има само тривијално решење $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$D = 0$ за $a = 4$ и тада систем постаје:

$$x + y + z = 0$$

$$4x + 4y + z = 0$$

$$6x + 6y + 2z = 0$$

који има решења облика $(x, y, z) = (k, -k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

$D = 0$ за $a = -3$ систем постаје:

$$x + y + z = 0$$

$$-3x + 4y + z = 0$$

$$6x - y + 2z = 0$$

који има решења облика $(x, y, z) = (-3k, -4k, 7k)$, $k \in \mathbb{R}$.

в) $D = a - 1$.

$D \neq 0$ за $a \neq 1$, тада систем има само тривијално решење $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

За $D = 0$, односно за $a = 1$, систем поред тривијалног има и бесконачно много нетривијалних решења и своди се на систем облика $(x, y, z) = (-t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

г) $D = a^2 + 1 \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$, па систем има само тривијално решење.

8. Решити систем једначина матричном методом:

$$x + 2y - z = -3 \quad x + y + z = 2 \quad 2x - y + 3z = -1$$

а) $2x + 3y + z = -1$; б) $x + 2y + 3z = 2$; в) $x + 2y - 4z = 5$.

$$x - y - z = 3 \quad x + y - 2z = 5 \quad 3x + y + 2z = 1$$

Решење:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\det A = 9 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, (x, y, z) = (2, -2, 1);$$

$$\text{б) } (x, y, z) = (1, 2, -1);$$

$$\text{в) } (x, y, z) = (1, 0, -1).$$

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Матрица

Детерминанта

Сарусово правило

Лапласово правило

Ранг матрице

Елементарне трансформације

Системи линеарних једначина

Гаусов метод

Крамеров метод

Матрични метод

4. ГЛАВА

ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ

1. **ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ**
2. **НИЗОВИ**
3. **ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију појма функције,
2. особине реалних функција,
3. дефиницију инверзне функције,
4. дефиницију сложене функције,
5. појам низа,
6. операције са низовима,
7. испитате конвергенцију низа,
8. одредите граничну вредност функције.

ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ

Пут од фиксних величина ка променљивој, као апстракцији вишег степена, везан је за период од 13. до 16. века. Декартова метода координата омогућила је дефинисање функционалне зависности и даљи развој математике. Тек у 19. веку немачки математичар L. Dirichlet (1805-1859) направио је одлучијући корак у уопштавању појма функције, прекинувши традиционална схватања којим се појам функције изједначавао са појмом аналитичког израза и даје дефиницију коју ми данас модификовано користимо. Модерна теорија скупова отишла је још даље и ослободила појам функције ограничења везаних за домен и кодомен.



R Descartes (1596-1650)

Декарт је био велики француски математичар и филозоф, али се данас његово име првенствено памти по вези коју је успоставио између алгебре и геометрије. На тај начин створио је нову научну дисциплину, аналитичку геометрију, која је омогућила даљи напредак математике.

У филозофији заступао је методу критичке сумње и позната је његова мисао “мислим дакле постојим”.

- Нека су A и B произвољни скупови. **Пресликавање** или **функција** $f : A \rightarrow B$ представља закон придруживања помоћу којег се произвољном елементу $x \in A$ додељује по тачно један елемент $y \in B$ такав да је $y = f(x)$.

- Скуп A назива се **област дефинисаности** или **домен** функције и обележава са D_x .
- Скуп B назива се **област вредности** или **кодомен** обележава са D_y .
- Елемент $x \in A$ назива се **оригинал**, а $y \in B$ његова **слика**.
- За функцију $f : A \rightarrow B$ кажемо да је **једнозначна** ако било којем елементу $x \in A$ одговара највише један елемент $y \in B$.
- Функција $f : A \rightarrow B$ се назива пресликавање “1–1” или **инјективном** ако $(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Функција $f : A \rightarrow B$ се назива пресликавање “на” или **сурјективним** ако $(\forall y \in B, \exists x \in A) y = f(x)$.
- Ако је пресликавање $f : A \rightarrow B$ “1–1” и “на” зовемо га **бијективним** или обострано једнозначним пресликавањем.

Пример:

$f(x) = 3x + 2$, $A = B = R$, јесте бијекција.

$f(x) = 3x^2 + 2$, $A = R$, $B = [2, +\infty)$, није “1-1”, а јесте “на”, није бијекција.

РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

- Под **реалном функцијом** подразумева се свако пресликавање код кога су оригинал и слика реални бројеви.

Пример:

Одредити домен функција:

а) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$;

Знајући да именилац разломка мора да буде различит од нуле, тј. $x-3 \neq 0$, добијамо $x \neq 3$. Према томе домен функције је скуп $D_x = R \setminus \{3\}$ или уобичајен је и запис $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

б) $y = \sqrt{4-x^2}$; $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$.

в) $y = \ln \frac{x}{3-x}$; $\frac{x}{3-x} > 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x \in (0, 3)$.

г) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$. $D_x = \mathbb{R}$.

Пример:

Одредити кодомен функција:

а) $y = \sin x$, $y \in [-1, 1]$; б) $y = x - 2$, $D_y = \mathbb{R}$; в) $y = x^2 + 1$, $y \in [1, +\infty)$.

ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

- Нека је $f : A \rightarrow B$ бијективно пресликавање (“1–1” и “на”). Тада постоји јединствена функција $f^{-1} : B \rightarrow A$ коју називамо **инверзно пресликавање** или **инверзна функција** таква да је

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

- За дату функцију $f : A \rightarrow B$ може да постоји само једна инверзна функција $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Пример:

Одредити инверзну функцију функције $f(x) = 2x - 1$.

Прво треба доказати да је пресликавање бијекција.

Ако је испуњено $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ пресликавање је “1–1”. Изрази који у себи садрже неједнакости се тешко доказују и једноставније је користити контрапозицију предходног израза која гласи $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, дакле $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, чиме смо доказали да је пресликавање “1–1”.

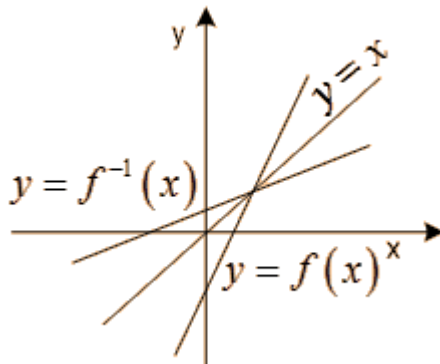
Да бисмо доказали да је пресликавање “на” решимо полазну једначину по y .

Добићемо израз $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. Онда $(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}) x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ и закључујемо да је пресликавање “на”.

Пошто је пресликавање “1–1” и “на”, односно бијекција, постоји инверзно пресликавање f^{-1} .

Заменом вредности x и y у изразу $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ добијамо $f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Графици функција f и f^{-1} су симетрични у односу на праву $y = x$.

**Пример:**

Одредити инверзну функцију функције $f(x) = x^2$.

Пошто је пресликавање $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ није “1–1” односно бијекција, не постоји инверзно пресликавање f^{-1}

СЛАГАЊЕ ФУНКЦИЈА

- **Производом** две функције $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ назива се функција $g \circ f: A \rightarrow C$, за коју важи:

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Пример:

Дате су функције $f(x) = x+3$ и $g(x) = 2x - \sqrt{x}$. Одредити $f \circ g$, $g \circ f$ и $f \circ f$.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2x + 3 - \sqrt{x}, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = 2x + 6 - \sqrt{x+3}.$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = x + 6.$$

ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈА

- Функција $f(x)$ је **ограничена** на скупу $A \subseteq D_x$ ако важи:

$$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) m \leq f(x) \leq M.$$

График функције се налази између две праве $y = m$ и $y = M$.

Ако бројеви m и M не постоје, за функцију $f(x)$ кажемо да је неограничена.

Пример:

Испитати ограниченост функције $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Како је за $(\forall x \in \mathbb{R}) \ 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, функција је ограничена.

- **Нула** функције је онај број $\alpha \in D_x$ за који је $f(\alpha) = 0$.

Нуле функције су тачке пресека графика функције са Ox осом.

Пример:

Одредити нуле функција:

а) $y = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$; $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Како функција није дефинисана за $x = -2$ нула функције је само $x = 2$.

б) $y = \frac{1 + \ln x}{x^2}$; $y = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

в) $y = \frac{e^x}{x-1}$; $y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ и функција нема нула.

- Функција $f(x)$ је **позитивна** на домену A ако $(\forall x \in A) \ f(x) > 0$, а **негативна** ако $(\forall x \in A) \ f(x) < 0$.

- Појмови позитиван и негативан представљају **знак** функције.

- Функција $f(x)$ је **парна** ако је $(\forall x \in D_x), \ f(-x) = f(x)$.

График парне функције је симетричан у односу на осу Oy .

- Функција $f(x)$ је **непарна** ако је $(\forall x \in D_x), \ f(-x) = -f(x)$.

График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак O .

Пример:

Испитати парност и непарност функција:

а) $f(x) = x^2 - 2$; $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$, функција је парна.

б) $f(x) = x^3 - 2x + \sin x$;

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + \sin(-x) = -x^3 + 2x - \sin x = -(x^3 - 2x + \sin x) = -f(x),$$

функција је непарна.

в) $f(x) = x^2 - 2x^3 + 1;$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)^3 + 1 = x^2 + 2x^3 + 1, \text{ функција није ни парна ни непарна.}$$

- Функција $f(x)$ је **периодична** ако постоји број $T \neq 0$ за који је испуњена једнакост $(\forall x \in A) f(x+T) = f(x)$. Број T називамо периодом функције. Најмањи позитивни период зовемо **основним периодом функције**.

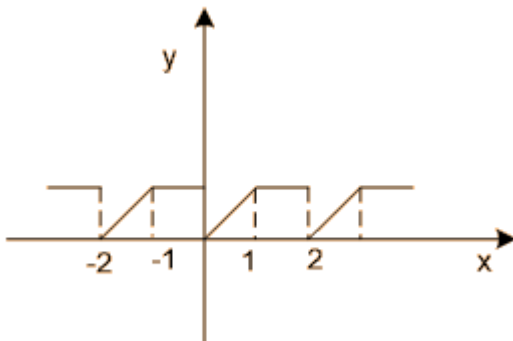
Пример:

Све тригонометријске функције су периодичне. Функције $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ имају основни период $T = 2\pi$, а функције $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $f(x) = \operatorname{ctg} x$ имају основни период $T = \pi$.

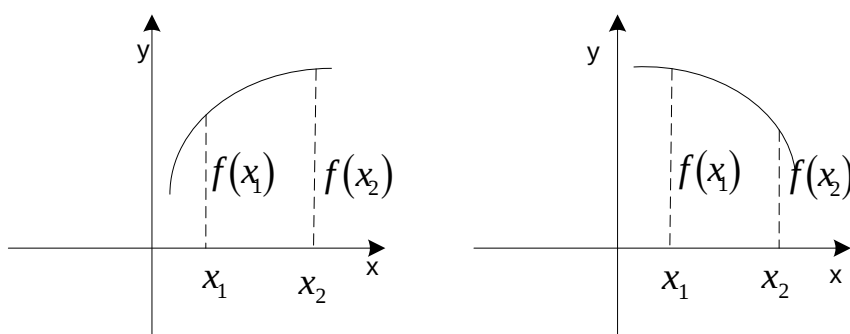
Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ и } f(x+2) = f(x).$$

Функција је периодична са периодом $T = 2$.



- Функција $f(x)$ је **растућа** (означавамо $f(x) \nearrow$) на домену A ако $(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, а **строго растућа** ($f(x) \nearrow$) ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Функција $f(x)$ је **опadaјућа** (означавамо $f(x) \searrow$) на домену A ако $(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, а **строго опадајућа** ($f(x) \searrow$) ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Растуће и опадајуће функције једним именом зовемо **монотоне функције**.



Испитати монотоност следећих функција:

- $$\begin{aligned}
2x_1^2 - 8x_1 + 5 - 2x_2^2 - 8x_2 - 5 &= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 8(x_1 - x_2) = \\
&= 2 \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(x_1 + x_2 - 4)}_{\substack{>0, x>2 \\ <0, x<2}} \begin{cases} <0, \text{расте;} \\ >0, \text{опада.} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Функција $f(x)$ има **максимум** у тачки $x=a$ ако постоји број $\varepsilon > 0$, такав да је $f(a) \geq f(x)$ за $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Функција $f(x)$ има **минимум** у тачки $x=a$ ако постоји број $\varepsilon > 0$, такав да је $f(a) \leq f(x)$ за $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Минимум и максимум функције називамо **екстремним вредностима** функције.

Одредити екстреме функција:

- а) $y = x^2 - 1$; Тачка $(0, -1)$ представља минимум функције.
 б) $y = 3^x$; Функција нема екстрема, јер је строго растућа.

- Функција $f(x)$ на домену A , за $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 \neq x_2$ је

конвексна ако $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ и

конкавна ако $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Пример:

Функција $y = x^2$ је конвексна, што закључујемо из

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0, \text{ за } x_1 \neq x_2.$$

ЗАДАЦИ

Одредити област дефинисаности следећих функција:

1. а) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; б) $y = \frac{1 - 2x}{(x - 1)^2}$.

Решење:

а) $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;

б) $D_x = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = \sqrt{4x - x^2}$; в) $y = \frac{8x - 16 - x^2}{\sqrt{2 - x}}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

Решење:

а) $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3 - x)(3 + x) \geq 0, x \in [-3, 3]$;

б) $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4 - x) \geq 0, x \in [0, 4]$;

в) $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2, x \in (-\infty, 2)$;

г) 1° $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$;

2° $3 + 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -(x + 1)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3 - x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$.

Решење је пресек добијених решења $x \in [2, 3)$.

3. а) $y = \ln \frac{x}{3-x}$; б) $y = \ln(x^2 - 6x)$; в) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$.

Решење:

а) $\frac{x}{3-x} > 0, x \in (0, 3)$;

б) $x^2 - 6x > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$;

в) 1° $\ln \frac{5x-x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$ 2° $\frac{5x-x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 5)$.

Решење је пресек добијених решења $x \in [1, 4]$.

4. Одредити кодомен функција:

а) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$; б) $y = x^2 - 9$; в) $y = 2^x + 1$.

Решење:

а) $y \in (-\infty, -1]$;

б) $y \in [-9, +\infty)$;

в) $y \in [1, +\infty)$.

5. Одредити домен и нуле датих функција:

а) $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 1}$; б) $y = x\sqrt{x^2 - 1}$;

в) $y = (x^2 - 4)e^x$; г) $y = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.

Решење:

а) Домен: $D_x = R$.

Нуле функције: $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -5$.

б) Домен: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

в) Домен је скуп R . Нуле функције: $(x^2 - 4)e^x = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2, e^x \neq 0$.

г) Домен: $x \in (0, +\infty)$.

Нуле функције: $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

6. Одредити домен, нуле и знак функција:

а) $y = \ln(1-x)$; б) $y = \ln \frac{x-4}{1-x}$.

Решење:

а) Домен: $1-x > 0$, $x \in (-\infty, 1)$.

Нуле функције: $1-x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Знак функције:

$$y < 0 \Leftrightarrow 0 < 1-x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1),$$

$$y > 0 \Leftrightarrow 1-x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

б) Домен: $\frac{x-4}{1-x} > 0$, $x \in (1, 4)$.

Нуле функције: $x = \frac{5}{2}$.

Знак функције: $y < 0$ за $0 < \frac{x-4}{1-x} < 1$, $x \in \left(\frac{5}{2}, 4\right)$ и

$$y > 0 \text{ за } \frac{x-4}{1-x} > 1 \text{ за } x \in \left(1, \frac{5}{2}\right).$$

7. Доказати да функције нису ни парне ни непарне:

$$\text{а) } y = \frac{2x-2}{x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{e^x}{x-1}.$$

Решење:

$$\text{а) } y(-x) = \frac{2(-x)-2}{(-x)^2} = \frac{-2(x+1)}{x^2}; \quad y(-x) \neq y(x) \text{ и } y(-x) \neq -y(x);$$

$$\text{б) } y(-x) = \frac{e^{-x}}{-x-1} = -\frac{1}{e^x(x+1)}, \quad y(-x) \neq y(x) \text{ и } y(-x) \neq -y(x).$$

8. Доказати да су функције парне:

$$\text{а) } y = \sqrt{4-x^2}; \quad \text{б) } y = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$\text{в) } y = (x^2-1)e^{-x^2}; \quad \text{г) } y = x^2-1-3\cos x.$$

Решење:

$$\text{а) } y(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = y(x);$$

$$\text{б) } y(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = y(x);$$

$$\text{в) } y(-x) = ((-x)^2-1)e^{-(-x)^2} = (x^2-1)e^{-x^2} = y(x);$$

$$\text{г) } y(-x) = (-x)^2-1-3\cos(-x) = x^2-1-3\cos x = y(x).$$

9. Доказати да су функције непарне:

$$\text{а)} y = x^3 - 2x ; \quad \text{б)} y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} ;$$

$$\text{в)} f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} ; \quad \text{г)} y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} .$$

Решење:

$$\text{а)} y(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -(x^3 - 2x) = -y(x) ;$$

$$\text{б)} y(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{2 \cdot (-x)} = -\frac{x^2 - 4}{2x} = -y(x) ;$$

$$\text{в)} y(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{e^{-x} - 1} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} = -\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -y(x) ;$$

$$\text{г)} y(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -y(x) .$$

Испитати све познате особине функција:

$$10. \quad \text{а)} y = \ln(x^2 - 1) ; \quad \text{б)} y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} .$$

Решење:

$$\text{а)} \text{Домен: } (x-1)(x+1) > 0, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) .$$

$$\text{Нуле: } x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{2} .$$

Знак функције:

$$y(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$$

$$y(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) .$$

$$y(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = y(x), \text{ функција је парна.}$$

$$\text{б)} \text{Домен: } 1 - \ln x \neq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \neq e \wedge x > 0, \quad x \in (0, e) \cup (e, +\infty) .$$

$$\text{Нуле: } 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} .$$

$$y(x) < 0, x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty), \quad y(x) > 0, x \in (e^{-1}, e) .$$

Функција није ни парна ни непарна.

11. Одреди основни период следећих функција:

а) $y = 2\sin 2x$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

в) $y = \sin^2 x$; г) $y = \cos x + 3\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$.

Решење:

а) $2\sin 2x = 2\sin 2(x+T) \Leftrightarrow \sin 2x - \sin 2(x+T) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{2x-2x+2T}{2} \cdot \cos \frac{2x+2x-2T}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin T \cdot \cos(2x-T) = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0, \cos(2x-T) \neq 0 \Leftrightarrow T = \pi;$$

Напомена: Основни период функција $y = \sin bx$ и $y = \cos bx$ је $T = \frac{2\pi}{b}$, а за

функције $y = \operatorname{tg} bx$ и $y = \operatorname{ctg} bx$ је $T = \frac{\pi}{b}$.

б) $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$;

в) $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $T = \pi$;

г) $T_1 = 2\pi, T_2 = \pi, T_3 = \frac{2\pi}{3}$, па је $T = \operatorname{NZS}(T_1, T_2, T_3) = 2\pi$.

12. Испитати ограниченост следећих функција:

а) $y = \sqrt{4-x^2}$; б) $y = x-4$; в) $y = 2\sin 2x$.

Решење:

а) Функција је неограничена $y \in [0, 2]$;

б) Функција је неограничена;

в) Функција је ограничена $y \in [-2, 2]$.

13. Испитати монотоност следећих функција:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2^x$.

Решење

а) $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$, што значи да функција строго расте.

б) $x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$, што значи да функција расте.

14. Испитати конвексност, конкавност функције $f(x) = \log_2 x$.

Решење

$$\log_2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \frac{\log_2(x_1) + \log_2(x_2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\log_2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \log_2 (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}, \text{ па је функција конвексна.}$$

НИЗОВИ

- Уређени скуп $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ образује **низ** ако се сваком природном броју $n \in \mathbb{N}$ по неком закону придружи један и само један елемент $a_n \in \mathbb{R}$.
- Низ је пресликавање $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Пример:

1, 2, 3, ... представља низ природних бројева.

- Низ је одређен својим општим чланом a_n .

Пример:

Ако је општи члан низа $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, онда су чланови низа

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

- Низ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ је:

растући ако је $a_{n+1} > a_n$,

оппадајући ако је $a_{n+1} < a_n$,

неоппадајући ако је $a_{n+1} \geq a_n$,

нерастући ако је $a_{n+1} \leq a_n$, за $n \in \mathbb{N}$.

- Ови низови зову се **монотони** низови.
- За низ се каже да је **ограничен** ако постоје реални бројеви m и M такви да је $m \leq a_n \leq M, n \in \mathbb{N}$.
- Број m је **доња граница**, док је M **горња граница** низа.

- Највећа доња граница назива се **инфимум** низа, а најмања горња граница назива се **супремум** низа.

Пример:

Низ са општим чланом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ је ограничен. Доња граница је $m = -1$, а горња граница је $M = \frac{1}{2}$, тј. сви чланови низа задовољавају релацију $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$.

Напомена: Треба нагласити да m и M нису јединствени, наиме има непробројиво много других граница.

Тачне су и следеће неједнакости $-1 \leq a_n < 1$ или $-2 < a_n < 2$ итд.

У овом примеру су наведени управо инфимум и супремум скупа вредности низа.

ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Идеја граничне вредности била је позната још у античком добу. Старогрчки математичари Еудокс (408-355), Архимед (287-212) и други бавили су се проблемом квадратуре равних фигура и кубатуре геометријских тела и те проблеме успешно решавали методом исцрпљивања али прецизну дефиницију граничне вредности функције дао је Коши 1821. год.

- Број a се назива **граничном вредношћу** низа, ако за сваки произвољно мали позитивни број ε , постоји природни број n_0 , такав да је

$$(\forall n > n_0) |a_n - a| < \varepsilon,$$

што означавамо са

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ или } a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

- Низ који има граничну вредност назива се **конвергентним низом**, а који је нема назива се **дивергентним низом**.
- Гранична вредност конвергентног низа је **јединствена**.

Пример:

Дат је низ $a_n = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Показати да је његова гранична вредност $\frac{1}{2}$.

Одредити n_0 за $\varepsilon = 0,01$.

Како је $|a_n - a| = \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$ за $\forall \varepsilon > 0$, закључујемо да је $\frac{1}{2}$

гранична вредност низа.

За $\varepsilon = 0,01$ добијамо $\frac{1}{4n+2} < 0,01$, одакле $n > \frac{98}{4} = 24,5$ тј. $n_0 \geq 24$.

Дакле, ван ε околине броја $\frac{1}{2}$ налази се 24 члана низа, а у ε околини почев од a_{25} сви остали чланови низа, тј. бесконачно много њих.

ОСОБИНЕ КОНВЕРГЕНТНИХ НИЗОВА

- Сваки конвергентан низ је *ограничен*.
- Монотон и ограничен низ је *конвергентан*.

Пример:

Низ $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, односно $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \right)$ је монотono опадајући,

$a_n > a_{n+1}$, а ограничен је $1 < \frac{n+1}{n} < 2$, што значи да постоји гранична вредност

овог низа, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

ОПЕРАЦИЈЕ СА ГРАНИЧНИМ ВРЕДНОСТИМА НИЗОВА

Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тада важи:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b;$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0).$

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА НИЗА

- Тачка a на бројној правој у чијој се свакој произвољно малој околини налази бесконачно много чланова низа назива се **тачка нагомилавања** низа.
- Број a је **тачка нагомилавања** низа ако је за $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n \in I$ $|a_n - a| < \varepsilon$, где је I један бесконачни подскуп скупа природних бројева
- Низ може имати једну, две, уопште коначно или бесконачно много тачака нагомилавања.
- Ограничен низ који има само једну тачку нагомилавања је **конвергентан**.

Пример:

- Низ са општим чланом $a_n = n$ нема тачку нагомилавања.
- Низ са општим чланом $a_n = \frac{1}{n}$ има једну тачку нагомилавања $a = 0$ која не припада низу.
- Низ са општим чланом $a_n = (-1)^n$ има две тачке нагомилавања $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$, која припадају низу.

БРОЈ e

- Гранична вредност низа са општим чланом $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ је број $e = 2,718281\dots$ односно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Напомена: Може се доказати да је низ са општим чланом $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотон и ограничен, па самим тим и конвергентан.

Пример:

Наћи граничну вредност низа: $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

Ако уведемо смену $\frac{3}{n} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow n = 3t$ и за $n \rightarrow \infty$ добијамо $t \rightarrow \infty$, онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3;$$

ЗАДАЦИ

1. Написати неколико чланова низа чији је општи члан:

а) $a_n = \frac{1}{n+1}$; б) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Решење:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; б) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$.

2. Наћи општи члан низа задатог са неколико првих чланова:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$; б) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$.

Решење:

а) $a_n = \frac{1}{2^n}$; б) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.

3. Наћи тачке нагомилавања и испитати конвергенцију следећих низова:

а) $a_n = \frac{1}{n+1}$; б) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

в) $a_n = \frac{n+1}{n}$; г) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$.

Решење:

а) тачка нагомилавања је 0 и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

б) тачка нагомилавања је 0 и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

в) тачка нагомилавања је 1 и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$;

г) тачке нагомилавања су -1 и 1 и низ не конвергира.

4. Дат је низ $a_n = \frac{n}{n+1}$. Израчунати његову граничну вредност. Одредити n_0 за $\varepsilon = 0,01$.

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Како је 1 гранична вредност низа, онда је $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < 0,01$

одакле је $n > 99$ тј. $n_0 = 99$.

Према томе 99 чланова низа је ван ε околине тачке 1 ширине 0,01, а почев од a_{100} сви остали, тј. њих бесконачно много налазе у ε околини тачке 1.

Одредити граничне вредности низова:

5. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n^2 + 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n + 1}$.

Решење:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$;

$$\text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = 0;$$

$$\text{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \infty;$$

$$6. \quad \text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(n+1)^2}; \quad \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Решење:

а) Знајући формулу за збир првих n чланова аритметичког низа

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), \text{ где је } a_1 = 1, d = 2, \text{ добијамо:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

б) Знајући формулу за збир првих n чланова геометријског низа

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ где је } a_1 = 1, q = \frac{1}{2} \text{ добијамо:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$7. \quad \text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n); \quad \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n);$$

$$\text{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}}; \quad \text{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а)} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}} \right) = 1.$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = \infty.$$

$$8. \quad \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+1)!}{n!-(n+1)!}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n}{3^n-5^n};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+1)!}{n!-(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+n!(n+1)}{n!-n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(1+n+1)}{n!(1-(n+1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{-n} = -1.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n}{3^n-5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1} = -1.$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

9. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Решење:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{3} \cdot \frac{n}{2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2};$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{2n}{n+1}}$
 $= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+2) - \ln n).$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \ln e^2 = 2.$$

11. Доказати следеће резултате:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 1;$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = 0;$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{3n+1} - \frac{n}{2}\right) = -\frac{1}{3};$ г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{1+2+3+\dots+(n-1)} = 2;$

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{2} = 2;$ ж) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1} = 0;$

е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = 3;$ з) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{n} = 0;$

з) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2};$ и) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n} = e^{-6};$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n+1} = e^{-2}.$$

ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

Уопштавајући појам граничне вредности низа долазимо до појма граничне вредности функције.

- Кажемо да је a **тачка нагомилавања** скупа $A \subset \mathbb{R}$ ако се у свакој околини тачке a налази бар један елемент из A различит од a .
- Тачка нагомилавања скупа A не мора да припада скупу A .
- Ако a није тачка нагомилавања, она се назива **изолована тачка**.

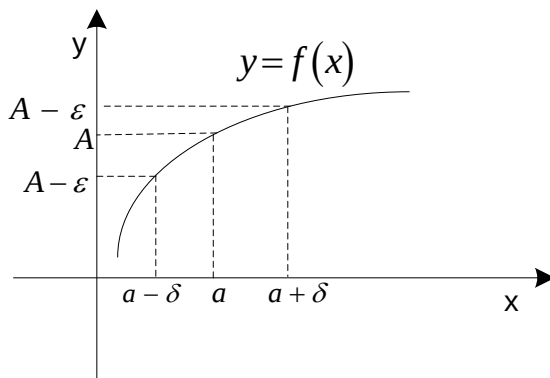
Нека је a тачка нагомилавања домена функције $f(x)$.

