PROGRAMIRANJE U INTEGRISANIM TEHNOLOGIJAMA

Oznaka predmeta: PIT

Predavanje broj: 08

Nastavna jedinica: PYTHON,

Nastavne teme:

Crtanje grafika funkcija (biblioteka matplotlib). Integracija (trapezno pravilo, Simpsonova metoda). Linearne jednačine (Gaus-Jordanov metod). Interpolacija: algebarski polinomi, Lagrange-ova, Newton-ova.

Predavač: prof. dr Perica S. Štrbac, dipl. ing.

Literatura:

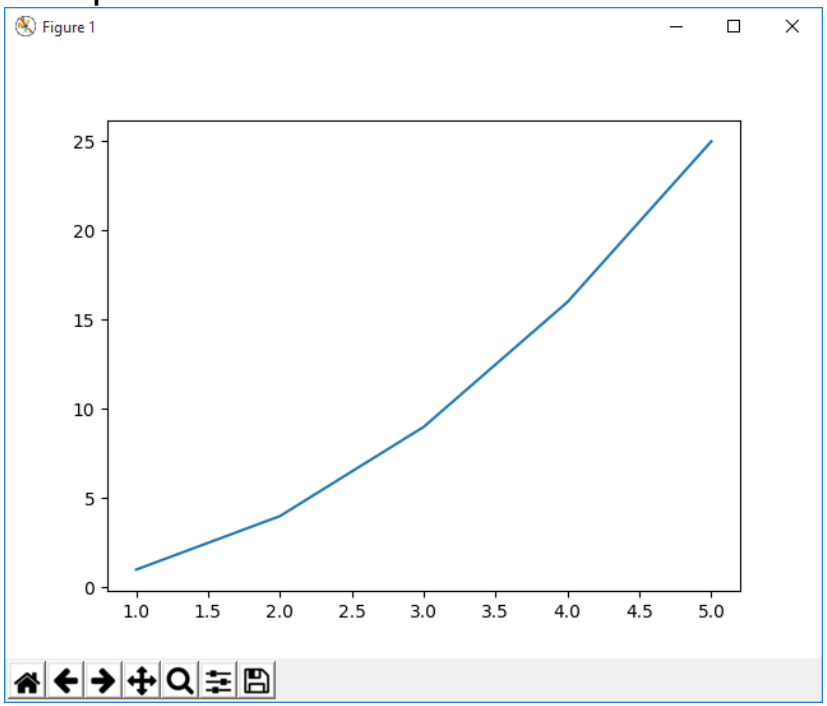
Steven Lott: "Functional Python Programming", Packt Publishing, 2015.

Crtanje grafika

- Ažurirajte pip sa: `python –m pip install --upgrade pip`
- Instalirati: `pip install matplotlib`
- Provera modula (standardno) :

```
>>> import pylab
>>> import matplotlib
>>> matplotlib.__version__
```

  pylab je modul matplotlib-a
- Crtanje tačaka povezanih linijama

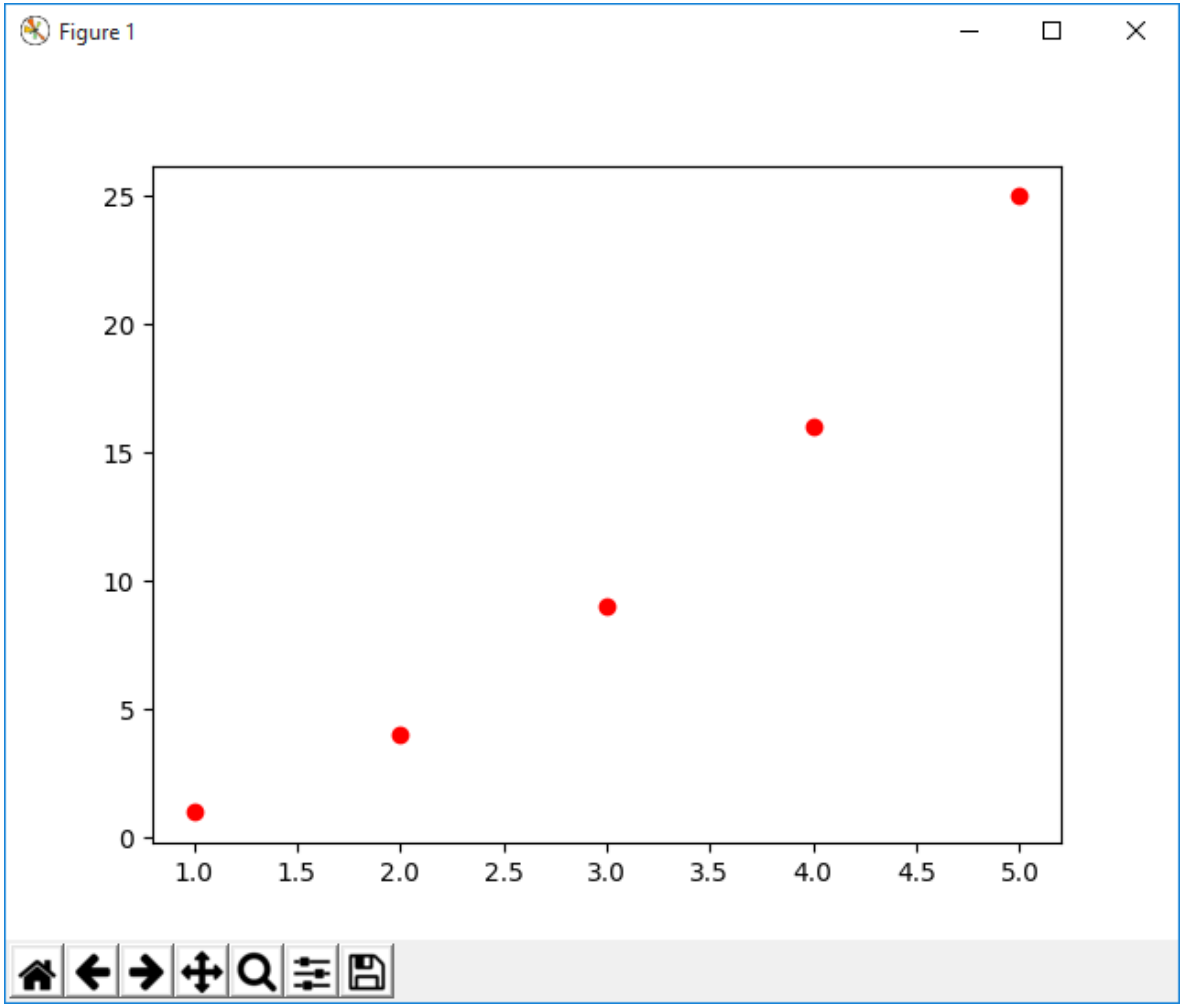



```
import pylab
x = [1, 2, 3,  4,  5]  # lista x vrednosti
y = [1, 4, 9, 16, 25]  # lista y=f(x)=x**2
pylab.plot(x, y)       # generisanje slike za
                       # date x i y vrednosti
pylab.show()           # prikaz na ekranu
```

Crtanje grafika - tačkasto

- Prikaz tačkastih vrednosti

```
import pylab
x = [1, 2, 3,  4,  5]
y = [1, 4, 9, 16, 25]
# generisanje slike za
# date x i y vrednosti
# r = crvena boja
# o = marker
#     probajte r-*
pylab.plot(x, y, 'ro')
pylab.show()

# ako se samo navede Y
# lista
# pripadna x lista
# ide redom 1,2,…
```



Crtanje grafika – boje i parametri prikaza

- Menjanje boje crtanja

```
pylab.plot(x, y, 'r')
```

character	color
b	blue
g	green
r	red
c	cyan
m	magenta
y	yellow
k	black
w	White

- Menjanje stila linije

```
plot(x,y, '--') # crta crtkanu liniju
plot(x,y, 'b*') # tackasto crtanje znakom plavim znakom *
        sledi popis nekih markera:
        's' square marker          'p' pentagon marker
        '*' star marker            'h' hexagon1 marker
        'H' hexagon2 marker        '+' plus marker
        'x' x marker               'D' diamond marker
        'd' thin diamond marker
```

Crtanje grafika – labele, naslov, opsezi

- Postavljanje labele *x* ose i *y* ose:

```
pylab.xlabel('X osa')
pylab.ylabel('Y osa')
```

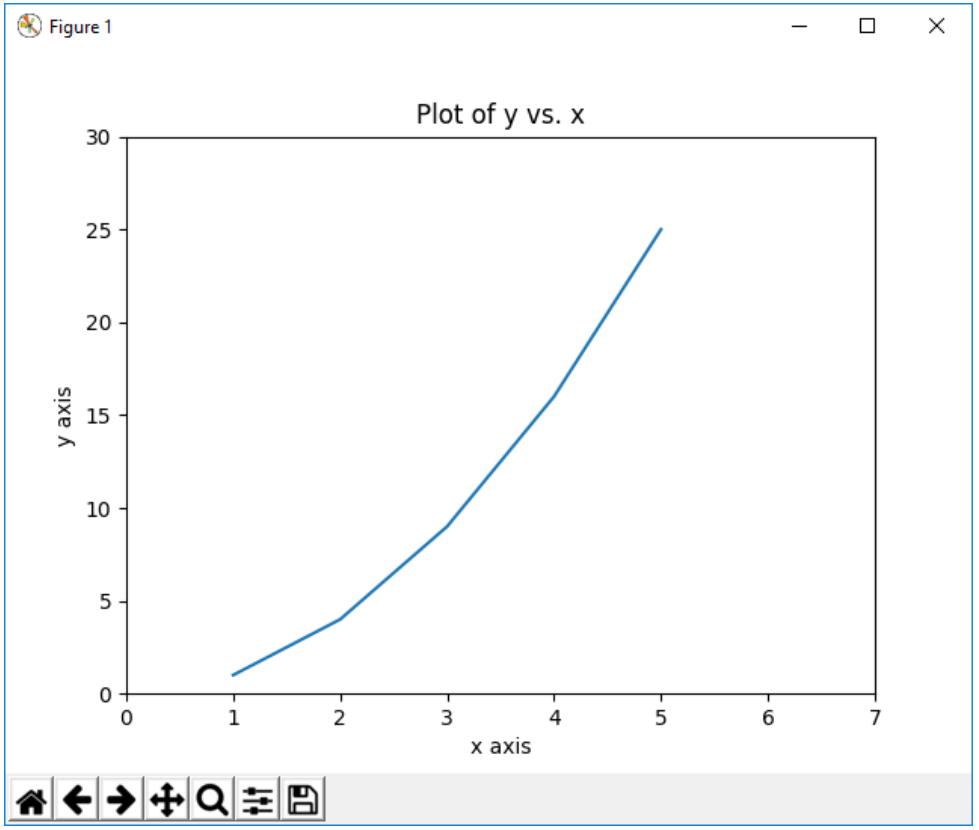
- Postavljanje naziva slike:

```
pylab.title('NASLOV SLIKE')
```