- Број A је **гранична вредност** функције $f(x)$ када $x \rightarrow a$, ако за сваки $\varepsilon > 0$ постоји број $\delta > 0$, такав да је за $\forall x \in D_x$ за које важи услов $|x - a| < \delta$, испуњена неједнакост $|f(x) - A| < \varepsilon$ и пишемо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

- Наведену дефиницију можемо записати и на следећи начин:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) (x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon))$$



Напомена: Претходна дефиниција значи да ако се на y оси зада ε околина тачке A , тада постоји δ околина тачке a на x оси, тако да када $x \in (a - \delta, a + \delta)$, онда $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, тј. ако независно променљива x тежи a , вредности функције $f(x)$ теже A .

Напомена: Функција у тачки a може, а не мора бити дефинисана, али тачка a мора бити тачка нагомилавања домена.

Пример:

Доказати да је $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

Полазећи од дефиниције граничне вредности, ако је $|3x + 1 - 7| < \varepsilon$, добијамо

$$3|x - 2| < \varepsilon, \text{ тј. } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Довољно је узети да је $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, па да горња формула буде тачна.

ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- Број A је десна *гранична вредност* функције $f(x)$ у тачки a , тј.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A, \text{ ако и само ако је (акко)}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Број A је лева *гранична вредност* функције $f(x)$ у тачки a тј.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A, \text{ акко}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Функција $f(x)$ има *граничну вредност* A када $x \rightarrow a$ ако лева и десна гранична вредност постоје и једнаке су A .

Пример:

Одредити леву и десну граничну вредност функције $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ у тачки $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 1) = 2.$$

Пошто лева и десна гранична вредност функције у тачки $x = 1$ постоје и имају исту вредност, функција има граничну вредност која износи 2.

Пример:

Одредити граничну вредност функције $f(x) = x \cdot \frac{|x-2|}{x-2}$ у тачки $x = 2$.

Како је $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$, добијамо:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} x \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} x \cdot \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (-x) = -2.$$

Пошто лева и десна гранична вредност функције у тачки $x = 2$ нису једнаке, функција нема граничну вредност у тој тачки.

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ акко:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M > 0) (\forall x) \quad x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

▪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ акко:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M < 0) (\forall x) \quad x < M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

▪ Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, кажемо да је $f(x)$ **бесконачно мала** кад $x \rightarrow a$.

▪ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ акко

$$(\forall M > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

▪ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ акко

$$(\forall M < 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M.$$

▪ Ако је $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$, кажемо да је $f(x)$ **бесконачно велика** кад $x \rightarrow a$.

▪ Ако је функција $f(x)$ бесконачно мала кад $x \rightarrow a$, тада је $\frac{1}{f(x)}$

бесконачно велика $x \rightarrow a$.

ОСОБИНЕ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈА

Ако функције $f(x)$ и $g(x)$ имају граничне вредности кад $x \rightarrow a$, тј. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, тада је:

- $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c A$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$,
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ за $(g(x) \neq 0, B \neq 0)$.

НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- Функција $f(x)$ је **непрекидна** у тачки $a \in D_x$, ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- Функција $f(x)$ је **непрекидна** у тачки $a \in D_x$, ако је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- Ако функција није непрекидна у тачки a , онда је a то **тачка прекида функције**.
- Функција је **непрекидна на скупу** $A \subseteq D_x$ ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Напомена: Дефиниција непрекидности има сличности са дефиницијом граничне вредности у тачки. Разлика је у томе што дефиниција граничне вредности не захтева дефинисаност функције у тачки a , а непрекидности захтева.

- Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне у тачки $a \in D_x$, онда су у тој тачки **непрекидне** и функције:

$$c \cdot f(x), f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0.$$

Пример:

$$\text{Испитати непрекидност функције } f(x) = \begin{cases} 3x & , -\infty < x \leq 1 \\ 3-x & , 1 < x < +\infty \end{cases}.$$

Функција је непрекидна у свакој тачки осим за $x=1$.

$\lim_{x \rightarrow 1-} 3x = 3$, а $\lim_{x \rightarrow 1+} (3-x) = 2$, значи да не постоји $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, па у тој тачки функција има прекид.

АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈЕ

- Права $x=a$ је **вертикална асимптота** функције $f(x)$ ако је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

- Права $y=b$ је **хоризонтална асимптота** функције $f(x)$ ако је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b.$$

- Права $y=kx+n$ је **коса асимптота** функције $f(x)$ ако је:

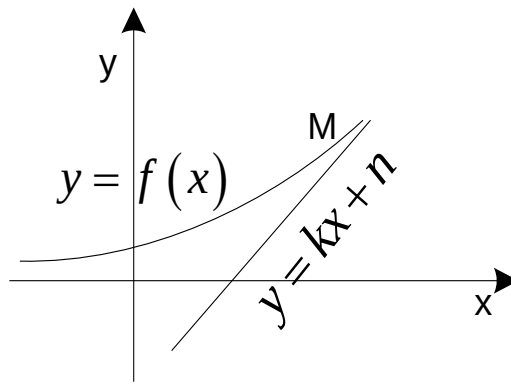
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - n) = 0.$$

Одавде је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = n$.

Ако поделимо последњу везу са x добићемо:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x) - kx}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = k, \text{ па је}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ а } n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

**Пример:**

Одредити асимптоте функције:

- $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$.

Како функција има прекиде за $x = \pm 1$, те праве могу да буду њене вертикалне асимптоте.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Функција има две вертикалне асимптоте $x = \pm 1$.

Пошто је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2 - 1} = 0$, функција има хоризонталну асимптоту, x - осу, тј. праву $y = 0$.

Функција која има хоризонталну нема косу асимптоту.

- $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$.

Како функција има прекид за $x = 1$, а $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$, права $x = 1$ је вертикална асимптота.

Пошто је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, функција нема хоризонталну асимптоту.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 - x} = 3$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$, па је коса асимптота права $y = 3x + 3$.

ЗАДАЦИ

1. На основу дефиниције граничне вредности показати да је:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Решење:

а) По дефиницији број 1 ће бити гранична вредност функције ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, тако да ако је $|x-1| < \delta$, онда је $|(2x-1)-1| < \varepsilon$.

Како је $|(2x-1)-1| = 2|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$, и ако узмемо да је $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, биће $|(2x-1)-1| < \varepsilon$, за $|x-1| < \delta$. Значи, 1 је гранична вредност функције.

$$\text{б) } \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon, \text{ за сваки } |x-2| < \delta = \varepsilon.$$

Одредити граничне вредности функција:

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^2; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+1}{2x+1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2-2x+1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2-2x+1}. \end{aligned}$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} \right)^2 = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \infty; \quad \text{в) } 0; \quad \text{г) } \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-4x+3}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5-16x}{2x^2+4x-16}. \end{aligned}$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{x+4} = -1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2-9)(x^2+3)}{(x+3)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x^2+3)}{x^2+1} = -\frac{36}{5};$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x^3 - x - 3x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x^2 - 1) - 3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + x - 3} = -3; \\ \text{г)} \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x); \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}; \\ \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{4x}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2}. \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0. \\ \text{б)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 4}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8}. \\ \text{в)} \frac{1}{4}; \quad \text{г)} 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2}; \\ \text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x-1}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}} \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{x^2 + 16} + 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3 - 1}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $2\sqrt[4]{a}$.

6. Доказати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Решење:

За $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, уз услов $x \neq 0$, добијамо $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$.

$$|\sin x| \leq |x| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| \Leftrightarrow 1 \leq \left| \frac{x}{\sin x} \right| \leq \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Знајући да је $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, закључујемо да је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x}$.

Решење:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin 2x}{2x}}{\frac{3 \sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$;

в) 1; г) $\frac{1}{3}$.

8. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Решење:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2 (\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2 (\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x})} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2} \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3}{2} x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Решење:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2}} = \pi^2 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)(\pi + x)} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{4\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{в) } -\frac{1}{2}; \quad \text{г) } 2.$$

$$10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) + \sin(x-a)}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x - \cos 3x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos x - \sin x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}.$$

Решење:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) + \sin(x-a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos a}{x} = 2 \cos a;$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{-2 \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \sin \frac{5x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 \cdot \frac{\sin^2 2x}{4x^2}}{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \cdot \frac{5x}{2}} = \frac{8}{5};$$

$$\text{в)} \sqrt{2}; \quad \text{г)} -\frac{3}{2}.$$

$$11. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}.$$

$$\text{Резултат: а)} 16; \quad \text{б)} \frac{1}{18}; \quad \text{в)} 3.$$

Одредити граничне вредности функција ако је:

$$\boxed{e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \quad \text{ОДНОСНО} \quad \boxed{e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$12. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

Решење:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{6}{2x}} = e^6;$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2;$$

$$\text{г)} e^3.$$

$$13. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3x+3)^{\frac{1}{x+1}}.$$

$$\text{Резултат: а)} e^4; \quad \text{б)} e^8; \quad \text{в)} e.$$

$$14. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(4-x)}{x-3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+6) - \ln 6}{x}.$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\ln(4-x)}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \ln(4-x)^{\frac{1}{x-3}} = \ln \lim_{x \rightarrow 3} (1-(x-3))^{\frac{1}{x-3}} = \ln e^{-1} = -1; \quad \text{б) } \frac{1}{6}.$$

$$15. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{3}{x^2}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{ђ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2}{2\operatorname{tg}^2 x}} = e^2;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{1-\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-(1-\cos x))^{\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \cos \frac{x}{2} - 1 \right)^{\frac{\frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{2} \cdot \frac{3}{x^2}}{\frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6\sin^2 \frac{x}{4}}{16\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = e^{-\frac{3}{8}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos 2x-1)^{\frac{\frac{\cos 2x-1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{\cos 2x-1}{2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = e^{-2};$$

$$\text{ђ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1+\sin 2x-1)^{\frac{\sin^2 2x}{(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{(1+\sin 2x)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$16. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x};$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1;$$

в) $\ln a$.

$$17. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \frac{x^2}{4}} \right) = \frac{3}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = -2; \quad \text{в) } 1.$$

18. Одредити асимптоте функција:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x-1}; \quad \text{б) } y = \frac{x+3}{x+1};$$

$$\text{в) } y = \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1}; \quad \text{г) } y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 4}.$$

Решење:

а) Функција има прекид за $x=1$. Како је $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$,

функција има вертикалну асимптоту $x=1$.

Како је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, функција има и хоризонталну асимптоту, праву $y=0$,

тј. x - осу.

Функција која има хоризонталну асимптоту нема косу.

б) Права $x=-1$ је вертикална асимптота.

Права $y=1$ је хоризонтална асимптота.

Функција нема косу асимптоту.

в) Права је $x=1$ је вертикална асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1} = \infty$, функција нема хоризонталну асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x^2 - x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 4}{x - 1} = -5, \text{ па је } y = x - 5 \text{ коса асимптота.}$$

г) $x = \pm 2$. Праве $x = \pm 2$ су вертикалне асимптоте.

Хоризонталних асимптота нема.

Коса асимптота је права $y = 2x$.

19. а) $y = \frac{e^x}{x};$

б) $y = xe^{\frac{1}{x}};$

в) $y = \frac{\ln x}{x^2};$

г) $y = \ln \frac{x-2}{x+1}.$

Решење:

а) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x}{x} = -\infty$, вертикална асимптота је права $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, функција има хоризонталну асимптоту праву $y = 0$

када $x \rightarrow -\infty$.

Нема косих асимптота.

б) $\lim_{x \rightarrow 0+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$, функција има вертикалну асимптоту $x = 0$ када $x \rightarrow 0_+$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$ па функција нема хоризонталну асимптоту.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$, па је коса

асимптота је права $y = x + 1$.

в) Како је $x \in (0, +\infty)$, имамо:

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$, функција има вертикалну асимптоту $x = 0$ када $x \rightarrow 0_+$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, хоризонтална асимптота је права $y = 0$.

Нема косих асимптота.

г) Како је $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, имамо:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \frac{x-2}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln \frac{x-2}{x+1} = -\infty$, функција има вертикалне асимптоте $x = -1$ и $x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x-2}{x+1} = 0$, хоризонтална асимптота је права $y = 0$.

Нема косих асимптота.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Функција

Домен

Кодомен

Инјекција (пресликавање „1-1“)

Сурјекција (пресликавање „на“)

Бијекција (пресликавање „1-1“ и „на“)

Инверзна функција

Слагање функција

Сложена функција

5. ГЛАВА

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

1. ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ
2. ТЕЈЛОРОВА
ФОРМУЛА
3. ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ
РАЧУНА
4. ИСПИТИВАЊЕ
ФУНКЦИЈА
ПОМОЋУ ИЗВОДА

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију извода функције,
2. геометријско тумачење извода функције,
3. таблицу основних извода функције,
4. основна правила диференцирања,
5. извод сложене функције,
6. дефиницију диференцијала функције,
7. појам извода и диференцијала вишег реда,
8. Тејлорову формулу,
9. процену грешке у Тејлоровој формули,
10. Маклоренов развој,
11. Маклоренова формула,
12. Фермаову теорему,
13. Ролову теорему,
14. Кошијеву теорему,
15. Лагранжову теорему,
16. Лопиталову теорему,
17. монотоност функције,
18. екстремне вредности функције,
19. конвексност и конкавност функције,
20. превојне тачке функције,
21. испитивање тока функције.

ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ

Проблеми тангенте и брзине, као и проблеми екстрема, тј. минимума и максимума постепено су подстицали настајање појма извода. Многи математичари још од античке Грчке успевали су да реше неке од ових проблема за појединачне случајеве.

Тек када је Декарт пронашао методу координата омогућено је да се криве представљају једначинама, тако да је створен основни предуслов за појаву опште методе за аналитичко решавање проблема тангенте, односно за дефинисање појма извода.

Проблем тангенте први је решио немачки математичар и филозоф Лајбниц дефинишући нову област математике под називом диференцијални рачун. У исто време Њутн је дефинисао извод као последицу истрживања феномена кретања.

То су биле две идејно и методолшки различите концепције које су довеле до истог резултата.

Данас, диференцијални рачун, представља незаобилазно средство у решавању многих проблема савремене науке и технике.



G. Leibniz (1646-1716)



I. Newton (1642-1727)

Најпознатији спор у историји математике вођен је између Њутна и Лајбница око открића диференцијалног рачуна. Њутн је има само 23 године када је 1666. открио метод, који је назвао метод флуksiје. Он је први схватио да су интеграција и диференцирање две инверзне операције. Међутим оклевао је са објављивањем својих резултата. У међувремену 1675. Лајбниц је самостално дошао до истог метода који је назвао диференцијални рачун. Он је своје резултате одмах публиковао и задобио сва признања. Сукоб ових математичара се настављао тако да је Лондонско краљевско друштво формирало комитет који је 1713. дало приоритет Њутну. Међутим симболика коју је увео Лајбниц била је много једноставнија и опште је прихваћена.

ДЕФИНИЦИЈА ИЗВОДА ФУНКЦИЈЕ

- Нека је функција $f(x)$ дефинисана у околини тачке x .

Произвољну малу величину Δx називамо *прираштај аргумента* x . Када се независна променљива, аргумент, промени од x до $x + \Delta x$, тада се вредност функције промени од $f(x)$ до $f(x + \Delta x)$, тј. за величину $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, која се назива *прираштај функције*.

- Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

тада кажемо да је $f'(x)$ *први извод функције* или *извод функције* $f(x)$ у датој тачки x .

- Поступак налажења извода назива се *диференцирање*.
- Ако је $f'(x)$ коначна вредност, тада кажемо да је функција *диференцијабилна* у датој тачки x .

Пример:

Одредити извод функције $f(x) = x^2$ по дефиницији.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

- Ако постоји гранична вредност $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ она се назива *леви извод функције*, а гранична вредност

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ назива се } \textit{десни извод функције} \text{ у тачки } x.$$

- Функција $f(x)$ је *диференцијабилна* у тачки x ако и само ако *постоји леви и десни извод функције и једнаки су*:

$$f'_+(x) = f'_-(x).$$

- Функција $f(x)$ је *диференцијабилна на интервалу* ако и само ако је диференцијабилна у свакој тачки тог интервала.
- Ако је функција $f(x)$ *диференцијабилна* у некој тачки, онда је она и *непрекидна* у тој тачки. Обрнуто тврђење није тачно.

Пример:

Испитати диференцијабилност функције $f(x) = |x|$ у тачки $x = 0$.

Функција је непрекидна у тачки $x = 0$, али није диференцијабилна јер је

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

тј. $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ па закључујемо да $f'(0)$ не постоји.

ОСНОВНА ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦИРАЊА

- Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне у тачки x , тада је:

а) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), (C = \text{const.});$

б) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$

в) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$

г) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0).$

ТАБЛИЦА ОСНОВНИХ ИЗВОДА

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
$x^\alpha, \alpha \in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a^x, a \in R, 0 < a \neq 1$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x, a \in R, 0 < a \neq 1$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример:

Наћи извод функције $f(x) = C$, $C = \text{const}$, по дефиницији.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример:

Наћи извод функције $f(x) = \sin x$ по дефиницији.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

Пример:

Наћи извод функције $f(x) = a^x$ по дефиницији.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Пример:

Наћи први извод следећих функција:

$$\text{а) } y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\text{б) } y = 3x^3 + 2x - 3, \quad y' = 3(x^3)' + 2(x)' - (3)' = 9x^2 + 2;$$

$$\text{в) } y = e^x \ln x, \quad y' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x};$$

$$\text{г) } y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad y' = \frac{(x^2)'(x^2 - 1) - x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2};$$

$$\text{д) } y = \frac{\ln x}{\ln x - 1}; y' = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x} \ln x}{(\ln x - 1)^2} = -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$$

ИЗВОД ИНВЕРЗНЕ ФУНКЦИЈЕ

Нека је функција $f(x)$ монотона и непрекидна у околини тачке x , а диференцијабилна у тачки x , тј. постоји $f'(x) \neq 0$.

Нека је $x = f^{-1}(y)$ њена инверзна функција.

- За **извод инверзне функције** важи једнакост $y'_x = \frac{1}{x'_y}, x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример:

$$y = \arcsin x$$

Како је $x = \sin y$ инверзна функција функције $y = \arcsin x$ добијамо:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

ИЗВОД СЛОЖЕНЕ ФУНКЦИЈЕ

- Ако је дата сложена функција $F(x) = f(g(x))$ где је функција $g(x)$ диференцијабилна у тачки x , а функција $f(u)$ диференцијабилна у тачки $u = g(x)$, онда је:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Пример:

Наћи извод следећих сложених функција:

$$\text{а) } y = (3 + 2x^2)^{33}, y' = 33(3 + 2x^2)^{32} (3 + 2x^2)' = 33(3 + 2x^2)^{32} \cdot 4x = 132x(3 + 2x^2)^{32}$$

$$\text{б) } y = e^{x^2}, \quad y' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2};$$

$$\text{в) } y = \ln(\operatorname{tg} x), \quad y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}.$$

ЛОГАРИТАМСКИ ИЗВОД

- Извод функције облика $y = f(x)$, $f(x) > 0$, чији се извод не може израчунати на основу правила за диференцирање и таблице извода, добија се тако што се функција прво логаритмује:

$$\log y = \ln f(x),$$

а затим се тражи њен извод

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))' \Rightarrow y' = y(\ln f(x))'.$$

Пример:

Наћи извод функције $y = x^x$.

Први начин:

$$\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1).$$

Други начин:

$$y = x^x = e^{x \ln x}, \quad y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1).$$

ИЗВОД ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ

- Ако је функција задата у имплицитном облику $F(x, y) = 0$ и диференцијабилна је по променљивим x и y , а $F'(x, y) \neq 0$, онда је:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Пример:

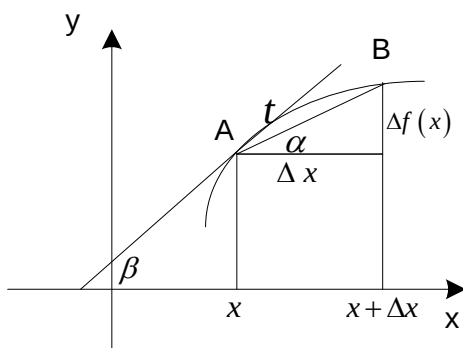
Наћи извод функције $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

Како је $4x^3 + 4y^3 y' = 2xy^2 + 2x^2 y y'$, добијамо

$$4y^3 y' - 2x^2 y y' = 2xy^2 - 4x^3 \Rightarrow y'(4y^3 - 2yx^2) = 2xy^2 - 4x^3 \Rightarrow y' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - yx^2}.$$

ГЕОМЕТРИЈСКО ТУМАЧЕЊЕ ИЗВОДА

Нека је функција $f(x)$ непрекидна у тачки x и дефинисана у некој њеној околини.



Коефицијент правца сечице која је повучена кроз тачке A и B је $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, где је α угао који сечица заклапа са x -осом.

Са друге стране када пустимо да $\Delta x \rightarrow 0$, односно када се тачка B по кривој приближава тачки A , сечица AB постепено постаје тангента криве у тачки A .

Коефицијент правца тангенте која је повучена кроз тачку A износи $k_t = \operatorname{tg} \beta$.

Како $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \beta$, када $\Delta x \rightarrow 0$ добијамо $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, а то је извод функције $f(x)$ у тачки x .

- **Коефицијент правца тангенте** графика функције у тачки A , једнак је вредности првог извода у тој тачки.

- **Једначина тангенте** графика функције у тачки A гласи

$$y - y_A = f'(x_A)(x - x_A).$$

- **Једначина нормале** графика функције у тачки A гласи

$$y - y_A = -\frac{1}{f'(x_A)}(x - x_A).$$

Пример:

Наћи једначину тангенте графика функције $y = x^2 + 1$ у њеној тачки $A(1, 2)$.

Како је $y' = 2x$ добијамо $k_t = y'(A) = 2 \cdot 1 = 2$.

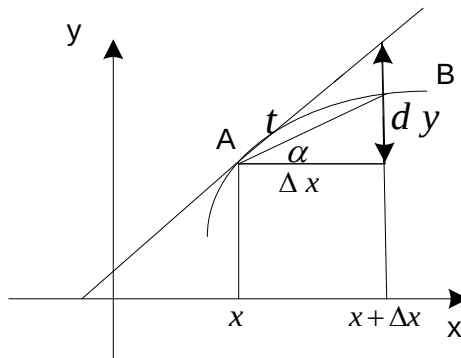
Тангента је права која пролази кроз тачку A , а коефицијент правца је $k_t = 2$.

Њена једначина је $y - 2 = 2(x - 1)$, односно $y = 2x$.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈЕ

- Ако је функција $f(x)$ диференцијабилна у тачки x , онда се израз $f'(x)\Delta x$ назива **диференцијалом функције** у тачки x и обележава dy :

$$dy = f'(x)\Delta x.$$



- Диференцијал функције $y = x$ је $dy = 1 \cdot \Delta x$, тј. $dx = \Delta x$.
- Извод функције се може изразити преко диференцијала као $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.
- Диференцијал функције пропорционалан је прираштају функције:

$$\Delta y \approx dy \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Како је диференцијал функције линеарна функција прираштаја Δx , много је једноставније одредити диференцијал дате функције него њен прираштај Δy . Та чињеница се користи у приближном рачунању.

- За диференцијал функције важе слична правила као за изводе функција:

$$d(Cf) = Cd(f), C = \text{const.};$$

$$d(f \pm g) = d(f) \pm d(g);$$

$$d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g);$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2}.$$

Пример:

Наћи диференцијал функције $y = 2x^3 + 3x$.

$$dy = y'dx = (6x^2 + 3)dx.$$

ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ВИШЕГ РЕДА

- Нека је $f(x)$ диференцијабилна функција, тј. постоји њен извод $f'(x)$. Ако постоји извод функције $f'(x)$, он се дефинише као **други извод** функције $f(x)$ и обележава са $f''(x)$. На сличан начин се дефинишу $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, ... извод.
- Диференцијал од диференцијала dy , зове се **диференцијал другог реда** и означава се са d^2y . Дакле, $d^2y = d(d(y)) = y''dx^2$.

- **Изводи вишег реда** функције дефинишу се као:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)', \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- **Диференцијали вишег реда** функције $f(x)$ дефинишу се као:

$$d^0 y = y, \quad d^{n+1} y = d(d^n y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- За функцију кажемо да је n **пута диференцијабилна** у тачки x , ако постоји коначан k -ти извод $f^{(k)}(x)$, за свако $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Пример:

Одредити други извод функција:

а) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

б) $f(x) = e^{-x^2}$;

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Пример:

Одредити трећи извод функција:

а) $f(x) = \cos^2 x$;

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x, \quad f''(x) = -2\cos 2x, \quad f'''(x) = 4\sin 2x;$$

б) $f(x) = x^2 \ln x$;

$$f'(x) = 2x \ln x + x, \quad f''(x) = 2 \ln x + 3, \quad f'''(x) = \frac{2}{x}.$$

ЗАДАЦИ

Користећи таблицу извода наћи први извод следећих функција:

1. а) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

б) $y = 4x^3 + 2x^2 - 3 + \sqrt{x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4$;

г) $y = 6x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x} + 5x^2\sqrt[5]{x}$.

Решење:

а) $y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$

$$\text{б)} y' = (4x^3)' + (2x^2)' - (3)' + (\sqrt{x})' = 4 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 12x^2 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{в)} y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4 = x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-3} - \frac{x^{-5}}{5} - x^{-\frac{1}{2}} - 4,$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 9x^{-4} + x^{-6} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{9}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}};$$

$$\text{г)} y = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} + 5x^2 \cdot \sqrt[5]{x} = 6x^{\frac{7}{6}} + 5x^{\frac{11}{5}},$$

$$y' = 6 \cdot \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1} + 5 \cdot \frac{11}{5}x^{\frac{11}{5}-1} = 7\sqrt[6]{x} + 11x \cdot \sqrt[5]{x}.$$

$$2. \quad \text{а)} y = (x^2 - 2x) \cdot (x^4 + 7); \quad \text{б)} y = (x+2)(\sqrt{x} + 2);$$

$$\text{в)} y = x^2 \cos x;$$

$$\text{г)} y = x - \sin x \cos x.$$

Решење:

$$\text{а)} y' = (2x - 2) \cdot (x^4 + 7) + (x^2 - 2x) \cdot 4x^3 = 6x^5 - 10x^4 + 14x - 14$$

$$\text{б)} y' = \sqrt{x} + 2 + (x+2) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 2 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$\text{в)} y' = 2x \cos x - x^2 \sin x;$$

$$\text{г)} y' = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x.$$

$$3. \quad \text{а)} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad \text{б)} y = \frac{x^3}{x - 1}; \quad \text{в)} y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; \quad \text{г)} y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Решење:

$$\text{а)} y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2};$$

$$\text{б)} y' = \frac{3x^2(x - 1) - x^3}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x - 1)^2};$$

$$\text{в)} y' = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2};$$

$$\text{г) } y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 - \operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \text{а) } y &= \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} & \text{б) } y &= \frac{1 + \ln x}{x}; \\ \text{в) } y &= \frac{\sin x}{1 - \cos x}; & \text{г) } y &= \frac{x}{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Резултат:

$$\text{а) } y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}; \quad \text{б) } y' = -\frac{\ln x}{x^2}; \quad \text{в) } y' = \frac{1}{\cos x - 1}; \quad \text{г) } y' = -\frac{2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Наћи извод сложених функција:

$$5. \quad \text{а) } y = (1 - 2x)^{13}; \quad \text{б) } y = 3\sin 4x; \quad \text{в) } y = \sin^4 x.$$

Решење:

$$\text{а) } y' = 13(1 - 2x)^{12} \cdot (1 - 2x)' = -26(1 - 2x)^{12};$$

$$\text{б) } y' = 3\cos 4x \cdot (4x)' = 12\cos 4x;$$

$$\text{в) } y' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cos x.$$

$$6. \quad \text{а) } y = e^{x^2 - 2x + 2}; \quad \text{б) } y = xe^{x^2 - 2x}.$$

Решење:

$$\text{а) } y' = e^{x^2 - 2x + 2} \cdot (x^2 - 2x + 2)' = (2x - 2)e^{x^2 - 2x + 2}.$$

$$\text{б) } y' = e^{x^2 - 2x} + xe^{x^2 - 2x} (2x - 2) = e^{x^2 - 2x} (1 + 2x^2 - 2x).$$

$$7. \quad \text{а) } y = \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad \text{б) } y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}); \quad \text{в) } y = \ln \frac{x}{1-x^2}.$$

Решење:

$$\text{а) } y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2};$$

$$\text{б)} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}};$$

$$\text{в)} \quad y' = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{(1-x^2) + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}.$$

$$8. \quad \text{а)} \quad y = \ln \frac{\sin x}{1 - \cos x}; \quad \text{б)} \quad y = \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}; \quad \text{в)} \quad y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

Решење:

$$\text{а)} \quad y' = \frac{1}{\frac{\sin x}{1 - \cos x}} \cdot \frac{(-1)}{1 - \cos x} = -\frac{1}{\sin x};$$

$$\text{б)} \quad y' = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\cos x(1 - \sin x) + (1 + \sin x)\cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2}{\cos x};$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad y' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \cdot \frac{-\cos x \cdot (1 + \sin x) - \cos x \cdot (1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \cdot \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} = -\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \cdot \frac{\cos x^2}{(1 + \sin x)^4} = -\frac{1}{1 + \sin x}. \end{aligned}$$

$$9. \quad \text{а)} \quad y = \arcsin \frac{x}{a}; \quad \text{б)} \quad y = \arcsin \frac{1}{x}; \quad \text{в)} \quad y = \arcsin \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}, \quad a, x > 0.$$

Решење:

$$\text{а)} \quad y' = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\text{б)} \quad y' = \arcsin \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\text{в)} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2 + a^2) - 2x(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2}} \cdot \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} = \frac{1}{\sqrt{4a^2x^2}} \cdot \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} \\
 &= \frac{1}{2ax} \cdot \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} = \frac{2a}{x^2 + a^2}.
 \end{aligned}$$

10. а) $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1})$; б) $y = \ln(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax})$.