- Postavljanje opsega za prikaz po *x* i *y* osi:

```
pylab.xlim(x_low, x_high)
pylab.ylim(y_low, y_high)
```

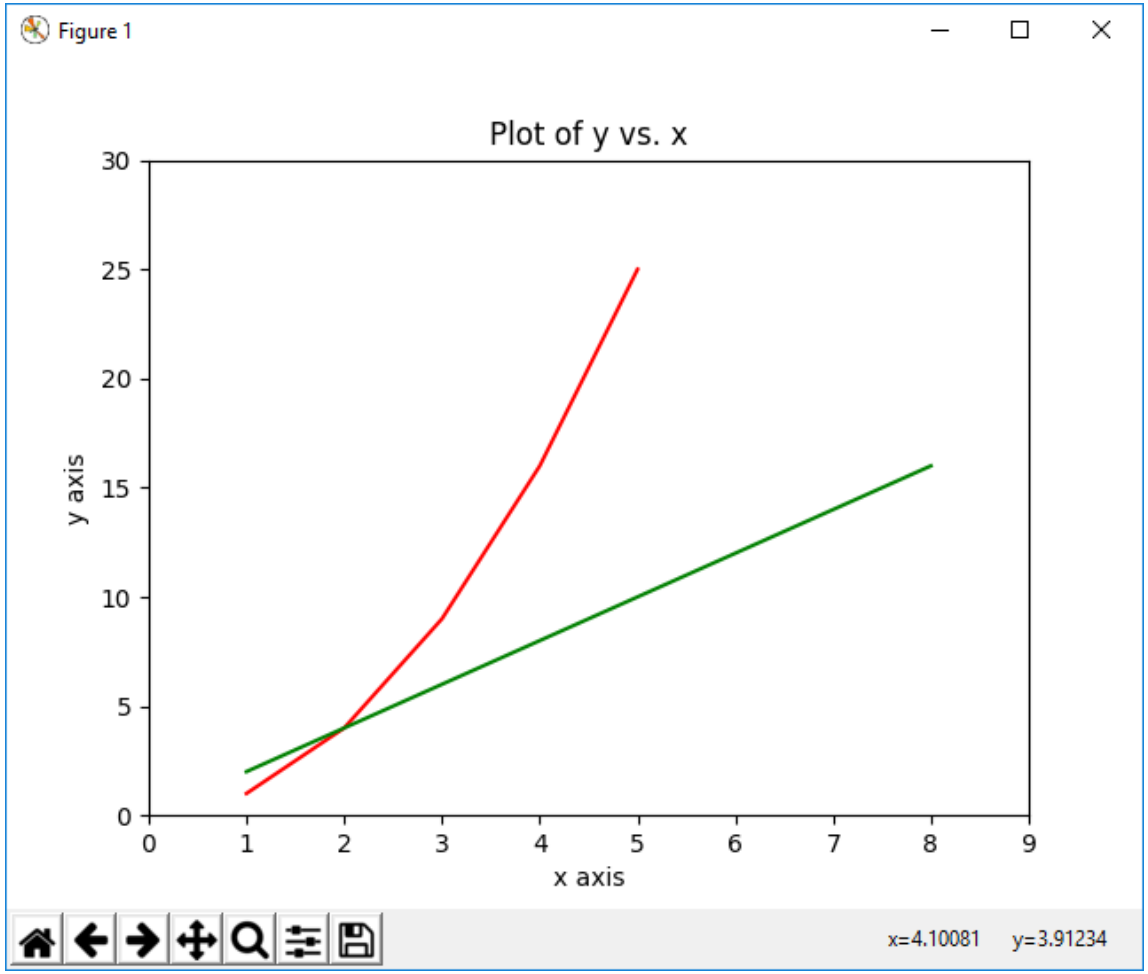
```
import pylab as pl
x = [1, 2, 3,  4,  5]
y = [1, 4, 9, 16, 25]
pl.plot(x, y)
pl.title('Plot of y vs. x')
pl.xlabel('x axis')
pl.ylabel('y axis')
pl.xlim(0.0, 7.0)
pl.ylim(0.0, 30.)
pl.show()
```



Crtanje grafika – dva grafika

- Štampanje npr. dva grafika:

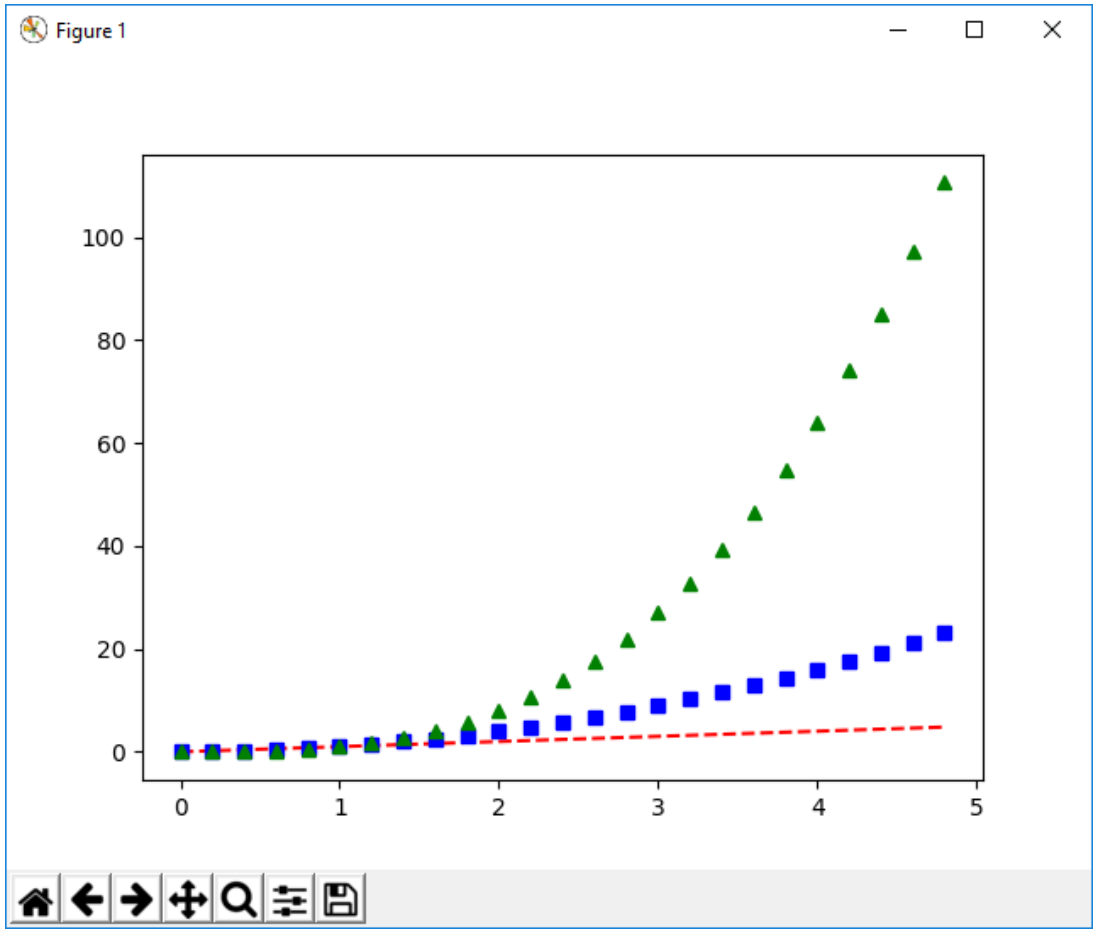
```
import pylab as pl
x1 = [1, 2, 3,  4,  5]
y1 = [1, 4, 9, 16, 25]
x2 = [1, 2, 4,  6,  8]
y2 = [2, 4, 8, 12, 16]
pl.plot(x1, y1, 'r')
pl.plot(x2, y2, 'g')
pl.title('Plot of y vs. x')
pl.xlabel('x axis')
pl.ylabel('y axis')
pl.xlim(0.0,  9.0)
pl.ylim(0.0, 30.0)
pl.show()
```



Crtanje grafika – više grafika različitog prikaza

- Štampanje tri grafika sa različitim formatom prikaza:

```
import pylab as pl
import numpy as np

t = np.arange(0., 5., 0.2)

# red dashes,
# blue squares
# green triangles
```