Решење:

а) $y' = \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left(2e^{2x} + \frac{4e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left(1 + \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \right)$

$$= \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left(\frac{\sqrt{e^{4x} + 1} + e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}};$$

б)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}} \cdot \left(1 + \frac{2x + 2a}{2\sqrt{x^2 + 2ax}} \right) \\
 &= \frac{1}{x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2ax} + x + a}{\sqrt{x^2 + 2ax}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2ax}}.
 \end{aligned}$$

11. Израчунати први извод функције $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$, $a > 0$.

Решење:

$$\begin{aligned}
 y' &= \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
 &= \frac{2(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sqrt{a^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

12. Наћи $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, где је $f(x) = \ln \frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x}$.

Решење:

Напишимо функцију f у облику $f(x) = \ln(2 + \operatorname{tg} x) - \ln(2 - \operatorname{tg} x)$.

Њен извод је:

$$f'(x) = \frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \left(\frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} \right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{4}{4 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4}{4 \cos^2 x - \sin^2 x}.$$

За $x = \frac{\pi}{3}$ имамо $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 16.$

13. $y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}};$ **Резултат:** $y' = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \sin 2x}.$
14. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2};$ **Резултат:** $y' = \frac{1}{2 \cos^4 \frac{x}{2}}.$
15. $y = e^{-x} (\sin x + \cos x);$ **Резултат:** $y' = -2e^{-x} \sin x.$
16. $y = \arcsin \frac{x^2}{a};$ **Резултат:** $y' = \frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^4}}.$
17. $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x;$ **Резултат:** $y' = \cos^3 x.$
18. $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$ **Резултат:** $y' = \frac{1}{1-x^2}.$
19. $y = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln(x^2 + 4);$ **Резултат:** $y' = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$

20. Наћи извод функција:

а) $y = x^{\frac{1}{x}};$ **б)** $y = (2^x)^x.$

Решење:

а) $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$

$$y' = \left(e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \right)' = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

б) $y' = (2^x)^x \cdot 2 \ln 2^x.$

21. Дата је парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ и тачка $A(4, y)$ на њој. Написати једначину тангенте и нормале параболе у датој тачки.

Решење:

Како тачка $A(4, y)$ припада параболи, заменом координате $x = 4$ једначину параболе добијамо координату $y = 4$.

Извод дате функције је $y' = \frac{1}{2}x$. Знајући да је коефицијент правца тангенте једнак вредности првог извода функције у датој тачки добијамо $k_t = y'(4) = 2$,

$$\text{а } k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}.$$

Једначине тангенте и нормале су:

$$t: y - 4 = 2(x - 4) \Leftrightarrow y = 2x - 4, \quad n: y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

22. У тачки $M(1, y)$ криве $y = x^3 + x + x^{-1}$ написати једначину њене тангенте и нормале.

Решење:

За $x = 1$ је $y = 3$, па су координате тачке $M(1, 3)$.

Извод дате функције је $y' = 3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2}$, па добијамо $k_t = y'(1) = 3$, а

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{3}.$$

Једначине тангенте и нормале су:

$$t: y - 3 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x, \quad n: y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

23. Одредити параметре a и b тако да парабола $y = x^2 + ax + b$ додирује праву $y = x$ у тачки $A(1, 1)$.

Решење:

Како тачка $A(1, 1)$ припада графику параболе заменом координата тачке у њену једначину добијамо једнакост $a + b = 0$.

Дата права $y = x$ је тангента параболе са коефицијентом правца $k = 1$.

Како је $y' = 2x + a$, добијамо $k = y'(1) = 1$, тј. $1 = 2 + a \Leftrightarrow a = -1$ и $b = 1$.

Једначина параболе гласи $y = x^2 - x + 1$.

24. У којој тачки параболе $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ њена тангента има коефицијент правца 1?

Решење:

Како је $y' = x - 3$, а коефицијент правца тангенте је 1, добијамо $1 = x - 3$, тј. $x = 4$. Како је тачка са апсцисом 4, додирна тачка параболе и тангенте, заменом ове вредности у једначину параболу добијамо ординату додирне тачке $y = 0$. Дакле, тражена тачка има координате $(4, 0)$.

25. У којој тачки параболе $y = -x^2 + x + 2$ је њена тангента паралелна x оси?

Решење:

Први извод дате функције је $y' = -2x + 1$. Како је тангента паралелна x оси њен коефицијент правца је 0. Из услова де је $-2x + 1 = 0$, добијамо $x = \frac{1}{2}$, односно тачка има координате $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

26. Одредити једначину тангенте параболе $y^2 = 20x$ која са осом x гради угао од $\frac{\pi}{4}$.

Решење:

Први извод дате функције је $2yy' = 20 \Leftrightarrow y' = \frac{10}{y}$. Како тангента са осом x гради угао од $\frac{\pi}{4}$ значи да је $y' = k_t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $y = 10$. Заменом ове вредности у једначину параболу добијамо $x = 5$. Тражена тангента има једначину $y = x + 5$.

27. Одредити тачке у којима су тангенте кривих $y = x^3 - x - 1$ и $y = 3x^2 - 4x + 1$ паралелне.

Резултат: $(1, -1)$ и $(1, 0)$.

28. Под којим углом парабола $y = x^2 - x$ сече x -осу?

Резултат: $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

29. У којој тачки је тангента криве $y = x^2 - 7x + 3$ паралелна правој $y = -5x + 3$?

Резултат: $(1, -3)$

30. Применом диференцијала израчунати приближну вредност израза $\sqrt[3]{26,19}$.

Решење:

За диференцијабилну функцију $f(x)$ важи формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ако узмемо да је $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 27$, $\Delta x = -0,81$, и како је $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,

добивамо

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (\Delta x),$$

$$\sqrt[3]{26,19} = \sqrt[3]{27 + (-0,81)} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot (-0,81) \approx 3 - \frac{1}{27} \cdot 0,81 \approx 2,97.$$

31. Применом диференцијала израчунати приближну вредност функције $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ у тачки $x = 1,02$.

Решење:

За функцију $y = f(x)$ која је диференцијабилна у тачки важи формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Извод дате функције је $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 7x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 7)$. За $x = 1$ и $\Delta x = 0,02$

добивамо

$$\begin{aligned} f(1,02) &= f(1 + 0,02) \approx \sqrt[3]{1^3 + 7 \cdot 1} + \frac{1}{3}(1^3 + 7 \cdot 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3 \cdot 1^2 + 7) \cdot 0,02 \\ &= \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (10) \cdot 0,02 \approx 2,0167 \end{aligned}$$

32. Применом диференцијала израчунати приближну вредност израза $\cos 59^\circ$.

Решење:

Ако узмемо да је $f(x) = \cos x$, $x = 59^\circ$, $\Delta x = -1^\circ$ и $f'(x) = -\sin x$, добијамо

$$\cos 59^\circ \approx \cos 60^\circ - \frac{\pi}{180} \cdot (-\sin 60^\circ) \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,515.$$

33. Наћи приближну вредност:

а) $\sqrt[4]{17}$; б) $\sqrt[3]{1,02}$; в) $\sin 29^\circ$; г) $\arctg 1,05$.

Решење:

а) Ако је $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x=16$, $\Delta x=1$, и $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, добијамо

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 \approx 2,031.$$

б) Ако је $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x=1$, $\Delta x=0,02$ и $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}}$, добијамо

$$\sqrt[3]{1,02} = \sqrt[3]{1+0,02} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,02 \approx 1,0066.$$

в) $\sin 29^\circ = \sin(30^\circ - 1^\circ) \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,484.$

г) $\arctg 1,05 = \arctg(1+0,05) \approx \arctg 1 + \frac{0,05}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,81.$

34. Применом диференцијала израчунати приближну вредност функције

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 6x} \text{ у тачки } x = 0,97.$$

Резултат: $f(0,97) \approx 1,97$

35. Применом диференцијала функције приближно израчунати $\sin 31^\circ$.

Резултат: $\sin 31^\circ \approx 0,515.$

36. Доказати да је:

а) $\ln 1,01 \approx 0,01$; б) $\sqrt[5]{31} \approx 1,9875$; в) $\arctg 0,98 \approx 0,7754$; г) $\cos 62^\circ \approx 0,469.$

ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Код проучавања функција често је потребно израчунати вредност функције за неку вредност независно променљиве $x=a$. У неким случајевима то је веома сложено, као код тригонометријских, експоненцијалних или логаритамских функција.

Како су полиноми функције које се најлакше израчунавају, вредност неке функције у тачки може се приближно израчунати апроксимацијом дате функције полиномом.

Ако функцију $f(x)$ апроксимирамо полиномом $P(x)$ чинимо неку грешку $R(x)$, која износи $R(x) = f(x) - P(x)$. Циљ апроксимације је да грешка буде минимална. Апроксимација је боља уколико је тачка x ближа тачки a .

Постоје различити поступци апроксимације функције полиномом, а један од њих је Тејлоров полином.

- Ако је функција $f(x)$ у некој околини тачке a $(n+1)$ -пута диференцијабилна тада је **Тејлорова формула**:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где је полином $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$,

а грешка или остатак је:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (x, a) \text{ или } c \in (a, x).$$

Ако се узме да је $c = a + \theta(x-a)$, где је $0 < \theta < 1$, грешка има облик

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Ово је **Лагранжов облик грешке**.

Полином $P_n(x)$ се назива **Тејлоров полином** у тачки a .

- За случај када је тачка $a = 0$ добија се **Маклоренова формула**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}.$$

Пример:

Развити у Тејлорову формулу функцију $f(x) = \frac{1}{x+1}$ по степенима $x+2$,

односно у околини тачке $a = -2$, полиномом другог степена.

$$f(-2) = -1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2) = -1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(-2) = -2,$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \Rightarrow f'''(\theta x) = \frac{-6}{(\theta x+1)^4}, 0 < \theta < 1.$$

Тејлорова формула дате функције гласи:

$$\frac{1}{x+1} = -1 - (x+2) - (x+2)^2 - \frac{(x+2)^3}{(\theta(x+2)-2)^4}, 0 < \theta < 1.$$

Пример:

Развити функцију $f(x) = \sqrt{1+x}$ у Маклоренову формулу за $n=2$, тј. закључно са квадратним чланом.

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(\theta x) = \frac{3}{8}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}, 0 < \theta < 1,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}.$$

МАКЛОРЕНОВИ РАЗВОЈИ НЕКИХ ВАЖНИЈИХ ФУНКЦИЈА

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2};$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1};$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + (-1)^{k+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Пример:

Доказати Маклоренову формулу за функције

а) $f(x) = e^x$; **б)** $f(x) = \sin x$; **в)** $f(x) = (1+x)^\alpha$.

а)

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1,$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x, R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

б)

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f'''(0) = -1,$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \cos\left((n-1) \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right).$$

Корисно је уочити да је $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

в)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha,$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2),$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

ЗАДАЦИ

1. Написати Тејлоров полином трећег степена функције $f(x) = \sqrt{x}$ у тачки $a=1$.

Решење:

$$f(1)=1, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8},$$

па је: $P_3(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1)$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.$$

2. Написати Маклоренов полином трећег степена за функцију

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Решење:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = \cos^{-2} x \sin x, \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = 2 \cos^{-3} x \sin^2 x + \cos^{-1} x, \quad f''(0) = 1;$$

$$f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \sin^3 x + 5 \cos^{-2} x \sin x, \quad f'''(0) = 0.$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3. Доказати формулу $e^{\sin x} \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$.

Решење:

Како је $f(x) = e^{\sin x}$, тада је:

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \Rightarrow f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = e^{\sin x} (\cos^3 x - 3 \sin x \cos x - \cos x) \Rightarrow f'''(0) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = e^{\sin x} (\cos^4 x - 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sin x - 6 \sin x \cos^2 x) \Rightarrow f^{IV}(0) = -3,$$

па је $f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$.

4. Дате функције развити у Маклоренов полином четвртог степена:

а) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$; б) $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

Резултат:

а) $P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$; б) $P_4(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$.

5. Функцију $f(x) = x \sin x$ развити у Маклоренов полином четвртог степена.

Решење:

Знајући развој функције $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, добијамо $x \sin x \approx x \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) = x^2 - \frac{x^4}{3!}$.

6. Користећи Маклоренов полином одговарајућег степена функције $\sin x$ израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Решење:

Како је $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

7. Користећи Маклоренов полином одговарајућег степена функције e^{x^2} израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$.

Решење:

Како је $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ добијамо да је $e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$, па је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

8. Применом Маклореновог развоја датих функција израчунати граничне вредности

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3}$.

Резултат: а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{3}$.

Циљ процене грешке је да се нађе горња граница грешке где x има дату вредност, а $\theta \in (0,1)$. Код процене грешке обично се користе једноставне неједнакости, тражењем “најгорег случаја” у коме оба фактора достижу максималну апсолутну вредност. Због тога, стварна грешка је знатно мања од процењене.

9. Колика је грешка апроксимације $\sin x \approx x$, на интервалу $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$?

Решење:

$$\sin x = x + R_2, \text{ где је } R_2 = \frac{x^3}{3!} \cos \theta x.$$

$$|R_2| = \left| \frac{x^3}{3!} \cos \theta x \right| < \frac{|x|^3}{6} |\cos \theta x| < \frac{1}{10^3 \cdot 6} < \frac{1}{10^3 \cdot 2}, \text{ грешка је на трећој децимали.}$$

10. Функцију $f(x) = \ln(x+1)$ развити у Маклоренов полином трећег степена, уз процену грешке за рачунање вредности ове функције на интервалу $[0,1]$.

Решење:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad f^{IV}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4},$$

$$f(0) = \ln 1 = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2.$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3.$$

$$R_3(x) = \frac{x^4}{4!} \frac{-6}{(\theta x + 1)^4} = -\frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4}.$$

За $\theta \in (0,1)$ и $x \in [0,1]$ имамо процену грешке

$$|R_3(x)| = \left| -\frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4} \right| = \frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4} \leq \frac{1}{4(0 \cdot 1 + 1)^4} = 0,25.$$

11. Функцију $f(x) = \ln(x+1)$ развити у Маклоренов полином четвртог степена, приближно израчунати $\ln 1,5$ уз процену грешке.

Решење:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^5}.$$

$$\ln 1,5 = \ln(1+0,5) \approx \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} \approx 0,4010.$$

$$|R_4(0,5)| = \left| \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^5} \right| \leq \frac{|x|^5}{5} \cdot \frac{1}{|1+\theta x|^5} \leq \frac{1}{2^5 \cdot 5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^5} < \frac{1}{2^5 \cdot 5} = 0,00625.$$

12. Апроксимирати функцију $f(x) = e^x$ Маклореновим полиномом и израчунати приближну вредност броја e за $n=10$.

Решење:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Из ове формуле за $x=1$, добијамо $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2,71828176$,

а апсолутна вредност грешке је $|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{11!} < \frac{3}{3 \cdot 10^7} = 10^{-7}$.

13. Апроксимирати функцију $f(x) = e^x$ Маклореновим полиномом и израчунати приближну вредност броја e са грешком не већом од 10^{-9} .

Решење:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n$, а апсолутна вредност грешке је

$$|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-9} \Rightarrow (n+1)! > 3 \cdot 10^{-9}.$$

Заменом редом за $n=1, 2, 3, \dots$ добијамо да је $13! > 3 \cdot 10^{-9}$, што значи да је $n=12$.

14. Апроксимирати функцију $f(x) = e^x$ Маклореновим полиномом, израчунати приближну вредност броја $\sqrt[3]{e}$ за $n=2$ и оценити грешку.

Решење:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Из ове формуле за $x = \frac{1}{3}$, добијамо $\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{25}{18}$, а апсолутна вредност

$$\text{грешке је } |R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{e^{\frac{\theta}{3}}}{6} \cdot \frac{1}{27} < \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{54} < 0,1.$$

15. Апроксимирати функцију $f(x) = \sqrt{x+1}$ Маклорновим полиномом другог степена. Израчунати $\sqrt{1,2}$ и оценити грешку.

Решење:

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_2(x) \text{ и } R_2(x) = \frac{1}{8(1+x\theta)^{\frac{5}{2}}}, \sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} - \frac{(0,2)^2}{8} = 1,095.$$

Апсолутна вредност грешке је

$$|R_2(0,2)| = \left| \frac{1}{16} \cdot \frac{0,2^3}{(1+\theta \cdot 0,2)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{0,2^3}{(1+0 \cdot 0,2)^{\frac{5}{2}}} < \frac{0,2^3}{16} = 0,0005.$$

16. Функцију $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ апроксимирати Маклореновим полиномом другог степена и оценити апсолутну грешку те апроксимације за $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Решење:

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{9}, R_2(x) = \frac{5}{81}(1+\theta x)^{-\frac{8}{3}} \cdot x^3, |R_2(x)| < 0,01.$$

ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА

Међу најважније теореме диференцијалног рачуна спадају теореме *средње вредности*. Оне показују да се из саме егзистенције извода функције може много закључити о особинама функције.

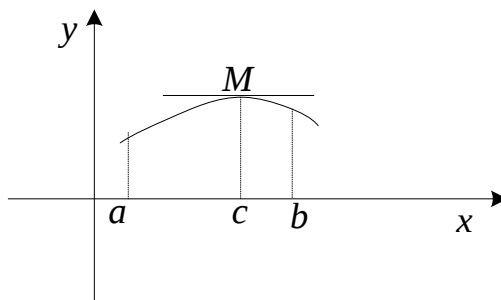
■ **Фермаова теорема:** Нека функција $f(x)$ достиже своју екстремну вредност у некој тачки $c \in (a, b)$ и нека је диференцијабилна у тачки c . Тада је $f'(c) = 0$.



P. Fermat (1601-1665)

■ **Геометријско тумачење Фермаове теореме:** Како је $f'(c) = 0$, то значи да је $\operatorname{tg} \alpha = 0$, тј $\alpha = 0$, где је α угао који тангента у тачки $M(c, f(c))$ графика функције заклапа са x осом.

То значи да ако диференцијабилна функција у тачки $c \in (a, b)$ достиже своју највећу или најмању вредност, онда је тангента на њен график у тачки $M(c, f(c))$ паралелна са x осом.



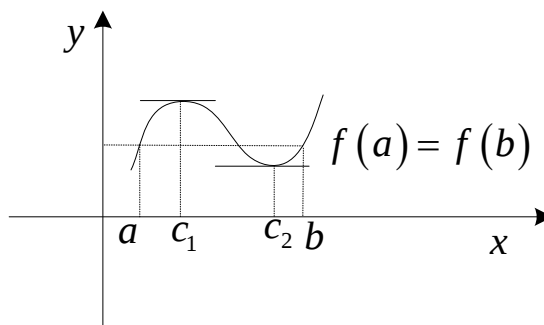
РОЛОВА ТЕОРЕМА



M. Rolle (1652-1719)

- Нека је функција $f(x)$
 1. дефинисана и непрекидна на $[a, b]$,
 2. диференцијабилна на (a, b) ,
 3. $f(a) = f(b)$.

Тада постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$, таква да је $f'(c) = 0$.



- **Геометријско тумачење Ролове теореме:** Постоји бар једна тачка $M(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ у којој је тангента графика функције паралелна са x осом.

Пример:

Доказати да функција $f(x) = x^3 - 4x + 1$ на интервалу $[-2, 2]$ испуњава услове Ролове теореме и одредити одговарајућу вредност независно променљиве c .

1. Дата функција је дефинисана за $x \in \mathbb{R}$, па је дефинисана и непрекидна и на интервалу $[-2, 2]$.
2. Како је $f'(x) = 3x^2 - 4$, закључујемо да је функција диференцијабилна на интервалу $(-2, 2)$.
3. Како је $f(-2) = f(2) = 1$,

Значи, функција испуњава услове Ролове теореме на $[-2, 2]$.

Дакле, постоји бар једана тачка $c \in (-2, 2)$ таква да је $f'(c) = 0$.

Решавањем једначине $f'(c) = 3c^2 - 4 = 0$ добијамо $c_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Како обе

вредности припадају интервалу $(-2, 2)$, закључујемо да постоје две тачке које припадају датом интервалу за које је $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

КОШИЈЕВА ТЕОРЕМА



A. Cauchy (1789-1857)

- Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане и непрекидне на $[a, b]$, а диференцијабилне на (a, b) , и нека је $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

Тада постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$ таква да је $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

ЛАГРАНЖОВА ТЕОРЕМА



J. Lagrange (1736-1813)

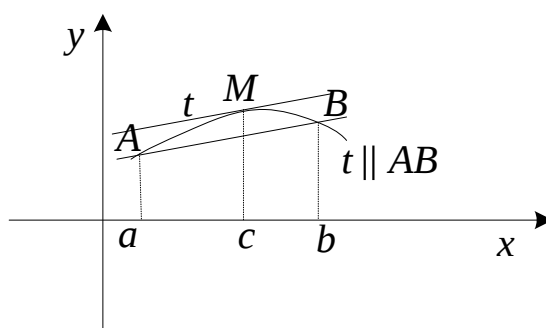
■ Нека је функција $f(x)$:

1. дефинисана и непрекидна на $[a, b]$,
2. диференцијабилна на (a, b) .

Тада постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Лагранжова теорема је специјалан случај Кошијеве теореме за $g(x) = x$.



■ **Геометријско тумачење Лагранжеве теореме:** Постоји тачка $M(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ у којој је тангента графика функције паралелна са сечицом AB , чији је коефицијент правца $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Пример:

Одредити тачку $(c, f(c))$ графика функције $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ такву да $c \in (0,1)$, у којој је тангента паралелна са сечицом која пролази кроз тачке $(0, f(0))$ и $(1, f(1))$.

Функција $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ је дефинисана и непрекидна за $x \in R$ па и на интервалу $[0,1]$.

Како је $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$, функција је диференцијабилна за свако $x \in R$ па и за $x \in (0,1)$.

На основу Лагранжове теореме имамо

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c), c \in (0,1), \text{ односно } 1 = 12c^2 - 24c + 9 \text{ или } 3c^2 - 6c + 2 = 0.$$

Одавде је $c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Како $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \in (0,1)$, а $\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \notin (0,1)$, тражена

вредност је $c = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$. Тражена тачка је $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) \right)$.

ЛОПИТАЛОВА ТЕОРЕМА

G. F. A. de l'Hospital (1661-1704)

- Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне у некој околини тачке a , при чему је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или $(\pm\infty)$ и $g'(a) \neq 0$, тада је:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Ако функције $f(x)$ и $g(x)$ имају n -те изводе који су непрекидни у тачки $x = a$ и ако је $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0$ и $g^{(n)}(a) \neq 0$, онда је $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Напомена: Лопиталова теорема се користи за решавање неодређених израза

типа " $\frac{0}{0}$ " и " $\frac{\infty}{\infty}$ ". У случају неодређености типа " $0 \cdot \infty$ " и " $\infty - \infty$ ", оне се

морају трансформисати у облик " $\frac{0}{0}$ " или " $\frac{\infty}{\infty}$ ". У случају неодређености типа

" 0^0 ", " 1^∞ " или " ∞^0 ", израз се прво логаритмује чиме се своди на један од поменутих случајева.

Пример:

Применом Лопиталове теореме одредимо граничне вредности:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - 2 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{2x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

ЗАДАЦИ

1. Испитати да ли функција $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ на интервалу $[-1, 1]$ испуњава услове Ролове теореме.

Решење:

Дата функција је дефинисана и непрекидна за $x \in \mathbb{R}$, па према томе и на интервалу $[-1, 1]$.

Осим је $f(-1) = f(1) = 1$.

Како је $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, функција није диференцијабилна у тачки $0 \in (-1, 1)$, па функција не испуњава услове Ролове теореме на $[-1, 1]$.

2. Доказати да једначина $4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ има бар једно решење на интервалу $[0, 1]$.

Решење:

Уочимо функцију $y = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$. Функција је дефинисана и непрекидна на $[0, 1]$, диференцијабилна на $(0, 1)$. Поред тога $f(0) = f(1) = 0$. Према томе, на основу Ролове теореме постоји тачка $c \in (0, 1)$ таква да је $f'(c) = 0$.

Како је $y' = 12x^2 - 6x - 2$, $6c^2 - 3c - 1 = 0 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{35}}{12}$.

Тачка $c_1 = \frac{3 + \sqrt{35}}{12} \in (0, 1)$ и та вредност је решење једначине.

3. Доказати да функција $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3+x^2}$ на $[-1, 1]$ испуњава услове Ролове теореме и одредити одговарајућу вредност c .

Решење:

Дата функција је дефинисана и непрекидна за $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.

Како је $f'(x) = \frac{x^3 - 5x}{(3+x^2)^2 \sqrt{1-x^2}}$, закључујемо да је $f(x)$ диференцијабилна

за $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

Осим тога $f(-1) = f(1) = 0$, што значи да дата функција испуњава услове Ролове теореме.

Дакле, постоји бар један $c \in (-1, 1)$ такав да је $f'(c) = 0$.

Сада из $\frac{c^3 - 5c}{(3 + c^2)^2 \sqrt{1 - c^2}} = 0$ излази $c^3 - 5c = 0$, тј. $c_1 = -\sqrt{5}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \sqrt{5}$.

Како од добијених вредности једино $0 \in (-1, 1)$, биће $c_2 = 0$ тражена вредност.

4. Доказати да важи Лангранжова теорема за функцију $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in [0, 3]$ и одредити одговарајуће c .

Решење:

Дата функција је дефинисана и непрекидна за $x \neq -1$, а то значи и за $x \in [0, 3]$. Како је $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, биће $f(x)$ диференцијабилна за све $x \neq -1$

па дакле и за $x \in (0, 3)$.

На основу Лангранжове теореме постоји $c \in (0, 3)$, тако да је

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c), \text{ односно } \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{3} = \frac{2}{(c+1)^2}. \text{ Решења ове једначине су}$$

$c_1 = -3$, $c_2 = 1$ па како $-3 \notin (0, 3)$, биће $c_2 = 1$ тражена вредност.

5. Доказати да важи Лангранжова теорема за функцију $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, за $x \in [1, 3]$ и одредити c .

Резултат: $c = \frac{7}{3}$.

6. Доказати да важи Лангранжова теорема за функцију за функцију $f(x) = x^3$ за $x \in [-1, 2]$ и одредити c .

Решење:

Дата функција је дефинисана и непрекидна $x \in [-1, 2]$. Извод $f'(x) = 3x^2$, па је диференцијабилна за $x \in (-1, 2)$.

Према Лангранжовој теореме постоји $c \in (-1, 2)$ тако да $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 3c^2$, одакле је $c = \pm 1$. Како $-1 \in (-1, 2)$, тражена вредност је $c = 1$.

7. Написати Лангранжову формулу за функцију $f(x) = \sqrt{x}$ на одсечку $[1, 4]$ и одредити c . Објаснити и геометријски.

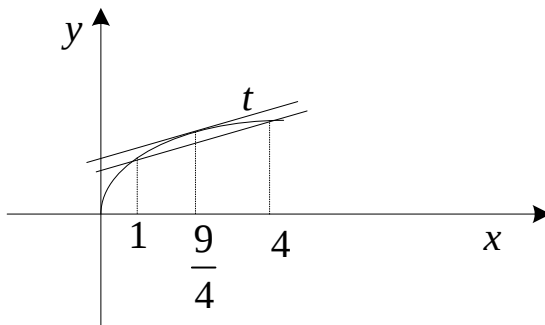
Решење:

Дата функција је дефинисана и непрекидна $x \in [1, 4]$. Извод $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ је такође дефинисан за $x \in (1, 4)$.