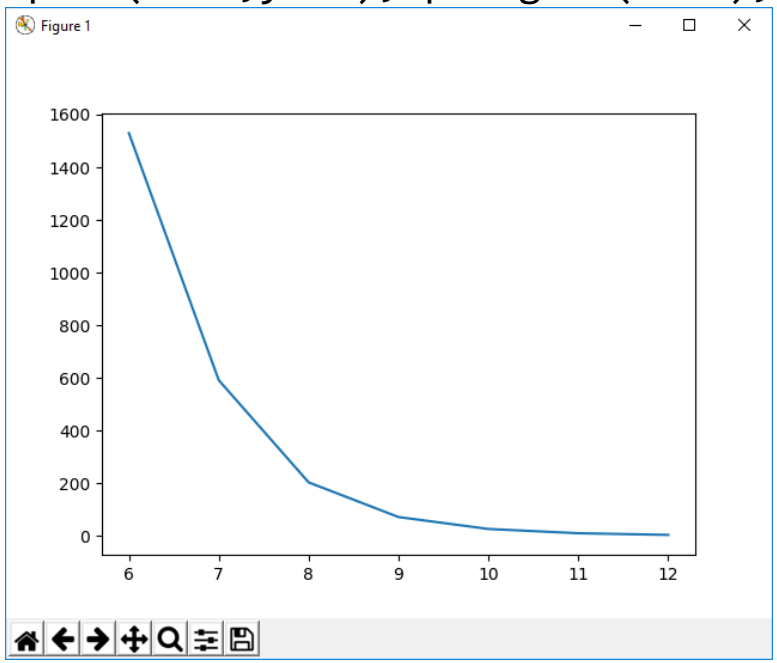


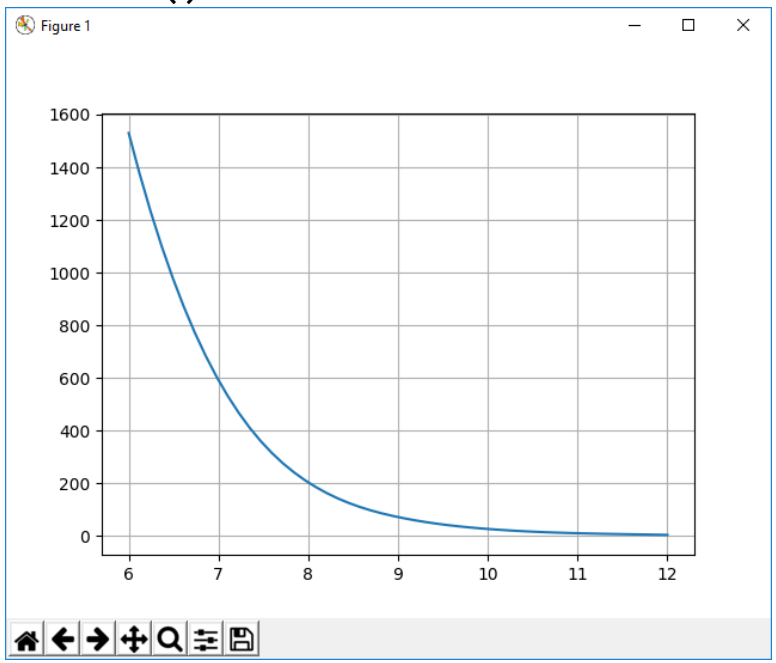

```
pl.plot(t, t, 'r--', t, t**2, 'bs', t, t**3, 'g^')
pl.show()
```

Crtanje grafika – glatki prikaz

- Štampanje glatkog grafika:

```
from scipy.interpolate import spline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.array([6, 7, 8, 9, 10, 11, 12])
y = np.array([1.53E+03, 5.92E+02, 2.04E+02, 7.24E+01, 2.72E+01,
1.10E+01, 4.70E+00])
xnew = np.linspace(x.min(),x.max(),50)
ynew = spline(x,y,xnew)
plt.plot(xnew,ynew); plt.grid(True);plt.show()
```

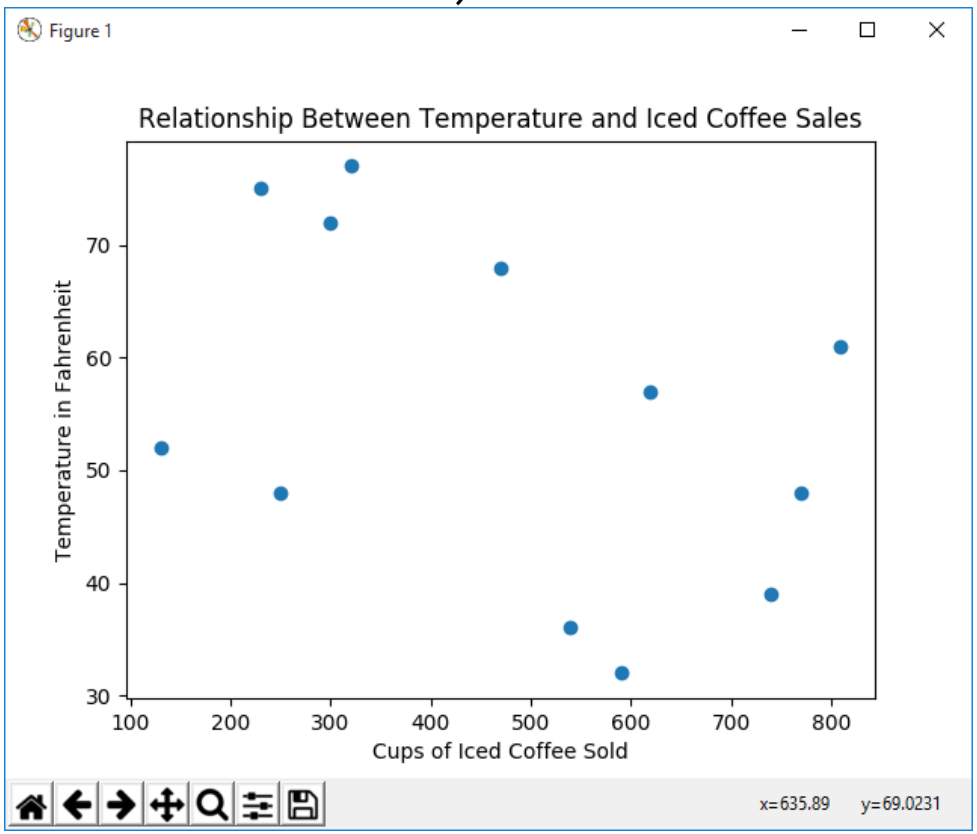




Tačkasti prikaz: scatter

- Crtanje tačaka čije su vrednosti koordinata date kao liste x i y vrednosti

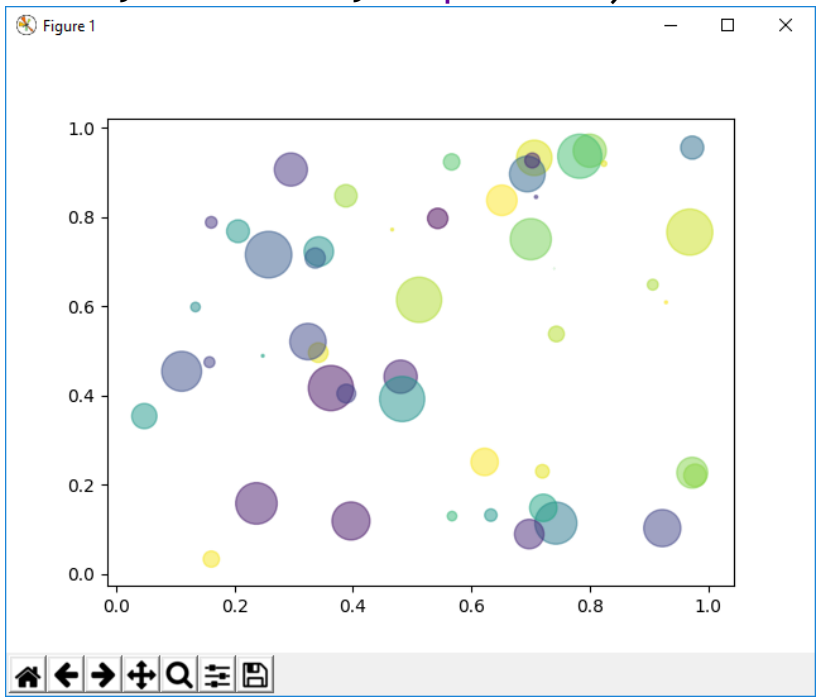
```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [590,540,740,130,810,300,320,230,470,620,770,250]
Y = [ 32, 36, 39, 52, 61, 72, 77, 75, 68, 57, 48, 48]
plt.title('Relationship Between Temperature and Iced Coffee Sales')
plt.xlabel('Cups of Iced Coffee Sold')
plt.ylabel('Temperature in Fahrenheit')
plt.scatter(X,Y)
plt.show()
```



Primer tačkastog prikaza

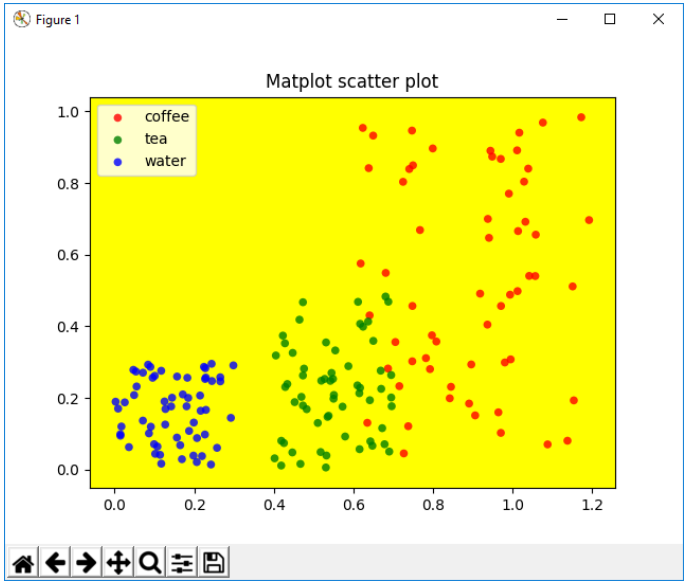
- Crtanje tačaka različite boje, veličine i neprovidnosti.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
np.random.seed(19680801)
N = 50
x = np.random.rand(N)
y = np.random.rand(N)
colors = np.random.rand(N)
area = np.pi * (15 * np.random.rand(N))**2  # r=[0,15)
plt.scatter(x, y, s=area, c=colors, alpha=0.5)
plt.show()
```



Primer tačkastog prikaza po grupama

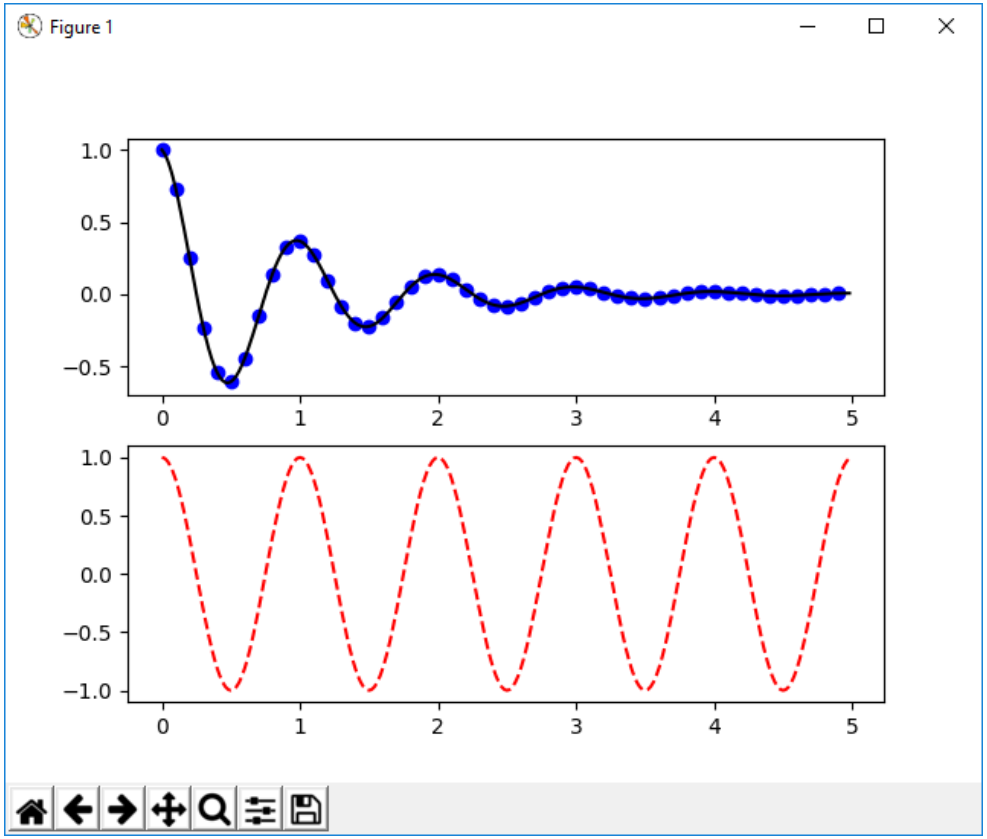
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 60
g1 = (0.6 + 0.6 * np.random.rand(N), np.random.rand(N))
g2 = (0.4 + 0.3 * np.random.rand(N), 0.5 * np.random.rand(N))
g3 = (0.3 * np.random.rand(N), 0.3 * np.random.rand(N))
data   = (   g1   ,      g2,       g3)
colors = (   "red", "green",  "blue")
groups = ("coffee",   "tea", "water")
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1,1,1,axisbg="yellow")
for data,color,group in zip(data, colors, groups):
    x, y = data
    ax.scatter(x,y,alpha=0.8, c=color, edgecolors='none', s=30,
label=group)
plt.title('Matplot scatter plot')
plt.legend(loc=2)
plt.show()
```



Dva plot-a na istoj slici

- Sledi primer crtanja dva odvojena grafikona:

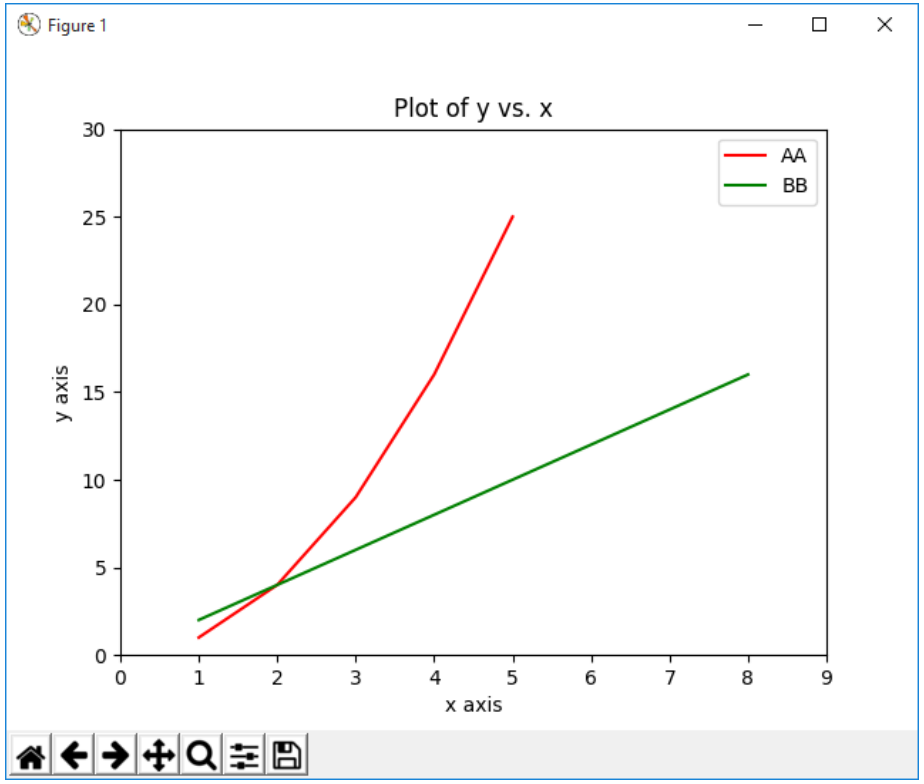
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def f(t):
    return np.exp(-t) * np.cos(2*np.pi*t)

t1 = np.arange(0.0, 5.0, 0.1)
t2 = np.arange(0.0, 5.0, 0.02)

plt.figure(1)
plt.subplot(211)
plt.plot(t1,f(t1),'bo',t2,f(t2),'k')

plt.subplot(212)
plt.plot(t2,np.cos(2*np.pi*t2),'r--')
plt.show()
```



Legenda

- Neki parametri legende:
  - handles: lista linija, labels: lista labela , loc: pozicija labele ('best','upper right', 'upper left', 'center', 'lower left', 'lower right').

```
import pylab as pl
x1 = [1, 2, 3, 4, 5]
y1 = [1, 4, 9, 16, 25]
x2 = [1, 2, 4, 6, 8]
y2 = [2, 4, 8, 12, 16]
pl.title('Plot of y vs. x')
pl.xlabel('x axis')
pl.ylabel('y axis')
pl.xlim(0.0, 9.0)
pl.ylim(0.0, 30.)
```

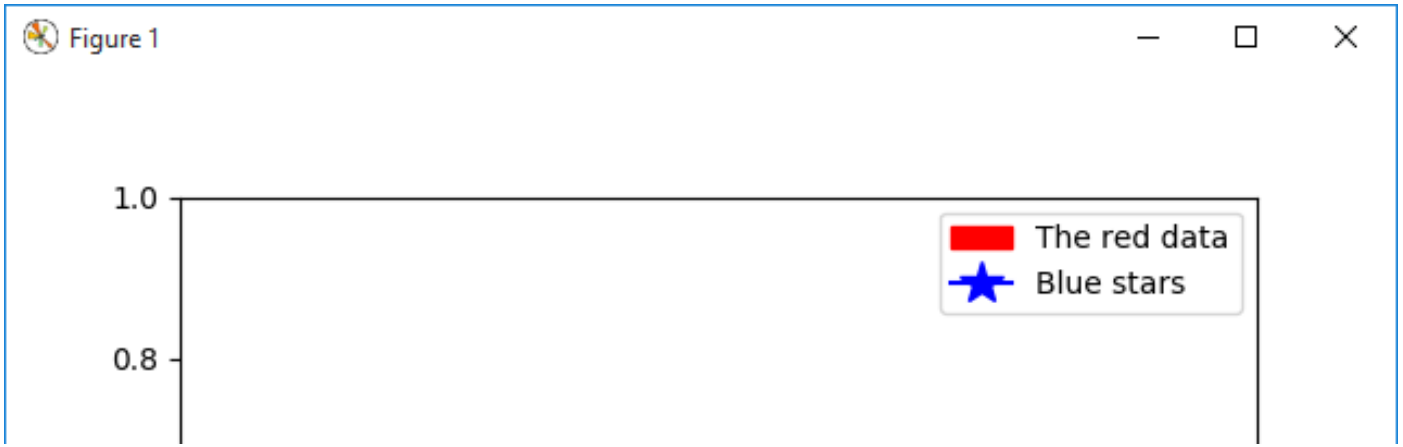