Значи $f(x)$ је диференцијабилна на $(1, 4)$, па према Лангранжовој теореме важи једнакост $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c)$, $c \in (1, 4)$.

$$f(4) = 2, f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ па је } \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \Leftrightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow c = \frac{9}{4}.$$

С обзиром да $\frac{9}{4} \in (1, 4)$, то је тражена вредност c .



Геометријски гледано, постоји тангента графика функције која је паралелна са сечицом која пролази кроз тачке $(1, 1)$, $(4, 2)$ и њена додирна тачка има апсцису $\frac{9}{4}$.

Применом Лопиталове теореме одредити граничне вредности:

Неодређеност типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$8. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 5}{2x^2 + 6x}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}.$$

Решење:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 5}{2x^2 + 6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 8}{4x + 6} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot e^{2x}}{3x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^{2x}}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot e^{2x}}{6} = \infty;$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}}{2x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = -\frac{1}{4}.$$

$$9. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Решење:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{\cos x} = a - b;$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 2e^{2x} - 2 - 4x}{3x^2} \\ \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 4e^{2x} - 4}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 8e^{2x}}{6} = \frac{3}{2};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x \cdot \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{6};$$

$$\text{г)} 2;$$

$$10. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\cos x \cdot \sin 2x}{\sin x \cdot \cos 2x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{2 \cos 2x}{\cos x} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + \sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + \sin x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + \cos x}{2 \cos 2x} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Неодређеност типа “ $\infty - \infty$ ”.

$$\begin{aligned} 11. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right); \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right). \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}; \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x^2 \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \cos x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x} = \infty; \\ \text{в) } \infty; \quad \text{г) } -1. \end{aligned}$$

Неодређеност типа “ $0 \cdot \infty$ ”.

$$12. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0; \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

в)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \sin \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-e^{2x}) \operatorname{ctgx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{2x}}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{2x}}{\cos x} = -2.$$

Неодређеност типа “ 0^0 ”, “ 1^∞ ” или “ ∞^0 ”.

$$13. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\sin x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} x)^x.$$

Решење:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} \stackrel{L}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}} \stackrel{L}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \sin x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\sin^{-1} x}} \stackrel{L}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin^2 x}{x}} \stackrel{L}{=} e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} 2 \sin x \cos x} = e^0 = 1;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(\operatorname{arctg} x)^x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(\operatorname{arctg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{\frac{1}{x}}} \stackrel{L}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x^2}{1+x^2}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ИЗВОДА

МОНОТОНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- Нека је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$, а диференцијабилна на (a, b) .

Тада, ако је за $x \in (a, b)$:

$f'(x) \geq 0$, функција је *растућа*,

$f'(x) \leq 0$, функција је *оппадајућа*,

$f'(x) > 0$, функција је *строго растућа*,
 $f'(x) < 0$, функција је *строго опадајућа*.

Доказ:

Нека је за $\forall x \in (a, b)$ испуњено $f'(x) \geq 0$. Узмимо произвољне вредности x_1, x_2 такве да је $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. На основу Лагранжове теореме имамо да је $f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2)$, за неко $x_1 < x_0 < x_2$.

Знајући да је $x_1 - x_2 < 0$ и $f'(x) \geq 0$, добијамо да је $f(x_1) - f(x_2) < 0$, тј. функција $f(x)$ је растућа.

Доказ у преосталим случајевима је идентичан.

Пример:

Испитати монотоност следећих функција:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$; в) $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

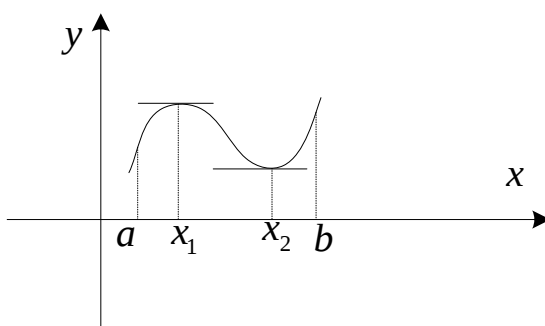
а) Извод функције $f(x) = x^3$ је $f'(x) = 3x^2$. Како је $f'(x) \geq 0$ за $x \in \mathbb{R}$, функција је растућа.

б) Извод функције $f(x) = \frac{1}{x}$ је $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Како је $f'(x) < 0$ за $x \neq 0$, функција је опадајућа.

в) Извод функције $f(x) = x^2 - 2x + 3$ је $f'(x) = 2x - 2$. Како је за $x > 1$ $f'(x) \geq 0$, а за $f'(x) < 0$, закључујемо да је функција је растућа. за $x > 1$, а опадајућа за $x < 1$.

ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

■ Функција $f(x)$ дефинисана на (a, b) има **максимум** у тачки $x_1 \in (a, b)$ ако и само ако је $f(x) < f(x_1)$ за свако x које припада некој околини тачке x_1 , а **минимум** у тачки $x_2 \in (a, b)$ ако и само ако је $f(x) > f(x_2)$ за свако x које припада некој околини тачке x_2 .



- Максимум и минимум функције $f(x)$ називају се **екстремним вредностима** дате функције.

Напомена: Претходне две дефиниције односе се на **локални максимум** и **минимум**, који су везани за неку довољно малу околину датих тачака. Овако дефинисани максимум и минимум не морају истовремено представљати највећу или најмању вредност дате функције на целом интервалу $[a, b]$.

- **Потребан услов за екстрем:** Ако диференцијабилна функција $f(x)$ има у тачки $x = x_1$ екстрем (максимум или минимум), тада је у тој тачки $f'(x_1) = 0$.

Из наведеног услова следи да, ако је функција $f(x)$ диференцијабилна, тада она може имати екстремум само у тачкама у којима је њен извод једнак нули, обрatan закључак не важи. Наиме, ако је $f'(x_1) = 0$, не мора значити да у тој тачки функција има екстрем. С друге стране функција може имати екстрем и у тачкама у којима не постоји њен извод (тј. у тачкама у којима изводна функција има прекид).

- Тачке у којима функција $f(x)$ нема извод, као и тачке у којима је $f'(x) = 0$, називају се **критичне тачке** функције $f(x)$.

- **Функција може имати екстрем само у својим критичним тачкама**, док свака критична тачка не мора бити тачка екстрема функције.

Пример:

Одредити екстреме функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Извод функције је $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Мада је $f'(x) \neq 0$, а $f'(x) > 0$ за $x > 0$ и $f'(x) < 0$ за $x < 0$, закључујемо да функција има минимум у тачки $x = 0$.

Пример:

Одредити екстреме функције $f(x) = x^3$.

Извод функције је $f'(x) = 3x^2$. $f'(x) = 0$ за $x = 0$. Како је $f'(x) \geq 0$, значи да функција увек расте и она нема екстрем у тачки $x = 0$.

- Тачке у којима је $f'(x) = 0$ називају се **стационарним тачкама**.
- **Довољан услов за екстрем:** Нека је функција $f(x)$ непрекидна у неком интервалу који садржи стационарну тачку x_1 тог интервала и диференцијабилна у том интервалу. Ако је:

$$f'(x) > 0 \text{ за } x < x_1 \text{ и } f'(x) < 0 \text{ за } x > x_1, \text{ тада је } f(x_1) = \max f(x);$$

$$f'(x) < 0 \text{ за } x < x_1 \text{ и } f'(x) > 0 \text{ за } x > x_1, \text{ тада је } f(x_1) = \min f(x).$$

Напомена: Предходна теорема каже да ако изводна функција $f'(x)$ мења знак при проласку кроз тачку x_1 тада функција $f(x)$ има екстрем у тачки x_1 .

При испитивању екстрема функције помоћу првог извода одређујемо:

1. $f'(x)$,
2. стационарне тачке, тј. решавамо једначину $f'(x) = 0$,
3. одређујемо знак извода, $f'(x)$, са обе стране стационарних тачака,
4. вредност функције $f(x)$ за сваку од стационарних тачака.

ОДРЕЂИВАЊЕ ЕКСТРЕМА ФУНКЦИЈЕ ПОМОЋУ ДРУГОГ ИЗВОДА

- Претпоставимо да је $f'(x_1) = 0$ и да је $f''(x)$ непрекидна функција у некој околини тачке x_1 . Ако је:
- $f''(x_1) < 0$ тада функција $f(x)$ има максимум у тачки x_1 , $f(x_1) = \max f(x)$;

$f''(x_1) > 0$, тада функција $f(x)$ има минимум у тачки x_1 , $f(x_1) = \min f(x)$.

Пример:

Одредити екстреме функције $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Први извод функције је $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Нуле извода су $x = 3$, $x = -1$.

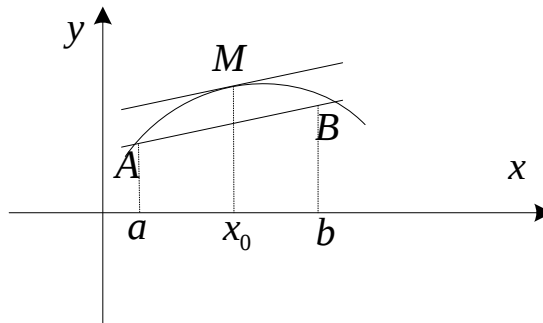
Други извод функције је $f''(x) = 6x - 6$.

Како је $f''(3) = 12 > 0$, а $f''(-1) = -12 < 0$, функција за $x = 3$ има минимум

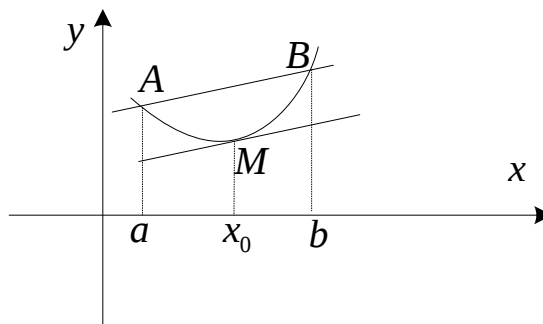
$f_{\min} = f(3) = -22$, а за $x = -1$ има максимум $f_{\max} = f(-1) = 10$.

КОНВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- Функцију $f(x)$ је **конкавна** на (a, b) ако све тачке графика функције леже испод било које њене тангенте на том интервалу.



- Функција $f(x)$ је **конвексна** на (a, b) ако све тачке графика функције леже изнад произвољне тангенте на интервалу.



▪ Нека је функција $f(x)$ два пута диференцијабилна на (a, b) .

Ако је за $x \in (a, b)$, $f''(x) \geq 0$, тада је функција **конвексна** на (a, b) .

Ако је $x \in (a, b)$, $f''(x) \leq 0$, тада је функција **конкавна** на (a, b) .

ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

▪ **Превојна тачка** графика функције $f(x)$ је тачка која раздваја конвексни и конкавни део (тангента у тој тачки постоји и пресеца график, јер је са једне стране превојне тачке изнад, а са друге стране испод графика).

▪ **Потребан услов за постојање превојне тачке:** Ако је $x = x_0$ превојна тачка функције $f(x)$, онда или $f''(x_0)$ не постоји или је $f''(x_0) = 0$.

▪ **Довољан услов за постојање превојне тачке:** Ако је функција $f(x)$ два пута диференцијабилна на (a, b) , а при проласку кроз тачку $x_0 \in (a, b)$ други извод $f''(x)$ мења знак, тада је тачка $(x_0, f(x_0))$ **превојна тачка**.

Пример:

Одредити превојне тачке функције $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Први извод функције је $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Други извод функције је $f''(x) = 6x - 6$. $f''(x) = 0$ за $x = 1$. За $x > 1$, $f''(x) > 0$ и у тој области функција је конвексна, а за $x < 1$, $f''(x) < 0$ и у тој области функција је конкавна. Превојна тачка је $(1, -6)$.

ИСПИТИВАЊЕ ТОКА ФУНКЦИЈЕ

Испитивање функција вршићемо кроз следеће кораке:

1. Одређивање домена функције;
2. Одређивање нула и испитивање знака функције;
3. Испитивање парности односно непарности и периодичности функције;
4. Испитивање понашања функције на крајевима области дефинисаности и одређивање асимптота функције;
5. Испитивање монотоности и одређивање екстрема функције применом првог извода функције;
6. Испитивање конвексности и одређивање превојних тачака функције применом другог извода функције;
7. Скицирање графика функције.

ЗАДАЦИ

Испитати и графички приказати следеће функције:

1. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; б) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;
в) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; г) $y = x^2(3 - x)$.

Решење:

а) Домен: $x \in \mathbb{R}$.

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$.

Пресек са у осом: Функција сече y - осу у координатном почетку.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, за $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: Функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = 3x^2 + 12x + 9$ за $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$3x^2 + 12x + 9$	+	-	+
y'	+	-	+
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

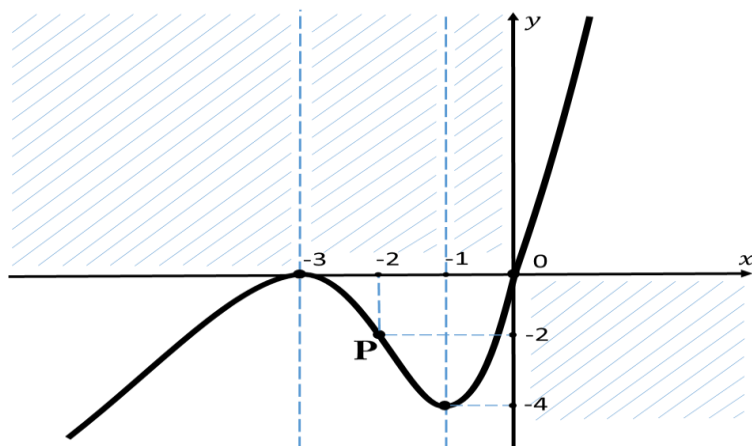
За $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (-3, -1)$ $y' > 0$ и $y \nearrow$.

$$y_{\min}(-3) = 0, y_{\max}(-1) = -4.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = 6x + 12$. $y'' = 0$ за $x = -2$.

За $x \in (-\infty, -2)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (-2, \infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$.

Функција има превојну тачку $P(-2, -2)$.



б) Домен: $x \in \mathbb{R}$. **Нуле функције:** Функција нема реалних нула.

Пресек са у осом: Функција сече y -осу у тачки $(0, 3)$.

Знак функције: $y > 0$ за $\forall x \in D_x$.

Парност, непарност: $y(x) = y(-x)$ функција је парна.

Асимптоте: Функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = 4x^3 - 4x$,
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$.

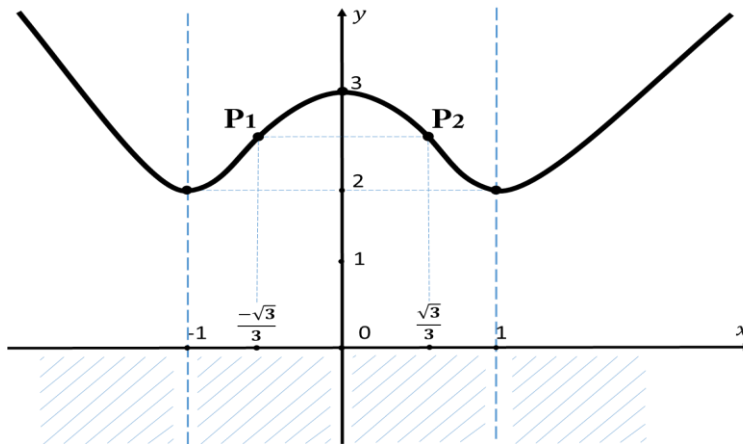
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$x^2 - 1$	+	-	-	+
x	-	-	+	+
y'	-	+	-	+
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$y_{\max}(0) = 3, y_{\min}(\pm 1) = 2.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = 12x^2 - 4$. $y'' = 0$ за
 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$12x^2 - 4$	+	-	+
y''	+	-	+
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Функција има две превојне тачке $P_{1/2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9}\right)$.



в) Домен: $x \in \mathbb{R}$.

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$.

Пресек са у осом: Функција сече y -осу у тачки $(0, -4)$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 4)$, $y < 0$, а за $x \in (4, \infty)$, $y > 0$.

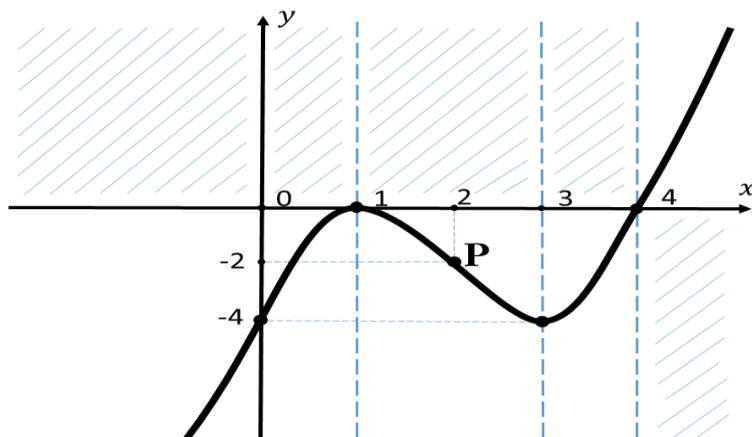
Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ за $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$. За $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (1, 3)$, $y' < 0$ и $y \searrow$. $y_{\max}(1) = 0$, $y_{\min}(3) = -4$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ за $x = 2$.

За $x \in (-\infty, 2)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (2, \infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$.

Функција има превојну тачку $P(2, -2)$.



г) Домен: $x \in \mathbb{R}$. Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Пресек са y осом: Функција сече y - осу у тачки $(0, 0)$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 3)$ $y > 0$, а за $x \in (3, \infty)$ $y < 0$.

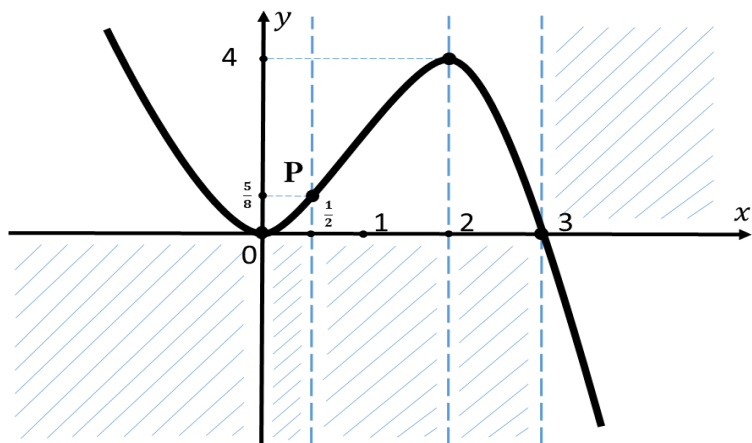
Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$ функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = 6x - 3x^2$ за $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. За $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (0, 2)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. $y_{\max}(2) = 4$, $y_{\min}(0) = 0$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = 6 - 6x$. $y'' = 0$ за $x = 1$.

За $x \in (-\infty, 1)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (1, \infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

Функција има превојну тачку $P(1, 2)$.



2. а) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; б) $y = \frac{3}{x^2-1}$; в) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;
 г) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; д) $y = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$; е) $y = \frac{4x}{4-x^2}$.

Решење:

а) Домен: $1+x^2 > 0, x \in \mathbb{R}$.

Парност, непарност: $y(x) = -y(-x)$ функција је непарна.

Нуле функције: $y=0 \Leftrightarrow x=0$.

Пресек са осом: Функција сече y -осу у координатном почетку.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, а за $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ па је $y=0$ (x -оса) хоризонтална асимптота функције.

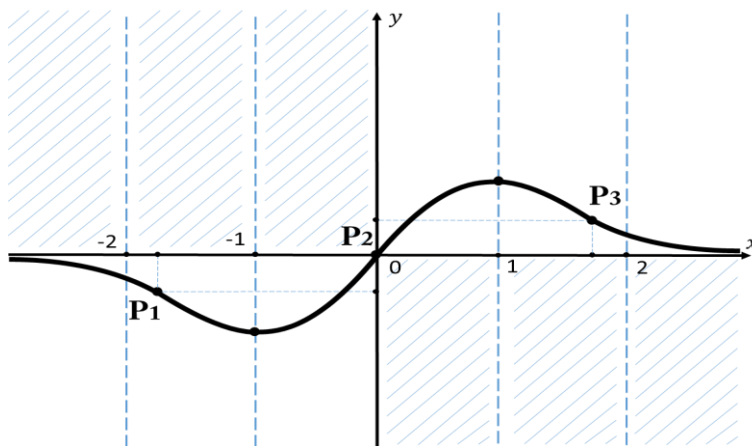
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$. За $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (-1, 1)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. $y_{\min}(-1) = -1$, $y_{\max}(1) = 1$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{3}$. За $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

Функција има три превојне тачке $P_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2(0, 0)$, $P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



б) Домен: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Парност, непарност: Функција је парна.

Нуле функције: Функција нема нуле.

Знак функције: За $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y > 0$, а за $x \in (-1, 1)$ $y < 0$.

Асимптоте функције: Како је, $\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = \mp\infty$, Праве $x = \pm 1$ су вертикалне асимптоте. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$, па је права $y = 0$, тј. x - оса хоризонтална асимптота.

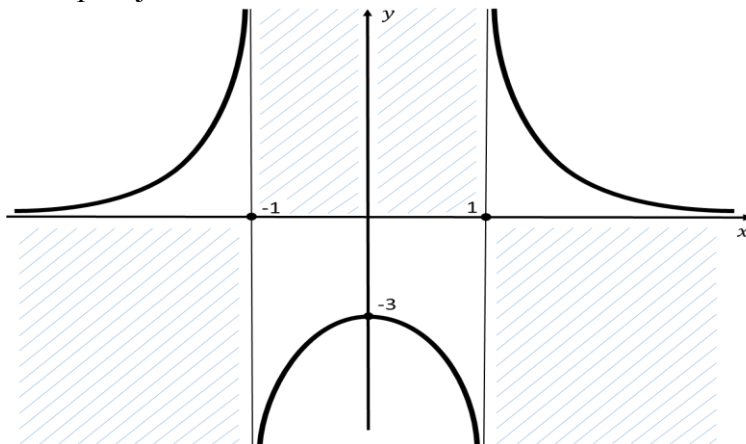
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. За $x \in (-\infty, 0)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (0, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$.
 $y_{\max}(0) = -3$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$.

За $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (-1, 1)$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

Функција нема превојне тачке.



в) Домен: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. **Пресек са у осом:** $y(0) = -1$.

Знак функције: За $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y > 0$, а за $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $y < 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow 1\pm} y = +\infty$, па је права $x = 1$ вертикална асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$,

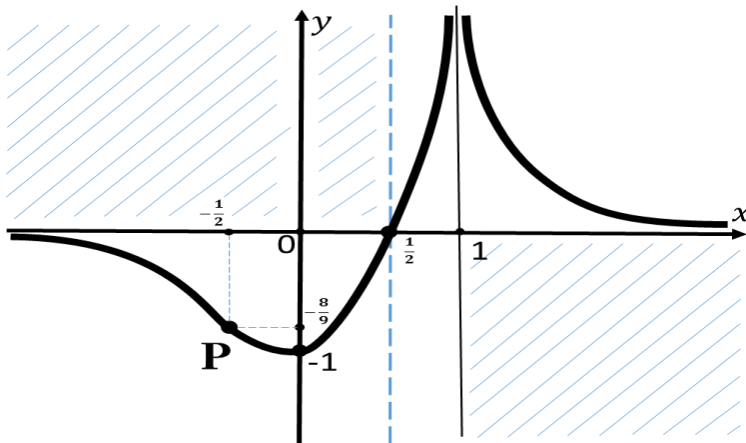
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

За $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (0, 1)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. $y_{\min}(0) = -1$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. За $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, $y'' > 0$ и

$y \cup$. Превојна тачка је тачка $P(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9})$.



Домен: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Парност, непарност: $y(x) = y(-x)$ функција је парна.

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. **Пресек са у осом:** $y(0) = 4$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$, $y > 0$, а за $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$, $y < 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ па је права $y = 1$ хоризонтална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1\mp} y = \pm\infty$, па су праве $x = \pm 1$ вертикалне асимптоте.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$,

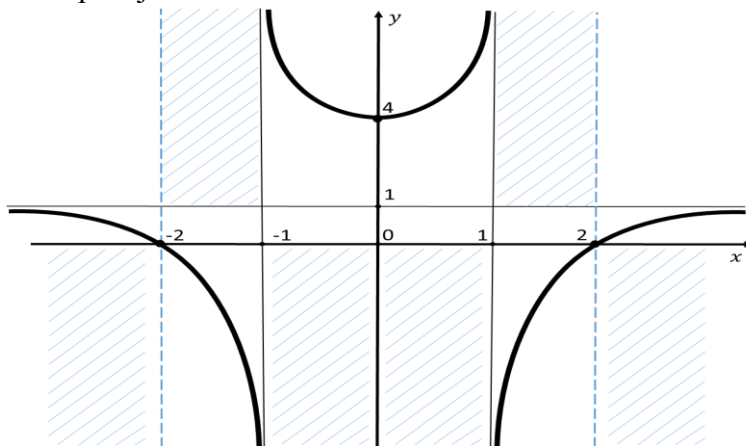
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

За $x \in (-\infty, 0)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (0, +\infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. $y_{\min}(0) = 4$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$.

За $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (-1, 1)$, $y'' > 0$ и $y \cup$.

Функција нема превојне тачке.



д) Домен: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Пресек са у осом: Функција не сече y - осу.

Знак функције:

За $x \in (-1, 0) \cup (2, 3)$, $y > 0$, за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$, $y < 0$.

Парност непарност: Функција није ни парна ни непарна.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -1$ па је $y = -1$ хоризонтална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} y = \pm\infty$, па су $x = 0$ и $x = 2$ вертикалне асимптоте.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{6(1-x)}{(2x-x^2)^2}$,

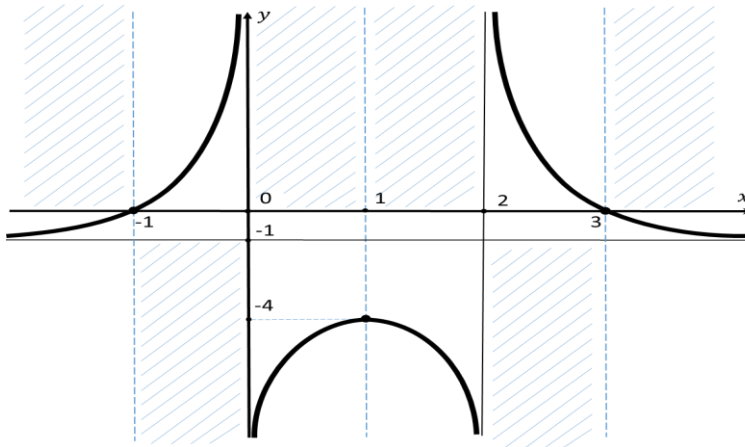
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. За $x \in (-\infty, 1)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (1, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$.

$y_{\max}(1) = -4$.

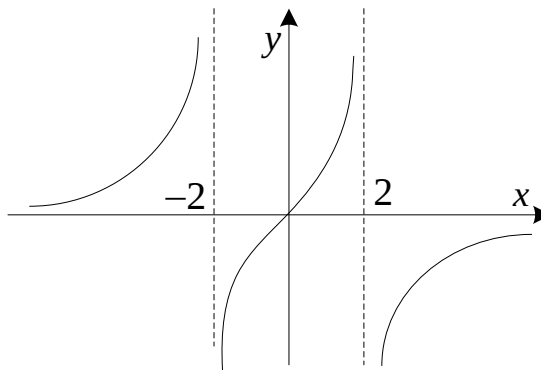
Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{-6(3x^2-6x+4)}{(2x-x^2)^3}$

За $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (0, 2)$, $y' < 0$ и $y \cap$.

Функција нема превојне тачке.



е)



3. а) $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3};$

б) $y = \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2};$

в) $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x - 1};$

г) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$

д) $y = \frac{3x - x^2}{x - 4};$

ђ) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$

Решење:

а) Домен: $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty).$

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 - \sqrt{6} \vee x_2 = 3 + \sqrt{6}.$

Знак функције:

За $x \in (3 - \sqrt{6}, 3) \cup (3 + \sqrt{6}, +\infty), y > 0$, за $x \in (-\infty, 3 - \sqrt{6}) \cup (3, 3 + \sqrt{6}), y < 0.$

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow 3\pm} y = \mp\infty$, права $x = 3$ је вертикална асимптота функције.

Коса асимптота функције је права $y = kx + n$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 3}{x - 3} = -3,$$

па је права $y = x - 3$ коса асимптота функције.