```
linered,   = pl.plot(x1,y1,'r', label='Red line')
linegreen, = pl.plot(x2,y2,'g', label='Green line')
pl.legend(handles=[linered, linegreen],labels=['AA','BB'],loc='upper
right'); pl.show()
```

Legenda: Patch, Line2D

- Kreiranje legende pomoću Patch i Line2D

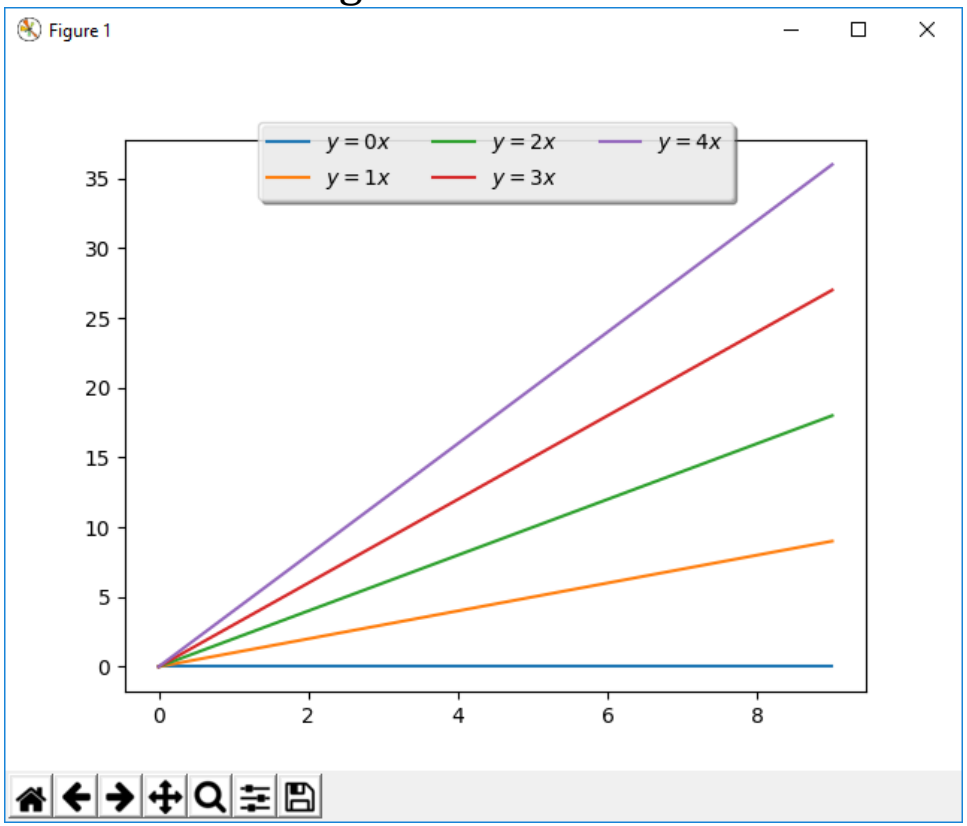
```
import matplotlib.patches as mpatches
import matplotlib.lines as mlines
import matplotlib.pyplot as plt

red_patch = mpatches.Patch(color='red', label='The red data')

blue_line = mlines.Line2D([], [], color='blue', marker='*',
                          markersize=15, label='Blue stars')

plt.legend(handles=[red_patch,blue_line])
plt.show()
```



Prikaz legende na datoj poziciji

- Kreiranje legende na datoj poziciji i sa definisanim izgledom

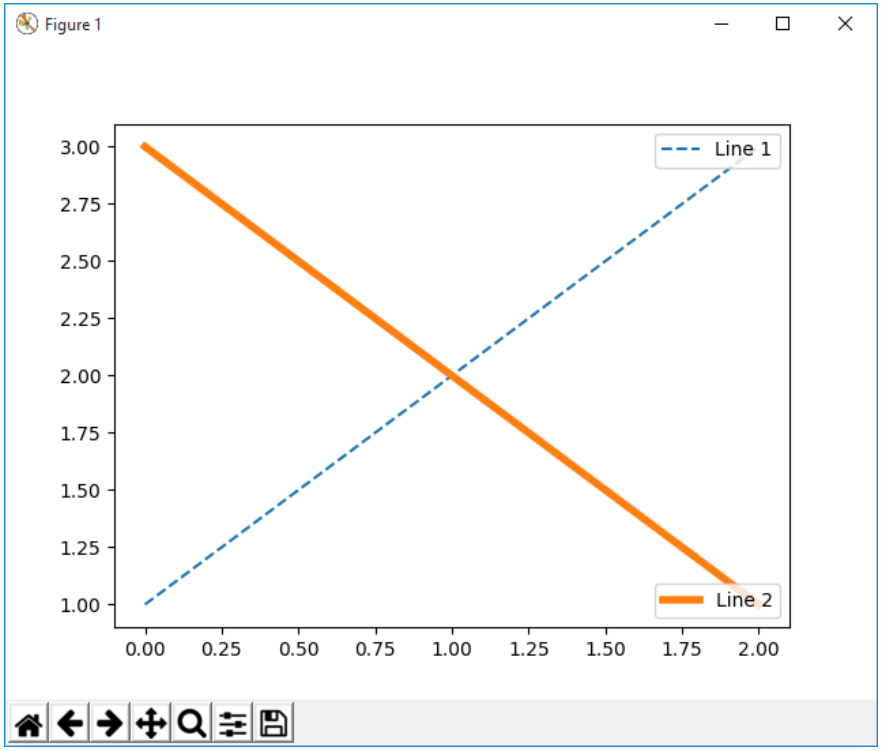
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.arange(10)

fig = plt.figure()
ax = plt.subplot(111)
```




```
for i in range(5):
    line, = ax.plot(x, i * x, label='$y = %ix$'%i)

ax.legend(loc='upper center', bbox_to_anchor=(0.5, 1.05),
          ncol=3, fancybox=True, shadow=True)
plt.show()
```

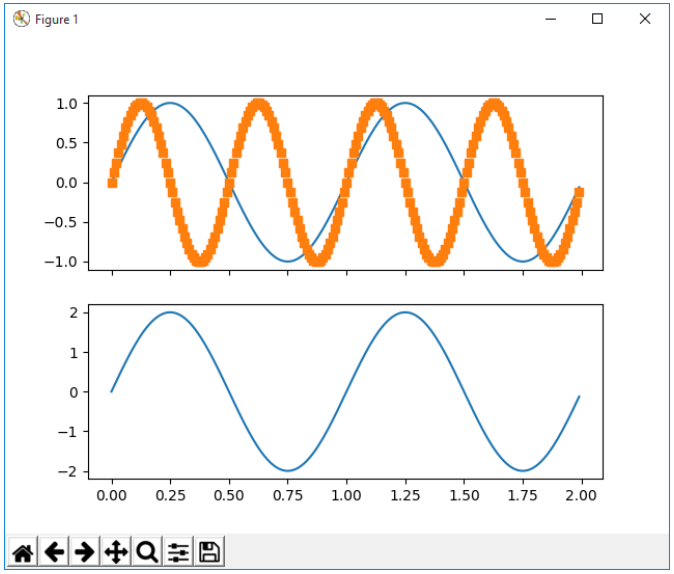
Prikaz dve legende

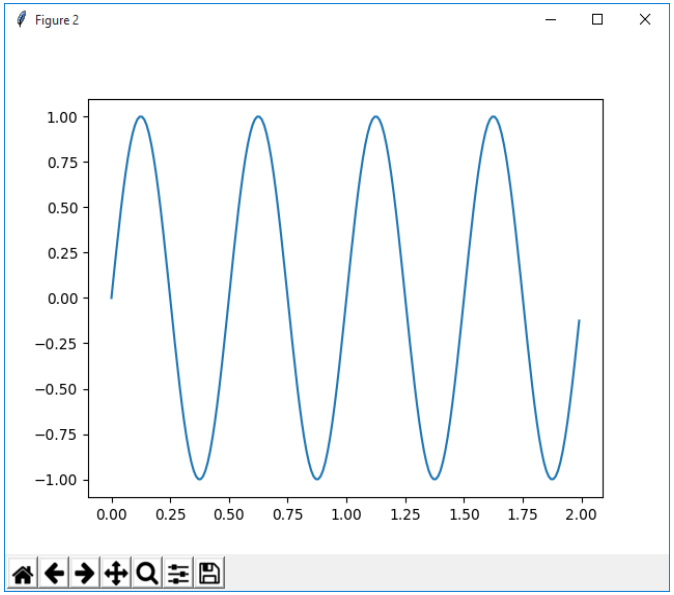
```
import matplotlib.pyplot as plt

line1, = plt.plot([1,2,3], label="Line 1", linestyle='--')
line2, = plt.plot([3,2,1], label="Line 2", linewidth=4)

first_legend = plt.legend(handles=[line1], loc=1)

ax = plt.gca().add_artist(first_legend)

plt.legend(handles=[line2], loc=4)

plt.show()
```



Prikaz dve slike grafika

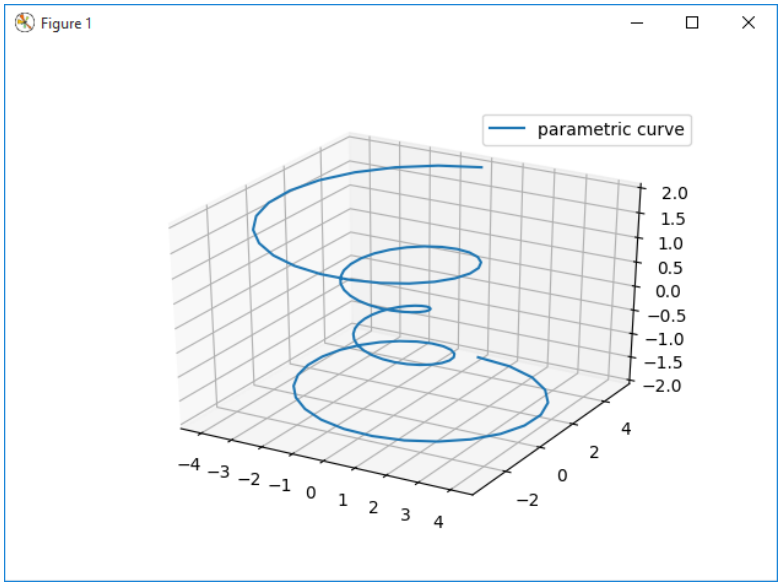
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

t  = np.arange(0.0, 2.0, 0.01)
s1 = np.sin(2*np.pi*t)
s2 = np.sin(4*np.pi*t)

plt.figure(1)
plt.subplot(211); plt.plot(t, s1)
plt.subplot(212); plt.plot(t, 2*s1)

plt.figure(2)
plt.plot(t, s2)

plt.figure(1) # opet malo promene na fig.1
plt.subplot(211)
plt.plot(t, s2, 's')
ax = plt.gca()
ax.set_xticklabels([])

plt.show()
```





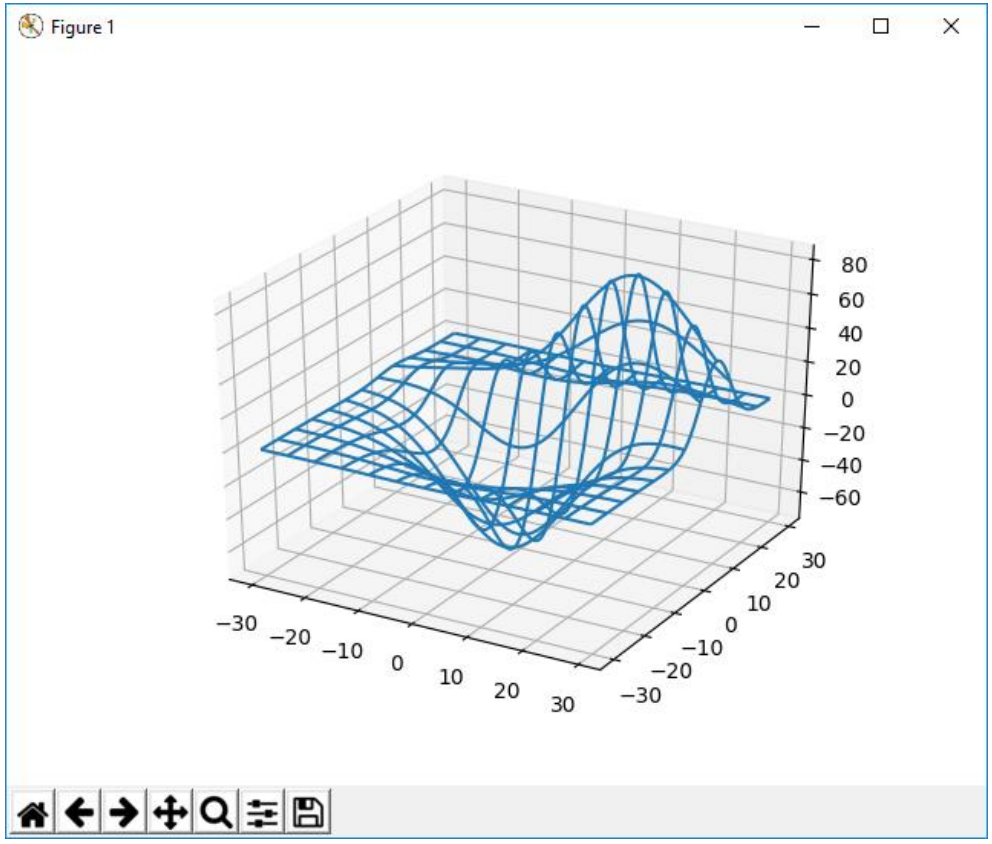
3D prikaz

```
import matplotlib as mpl
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mpl.rcParams['legend.fontsize'] = 10 # tekst → parametric curve

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

theta = np.linspace(-4*np.pi, 4*np.pi, 100)

z = np.linspace(-2, 2, 100)
r = z**2 + 1
x = r * np.sin(theta)
y = r * np.cos(theta)

ax.plot(x,y,z,label='parametric curve')
ax.legend()

plt.show()
```



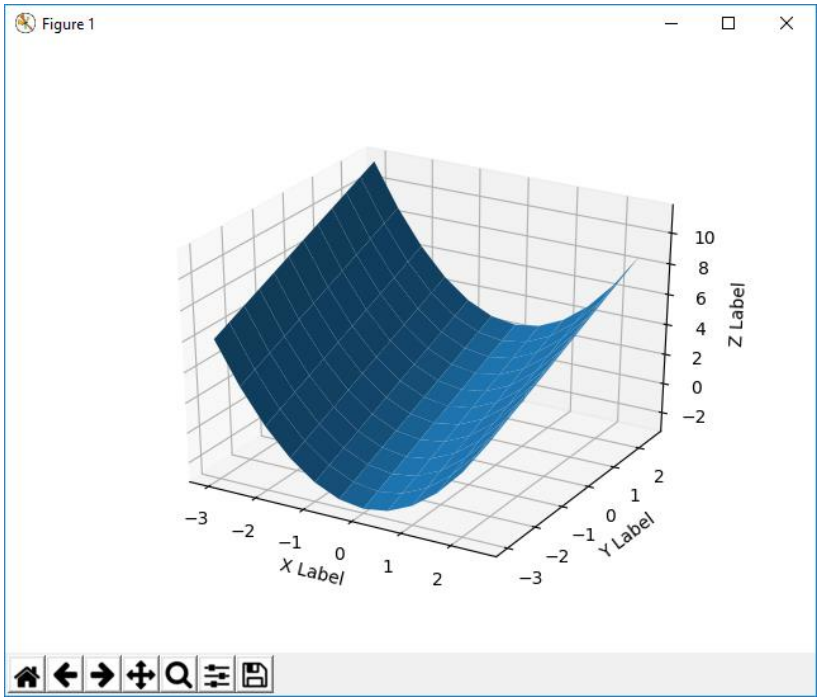
3D prikaz

```
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
X, Y, Z = axes3d.get_test_data(0.05)
ax.plot_wireframe(X, Y, Z, rstride=10, cstride=10)
plt.show()
```



3D prikaz

```
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt

def fun(x, y): return x**2 + y
fig = plt.figure()
# fig.suptitle('Naslov')
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
x = y = np.arange(-3.0, 3.0, 0.5)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
zs = np.array([fun(x,y) for x,y in zip(np.ravel(X), np.ravel(Y))])
Z = zs.reshape(X.shape)

ax.plot_surface(X, Y, Z)

ax.set_xlabel('X Label')
ax.set_ylabel('Y Label')
ax.set_zlabel('Z Label')