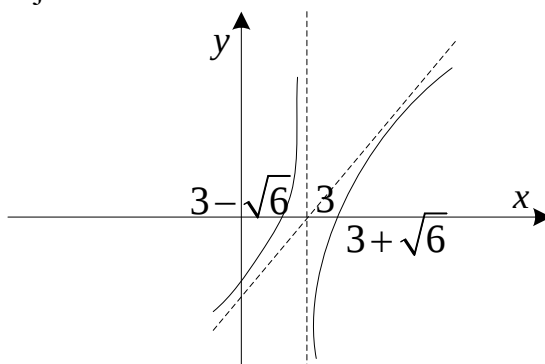
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{x^2 - 6x + 15}{(x - 3)^2} > 0$ па је

функција је стално растућа. Функција нема екстремних вредности.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{-12}{(x - 3)^3}.$

За $x \in (-\infty, 3)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (3, \infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

Функција нема превојних тачака.



б) Домен: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$

Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$. **Пресек са у осом:** $y(0) = -\frac{1}{2}.$

Знак функције: За $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, $y < 0$, а за $x \in (1, \infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ па функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = -\infty$, па је права $x = -1$ је вертикална асимптота функције.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 2} = -\frac{5}{2},$$

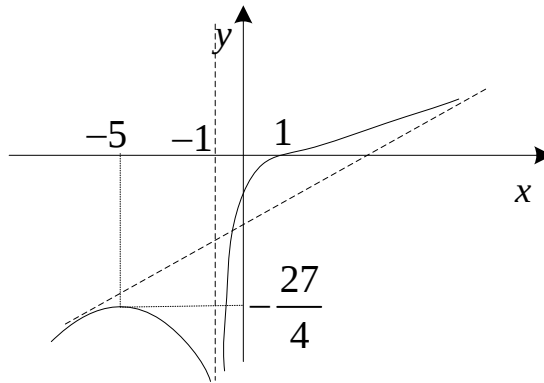
права $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ је коса асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{2(x+1)^3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$. $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (-5, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$. $y_{\max}(-5) = -\frac{27}{4}$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{12(x-1)}{(x+1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

За $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (1, \infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$. Превојна тачка функције је $P(1, 0)$.



в) Домен: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. **Нуле функције:** $y = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 1)$, $y > 0$, а за $x \in (1, +\infty)$, $y < 0$.

Асимптоте: Функција нема хоризонталне асимптоте.

Права $x = 1$ вертикална асимптота, а права $y = -x + 3$ је коса асимптота.

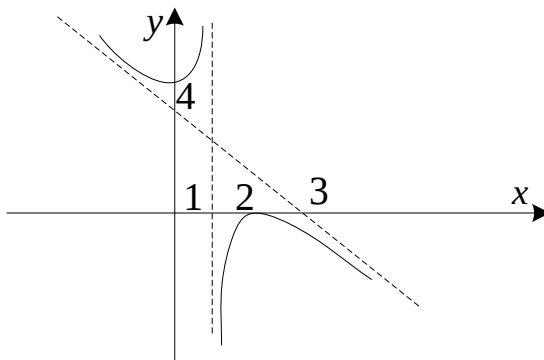
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. За $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (0, 2)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. $y_{\max}(2) = 0$ и $y_{\min}(0) = 4$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}$.

За $x \in (-\infty, 1)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (1, +\infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

Нема превојних тачка.



г) Домен: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. **Нуле функције:** $y = 0$ за $x = 0$.

Знак функције: $y < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y > 0$ за $x \in (0, +\infty)$.

Асимптоте: Функција нема хоризонталну асимптоту, права $x = -1$ је вертикална асимптота, а права $y = \frac{1}{2}x - 1$ је коса асимптота функције.

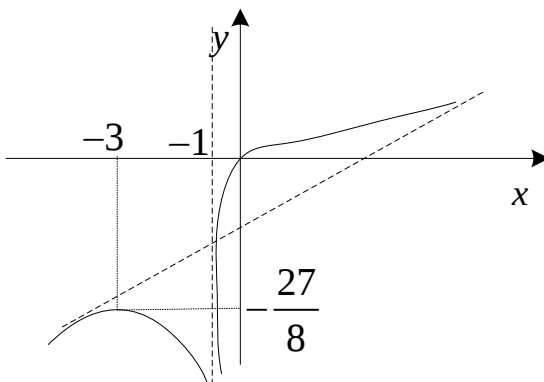
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$. За $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (-3, -1)$, $y' < 0$ и $y \searrow$. $y_{\max}(-3) = -\frac{27}{8}$.

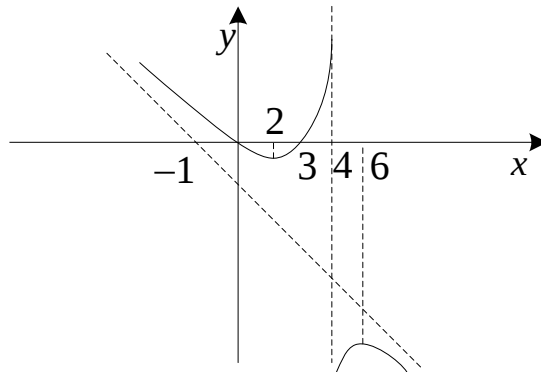
Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

За $x \in (-\infty, 0)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (0, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$.

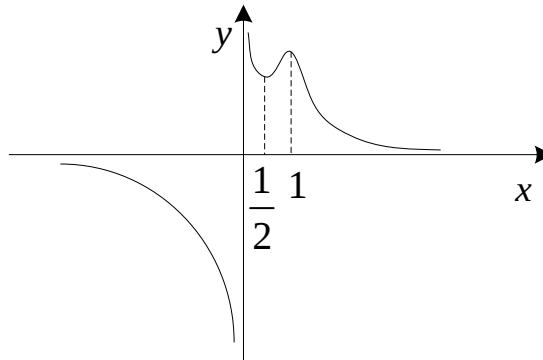
Превојна тачка функције је $P(0, 0)$.



д)



ђ)



4. а) $y = x^2 e^{-x}$; б) $y = x^3 e^x$; в) $y = e^{-x} (2 - x^2)$; г) $y = x e^{-x^2}$.

Решење:

а) Домен: $x \in (-\infty, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = 0$.

Знак функције: $y \geq 0$ за $x \in \mathbb{R}$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = +0$,

па је $y = 0$ (x -оса) хоризонтална асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$y' = e^{-x} x(2 - x)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

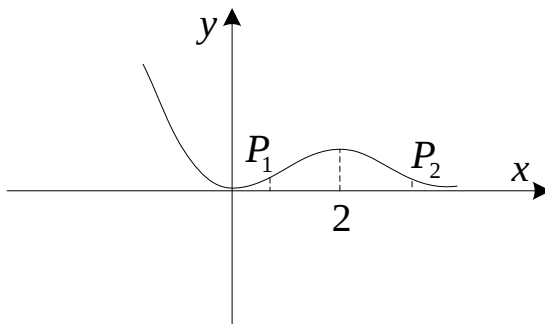
За $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (0, 2)$ $y' > 0$ и $y \nearrow$.

$y_{\min}(0) = 0$, $y_{\max}(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$y'' = e^{-x} (x^2 - 4x + 2)$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

За $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$. Превојне тачке дате функције, тј. њихове приближне координате су $P_1(0,59;0,19)$ и $P_2(2,41;0,52)$.



б) Домен: $x \in (-\infty, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = 0$.

Знак функције: $y < 0$ за $x < 0$, $y > 0$ за $x > 0$.

Асимптоте:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{-e^{-x}} = -0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

па је $y = 0$ (x -оса) хоризонтална асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$$y' = x^2(x+3)e^x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3. \quad \text{За } x \in (-\infty, -3), y' < 0 \text{ и } y \searrow, \text{ а за}$$

$$x \in (-3, +\infty), y' > 0 \text{ и } y \nearrow. \quad y_{\min}(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,34.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке :

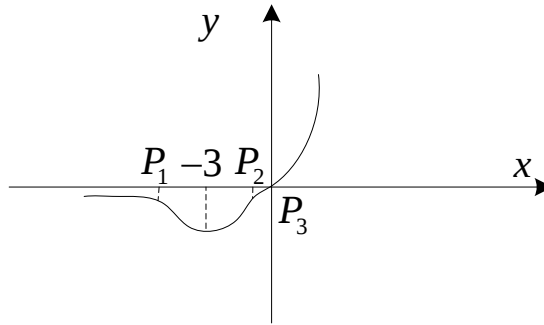
$$y'' = x(x^2 + 6x + 6)e^x.$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -3 - \sqrt{3} \approx -4,73 \vee x_3 = -3 + \sqrt{3} \approx -1,27.$$

За $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{3}) \cup (-3 + \sqrt{3}, 0)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за

$$x \in (-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}) \cup (0, +\infty), y'' > 0 \text{ и } y \cup.$$

Превојне тачке функције су $P_1(-3 - \sqrt{3}, -0,73)$, $P_2(-3 + \sqrt{3}, -0,8)$, $P_3(0,0)$.



в) Домен: $x \in (-\infty, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = \pm\sqrt{2}$.

Пресек са у осом: $y(0) = 2$,

Знак функције: За $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $y < 0$, а за $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x} = -0$,

па је $y = 0$ хоризонтална асимптота. Функција нема вертикалну асимптоту.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$y' = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$. $y \nearrow$ за $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty)$,

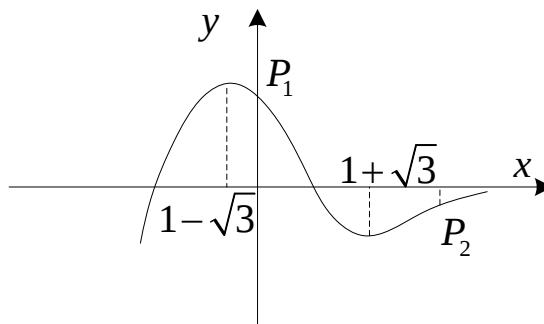
$y \searrow$ за $x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. $y_{\max} = y(x_1) = y_1 \approx 2,3$; $y_{\min} = y(x_2) = y_2 \approx 0,9$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$y'' = e^{-x}(4x - x^2)$ $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$.

За $x \in (0, 4)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

$y(0) = 2$, $y(4) = e^{-4} \cdot (-14) = -14e^{-4} \approx 0,26$ су превојне тачке функције.



г) Домен: $x \in (-\infty, +\infty)$. Нуле функције: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 0)$ $y < 0$, а за $x \in (0, \infty)$ $y > 0$.

Парност, непарност: функција је непарна.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$$y' = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

За $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in \left(-\infty - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, $y' < 0$ и $y \searrow$.

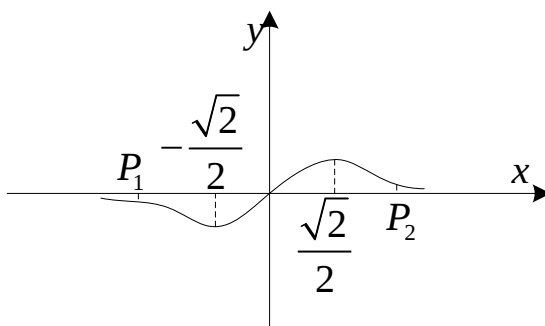
$$y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e}; y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$y'' = \frac{2x(2x^2-3)}{e^{x^2}} \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}. \text{ За } x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), y'' > 0$$

и $y \cup$, а за $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, $y'' < 0$ и $y \cap$.

$y(0) = 0$, $y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$, $y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$ су превојне тачке функције.



5. а) $y = e^{\frac{1}{x}}$; б) $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$; в) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$; г) $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$; д) $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Решење:

а) Домен: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Нуле функције: Функција нема нула.

Знак функције: $y > 0$ за $x \in D_x$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$, функција има хоризонталну асимптоту $y = 1$.

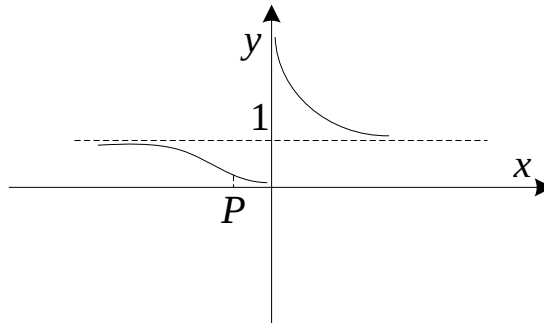
$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$, функција има вертикалну асимптоту $x = 0$, када $x \rightarrow 0_+$.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, $x \in D_x$, $y' < 0$ и $y \searrow$. Функција нема екстремних вредности.

Конвексност, конкавност и превојне тачке :

$y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. За $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y'' > 0$ и $y \cup$. Превојна тачке је $P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.



б) Домен: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **Нуле функције:** Функција нема нула.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, а за $x \in (0, +\infty)$ $y > 0$.

Парност, непарност: функција је непарна.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, функција нема хоризонталну асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{-\frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) = 0,$$

па је $y = x$ коса асимптота функције.

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y = \pm\infty$, па функција нема вертикалних асимптота.

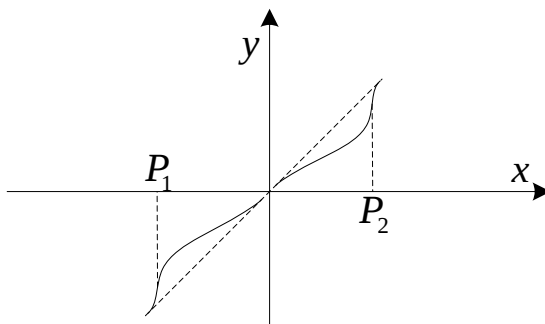
Интервали монотоности и екстремне вредности:

$y' = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$, $x \in D_x$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. Функција нема екстремних вредности.

Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$y'' = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{x^5}, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

За $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$, $y'' > 0$ и $y \cup$, за $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$. $y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,86$; $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,86$ су превојне тачке.



в) Домен: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. **Нуле функције:** функције нема нула.

Знак функције: $y > 0$ за $x \in D_x$. **Пресек са у осом:** $y(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{+0} = 1$, права $y = 1$ је хоризонтална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow -1-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = +0$, права $x = -1$ је вертикална асимптота функције.

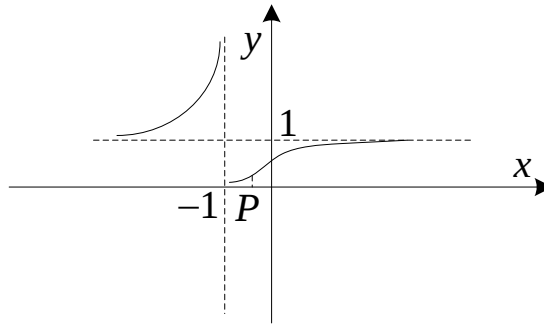
Интервали монотоности и екстремне вредности:

$y' = (x+1)^{-2} e^{\frac{1}{x+1}}$; $x \in D_x$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. Функција нема екстремних вредности.

Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$y'' = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{1}{x+1}}$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. За $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за

$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y'' < 0$ и $y \cap$. Превојна тачке функције је $P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.



г) Домен: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **Нуле функције:** $x = -2$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, -2)$, $y < 0$, а за $x \in (-2, +\infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, функција нема хоризонталну асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + 2e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 = 3,$$

па је $y = x + 3$ коса асимптота функције. $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$.

Функција има вертикалну асимптоту када $x \rightarrow 0_+$.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}, \quad y' = 0 \text{ за } x = -1 \vee x = 2.$$

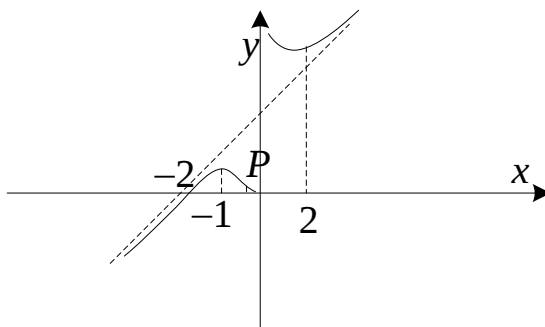
За $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (-1, 2)$, $y' < 0$ и $y \searrow$.

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{e}; \quad y_{\min} = y(2) = 3\sqrt[3]{e}$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x+2}{x^4},$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}. \text{ За } x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), y'' < 0 \text{ и } y \cap, \text{ а за } x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right), y'' > 0 \text{ и}$$

$$y \cup. \quad y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}} \text{ је превојна тачка функције.}$$



д) Домен: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Нуле функције: $x = 0$.

Знак функције: За $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, а за $x \in (0, +\infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$, па је права $x = 0$ вертикална асимптота кад $x \rightarrow +0$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1,$$

па је $y = x + 1$ коса асимптота функције.

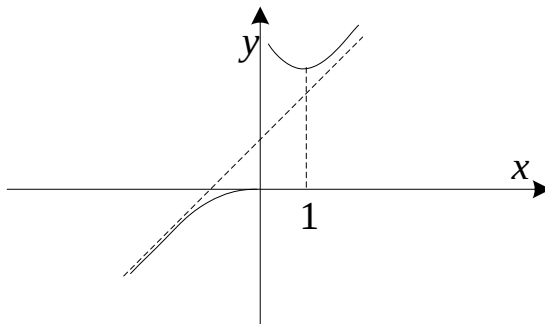
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

За $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. а за $x \in (0, 1)$, $y' < 0$ и $y \searrow$. $y_{\min}(1) = e$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$,

За $x \in (-\infty, 0)$ $y'' < 0$ и $y \cap$. а за $x \in (0, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$. Нема превојне тачке.



7. а) $y = \frac{\ln x}{x}$; б) $y = x^2 \ln^2 x$; в) $y = x^2 (1 - 2 \ln x)$; г) $y = x^3 \ln x$.

Решење:

а) Домен: $x \in (0, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = 1$.

Знак функције: За $x \in (0, 1)$ $y < 0$, а за $x \in (1, +\infty)$ $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$, па је права $x = 0$ вертикална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$, па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

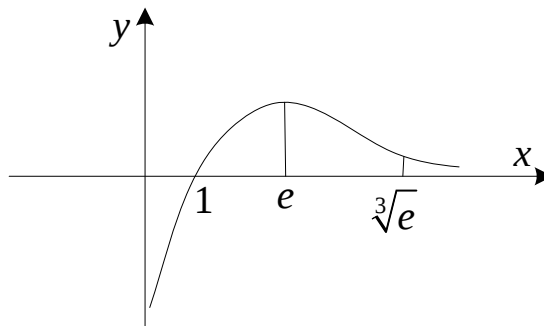
$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

За $x \in (0, e)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (e, +\infty)$, $y' < 0$ $y \searrow$. $y_{\max}(e) = \frac{1}{e}$

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$.

За $x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$, $y'' > 0$ и $y \cup$.

$y\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ је превојна тачка.



б) Домен: $x \in (0, +\infty)$. **Нуле функције:** $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Знак функције: $y \geq 0$, $x \in D_x$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow +0} y = +0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, функција нема асимптота.

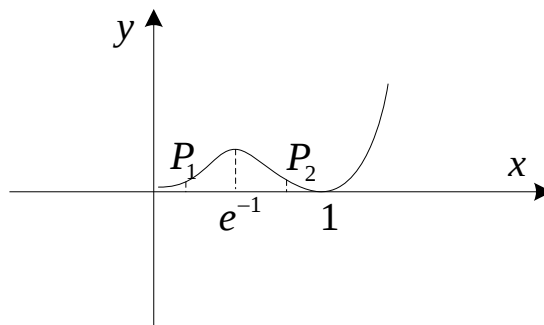
Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = 2x(\ln x + 1)\ln x$,
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-1}$. За $x \in (0, e^{-1}) \cup (1, +\infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за
 $x \in (e^{-1}, 1)$, $y' < 0$ и $y \searrow$. $y_{\max}(e^{-1}) = e^{-2} \approx 0,14$, $y_{\min}(1) = 0$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = 2(\ln^2 x + 3\ln x + 1)$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0,07 \vee x_2 = e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0,68.$$

За $x \in (0,07, 0,68)$, $y'' < 0$ и $y \cap$, а за $x \in (0,07) \cup (0,68, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$.

Функција има две превојне тачке: $P_1(0,07, 0,03)$, $P_2(0,68, 0,07)$.



в) Домен : $x \in (0, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = \sqrt{e}$.

Знак функције: За $x \in (0, \sqrt{e})$, $y > 0$, а за $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, $y < 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow +0} x^2(1 - 2\ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - 2\ln x}{x^{-2}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = +0,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - 2\ln x) = +\infty. \text{ Функција нема асимптота.}$$

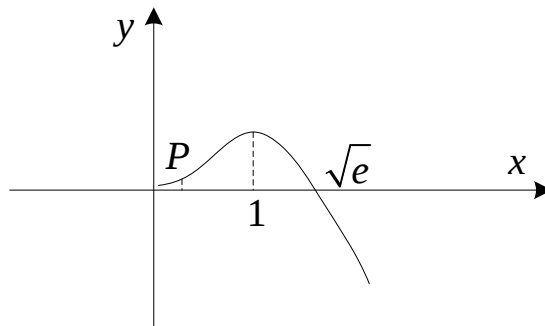
Интервали монотоности и екстремне вредности:

$$y' = -4\ln x, \text{ па је } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

За $x \in (0, 1)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$, а за $x \in (1, +\infty)$, $y' < 0$ и $y \searrow$. $y_{\max} = y(1) = 1$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке

$y'' = -4(\ln x + 1)$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. За $x \in (0, e^{-1})$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за
 $x \in (e^{-1}, +\infty)$, $y'' < 0$ и $y \cap$. $y(e^{-1}) = 3e^{-2}$ је превојна тачка.



г) Домен $x \in (0, +\infty)$. Нуле функције: $x = 1$.

Знак функције: За $x \in (0, 1)$, $y < 0$, а за $x \in (1, +\infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \left(-\frac{1}{3}\right) \lim_{x \rightarrow +0} x^3 = -0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$, па функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности: $y' = x^2(3 \ln x + 1)$,

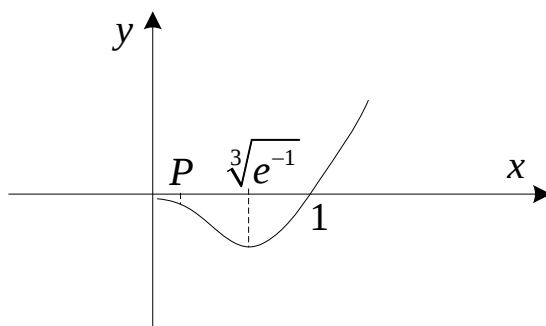
$y' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,7$. За $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in \left(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$, $y' > 0$

и $y \nearrow$. $y_{\min} = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3e} \approx -0,1$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = x(6 \ln x + 5)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{5}{6}} \approx 0,2$. За $x \in \left(0, e^{-\frac{5}{6}}\right)$, $y'' < 0$ и $y \cap$ а за $x \in \left(e^{-\frac{5}{6}}, +\infty\right)$, $y'' > 0$

и $y \cup$. Превојна тачка функције $P\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.



7. а) $y = \frac{1}{\ln x - 1}$; б) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; в) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ г) $y = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$.

Решење:

а) Домен: $x > 0 \wedge \ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq e \Leftrightarrow x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

Нуле функције: Функција нема нула.

Знак функције: За $x \in (0, e)$ $y < 0$, а за $x \in (e, +\infty)$ $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow 0+} y = -0$, $\lim_{x \rightarrow e\pm} y = \pm\infty$, па је права $x = e$ вертикална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$, па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота функције.

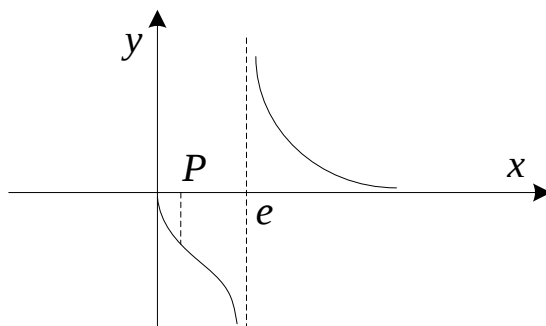
Интервали монотоности: и екстремне вредности: $y' = -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$

$\forall x \in D_x$, $y' < 0$, $y \searrow$. Функција нема екстремних вредности.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{\ln x + 1}{x(\ln x - 1)^3}$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. За $x \in (e^{-1}, e)$, $y'' < 0$ и $y \cap$ а за $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$, $y'' > 0$ и

$y \cup$, па је $P\left(e^{-1}, -\frac{1}{2}\right)$ превојна тачка функције.



б) Домен: $x \in (0, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = e^{-1}$.

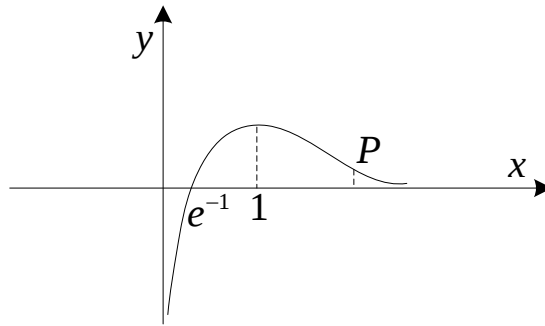
Знак функције: За $x \in (0, e^{-1})$ $y < 0$, а за $x \in (e^{-1}, +\infty)$, $y > 0$.

Асимптоте: $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$, па су праве $x = 0$, односно $y = 0$ вертикална и хоризонтална асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

$y' = -\frac{\ln x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. За $x \in (0, 1)$, $y' < 0$ и $y \searrow$, а за $x \in (1, \infty)$, $y' > 0$ и $y \nearrow$. $y_{\max} = y(1) = 1$.

Конвексност, конкавност и превојне тачке $y'' = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$, па је $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$. За $x \in (0, \sqrt{e})$, $y'' < 0 \Leftrightarrow y \cap$, а за $x \in (\sqrt{e}, \infty)$, $y'' > 0 \Leftrightarrow y \cup$. $y(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}}$. Превојна тачка је $y\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.



в) Домен: $x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$. **Нуле функције:** $x = e$.

Знак функције: За $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$, $y < 0$ а за $x \in (e^{-1}, e)$ $y > 0$.

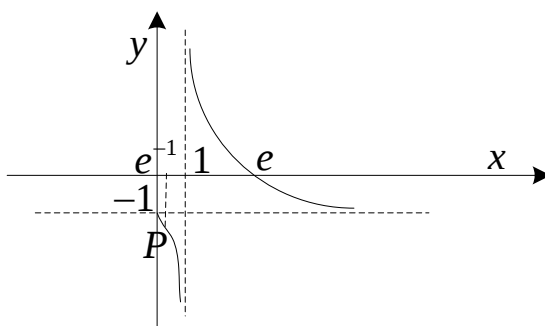
Асимптоте: Права $x = e^{-1}$ је вертикална, а $y = -1$ хоризонтална асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

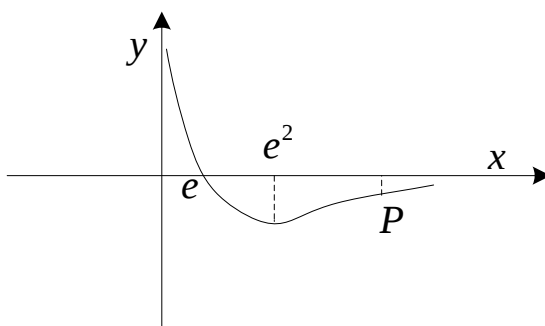
$y' = \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2}$, $y' < 0$ и $y \searrow$. Нема екстрема.

Конвексност, конкавност и превојне тачке: $y'' = \frac{2(3 + \ln x)}{x^2(1 + \ln x)^3}$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-3}$. За $x \in (0, e^{-3}) \cup (e^{-1}, +\infty)$, $y'' > 0$ и $y \cup$, а за $x \in (e^{-3}, e^{-1})$, $y'' < 0$ и $y \cap$. Превојна тачка је $P(e^{-3}, -2)$.