plt.show()
```



Uvod u numeričku integraciju

- Postoje dva različita tipa integrala: neodređeni i određeni integral
- Neodređeni integral

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Rezulatat integracije je funkcija

- Određeni integral

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

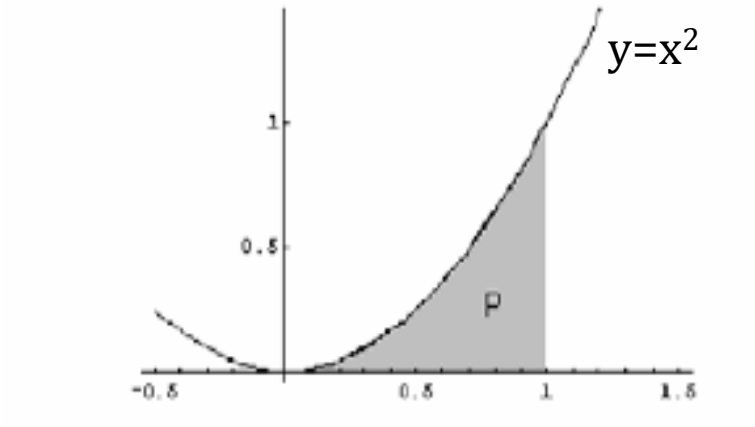
Rezultat integracije je broj

- Samo za rešavanje određenih integrala se mogu upotrebiti numeričke metode.

Numerička integracija

- Određeni integral se geometrijski interpretira kao površina ispod krive. Na primer za parabolu $y=x^2$ u granicama od $x=0$ do $x=1$ to je

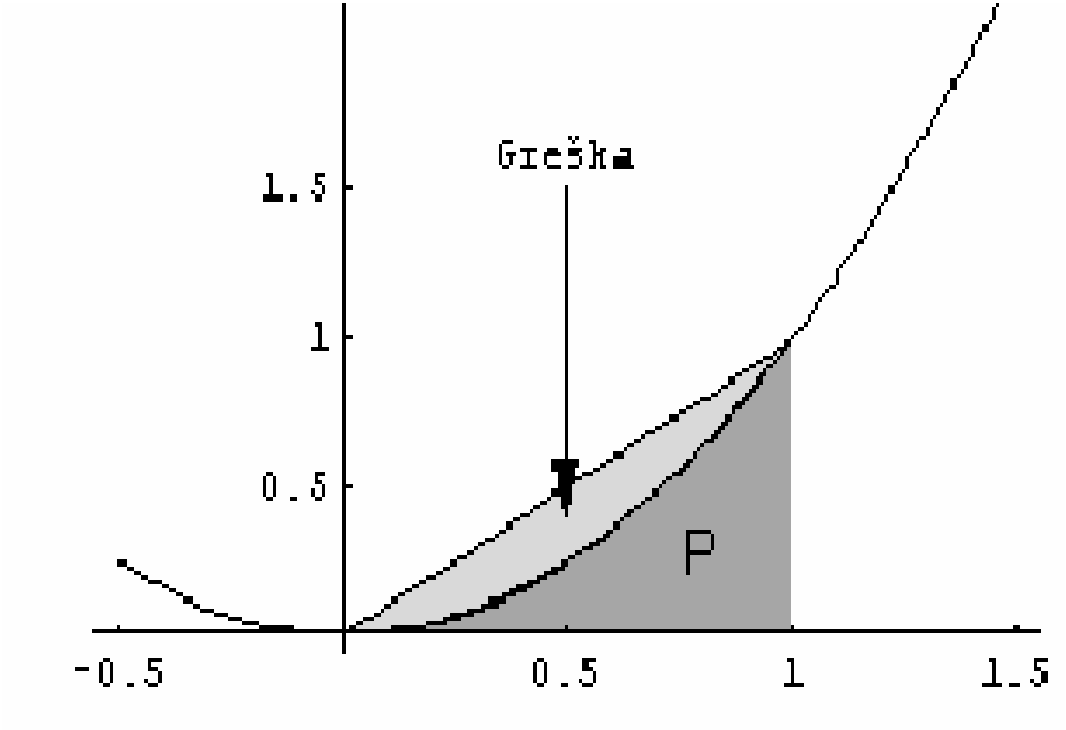
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$



- Površina ispod krive $y=x2$ u granicama od $x=0$ do $x=1$ iznosi $P=1/3$
- Za ovaj proces postoje i numeričke aproksimacije nazvane numeričko integriranje (kvadratura).

Trapezno pravilo
- početak postupka (jedan trapez)

- Najjednostavnija, ali ne i najbolja metoda, se sastoji u tome da se površina ispod krive aproksimira nizom trapeza



- Površina trougla na slici iznosi $P\Delta=1/2$
- Greška tako izračunate površine iznosi:

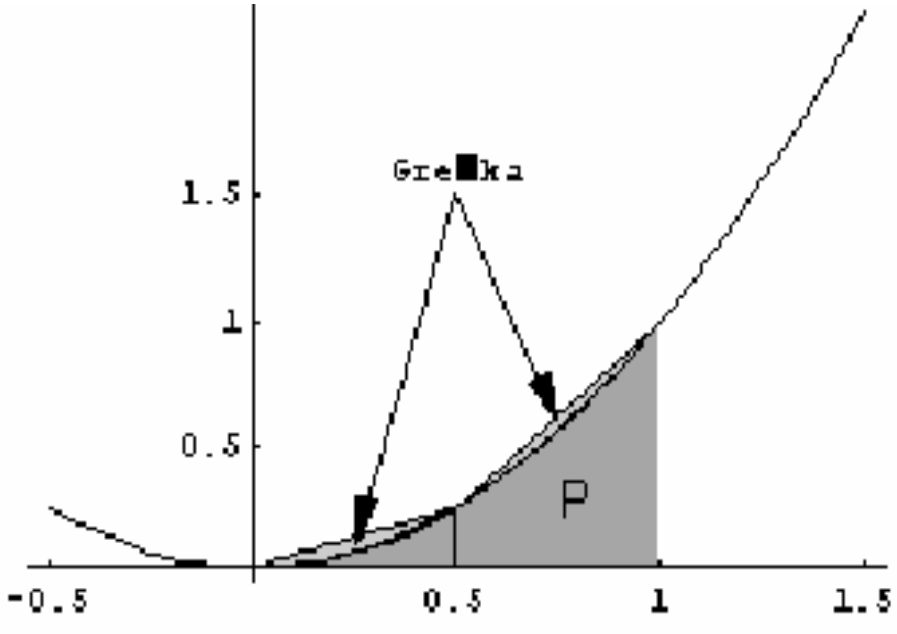
$$G= P\Delta-P[f(x)] = ½-1/3 = 1/6$$

Trapezno pravilo
- nastavak postupka (dva trapeza)

- Ako se interval integracije podeli na dva jednaka dela dobija se sledeći rezultat

$$P_{trougao} = \frac{\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P_{trapez} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{4}}{2}\right) = \frac{5}{16}$$



$$P_{uk} = P_{trougao} + P_{trapez} = \frac{1}{16} + \frac{5}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

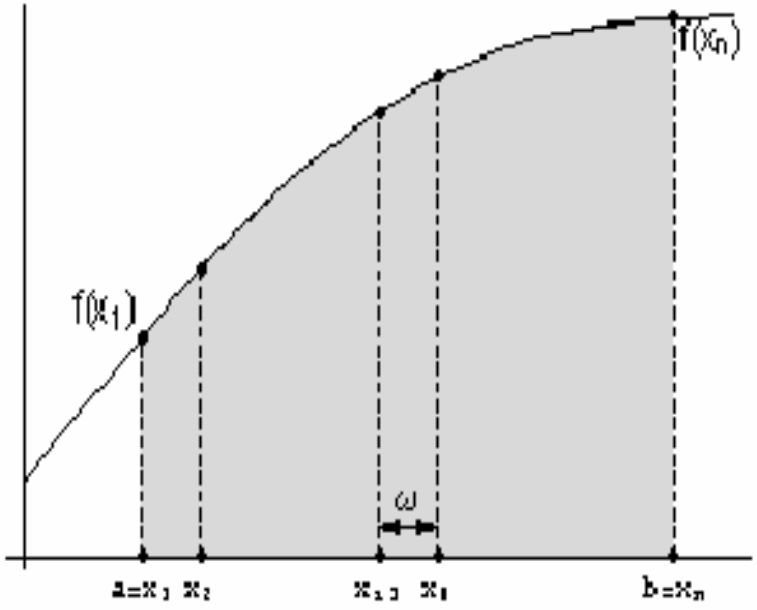
$$Greška = P_{uk} + P[f(x)] = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

Trapezno pravilo

- Funkcija f(x) se integrira u granicama od a do b

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Zadati interval se deli na n jednakih delova



- Površina jednog segmenta ispod krive računa se kao:

$$A_i = \frac{\omega}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]; \qquad \omega = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

gde je n broj podintervala zadatog intervala.

Trapezno pravilo
- ukupna površina trapeza

- Ukupna površina ispod krive u intervalu od *a* do b, gde je $a=x_0$, $b=x_n$ iznosi:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n =$$

$$= \frac{\omega}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{\omega}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + \frac{\omega}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + \frac{\omega}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] =$$

$$= \frac{\omega}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

- Tačnost ove metode zavisi od broja trapeza (*n*) koji je odabran.
- Teoretski bi trebalo računati sa što više trapeza, ali iz praktičnih razloga kao što su brzina i greška zaokruživanja ne bi trebalo preterati.

Trapezno pravilo 1/2

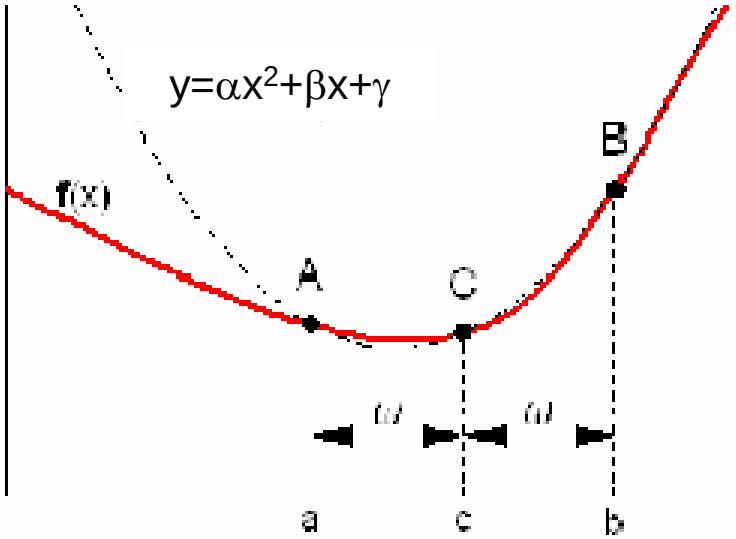
```
# implementirati numericko resenje integrala funkcije Trapeznim pravilom
# y(x) = 6 – 6 * x**5
def f(x):
    return 6-6*x**5

def egz(a, b ):
    return (6*b-b**6-6*a+a**6)

def Simpson():
    # pretpostavka je da je ulaz korektan
    print("\tTRAPEZ\n")
    a = float(input("donja  granica integracije = "))
    b = float(input("gornja granica integracije = "))
    nodiv = int(input("broj intervala             = "))

    omega = (b - a) / nodiv;
    area=0;

    for j in range(1,nodiv+1):
        xl = a + (j - 1) * omega # leva granica podintervala
        xr = a + j * omega       # desna granica podintervala
        area += (omega / 2.0) * (f(xl) + f(xr)); # azuriranje povrsine
```

Trapezno pravilo 2/2

```
    print('\nPovrsina: f(x)=6-pow(x,5) u intervalu od {} do
{}'.format(a,b))
    print("Trapezno:\t\tEgzaktna:")
    print('{:<12.6f}\t{:<12.6f}'.format(area,egz(a,b)))

if __name__=='__main__':Simpson()
```

```
        TRAPEZ

donja  granica integracije = 0
gornja granica integracije = 1
broj intervala             = 7