г)



КЉУЧНЕ РЕЧИ

Извод функције
 Диференцијал функције
 Правила диференцирања
 Фермаова теорема
 Ролова теорема
 Кошијева теорема
 Лагранжова теорема
 Лопиталова теорема
 Испитивање функције
 Монотоност функције
 Екстремне вредности функције
 Конвексност функције
 Конкавност функције
 Превојне тачке функције

6. ГЛАВА

ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

1. НЕОДРЕЂЕНИ
ИНТЕГРАЛИ
2. ОДРЕЂЕНИ
ИНТЕГРАЛИ
3. ВЕЗА ОДРЕЂЕНОГ И
НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА
4. НЕСВОЈСТВЕНИ
ИНТЕГРАЛИ
5. ПРИМЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ
ИНТЕГРАЛА

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију неодређеног интеграла,
2. особине неодређеног интеграла,
3. таблицу основних интеграла функције,
4. основна правила интеграљења,
5. методу смене приликом интеграљења,
6. парцијалну интеграцију.
7. интеграцију рационалних функција,
8. интеграцију ирационалних функција,
9. дефиницију одређеног интеграла,
10. особине одређеног интеграла,
11. методу смене за одређене интеграле,
12. парцијалну интеграцију за одређене интеграле,
13. несвојствене интеграле,
14. интеграљењем да одредите дужину лука криве,
15. интеграљењем да одредите површину равне фигуре,
16. интеграљењем да одредите запремину обртних тела.

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Геометријски проблеми квадратуре, кубатуре и ректификације решавани су од Аристотела до Лајбница и Њутна углавном методом ексхаустије (исцрпљивања) и методом недељивих делова (математички атомизам). Обе методе базирале су се на бесконачним сумама и као такве представљале надахнуће у постепеном и дуготрајном настајању појма интеграла. Њутн и Лајбниц, уз помоћ Декартових координата, учинили су онај квалитативни скок који се зове откриће интегралног рачуна.



Аристотел (287-212)

Током 18. и прве половине 19. века интегрални рачун се развијао под доминантним утицајем примена у геометрији, механици и физици. У тој етапи развоја интегрални рачун је добијао подстицаје за развитап апстрактних теорија пратећи природне феномене.

Један од основних задатака диференцијалног рачуна је одређивање извода или диференцијала дате функције. Ако се постави обрнути проблем, одређивање функције којој је познат извод или диференцијал, онда долазимо до интегралног рачуна.

Проблеми са којим се сада срећемо су следећи:

- прво, да ли свака функција може бити извод неке друге функције,
- друго, ако та функција постоји да ли је једнозначна и
- треће, ако та функција постоји, како да је одредимо.

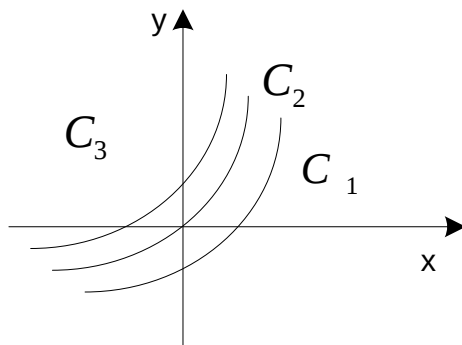
ДЕФИНИЦИЈА ПРИМИТИВНЕ ФУНКЦИЈЕ

- Нека је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) . Функција $F(x)$ зове се **примитивна** или **првобитна** функција функције $f(x)$ акко је

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

- Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу (a, b) , тада је и било која функција облика $F(x) + C$ такође примитивна функција функције $f(x)$, при чему је C произвољна константа.

$$(F(x) + C)' = f(x).$$



Напомена: Примитивна функција није једнозначно одређена већ је у питању фамилија кривих које се међусобом разликују за константу C .

Пример:

$F(x) = \sin x$ је примитивна функција функције $f(x) = \cos x$ јер је

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

- Скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ на интервалу (a, b) зове се **неодређени интеграл** и обележава се:

$$\int f(x)dx \text{ односно } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функција $f(x)$ зове се *подинтегрална функција*, а сам поступак израчунавања интеграла зове се *интеграција*.

Ознаку $\int$ за интеграл, као скраћеницу од латинске речи **integralis** која значи потпун, увео је Лајбниц. Ознака представља модификовано слово S које представља збир и потиче из дефиниције одређеног интеграла.

Пример:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

ОСОБИНЕ НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- Свака примитивна функција $F(x)$ на интервалу (a,b) је *непрекидна* функција на том интервалу.
- Свака непрекидна функција $f(x)$ на интервалу (a,b) има на том интервалу *примитивну функцију* $F(x)$.
- *Диференцијал неодређеног интеграла* једнак је подинтегралном изразу.

$$d \int f(x) \, dx = f(x) \, dx,$$

$$\text{јер је } d \int f(x) \, dx = d(F(x) + C) = F'(x) \, dx = f(x) \, dx.$$

- *Неодређени интеграл диференцијала* неке функције једнак је подинтегралној функцији:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C,$$

$$\text{јер је } \int d(F(x)) = \int F'(x) \, dx = \int f(x) \, dx = F(x) + C.$$

Насупрот израчунавању извода које није представљало проблем ни код веома сложених функција, не постоји општи поступак за израчунавање примитивне функције, односно рачунање неодређеног интеграла. На основу уведених правила, таблице интеграла и дефинисањем неких метода могу се израчунати неки типови неодређених интеграла.

Међутим, постоје релативно једноставне функције чију је примитивну функцију немогуће одредити помоћу елементарних функција, мада постоје (на пример $y = e^{-x^2}$, $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \frac{1}{\ln x}$).

ТАБЛИЦА ОСНОВНИХ ИНТЕГРАЛА

- | | |
|---|---|
| 1. $\int dx = x + C$ | 2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1)$ |
| 3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| 9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ | 10. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$ |
| 11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ | |

Таблица основних интеграла добија се из таблице основних извода.

Пример:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C, \text{ зато што је } \left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = x^3.$$

ОСНОВНА ПРАВИЛА ИНТЕГРАЦИЈЕ

Ако функције $f(x)$ и $g(x)$ имају примитивне функције на неком интервалу онда важи:

- $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0$
- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Пример:

$$\int 3 \sin x dx = 3 \int \sin x dx = -3 \cos x + C.$$

Пример:

$$\int (e^x + 2x^2) dx = \int e^x dx + 2 \int x^2 dx = e^x + \frac{2}{3} x^3 + C.$$

МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

МЕТОДА СМЕНЕ

У неким случајевима и поред тога што знамо да постоји примитивна функција функције $f(x)$ не можемо методом непосредне интеграције, израчунати њен неодређени интеграл. У оваквим случајевима се често користи метода смене.

- Нека је $f(x)$ сложена функција променљиве t , тј. $f(x) = f(g(t))$. Сменом $x = g(t)$ где је функција $g(t)$ непрекидна са непрекидним изводом и инверзном функцијом $t = g^{-1}(x)$, добијамо

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Пример:

Израчунати $I = \int \sqrt{2x+3} dx$.

Ако уведемо смену $2x+3=t$, диференцијал је $2dx=dt$, односно $dx = \frac{1}{2} dt$, па задати интеграл постаје таблични интеграл облика

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} + C. \text{ Ако се вратимо на променљиву } x,$$

решење задатог интеграла је $I = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3} + C$.

Пример:

Израчунати $I = \int \frac{x^2}{1+x^3} dx$.

$$I = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt, x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|1+x^3| + C.$$

МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

- Нека су $u = u(x)$ и $v = v(x)$ диференцијабилне функције. Једнакост:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

називамо *формулом парцијалне интеграције*.

На основу формуле за диференцијал производа функција добијамо да је

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u \cdot v' + u' \cdot v) dx = u \cdot (v' dx) + v(u' dx) = u dv + v du.$$

Интеграцијом ове везе добијамо $\int d(u \cdot v) = \int (u dv + v du)$ одакле је:

$$(u \cdot v) = \int (u dv + v du) \text{ или } \int u dv = uv - \int v du, \text{ под условом да постоји } \int v du.$$

Напомена: Код парцијалне интеграције највећи проблем је одредити шта је функција u , а шта је диференцијал dv . У раду корисно је држати се следећих правила:

а) Код производа полинома и експоненцијалне функције или полинома и тригонометријске функције, u је увек полином.

б) Код производа полинома и логаритамске функције или полинома и инверзне тригонометријске функције u је увек логаритамска функција, односно инверзна тригонометријска функција.

в) Код производа инверзне тригонометријске и експоненцијалне функције свеједно је шта је u .

Пример:

Израчунати $I = \int x \cos x dx$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Напомена: Константа интеграције за функцију v може се изоставити, и произвољну константу додајемо на крају поступка интеграције.

ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ рационална функција, где су n и m степени датих полинома $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

- Ако је $n \geq m$, тј. функција $f(x)$ **неправа рационална функција**, тада дељењем полинома $P_n(x)$ са полиномом $Q_m(x)$, функцију $f(x)$ можемо приказати као збир полинома и праве рационалне функције у облику

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Пример:

Израчунати $I = \int \frac{x^2}{x-1} dx$.

Подинтегралну функцију напишимо у облику $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$,

па је $I = \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$.

- Ако је $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ **права рационална функција** ($n < m$) тада се она може раставити на збир парцијалних разломака облика

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

при чему први тип разломка потиче од реалних, а други тип од комплексних нула полинома $Q_m(x)$ у имениоцу функције $f(x)$.

Према томе, проблем се своди на решавање интеграла облика

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k} dx$$

где су A и B реалне константе које треба одредити, $k \in N$, а квадратни трином $x^2 + bx + c$ има коњуговано комплексно нуле.

1. Случај када полином у имениоцу има реалне и једноструке нуле

- Ако су код функције $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ реални међусобно различити бројеви $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ нуле полинома $Q_m(x)$, онда се функција $f(x)$ може написати у облику

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}.$$

Овај израз се може раставити као

$$\frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_m}{x-x_m},$$

где се после израчунавања коефицијената $A_1, A_2, \dots, A_m$, израчунавање интеграла своди на збир интеграла облика $\int \frac{A_k}{x-x_k} dx$, $1 \leq k \leq m$.

Пример:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-x} dx$$

Раставимо подинтегралну функцију на парцијалне разломке

$$\frac{x+3}{x^2-x} = \frac{x+3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

Методом неодређених коефицијената одређујемо непознате коефицијенте A, B . Из предходне везе добијамо:

$$x+3 = A(x-1) + Bx \Leftrightarrow x+3 = Ax - A + Bx \Leftrightarrow x+3 = (A+B)x - A.$$

Упоредјујући коефицијенте уз променљиве добијамо систем једначина $A+B=1$ и $-A=3$.

Решавањем овог система једначина добијамо тражене коефицијенте.

$$A=-3, B=2.$$

Тражени интеграл је: $\int \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -3\ln|x| + 2\ln|x-1| + C.$

Напомена: Коефицијенте A и B могли смо израчунати ако редом заменимо вредности $x=0$, $x=1$ у једнакост $x+3 = A(x-1) + Bx$.

2. Случај када полином у имениоцу има и вишеструке нуле

- Ако су код функције $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ нуле полинома $Q_m(x)$ $x = x_1$ реда k_1 , $x = x_2$ реда k_2 ... $x = x_m$ реда k_m , онда се функција $f(x)$ може написати у облику:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{C_1}{x-x_1} + \\ & + \frac{A_2}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{C_2}{x-x_2} + \dots \\ & + \frac{A_m}{(x-x_m)^{k_m}} + \frac{B_m}{(x-x_m)^{k_m-1}} + \dots + \frac{B_m}{x-x_m}. \end{aligned}$$

Интеграл се своди на израчунавање збира интеграла.

Пример:

$$I = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

Како је $x=0$ двострука нула имениоца, њој одговарају два парцијална разломка:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}, \quad 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2,$$

$$1 = (A+C)x^2 + (-A+B)x - B, \quad A = -1, B = -1, C = 1,$$

$$I = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C.$$

3. Случај када полином у имениоцу има и комплексне нуле

- Ако су код функције $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ нуле полинома $Q_m(x)$ **комплексне без вишеструкости**, онда се функција $f(x)$ може написати у облику

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) \dots (x^2 + a_mx + b_m)}.$$

Овај израз се може раставити као

$$f(x) = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{x^2 + a_mx + b_m},$$

Интеграл облика $\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx$ се решавају методом смене.

Пример:

$$I = \int \frac{x-1}{x(1+x^2)} dx$$

$$\frac{x-1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}, \quad x-1 = A(1+x^2) + (Bx+C)x,$$

$$x-1 = x^2(A+B) + Cx + A, \quad A=-1, \quad C=1, \quad B=1.$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+1}{1+x^2} dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctg x + C. \end{aligned}$$

ИНТЕГРАЦИЈА НЕКИХ ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

У поглављу методе смене обрадили смо неке једноставније типове интеграла ирационалних функција. Сада ћемо урадити још неке типове који се после одговарајућих смена свode на интеграле рационалних функција.

▪ Интеграл облика $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx, \frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$

свode се на интеграле рационалне функције по променљивој t увођењем смене

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k \Rightarrow x = \frac{t^k d - b}{a - t^k c}, \quad dx = \left(\frac{t^k d - b}{a - t^k c} \right)' dt$$

при чему је број k најмањи заједнички садржалац именилаца разломака

$$\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}.$$

Пример:

$$I = \int \frac{1 + \sqrt{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

Како је најмањи заједнички садржалац за коренове изложиоце број 6, то се увођењем смене $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, дати интеграл своди на

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{1+t^3}{t(1+t^2)} dt = 6 \int \left(1 - \frac{t-1}{t(1+t^2)} \right) dt = 6t - 6 \int \frac{t-1}{t(1+t^2)} dt \\ &= 6t + 6 \int \frac{dt}{t} - 6 \int \frac{t+1}{1+t^2} dt = 6t + 6 \ln|t| - 3 \ln(1+t^2) - 6 \arctg t + C \\ &= 6\sqrt[6]{x} + \ln|x| - 3 \ln(1 + \sqrt[3]{x}) - 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЦИ

Израчунати следеће интеграле:

$$1. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \quad \text{б)} I = \int (5x^3 + 3x^2 - 5\sqrt{x} + 9) dx;$$

$$\text{в)} I = \int \left(\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} \right) dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} I &= \int 5x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 5\sqrt{x} dx + \int 9 dx = 5 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 9 \int dx \\ &= 5 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 9x + C = \frac{5}{4} x^4 + x^3 - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + 9x + C; \end{aligned}$$

$$\text{в)} I = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = x - \arctg x + C.$$

$$2. \quad \text{а)} I = \int \tg^2 x dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx; \quad \text{г)} \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tg x - x + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tg x - \ctg x + C;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\ctg x - \tg x + C;$$

$$\text{г)} I = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C.$$

$$3. \quad \text{а)} I = \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \sin x - 2e^x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; \quad \text{б)} I = \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{x} \right) dx;$$

$$\text{в)} I = \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx; \quad \text{г)} I = \int \left(4 \cos x - \frac{5}{\sqrt{9-9x^2}} \right) dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \left(2x^{-\frac{1}{3}} + \sin x - 2e^x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 3x^{\frac{2}{3}} - \cos x - 2e^x - 3 \arcsin x + C;$$

$$\text{б)} I = 2 \arctg x - 3 \arcsin x + 4 \ln|x| + C;$$

$$\text{в)} I = \int \left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = e^x + \tg x + C;$$

$$\text{г)} I = \int \left(4 \cos x - \frac{5}{3\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 4 \sin x - \frac{5}{3} \arcsin x + C.$$

$$4. \quad \text{а)} I = \int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{18x^2 - 2}{3x - 1} dx;$$

$$\text{г)} I = \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx.$$

Резултат:

$$\text{а)} I = e^x - \cos x + C; \quad \text{б)} I = 2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C;$$

$$\text{в)} I = 3x^2 + 2x + C; \quad \text{г)} I = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + C.$$

$$5. \quad \text{а)} I = \int (4 - 2x)^7 dx; \quad \text{б)} I = \int (ax + b)^n dx, \quad a \neq 0 \wedge n \neq -1;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{3x + 2}; \quad \text{г)} I = \int x^2(x^3 + 3)^2 dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} 4 - 2x = t \\ -2dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^7 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^8}{8} + C = -\frac{1}{16} (4 - 2x)^8 + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} ax + b = t \\ a dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2 = t \\ 3dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|3x + 2| + C;$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 + 3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9} (x^3 + 3)^3 + C.$$

$$6. \quad \text{а)} I = \int \frac{x}{1 + x^2} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx; \quad \text{в)} I = \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 10} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} 1 + x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} 1 + x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2(1 + x^2)} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3x - 10 = t \\ (2x + 3) dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 3x - 10| + C.$$

$$7. \quad \text{а)} I = \int x^2 \sqrt{x^3 - 9} dx; \quad \text{б)} I = \int x^3 \sqrt{x - 2} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \sqrt{x^2 - 3x^4} \, dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{(2 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 9 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3 - 9})^3 + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} I &= \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int (t^3 + 2) \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^6 + 2t^3) dt = \\ &= 3 \left(\frac{t^7}{7} + 2 \cdot \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{3}{7} (\sqrt[3]{x-2})^7 + \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x-2})^4 + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} I &= \int x \sqrt{1 - 3x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3x^2 = t^2 \\ -6x dx = 2t dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int t^2 dt = -\frac{1}{9} t^3 + C = -\frac{1}{9} (1 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= 3 \left(\frac{t^7}{7} + 2 \cdot \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{3}{7} (\sqrt[3]{x-2})^7 + \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x-2})^4 + C; \end{aligned}$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = 2 \int t^3 \, dx = \frac{2}{4} t^4 + C = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{x})^4 + C.$$

$$8. \quad \text{а)} I = \int e^{2x} dx; \quad \text{б)} I = \int e^{-x^3} x^2 dx; \quad \text{в)} I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C;$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C.$$

$$9. \quad \text{а)} I = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

б)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t \ln t} = \left\{ \begin{array}{l} \ln t = s \\ \frac{dt}{t} = ds \end{array} \right\} = \int \frac{ds}{s} = \ln |s| + C = \ln |\ln t| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C.$$

Доказати

$$\text{а)} \int \frac{dx}{bx+a} = \frac{1}{b} \ln|x+a| + C, b \neq 0; \quad \text{б)} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0;$$

$$\text{в)} \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0; \quad \text{г)} \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0.$$

Решење

$$\text{а)} \int \frac{dx}{bx+a} = \left\{ \begin{array}{l} bx+a=t \\ dx = \frac{1}{b} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{b} \ln|t| + C = \frac{1}{b} \ln|x+a| + C, b \neq 0;$$

$$\text{б)} \int e^{ax} dx = \left\{ \begin{array}{l} ax=t \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^t + C;$$

примери под **в)** и **г)** доказују се истом сменом као у предходном случају.

Напомена: Резултате ових интеграла корисно је знати и користи у решавању сложенијих интеграла.

$$10. \quad \text{а)} I = \int (e^{-x} + 1) dx; \quad \text{б)} I = \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx; \quad \text{в)} I = \int (\sin 2x + \cos 3x) dx.$$

Решење

$$\text{а)} I = -e^{-x} + x + C;$$

$$\text{б)} I = -e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C;$$

$$\text{в)} I = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

11. а) $I = \int \sin^3 x \cos x dx$; б) $I = \int \operatorname{tg} x dx$;

в) $I = \int \frac{x}{\sin^2 2x^2} dx$; г) $I = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$.

Решење:

а) $I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$;

б) $I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{t}$
 $= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C$;

в) $I = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = t \\ 4x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 2x^2 + C$;

г) $I = \left\{ \begin{array}{l} 1+3\cos x = t \\ -3\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln |t| + C = -\frac{1}{3} \ln |1+3\cos x| + C$;

12. а) $I = \int \sin^2 x dx$; б) $I = \int \sin^4 x dx$; в) $I = \int \operatorname{tg}^4 x dx$.

Решење

а) $I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$;

б) $I = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$
 $= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \right) + C$
 $= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$;

в) $I = \int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right) dx$
 $= \int \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right\}$
 $= \int t^2 dt - \operatorname{tg} x + x + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.

$$13. \quad \text{а)} I = \int \sin^3 x dx; \quad \text{б)} I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

$$\text{б)} I = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^3 (1 - t^2) dt$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

$$14. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \text{б)} I = \int \sin 4x \cos 2x dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г)} I = \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 4x + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\arcsin x| + C;$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln \frac{1+x}{1-x} \\ dt = \frac{2}{1-x^2} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

$$15. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; \quad \text{б)} I = \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1; \quad \text{г)} I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt, dx = \frac{2t dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt, dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} t = s \\ \frac{dt}{1+t^2} = ds \end{array} \right\}$$

$$= 2 \int s ds = s^2 + C = \operatorname{arctg}^2 t + C = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2} dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{arcsin} t + C = -\operatorname{arcsin} \frac{1}{x} + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$= -\operatorname{arcsin} \frac{1}{t} + C = -\operatorname{arcsin} \frac{1}{x-1} + C.$$

Доказати	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad a \neq 0.$
----------	---

Решење:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$16. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{7+5x^2}; \quad \text{б)} I = \int \frac{x}{x^4+1} dx; \quad \text{в)} I = \int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x};$$

$$\text{г)} I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{д)} I = \int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx.$$

Решење:

$$\text{а) } I = \int \frac{dx}{7+5x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{7}{5}+x^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{5}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{7}{5}}} + C = \frac{1}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot x + C;$$

$$\text{б) } I = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C;$$

$$\text{в) } I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2} + C;$$

$$\text{г) } I = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } I &= \int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2t+5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2+4} \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Доказати	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad a > 0.$
----------	--

Решење:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$17. \quad \text{а) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}; \quad \text{б) } I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx; \quad \text{в) } I = \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx.$$

Решење:

$$\text{а) } I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{б) } I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C;$$

$$\text{в) } I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin x^3 + C.$$

Доказати $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Решење:

Оба интеграла решавамо Ојлеровим сменама.

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x \Leftrightarrow x = \frac{t^2 - a^2}{2t}, dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt, \sqrt{a^2 + t^2} = \frac{t^2 + a^2}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{1}{\frac{t^2 + a^2}{2t}} \cdot \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C.$$

18. а) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}};$ б) $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx;$ в) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}.$

Решење:

а) $I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{\frac{9}{4} + x^2} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| x + \frac{1}{2} \sqrt{9+4x^2} \right| + C;$

б) $I = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx + 3 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 = t^2 \\ x dx = t dt \end{array} \right\}$

$$\int dt + 3 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| = t + 3 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C = \sqrt{x^2-4} + 3 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C;$$

в) $I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{5}} \right| + C.$

Доказати: $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

Решење:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

19. а) $I = \int \frac{dx}{5-4x^2};$ б) $I = \int \frac{dx}{x^2-7}.$

Решење:

$$\text{а) } I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{5}{4} - x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{2x + \sqrt{5}}{2x - \sqrt{5}} \right| + C;$$

$$\text{б) } I = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} \right| + C.$$

$$20. \text{ а) } I = \int \frac{dx}{17 + 2x + x^2};$$

$$\text{б) } I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3};$$

$$\text{в) } I = \int \frac{dx}{1 + 5x - 5x^2};$$

$$\text{г) } I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Решење:

$$\text{а) } I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 16} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4^2} = \begin{cases} x+1=t \\ dx=dt \end{cases}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{4} + C;$$

$$\text{б) } I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \begin{cases} x+1=t \\ dx=dt \end{cases} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C;$$

$$\text{в) } I = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{1}{5} + x - x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{9}{20} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{cases} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\frac{9}{20} - t^2}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{9}{20}}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{\frac{9}{20}}}{t - \sqrt{\frac{9}{20}}} \right| + C = \frac{\sqrt{5}}{15} \ln \left| \frac{2\sqrt{5}x - \sqrt{5} + 3}{2\sqrt{5}x - \sqrt{5} - 3} \right| + C;$$

$$\text{г) } I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C.$$

$$21. \text{ а) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{27 - x^2 + 6x}};$$

$$\text{б) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}};$$

$$\text{в) } I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}} dx;$$

$$\text{г) } I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}}.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \frac{dx}{\sqrt{36 - (x-3)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x-3=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{36-t^2}} = \arcsin \frac{t}{6} + C = \arcsin \frac{x-3}{6} + C;$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{2x^2 - 6x + 5}{2}} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} I &= \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \left\{ \begin{array}{l} t + \frac{1}{2} = u \\ dt = du \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} = \\ &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1} \right| + C; \end{aligned}$$

г)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{5-(t+2)^2}} = \arcsin \frac{t+2}{\sqrt{5}} + C = \arcsin \frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}} + C.$$

$$22. \quad \text{а)} I = \int \frac{x}{x^4 + 2x^2 - 3} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \cdot \ln x} dx.$$

Решење:

а)

$$I = \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2 - 4} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} I &= \int \frac{x+3}{(x-1)^2 - 6} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{t+4}{t^2-6} dt = \int \left(\frac{t}{t^2-6} + \frac{4}{t^2-6} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t^2 - 6| + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\text{в)} I = \int \frac{x+3}{\sqrt{(x+2)^2 + 2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+2=\sqrt{2}t \\ dx=\sqrt{2}dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2t^2+2}} dt$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{x^2+4x+6} + \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+6}}{\sqrt{2}} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{r) } I &= \left\{ \begin{array}{l} 1 + \ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-1} = 2 \int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\ &= 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{\ln x+1}-1}{\sqrt{\ln x+1}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Интегралы облика $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R рационална функција решавају се сменом $tg \frac{x}{2} = t$, где је $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$tg \frac{x}{2} = t, \quad \frac{x}{2} = \arctg t, \quad dx = 2 \frac{dt}{1+t^2}.$$

Изрaчунати интеграле:

$$23. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \text{б) } I = \int \frac{dx}{\cos x};$$

$$\text{в) } I = \int \frac{dx}{1 - \sin x}; \quad \text{г) } I = \int \frac{1}{5 + \sin x + 3 \cos x} dx.$$

Решење:

$$\text{a) } I = \int \frac{2dt}{\frac{1+t^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \left\{ x + \frac{\pi}{2} = t \right\} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 1} = 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + C = \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{г)} I &= \int \frac{1}{5 + \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{15}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C. \end{aligned}$$

$$24. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{3+5 \cos x}; \quad \text{б)} I = \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{1}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{2 - \frac{2t}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 4 \int \frac{t^2 - t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)} dt =$$

$$\left\{ \frac{t^2 - t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{3+t^2}, A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = \frac{1}{2}, D = 1 \right\},$$

$$I = -\int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{2t+4}{t^2+3} dt = -\ln(t^2+1) + \int \frac{2t}{t^2+3} dt + 4 \int \frac{dt}{t^2+3}.$$

$$= -\ln(t^2 + 1) + \ln(t^2 + 3) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \ln \frac{t^2 + 3}{t^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{в)} I = -x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C; \quad \text{г)} I = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

Интеграли облика $\int R(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x) dx$ решавају сменом $\operatorname{tg} x = t$
 $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$25. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}; \quad \text{б)} I = \int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x};$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\sin^2 x}; \quad \text{г)} I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \int \frac{dt}{\left(1 + \frac{3t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4\frac{1}{1+t^2} + 9\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4+9t^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{3t}{2} + C = \frac{1}{6} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg} x}{2} + C;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4 - \frac{3}{1+t^2} + \frac{5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{9t^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3t + C = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int (1+t^2) dt = t + \frac{1}{3} t^3 + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$$

Интеграли облика $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ решавају сменом $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$ и $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

26. а) $I = \int \frac{dx}{1+2\operatorname{tg} x}$; б) $I = \int \operatorname{tg}^2 x dx$;
 в) $I = \int \operatorname{ctg}^3 x dx$; г) $I = \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 dx$.

Решење:

а) $I = \int \frac{1}{1+2t} dt = \int \frac{dt}{(1+2t)(1+t^2)} = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln |2\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{5} \ln |\cos^2 x| + C$;

б) $I = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t - \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{tg} x - x + C$;

в) $I = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x| + C$;

г) $I = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C$.

27. а) $I = \int x e^x dx$; б) $I = \int x \sin x dx$;
 в) $I = \int x \cdot 2^{-x} dx$; г) $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

Решење:

а) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$;

б) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$;

в) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 2^{-x} dx, \quad v = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-x} \end{array} \right\} = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} dx = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + C$;

г) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx, \quad v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right\} = -x \cdot \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \cdot \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$
 $= -x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C$.

$$28. \quad \text{а)} I = \int x^2 \cos x \, dx; \quad \text{б)} I = \int x^2 e^x \, dx;$$

$$\text{в)} I = \int (x^2 + x + 2)e^{2x} \, dx; \quad \text{г)} I = \int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x \, dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \, du = 2x \, dx \\ dv = \cos x \, dx, \, v = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \sin x \, dx, \, v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

Напомена: У оваквим примерима парцијална интеграција се понавља онолико пута колики је степен полинома.

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \, du = 2x \, dx \\ dv = e^x \, dx, \, v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2J$$

$$J = x e^x - e^x, \quad I = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + x + 2, \, du = (2x+1) \, dx \\ dv = e^{2x} \, dx, \, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x+1) e^{2x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{2} J;$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = u, \, du = 2 \, dx \\ dv = e^{2x} \, dx, \, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (2x+1) e^{2x} - \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} (2x+1) e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x+1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} (x^2 + 2) e^{2x} + C;$$

$$\text{г)} I = \frac{1}{4} (2x^2 + 10x + 11) \sin 2x + \frac{1}{4} (2x + 5) \cos 2x + C.$$

$$29. \quad \text{а)} I = \int \ln x \, dx; \quad \text{б)} I = \int \arctg x \, dx;$$

$$\text{в)} I = \int \arcsin x \, dx; \quad \text{г)} I = \int \ln(x^2 + 1) \, dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \, du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C;$$

б)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsin x - J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$I = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{г)} I &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x^2 + 1), du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$30. \quad \text{а)} I = \int e^x \sin x dx; \quad \text{б)} I = \int e^x \cos x dx;$$

$$\text{в)} \int \sin(\ln x) dx; \quad \text{г)} I = \int e^x \sin x^2 dx.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а)} I &= \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \end{aligned}$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} (e^x (\sin x - \cos x)) + C;$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{2} (e^x (\sin x + \cos x)) + C;$$

в) Сменом $\ln x = t$ задатак се своди на случај под а);

$$\text{г)} I = \frac{e^x}{5} (\sin^2 x - \sin 2x + 2) + C.$$

$$31. \quad \text{а)} I = \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx;$$

$$\text{в)} I = \int x \cdot \arcsin x \, dx;$$

$$\text{г)} I = \int x^3 e^{-x^2} \, dx.$$

Решење:

а)

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ dv = x \, dx, \, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C \\ &= \frac{1}{2} \left((x^2 + 1) \arctg x - x \right) + C; \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{dx}{x^2}, \, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx \\ &= -\frac{\arctg x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = -\frac{\arctg x}{x} + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C; \end{aligned}$$

$$\text{в)} \frac{1}{4} \left((2x^2 - 1) \arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right) + C;$$

$$\text{г)} -\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$32. \text{ а)} I = \int \sqrt{1+x^2} \, dx;$$

$$\text{б)} I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx;$$

$$\text{в)} I = \int x \ln(x^2 - 1) \, dx;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а)} I &= \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{1+x^2}, \, du = \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = x \sqrt{1+x^2} - \int \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \, dx = \end{aligned}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| = x\sqrt{1+x^2} - I + \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$$

$$2I = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| \Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C;$$

$$\text{б)} \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\text{в)} I = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}x^2 + C;$$

$$\text{г)} I = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$$

$$33. \quad \text{а)} I = \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int t e^t dt = 2(t e^t - e^t) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C;$$

б)

$$I = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right\} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}} + C;$$

$$\text{в)} I = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} =$$

$$-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + C.$$

$$34. \quad \text{а)} I = \int \frac{x^4+2}{x^2+1} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{x^3}{x+3} dx.$$

Решење:

$$\text{а) } I = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x + 3 \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\text{б) } I = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x - 27 \ln|x+3| + C.$$

$$35. \quad \text{а) } I = \int \frac{x-3}{x^3-x} dx; \quad \text{б) } I = \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} dx;$$

$$\text{в) } I = \int \frac{x+1}{x(x-3)(x+2)} dx; \quad \text{г) } I = \int \frac{x}{(x+2)(x+3)} dx.$$

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= \int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= 3 \ln|x| - \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C; \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} I &= -2 \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = -2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \\ &= \ln \frac{\sqrt{|x+1|} \cdot |x-1|^3}{x^2} + C; \end{aligned}$$

$$\text{в) } I = -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{4}{15} \ln|x-3| - \frac{1}{10} \ln|x+2| + C;$$

$$\text{г) } I = -2 \ln|x+2| + 3 \ln|x+3| + C.$$

$$36. \quad \text{а) } I = \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad \text{б) } I = \int \frac{dx}{x^2-6x+5}; \quad \text{в) } I = \int \frac{dx}{x^2-6x+13}.$$

Резултат:

$$\text{а) } I = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C; \quad \text{б) } I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C; \quad \text{в) } I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C.$$

$$37. \quad \text{а) } I = \int \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} dx; \quad \text{б) } I = \int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} dx;$$

$$\text{в) } I = \int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx; \quad \text{г) } I = \int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}.$$

Решење:

$$\text{а)} \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$2x+1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$2x+1 = x^2(A+B) + x(4A+2B+C) + 4A$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{3}{2}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} + \frac{3}{2(x+2)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} (\ln|x| - \ln|x+2|) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| - \frac{3}{2(x+2)} + C;$$

$$\text{б)} \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

$$A = -\frac{2}{9}, B = \frac{2}{9}, C = \frac{5}{3}, D = -3$$

$$I = \int \left(-\frac{2}{9(x-2)} + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{5}{3(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} \right) dx$$

$$= \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - \frac{5}{3(x+1)} + \frac{3}{2(x+1)^2} + C;$$

$$\text{в)} I = 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + C;$$

$$\text{г)} I = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + 3 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C.$$

$$38. \text{ а)} I = \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}; \text{ б)} I = \int \frac{dx}{x^3+1};$$

$$\text{в)} I = \int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)x^2(x^2+1)} dx.$$

Решење:

а)

$$\frac{1}{(1+x) \cdot (1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A = C = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;$$

б)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+3| - \frac{1}{3} I_1 =$$

$$I_1 = \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \left\{ \begin{array}{l} x-\frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$I = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

в)

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 1, \quad D = -2, \quad E = 0$$

$$I = -\int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$= -\ln|x-1| + 3\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x^2+1| + C.$$

$$39. \quad \text{а)} I = \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{3x}{x^3+1} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

Решење:

$$\text{а)} I = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\operatorname{arctg}x + C;$$

$$\text{б)} I = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{в)} I = \ln|x-1| - \frac{2x-1}{(x-1)^2} + C;$$

$$\text{г)} I = -\frac{x}{(x^2-1)^2} + C.$$

$$40. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt[4]{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3}} \quad \text{б)} I = \int \frac{\sqrt{2x+3}}{x} dx$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx \quad \text{г)} I = \int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}} dx$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{x+1} = t \\ \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{3}{4}} dt = t^{\frac{1}{4}} + C = \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}} + C;$$

б)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x+3} = t, \quad x = \frac{t^2-3}{2} \\ dx = t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{t^2}{t^2-3} dt = 2 \int \frac{t^2-3+3}{t^2-3} dt = 2 \int \left(1 + \frac{3}{t^2-3} \right) dt$$

$$2 \left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = 2\sqrt{2x+3} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}} \right| + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = t^2, \quad x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} \right\} = 4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2}{(t+1)^2(t-1)^2} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{t-1} \\ A=C=D=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -\frac{1}{t+1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t-1| + C =$$

$$= -\frac{2t}{t^2-1} + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{\sqrt{2x+1}}{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C;$$

г)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^3 \\ dx=3t^2 dt \end{array} \right\} = 3 \int \frac{(1+t)t^2}{1-t} dt = -3 \int \frac{t^3+t^2}{t-1} dt = -3 \int \left(t^2+2t+2+\frac{2}{t-1} \right) dt =$$

$$-3 \left(\frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2 \ln|t-1| \right) + C = (1-x) - 3(\sqrt[3]{x-1})^2 - 6 \cdot \sqrt[3]{x-1} - 6 \ln|\sqrt[3]{x-1}-1| + C$$

$$41. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} \quad \text{б)} I = \int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} x=t^6, t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$6(t - \arctgt) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctg\sqrt[6]{x}) + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} x=t^6, t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{t^3-1}{t(t^2+1)} dt = 6 \int \frac{t^3-1}{t^3+t} dt = 6 \int \left(1 - \frac{t+1}{t(t^2+1)} \right) dt$$

$$\left\{ \frac{t+1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}, \quad A=1, B=-1, C=1 \right\}$$

$$I = 6 \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6 \left(t - \ln|t| + \frac{1}{2} \ln|t^2+1| - \arctgt \right) + C$$

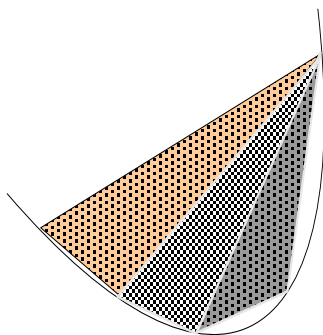
$$= 6 \left(\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x}| + \frac{1}{2} \ln|\sqrt[3]{x}+1| - \arctg\sqrt[6]{x} \right) + C.$$

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Један од проблема које је пракса наметнула математици је било је израчунавање површине равних фигура. Израчунавање површина полигона (троуглова, четвороуглова итд.) у елементарној геометрији изводи се веома једноставно. Насупрот томе, велики проблем представљало је израчунавање површина ограничених кривим линијама.

Још у III веку пре нове ере Архимед је израчунао површине сегмената параболе и круга, уписујући у ове фигуре полигоне са све већим бројем страница, исцрпљујући на тај начин површину сегмента површинама полигона. Метода је позната под називом метода исцрпљивања или метода ексаустије. Ову методу користили су касније и многи други математичари, решавајући проблеме за неке конкретне површине, не доводећи у питање саму дефиницију површине. Ова метода у суштини је довела до дефиниције одређеног интеграла

У XVIII веку Њутн и Лајбниц дефинишу одређени интеграл и на тај начин успевају да реше генерално проблем површина.

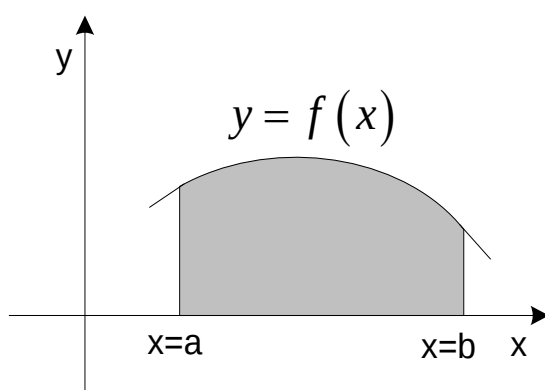


Дефинисање одређеног интеграла омогућило је решавање најразличитијих проблема као што су површине и запремине тела у простору, дужине лукова кривих, дужине пута ако је позната брзина, рада силе, момента инерције, количине наелектрисања и многи други.

ПОЈАМ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Нека је функција $f(x)$ ненегативна, непрекида и ограничена на интервалу $[a, b]$.

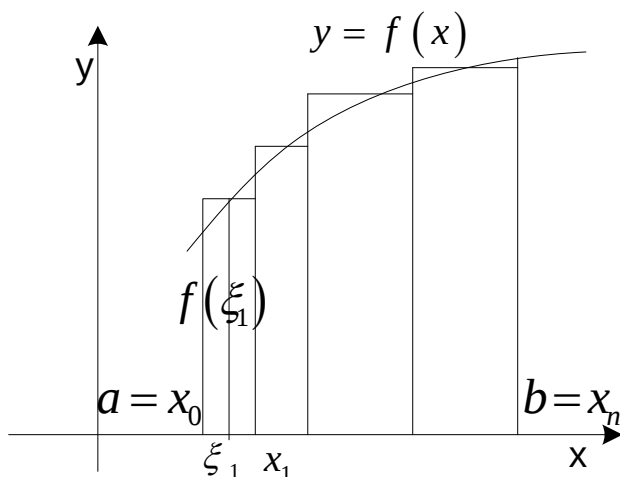
▪ **Криволинијски трапез** представља фигуру ограничену осом Ox , графиком функције $f(x)$, правама $x=a$ и $x=b$. Основица криволинијског трапеца је интервал $[a, b]$.



▪ Поделитемо интервал $[a, b]$ на n произвољних делова тачкама $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Нека је $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

У сваком интервалу $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$ изаберимо произвољну тачку ξ_i и формирајмо производе $\Delta x_i f(\xi_i)$. Овај производ представља површину било ког правоугаоника страница Δx_i и $f(\xi_i)$.



Уочимо збир површина свих овако добијених правоугаоника:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

независно од поделе интервала $[a, b]$ на n делова и избора тачака ξ_i , она је **површина криволинијског трапеза**.

- Нека је функција $f(x)$ дефинисана и ограничена на интервалу $[a, b]$. Нека је интервал $[a, b]$ подељен тачкама $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n делова и нека је $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\dots$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. У сваком интервалу $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ изаберимо произвољну тачку ξ_i и формирајмо суму $S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$. Овај збир зове се **интегрална сума** функције $f(x)$ на интервалу $[a, b]$.

- Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

она се зове *одређени интеграл* функције $f(x)$ на интервалу $[a, b]$.

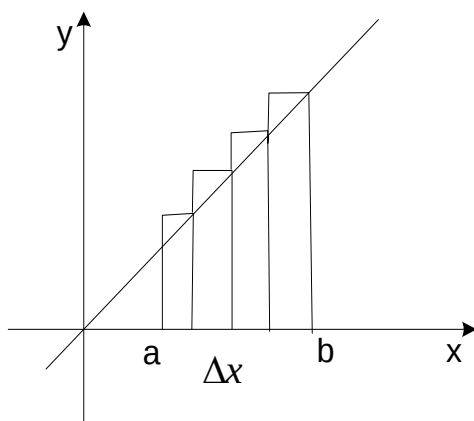
- *Одређени интеграл* функције $f(x)$ симболички обележавамо:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- Функцију $f(x)$ зовемо *подинтегралном функцијом*.
- Број a зовемо *доња*, а број b *горња* граница интеграла.

Пример:

Изрешати повшину ограничену графиком функције $f(x) = x$ на интервалу $[a, b]$ и ординатама $f(a)$ и $f(b)$, ($a > 0, b > 0$).



Решење:

Поделимо интервал $[a, b]$ на n једнаких делова $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Нађимо збир површина свих описаних правоугаоника чије су основице Δx , а висине редом $a + \Delta x$, $a + 2\Delta x$, ..., $a + n\Delta x$.

$$S_n = \Delta x \cdot (a + \Delta x) + \Delta x \cdot (a + 2\Delta x) + \dots + \Delta x \cdot (a + n\Delta x),$$

$$S_n = \Delta x (na + \Delta x(1 + 2 + 3 + \dots + n)),$$

$$S_n = \Delta x \left(na + \Delta x \frac{n(n+1)}{2} \right),$$

$$S_n = \Delta x na + (\Delta x)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b-a}{n} na + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2n}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2n} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

По дефиницији одређеног интеграла је

$$I = \int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Напомена: Овај пример показује колико је сложено израчунавати одређени интеграл користећи појам интегралне суме чак и код најједноставнијих функција.

- Ако функција $f(x)$ на интервалу $[a, b]$ има **одређени интеграл**, кажемо да је она на том интервалу **интеграбилна**.
- Да би функција на интервалу $[a, b]$ била **интеграбилна**, мора бити **ограничена** на том интервалу. (обрнуто не важи).
- **Непрекидна** функција $f(x)$ на интервалу $[a, b]$ је **интеграбилна** на том интервалу.
- **Ограничена** функција на интервалу $[a, b]$ са коначним бројем прекида је **интеграбилна** на том интервалу.

ОСОБИНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- $\int_a^a f(x) \, dx = 0;$
- $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx;$
- $\int_a^b C \cdot f(x) \, dx = C \cdot \int_a^b f(x) \, dx \quad C = \text{const}, C \neq 0;$

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$
- Ако тачка c дели интервал $[a, b]$ на два дела, тј. $a < c < b$, тада важи

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

ВЕЗА ОДРЕЂЕНОГ И НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

ЊУТН-ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

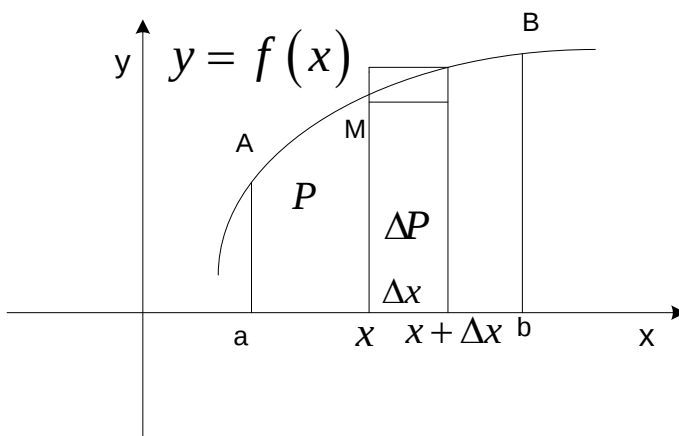
Њутн и Лајбниц су доказали да постоји веза између одређеног и неодређеног интеграла. На тај начин добила се општа метода за решавање одређених интеграла и могућност њихове примене у различитим областима науке и праксе.

- Ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[a, b]$, а $F(x)$ њена примитивна функција, тј $F'(x) = f(x)$ тада је

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказ:

Размотрићемо само случај ненегативне функције $f(x)$.



Површина криволинијског трапеца који одговара луку AM износи

$$P(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Ако се променљива x промени за Δx , површина P промениће се за ΔP . Како је

$$f(x)\Delta x < \Delta P < f(x + \Delta x)\Delta x, \quad f(x) < \frac{\Delta P}{\Delta x} < f(x + \Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = P'(x) = f(x).$$

Према томе, функција $P(x)$, функција површине, је примитивна функција функције $f(x)$.

По претпоставци и функција $F(x)$ је примитивна функција функције $f(x)$.

Из дефиниције неодређеног интеграла следи да се две примитивне функције исте функције разликују се за неку константу C , па је

$$F(x) = P(x) + C \quad x \in [a, b],$$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C.$$

За $x = a$ добијамо

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx + C = 0 + C = C, \text{ чиме је одређена константа } C, \text{ па је}$$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a).$$

Узмимо сада да је $x = b > a$. Из предходне релације добијамо

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a), \text{ односно}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Пример:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$$

МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

МЕТОДА СМЕНЕ

- Нека је $f(x)$ непрекидна функција на интервалу $[a, b]$. Уведимо смену $x = g(t)$. Ако функција $g(t)$ има непрекидан извод на интервалу $[\alpha, \beta]$ где је $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, тада је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

Увођењем смене $x = g(t)$ мењају се границе интеграције.

Ако су полазне границе интеграције биле a и b , онда су нове границе $\alpha = g^{-1}(a)$ и $\beta = g^{-1}(b)$.

Пример:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x = t, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt, \\ x = 0, t = 0; x = \frac{1}{2}, t = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$

МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

- Ако су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције на интервалу $[a, b]$, а vdu је интеграбилна, тада је

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

Пример:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cos \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Интегрални код којих границе интеграције нису коначне или подинтегрална функција није ограничена називају се *несвојствени интеграл*.

ИНТЕГРАЛИ СА БЕСКОНАЧНИМ ГРАНИЦАМА

Нека је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[a, +\infty)$.

Ако постоји гранична вредност $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$, онда се она назива *несвојственим интегралом* функције $f(x)$ на интервалу $[a, +\infty)$, тј.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Ако је ова гранична вредност коначна, несвојствени интеграл *конвергира*, иначе *дивергира*.

Аналогно се дефинише несвојствени интеграл функције $f(x)$ на интервалу $(-\infty, b]$, тј.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

Ако су обе границе интеграције бесконачне тада је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Пример:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^t = \lim_{a \rightarrow +\infty} (\arctgt - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

ИНТЕГРАЛИ НЕОГРАНИЧЕНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је $y = f(x)$ непрекидна функција на интервалу $(a, b]$ и $f(x) \rightarrow \infty$ за $x \rightarrow a$.

Ако постоји гранична вредност $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \varepsilon > 0$, онда се она назива **несвојственим интегралом** функције $f(x)$ на интервалу $(a, b]$, тј

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Нека је $y = f(x)$ непрекидна функција на интервалу $[a, b)$ и $f(x) \rightarrow \infty$ за $x \rightarrow b$.

Ако постоји гранична вредност $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \varepsilon > 0$, онда се она назива **несвојственим интегралом** функције $f(x)$ на интервалу $[a, b)$, тј

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Нека је функција $y = f(x)$ неограничена у околини тачке $c \in [a, b]$. Тада се несвојствени интеграл дефинише са

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx, \varepsilon > 0.$$

Пример:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

ЗАДАЦИ

Применом Њутн – Лајбницевог формуле израчунати следеће интеграле:

$$1. \quad \text{а)} \quad I = \int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \quad \text{б)} \quad I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx;$$

$$\text{в)} \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}; \quad \text{г)} \quad I = \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx.$$

Решење:

$$\text{а)} \quad I = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_8^{27} = \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{x} \right)^2 \Big|_8^{27} = \frac{3}{2} \left(\left(\sqrt[3]{27} \right)^2 - \left(\sqrt[3]{8} \right)^2 \right) = \frac{15}{2};$$

$$\text{б)} \quad I = \operatorname{tg} x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2;$$

$$\text{в)} \quad I = \ln \frac{3}{2}; \quad \text{г)} \quad I = 4e.$$

$$2. \quad \text{а)} \quad I = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx; \quad \text{б)} \quad I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{в)} \quad I = \int_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Решење:

а)

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t, x = t^2 - 1, dx = 2t dt \\ x = 0, t = 1, \quad x = 3, t = 2 \end{array} \right\} = 2 \int_1^2 t^2 \, dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3};$$

б)

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^2, dx = 2t \, dt \\ x = 1, t = 0; x = 2, t = 1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+2t+1} \, dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+2t+1} \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t+2}{t^2+2t+1} \, dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \ln(t^2+1+2t) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1.$$

$$\text{в)} \quad I = 7.$$

$$3. \quad \text{а)} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx; \quad \text{б)} I = \int_2^e \frac{dx}{x \ln x}; \quad \text{в)} I = \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}.$$

Решење

$$\text{а)} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x dx = dt \\ x = 0, t = \cos 0 = 1 \\ x = \frac{\pi}{2}, t = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\int_1^0 (1-t^2) dt = \int_0^1 (1-t^2) dt = t \Big|_0^1 - \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x = 2, t = \ln 2 \\ x = e, t = 1 \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^1 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^1 = \ln 1 - \ln \ln 2 = -\ln \ln 2;$$

$$\text{в)} I = \frac{\pi}{8}.$$

$$4. \quad \text{а)} I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx; \quad \text{б)} \int_0^{\sqrt{a}} x^2 \cdot \sqrt{a - x^2} dx, \quad a > 0.$$

Решење

а)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin t, dx = r \cos t dt \\ x = 0, t = 0; x = r, t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$I = \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{a} \sin t, dx = \sqrt{a} \cos t dt \\ x = 0, t = 0; x = \sqrt{a}, t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = a \sqrt{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{a - a \sin^2 t} \cos t dt$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^2}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{16}.$$

$$5. \quad \text{а)} I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx; \quad \text{б)} I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)^2}; \quad \text{в)} I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t, e^x dx = dt \\ x = \ln 2, t = 2 \\ x = \ln 3, t = 3 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2};$$

б)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ x = \frac{\pi}{4}, t = 1; x = \frac{\pi}{3}, t = \sqrt{3} \end{array} \right\} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} \Big|_1^{\sqrt{3}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в)} I = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$6. \quad \text{а)} I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx; \quad \text{б)} I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx; \quad \text{в)} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$$

Резултат:

$$\text{а)} I = 4 - \pi; \quad \text{б)} I = 2 - \frac{\pi}{4}; \quad \text{в)} I = \frac{\pi}{16}.$$

$$7. \quad \text{а)} I = \int_0^1 x e^x dx; \quad \text{б)} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad \text{в)} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(3x) dx,$$

Решење:

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right\} = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \sin 3x dx, v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \cos 3x \, dx, \, v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} = \frac{1}{3} x \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \, dx =$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}.$$

8. а) $I = \int_1^e \ln x \, dx$; б) $I = \int_1^e x^3 \ln x \, dx$;
 в) $I = \int_0^1 x^3 \arctg x \, dx$; г) $I = \int_0^1 \arcsin x \, dx$.

Решење:

а) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = 1$;

б) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 \, dx, \, v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$;

в) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x^3 \, dx, \, v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_2^4 \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \int_2^4 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctg x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

г) $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

9. а) $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} \, dx$; б) $I = \int_0^1 x \arctg x \, dx$;

в) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin 2x \, dx$; г) $I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) \, dx$.

Решење:

а) Како је подинтегрална функција парна можемо да напишемо

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = 2I_1 \\
 I_1 &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = u, \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = du \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
 &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - I_1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
 2I_1 &= \sqrt{2} + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \Big|_0^1, I_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right) \\
 I &= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2};
 \end{aligned}$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right); \quad \text{в)} I = \frac{2}{5} (1 - e^\pi); \quad \text{г)} I = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$10. \quad \text{а)} I = \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}; \quad \text{б)} I = \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad \text{в)} I = \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Решење

$$\begin{aligned}
 \text{а)} I &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^2; dx = 2tdt \\ x=2, t=1; x=a, t=\sqrt{a-1} \end{array} \right\} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{2tdt}{t(t^2+1)} \\
 &= 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{dt}{t^2+1} = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \arctgt \Big|_1^{\sqrt{a-1}} = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} (\arctg \sqrt{a-1} - \arctg 1) = \frac{\pi}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} I &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, -\frac{1}{x^2} dx = dt \\ x=2, t=\frac{1}{2}; x=a, t=\frac{1}{a} \end{array} \right\} = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
 &= - \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} \right) = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1}{a} + \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\text{в)} I = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$11. \quad \text{а)} I = \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; \quad \text{б)} I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^2}; \quad \text{в)} I = \int_1^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Решење:

$$\text{а)} I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t, x dx = \frac{dt}{2} \\ x = 0, t = 0 \\ x = a, t = a^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{a^2} e^{-t} dt = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-t} \Big|_0^{a^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} - 1 \right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{б)} I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$

$$I_1 = \int_1^a \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln^2 x, du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2}, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln^2 x}{x} \Big|_1^a + 2 \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2}, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln^2 x}{x} \Big|_1^a + 2 \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^a + \int_1^a \frac{1}{x^2} dx \right) =$$

$$-\frac{\ln^2 x}{x} \Big|_1^a + 2 \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^a - \frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = -\frac{\ln^2 a}{a} - 2 \cdot \frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a} + 2.$$

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_1 = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln^2 a}{a} - 2 \frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a} + 2 \right) = 2.$$

Зато што је $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 a}{a} \stackrel{L}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln a}{a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{a} = 0$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln a}{a} \stackrel{L}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} = 0$.

$$\text{в)} I = \frac{1}{2}.$$

$$12. \quad \text{а)} I = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx \quad \text{б)} I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx; \quad \text{в)} I = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{\arctg x}{x^2} dx.$$

Решење:

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} \sin x dx.$$

$$I_1 = \int_0^a e^{-x} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-x}, du = -e^{-x} dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^{-x} \cos x \Big|_0^a - \int_0^a e^{-x} \cos x dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-x}, du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = -e^{-a} \cos a + 1 - \left(e^{-x} \sin x \Big|_0^a + \int_0^a e^{-x} \sin x dx \right)$$

$$2I_1 = 1 - e^{-a}(\cos a + \sin a) \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-a}(\cos a + \sin a)}{2}.$$

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_1 = \frac{1}{2};$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{2},$$

$$\text{в)} I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\arctg x}{x^2} dx$$

$$I_1 = \int \frac{\arctg x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{dx}{x^2}, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$= -\frac{\arctg x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = -\frac{\arctg x}{x} + \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$= -\frac{\arctg x}{x} + \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{\arctg x}{x} + \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \Big|_1^a \right) = -\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\arctg a}{a} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \arctg 1 - \ln \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Зато што је

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\arctg a}{a} = 0 \text{ и да је } \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \ln \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{a\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}} = \ln 1 = 0, a > 0.$$

$$13. \quad \text{а)} I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}; \quad \text{б)} I = \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}; \quad \text{в)} I = \int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^3} dx.$$

Решење

$$\text{а) } I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty;$$

$$\text{б) } I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x = 1, t = 0; x = 2, t = \ln 2 \end{array} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\ln 2} \frac{dt}{t}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln t \Big|_{\varepsilon}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln \ln 2 - \ln \varepsilon) = +\infty;$$

$$\text{в) } I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{e^x}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ x = -1, t = -1; x = \varepsilon, t = \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right\} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\frac{1}{\varepsilon}} te^t dt$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (te^t - e^t) \Big|_{-1}^{\frac{1}{\varepsilon}} = -\left(\frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = -\frac{2}{e};$$

зато што је

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} = t \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} te^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{-t}} = 0 \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0.$$

$$14. \quad \text{а) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx; \quad \text{б) } I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Резултат:

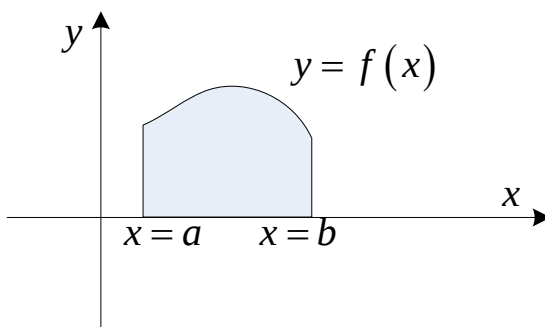
а) $I = \infty;$

б) $I = 2.$

ПРИМЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

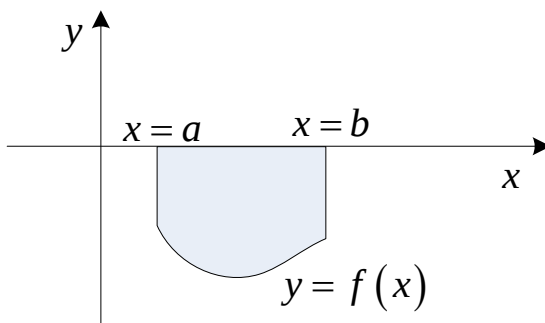
ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНА РАВНИХ ФИГУРА

- Ако је $f(x)$ непрекидна и ненегативна функција на интервалу $[a, b]$, онда површина ограничена осом x , графиком функције $f(x)$, правама $x = a$ и $x = b$ износи $P = \int_a^b f(x) dx$.



- Ако је функција $f(x)$ на интервалу $[a, b]$ негативна онда је

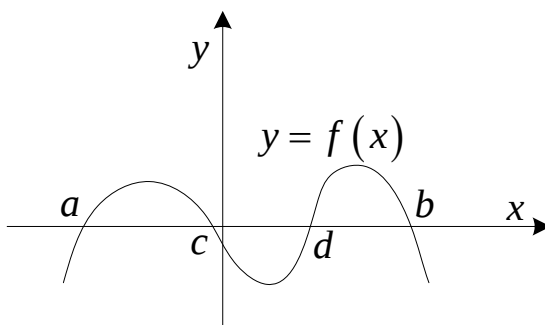
$$P = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$



- Ако функција $f(x)$ на интервалу $[a, b]$ мења знак онда се површина коју ова функција образује са x осом и правама $x = a$ и $x = b$ добија тако што се интервал подели на подинтервале у којима је $f(x) \geq 0$ и на подинтервале у којима је $f(x) \leq 0$. Површина ће бити збир вредности

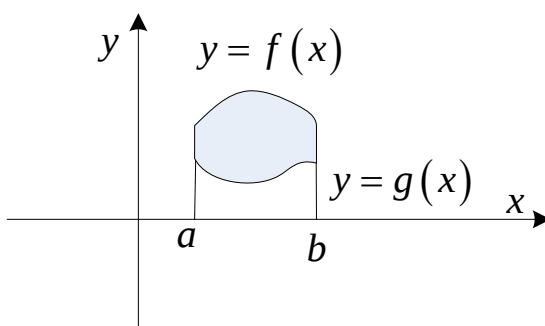
интеграла
$$P = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \int_d^b f(x)dx$$

или
$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$



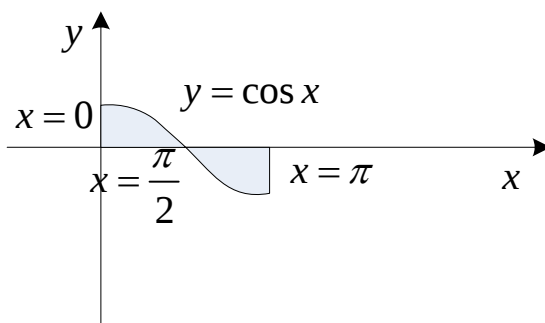
- Ако је област ограничена графицима непрекидних функција $f(x)$ и $g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ на интервалу $[a, b]$ и правама $x = a$ и $x = b$, тада је површина разлика површина два криволинијска трапеза, тј.

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



Пример:

Израчунати површину ограничену линијама $y = \cos x$, $x = 0$ и $x = \pi$.



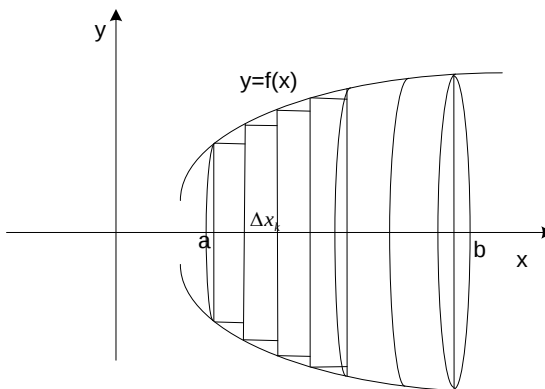
$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 2.$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЗАПРЕМИНА ОБРТНИХ ТЕЛА

Нека је функција $f(x)$ непрекидна и сталног знака на интервалу $[a, b]$.

- **Зап्रेмини обртног тела** које настаје ротацијом графика функције око x осе је:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$



Доказ:

Ако интервал $[a, b]$ поделимо тачкама $a = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ на n делова, тада сваки од уписаних правоугаоника има основицу $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и висину $y_k = f(x_k), k = 1, 2, \dots, n$.

При обртању правоугаоника око x осе образује по један ваљак запремине

$$V_k = y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k$$

где је y_k полупречник основе ваљка, Δx_k његова висина.

Збир запремина свих тих ваљака је

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k.$$

- **Запремина обртног тела** једнака је следећој граничној вредности

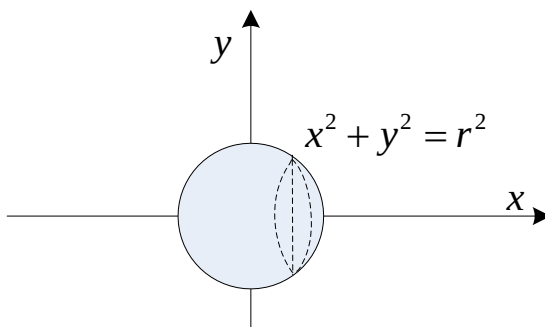
$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- **Запремина обртног тела** које се добије ротацијом графиком функције око y осе добија се по обрасцу

$$V = \pi \int_c^d x^2(y) dy.$$

Пример:

Израчунати запремину лопте полупречника r .



Лопта се добија ротацијом круга једначине $x^2 + y^2 = r^2$ око x -осе.

$$V = 2\pi \int_0^r y^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

ДУЖИНА ЛУКА КРИВЕ

Нека је $f(x)$ непрекидна функција, са непрекиданим изводом $f'(x)$, на интервалу $[a, b]$

- График такве функције назива се *глатка крива*.
- *Дужина лука криве је:*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Пример:

Израчунати дужину лука криве $y = \frac{x\sqrt{5x}}{3}$, $x \in [0, 1]$.

$$y = \frac{x\sqrt{5x}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{x},$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{5}{4}x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + 5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} 4 + 5x = t^2 \\ dx = \frac{2}{5} t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \int_2^3 t^2 dt = \frac{1}{15} t^3 \Big|_2^3 = \frac{19}{15}.$$

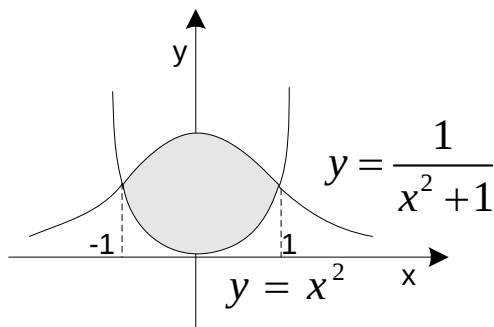
ЗАДАЦИ

1. $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Решење

Апсцисе пресечних тачака графика функција добијају се решавањем система

једначина: $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.



Тражена површина износи:

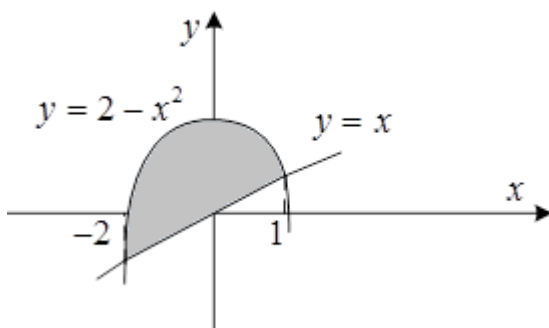
$$P = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left(\arctg x - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

2. $y = -x^2 + 2$ и $y = x$.

Решење

Апсцисе пресечних тачака графика функција су:

$$-x^2 + 2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1.$$



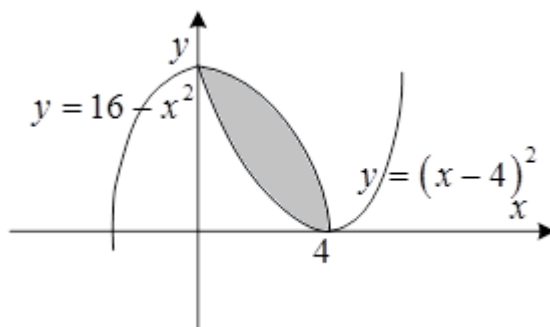
Тражена површина износи:

$$P = \int_{-2}^1 (-x^2 + 2) dx - \int_{-2}^1 x dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

3. $y = (x - 4)^2$ и $y = 16 - x^2$.

Решење

Апсцисе пресечних тачака су $x = 0 \vee x = 4$.

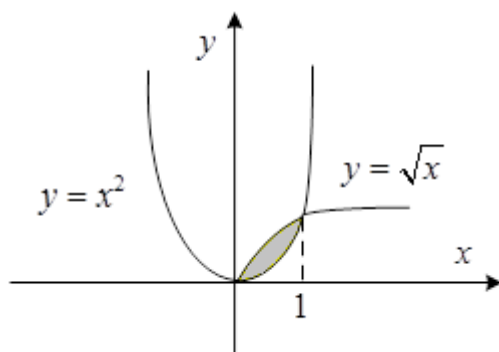


$$P = \int_0^4 (16 - x^2 - (x-4)^2) dx = 2 \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 2 \left(32 - \frac{64}{3} \right) = \frac{64}{3}.$$

4. $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Решење

Апсцисе пресечних тачака, уз услов $x > 0$, су: $x = 0 \vee x = 1$.



$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

5. $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Решење

$$P = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

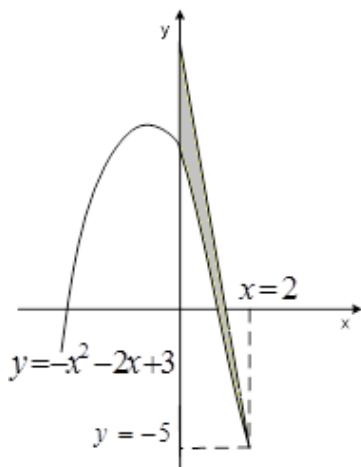
6. $y = x^2 - 5x + 4$ и $y = x - 1$

Решење

$$P = \int_1^5 ((x-1) - (x^2 - 5x + 4)) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx = \frac{32}{3}$$

7. Одредити површину ограничену параболом $y = -x^2 - 2x + 3$, њеном тангентом у тачки $M(2, y)$ и y -осом.

Решење



Како тачка $M(2, y)$ припада параболу, биће $y = -5$.

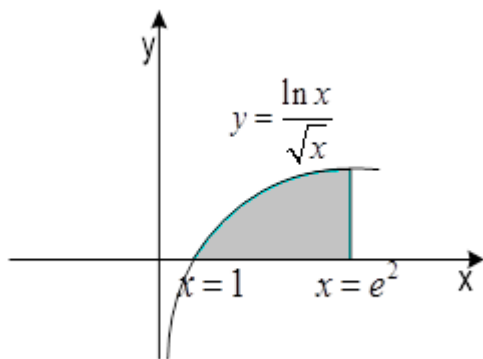
$y' = -2x - 2$, па је $k = y'(2) = -6$. Једначина тангенте параболе у тачки $M(2, -5)$ гласи $y + 5 = -6 \cdot (x - 2)$ или $y = 7 - 6x$.

Тражена површина износи:

$$P = \int_0^2 (7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3)) dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

8. Израчунати површину фигуре ограничене графиком функције $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ над одсечком $[1, e^2]$.

Решење:



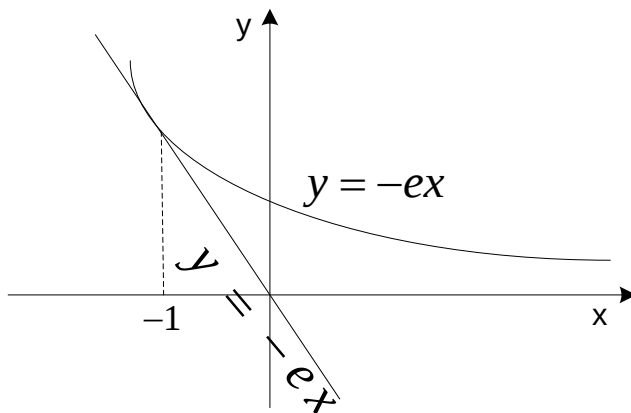
Тражена површина износи

$$P = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} = 2 \left(x^{\frac{1}{2}} \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx \right) = 4e - 4x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{e^2} = 4.$$

9. Одредити површину која је ограничена луком криве $y = e^{-x}$, њеном асимптомом и тангентом у тачки $M(-1, y_0)$.

Решење:

Координата y_0 тачке M је $y_0 = e^{-(-1)} = e$, па једначина тангенте дате криве у тачки $M(-1, e)$ гласи $y - e = y'(-1)(x + 1)$. Како је $y' = -e^{-x}$, $y'(-1) = -e$, па је $y = -ex$ тражена једначина тангенте. Асимптота је x оса.



$$P = \int_{-1}^{+\infty} e^{-x} dx - \int_{-1}^0 (-ex) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-1}^a e^{-x} dx - \int_{-1}^0 (-ex) dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_{-1}^a + e \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 = - \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-a} - e) - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}.$$

Изрешунати површину ограничenu кривим линијама :

10. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$, $x = e$ и $y = 0$

Резултат: $P = \frac{1}{3}$.

11. $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

Резултат: $P = \frac{16}{3}$.

12. $y = x^2 - 8x + 18$ и $y = -2x^2 + 18$. **Резултат:** $P = 36$.

13. $y = 2 - x^2$ и $y = |x|$. **Резултат:** $P = \frac{7}{3}$.

14. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и $x = 2$. **Резултат:** $P = e^2 + e^{-2} - 2$.

15. $y = \frac{x^2 - 1}{2}$, $y = x + 1$ **Резултат:** $P = \frac{16}{3}$.

16. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$. **Резултат:** $P = \frac{\pi}{2}$.

17. $y = \frac{3}{x}$ и $x + y = 4$. **Резултат:** $P = 4 - 3\ln 3$.

18. $y^2 = 8x$ и $2x - 3y + 8 = 0$. **Резултат:** $P = \frac{4}{3}$.

19. Израчунати површину ограничену кривом $y = x^2 - 2x + 2$, њеном тангентом у тачки $M(3, y)$ и y -осом.

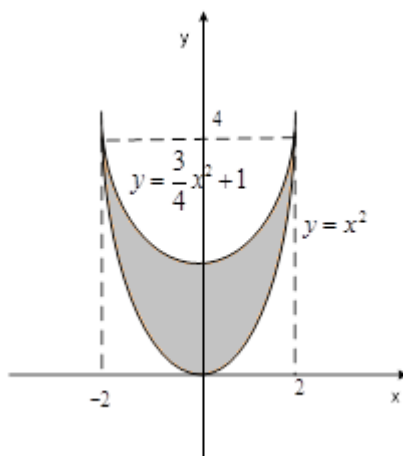
Резултат: $P = 9$.

20. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x -осе површи ограничене линијама $y = x^2$ и $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Решење:

Пресечне тачке графика функција су решења система $y = x^2$ и $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Добијамо $x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ и $y = 4$, па се дате криве секу у тачкама $A(-2, 4)$ и $B(2, 4)$.



$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^2 \left(\left(\frac{3}{4}x^2 + 1 \right)^2 - (x^2)^2 \right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(\frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 - x^4 \right) dx = \\
 &= 2\pi \int_0^2 \left(-\frac{7}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \right) dx = 2\pi \left(-\frac{7}{16} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.
 \end{aligned}$$

21. Одредити запремину тела насталог ротацијом око y -осе површи ограничене линијама $y = x^2$ и $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Решење:

$$V = V_1 - V_2$$

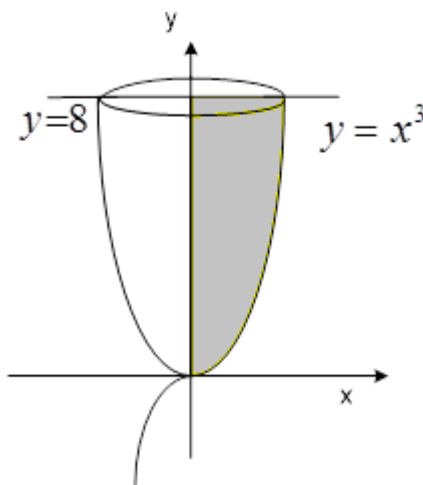
$$V_1 = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi.$$

$$V_2 = \pi \int_1^4 \frac{4}{3}(y-1) dy = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_1^4 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6\pi.$$

$$V_1 - V_2 = 2\pi.$$

22. Израчунати запремину обртног тела које се добија када површина коју чине криве $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$, ротира око y -осе.

Решење



$$V = \pi \int_0^8 x(y)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3\pi}{5} \left(\sqrt[3]{y} \right)^5 \Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5}.$$

23. Израчунати запремину обртног тела које се добија када површина коју чине криве $xy = 4$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$, ротира око x осе.

Решење

$$V = \pi \int_2^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_2^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x} \Big|_2^4 = 4\pi.$$

24. Израчунати запремину обртног тела које се добија када површина коју чине криве $xy = 3$, $x + y = 4$, ротира око x осе.

Решење

Апсцисе пресечних тачка кривих су:

$$x + y = 4 \wedge xy = 3 \Leftrightarrow y = 4 - x, x(4 - x) = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1.$$

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi \int_1^3 (4 - x)^2 dx = \int_1^3 (16 - 8x + x^2) dx = \frac{26}{3}\pi, \quad V_2 = \pi \int_1^3 \left(\frac{3}{x}\right)^2 dx = 9\pi \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = 6\pi.$$

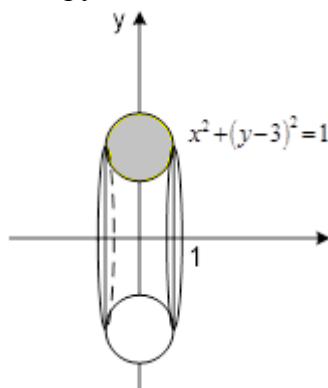
$$V = \frac{8}{3}\pi$$

25. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x -осе криве линије $x^2 + (y - 3)^2 = 1$.

Решење:

Дата једначина представља круг са центром $S(0, 3)$ и полупречником $r = 1$.

Из ње је $y = 3 \pm \sqrt{1 - x^2}$, па су $y_1 = 3 + \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = 3 - \sqrt{1 - x^2}$ једначине горњег и доњег полукруга тог круга.



Тело које настаје ротацијом дате криве је торус чија је запремина

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 \left((3 + \sqrt{1-x^2})^2 - (3 - \sqrt{1-x^2})^2 \right) dx \\
 &= 24\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 24\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 6\pi^2.
 \end{aligned}$$

26. $y = \sin x$, $x = 0$ и $x = \pi$ око x осе. **Резултат:** $V = \frac{\pi^2}{2}$

27. $x^2 + y^2 = 4$ и $y^2 - 3x = 0$ око x осе. **Резултат:** $V = \frac{19}{6}\pi$

28. $x^2 - y^2 = 4$ и $y^2 - 3x = 0$ око x осе. **Резултат:** $V = \frac{40}{3}\pi$.

29. $y = 5^x$, $y = 3^{-x}$ и $x = 2$ око x осе. **Резултат:** $V = \pi \left(\frac{312}{\ln 5} - \frac{40}{81 \cdot \ln 3} \right)$.

30. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ око x осе. **Резултат:** $V = \pi \left(1 + 2 \ln \frac{4}{5} \right)$.

31. Површина ограничена кривом $x^2 + y^2 = 16$, правом $x = 2$ и тангентом у пресечним тачкама дате праве и криве ротира око x осе. Наћи запремину обртног тела.

Резултат: $V = \frac{32}{3}\pi$.

Израчунати дужину лука следећих кривих на задатом интервалу.

32. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, за $x \in [1, e]$

Решење:

$$f'(x) = y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}} = \frac{x^2 + 1}{2x},$$

$$l = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln |x| \right) \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

33. Израчунати обим круга $x^2 + y^2 = r^2$.

Решење:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$l = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = 2r\pi.$$

34. $y = \ln(\sin x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

35. $y = 1 - \ln \cos x$, за $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Решење:

$$y' = -\frac{1}{\cos x} (-\sin x) = \operatorname{tg} x, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right\} = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -2 \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} \frac{dt}{t^2 - 1} = -2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + 1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - 1}.$$

36. $y = 2 \ln(4 - x^2)$, $x \in [0, 1]$.

Решење:

$$y' = \frac{4x}{x^2 - 4}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{4x}{x^2 - 4} \right)^2 = \left(\frac{4 + x^2}{x^2 - 4} \right)^2,$$

$$l = \int_0^1 \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{8}{x^2 - 4} \right) dx = \left(x + 8 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right) \Big|_0^1 = 1 + \ln 3.$$

37. $y = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \arctg \sqrt{e^x - 1}\right)$ за $x \in [0, \alpha]$.

Решење:

$$y' = 2 \left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} - \frac{1}{1 + (\sqrt{e^x - 1})^2} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \right) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - 1}} = \sqrt{e^x - 1},$$

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (\sqrt{e^x - 1})^2} dx = \int_0^\alpha e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^\alpha = 2e^{\frac{\alpha}{2}} - 2.$$

38. $y = \sqrt{e^{2x} + 2e^x} + \ln(e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 2e^x})$, $x \in [0, \alpha]$

Решење

$$y' = \frac{e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x}} + \frac{1}{e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 2e^x}} \left(e^x + \frac{e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x}} \right) = \sqrt{e^{2x} + 2e^x},$$

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (e^{2x} + 2e^x)} dx = \int_0^\alpha (1 + e^x) dx = (x + e^x) \Big|_0^\alpha = e^\alpha + \alpha - 1.$$

39. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in [a, b]$, $a, b \neq 0$.

Решење

$$y' = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1},$$

$$I = \int_a^b \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right) dx = \int_a^b \left(1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} \right) dx = x \Big|_a^b + 2 \int_a^b \frac{dx}{e^{2x} - 1} = (b - a) + 2I.$$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} e^{2x} = t, \quad 2x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{2t} \\ x = a, t = e^{2a}; \quad x = b, t = e^{2b} \end{array} \right\} = \int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln \frac{t-1}{t} \Big|_{e^{2a}}^{e^{2b}} =$$

$$\ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2b}} - \ln \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a}} = \ln(e^{2b} - 1) - 2b - \ln(e^{2a} - 1) + 2a = \ln \frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}.$$

40. $y = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right)$, $x \in [1, a+1]$, $a > 0$

Решење

$$y' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$l = \int_1^{a+1} \sqrt{1+x^2-1} dx = \int_1^{a+1} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^{a+1} = \frac{a(a+2)}{2}.$$

41. $y = \ln x$, $x \in [\frac{3}{4}, \frac{12}{5}]$.

Решење:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$l = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1=t^2, 2xdx=2tdt \\ x=\frac{3}{4}, t=\frac{5}{4}; x=\frac{12}{5}, t=\frac{13}{5} \end{array} \right\} = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} dt = t \Big|_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} = \frac{27}{20}$$

$$I_2 = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, -\frac{dx}{x^2} = dt \\ x=\frac{3}{4}, t=\frac{4}{3}; x=\frac{12}{5}, t=\frac{5}{12} \end{array} \right\} = -\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{12}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$-\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{12}} = \ln 3 - \ln \frac{3}{2} = \ln 2$$

$$l = \frac{27}{20} + \ln 2.$$

42. $y = \frac{2}{\sin x}$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

Решење:

$$y' = -\frac{2 \cos x}{\sin^2 x},$$

$$1+y'^2 = 1 + \frac{4 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{\sin^4 x + 4 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{(1 - \cos^2 x)^2 + 4 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{(1 + \cos^2 x)^2}{\sin^4 x},$$

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{(1+\cos^2 x)^2}{\sin^4 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = (-2\operatorname{ctgx} - x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 4 - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

43. Израчунати дужину лука криве $y = \ln(2\cos x)$ између пресечних тачака са координатним осама.

Решење:

$$\ln(2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x=0, y=0.$$

$$y' = \frac{-2\sin x}{2\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad 1+y'^2 = 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x=0, t=0; \quad x=\frac{\pi}{3}, t=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$-2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{t^2-1} = -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \ln(\sqrt{3}+2).$$

У наредним примерима функција или њен извод у крајевима интервала дефинисаности има прекиде. Из тих разлога израчунавање лука своди се на несвојствени интеграл.

44. $y = \frac{\sqrt{x}}{3} - x\sqrt{x}, \quad x \in [0, 9].$

Решење

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{1-9x}{6\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1-9x}{6\sqrt{x}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1+18x+81x^2}{36x}} = \sqrt{\frac{(1+9x)^2}{36x}} = \frac{1+9x}{6\sqrt{x}},$$

$$l = \int_0^9 \frac{1+9x}{6\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^9 \left(x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{6} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{\varepsilon}^9 = 28.$$

45. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \in [1, 2].$

Решење

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$I = \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\varepsilon}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 = t^2, xdx = \frac{dt}{2} \\ x = \varepsilon, t = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \\ x = 2, t = \sqrt{3} \end{array} \right\} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}^{\sqrt{3}} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(t \Big|_{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}^{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{3}$$

46. $y = \arcsin e^{-x}, x \in [0, 1].$

Решење

$$y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1 + \frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1},$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1$$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t, e^x dx = dt \\ x = 0, t = 1 \\ x =, t = e \end{array} \right\} = \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \Big|_{1+\varepsilon}^e =$$

$$\ln(e + \sqrt{e^2 - 1}) - \ln(1 + \varepsilon + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}),$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$$

47. $y = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}.$

Решење:

Дата крива је дефинисана за $x \in [0, 1].$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{1 - x},$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 1-0} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = - \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \bigg|_0^t = -2 \left(\lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} - 1 \right) = 2.$$

48. а) $y = 2x^2 - \frac{1}{16} \ln x, \quad x \in [1, 2];$

б) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in [0, 1];$

в) $y = \ln(1-x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$

г) $y = \frac{2}{\cos x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$

Решење:

а) $l = 6 + \frac{1}{16} \ln 2,$

б) $l = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right),$

в) $l = \ln 3 - \frac{1}{2},$

г) $l = 2 - \frac{\pi}{4},$

К Л Ъ У Ч Н Е Р Е Ч И

Неодређени интеграл

Правила интеграљења

Метода смене

Парцијална интеграција

Интеграција рационалних функција

Интеграција ирационалних функција

Одређени интеграл

Правила интеграљења одређених интеграла

Несвојствени интеграл

Дужина лука криве

Површина равне фигуре

Запремина обртног тела

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Боричић, М. Ивовић, *МАТЕМАТИКА*, Економски факултет, Београд, 2005.
2. Б. Боричић, М. Ивовић, Д. Аздељковић, В. Балтић, Ј. Станојевић, *ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ*, Економски факултет, Београд, 2005.
3. Група аутора *МАТЕМАТИКА ЗА ВИШЕ ТЕХНИЧКЕ ШКОЛЕ*, Савремена администрација, Београд, 1990.
4. М. Меркле *МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА теорија и хиљаду задатака*, Академска мисао, Београд, 2008.
5. З. Мишковић, И. Ковачевић, А. Савић, *МАТЕМАТИКА-збирка задатака и тестова са пријемних испита*, Висока школа електротехнике и рачунарства, Београд, 2013.
6. А. Савић, З. Мишковић, С. Штрбац – Савић, *МАТЕМАТИКА 1*, Висока школа електротехнике и рачунарства, Београд, 2013.
7. А. Савић, С. Штрбац – Савић, *МАТЕМАТИКА 2*, Висока школа електротехнике и рачунарства, Београд, 2015.
8. Г. Калајџић, *ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА*, Математички факултет, Београд, 2007.