Povrsina: f(x)=6-pow(x,5) u intervalu od 0.0 do 1.0
Trapezno:       Egzaktna:
4.949188        5.000000
```

Simpsonova metoda integracije



- Za integraciju funkcije f(x) u intervalu [a,b], gde je c=(a+b)/2 polovište intervala [a,b] dobiju se dva intervala određena sa tri tačke.

  Tačkama:

  A(a,f(a));

  B(b,f(b));

  C(c,f(c));

  jednoznačno je određena parabola $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Pošto je površinu ispod parabole lakše odrediti od one ispod krive f(x), uzima se ta površina kao aproksimacija datog integrala.

Primena metode neodređenih koeficijenata

- Trapezno pravilo

$$Area = \frac{\omega}{2}[f(a) + f(c)]$$

odnosno, opšti oblik

$$Area = P \cdot f(a) + Q \cdot f(c)$$

gde je P=Q=ω/2

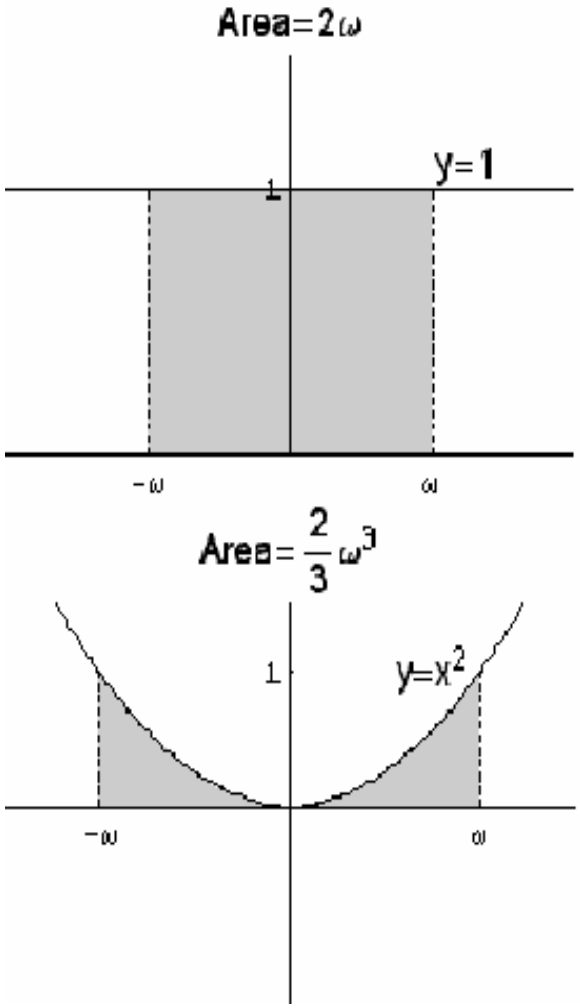
- Za slučaj sa 3 tačke formira se sledeća relacija:

$$Area = P \cdot f(a) + Q \cdot f(c) + R \cdot f(b)$$

- Da bi odredili P, Q i R upotrebljava se metoda neodređenih koeficijenata. Odaberu se tri specijalna integrala:

$$I_1 = \int_{-\omega}^{+\omega} dx = 2\omega \qquad I_2 = \int_{-\omega}^{+\omega} x dx = 0 \qquad I_3 = \int_{-\omega}^{+\omega} x^2 dx = \frac{2\omega^3}{3}$$

Grafička prezentacija za tri specijalna integrala



Supstitucija izraza u tri jednačine

- U svakom od prethodna tri slučaja uzima se a=-ω, c=0, b= ω. Supstitucijom u relaciju:

$$Area = P \cdot f(a) + Q \cdot f(c) + R \cdot f(b)$$

dobija se

$$P \cdot 1 + Q \cdot 1 + R \cdot 1 = 2\omega$$

$$P \cdot (-\omega) + Q \cdot 0 + R \cdot \omega = 0$$

$$P \cdot (-\omega)^2 + Q \cdot 0^2 + R \cdot \omega^2 = \frac{2\omega^3}{3}$$

Sređivanjem dobijenih jednačina

$$P + Q + R = 2\omega \qquad (1)$$

$$P \cdot (-\omega) + R \cdot \omega = 0 \qquad (2)$$

$$P \cdot \omega^2 + R \cdot \omega^2 = \frac{2\omega^3}{3} \qquad (3)$$

Iz relacije (2) sledi:

P=R

Kada se uvrsti u (3) dobija se:

$$P \cdot \omega^2 + P \cdot \omega^2 = \frac{2\omega^3}{3} \qquad 2P \cdot \omega^2 = \frac{2\omega^3}{3}$$

$$P = \frac{\omega}{3}; R = \frac{\omega}{3}$$

Simpsonovo pravilo

- Iz (1) sledi:

$$P + Q + R = 2\omega$$

$$Q = 2\omega - P - R = 2\omega - \frac{\omega}{3} - \frac{\omega}{3}$$

$$Q = \frac{4}{3}\omega$$

dobija se Simsonovo pravilo za izračunavanje površine ispod krive

$$Area = \frac{\omega}{3} f(a) + \frac{4\omega}{3} f(c) + \frac{\omega}{3} f(b) = \frac{\omega}{3}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

- U opštem slučaju treba dati integral podeliti na paran broj podintervala. Izraz za površinu i-tog podintervala glasi:

$$A_i = \frac{\omega}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Simpsonov postupak integracije funkcije

Primenom Simpsonovog postupka izračunati vrednost integrala funkcije:

$$y(x) = 6 - 6\,x^5$$

u zadatom intervalu.

Ulazni parametri programa su:

- broj podela intervala
- donja granica integracije
- gornja granica integracije

Program treba da prikaže:

stvarnu vrednost integrala
i
vrednost dobijenu Simsonovim postupkom
za date ulazne parametre.

Simpson 1/3

```
# implementirati numericko resenje integrala funkcije Simpsonovom
# metodom za date granice integracije
# y(x) = 6 – 6 * x**5

def f(x):
    return 6-6*x**5

def egz(a, b ):
    return (6*b-b**6-6*a+a**6)

def Simpson():
    # pretpostavka je da je ulaz korektan
    print("\tSIMPSON\n")
    a = float(input("donja  granica integracije = "))
    b = float(input("gornja granica integracije = "))
    n = int(input("broj intervala (paran broj)= "))

    area=0;
    x=a;

    dx = (b-a)/n;
    dx2 = dx*2.0;
```

Simpson 2/3

```
    for i in range( n//2)):
        area += f(x)+4.0*f(x+dx)+f(x+dx2)
        x=x+dx2

    area *= dx/3.0
    print('\nPovrsina: f(x)=6-x**5 u intervalu od {} do {}'.format(a,b))
    print("Simpson:\t\tEgzaktna:")
    print('{:<12.6f}\t{:<12.6f}'.format(area,egz(a,b)))

if __name__=='__main__':Simpson()
```

```
# Simpson i trapezno pravilo pomocu biblioteke scipy
from scipy.integrate import simps
import numpy as np
def f(x):  return 6-6*x**5
x = np.linspace(0,1,11)
y = f(x)
si = simps(y,x)
print(si)      #4.9998
tr = np.trapz(y,x)
print(tr)      #4.97505
```

Simpson 3/3

Izlaz:

```
      SIMPSON

donja  granica integracije = 0
gornja granica integracije = 1
broj intervala (paran broj)= 10

Povrsina: f(x)=6-x**5 u intervalu od 0.0 do 1.0
Simpson:    Egzaktna:
4.999800    5.000000

    SIMPSON

donja  granica integracije = 0
gornja granica integracije = 1
broj intervala (paran broj)= 20

Povrsina: f(x)=6-x**5 u intervalu od 0.0 do 1.0
Simpson:    Egzaktna:
4.999988    5.000000
```

Rešavanje sistema linearnih jednačna : Gaus-Jordanov metod

- Gauss-Jordanova metoda je direktna metoda rešavanja sistema linearnih jednačina. Kao takva pogodna je za rešavanje sistema sa manjim brojem jednačina.
- Sistem n linearnih jednačina sa n nepoznatih može se napisati kao:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Rešenje ovog sistema je n-torka $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ koja zadovoljava sve jednačine.

Rešavanje sistema linearnih jednačna
Gaus-Jordanov metod

Sistem jednačina (1) može se još napisati i kao:

Ax = b, (2)

gdje je **A** matrica koficijenata sistema, **b** vektor desne strane sistema, a **x** vektor rešenja sistema.

Gauss-Jordanova metoda koristi elementarne transformacije matrice, a to su:

- Množenje svih elemenata jednog reda skalarom,
- Zamena dva reda,
- Dodavanje reda pomnoženog sa skalarom drugom redu.

Radi jednostavnosti prikazuje se rešavanje sistema linearnih jednačina na primeru:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -10$$

Rešavanje sistema linearnih jednačna : Gaus-Jordanov metod

- Matrica preko koje rešavamo sistem izgleda ovako :

$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} 3 & 2 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

- U prvom koraku normalizuje se prvi red deljenjem istog sa 3, pa se ostali elementi prve kolone reduciraju na nulu tako da se doda novi prvi red pomnožen sa –1 drugom redu, a pomnožen sa –2 trećem redu.

- Rezultat ove operacije je:

$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Rešavanje sistema linearnih jednačna : Gaus-Jordanov metod

- Nakon toga normalizuje se drugi red deljenjem istog sa –5/3, i reduciraju se ostali elementi druge kolone na nulu dodavanjem novog drugog reda pomnoženog sa –2/3 prvom redu, a pomnoženog sa 13/3 trećem redu.
- Rezultat drugog koraka je:

$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & \frac{7}{15} & -\frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{63}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{65}{9} & 1 \end{array}\right|$$

- Na kraju normalizujemo treći red deleći ga sa –1/7, i reduciramo ostale elemente treće kolone tako da dodamo novi treći red pomnožen sa –1 prvom, a pomnožen sa 1 drugom redu.

$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{52}{105} & -\frac{135}{63} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{6}{35} & -\frac{40}{63} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{35} & \frac{65}{63} & -\frac{1}{7} \end{array}\right|$$

Rešavanje sistema linearnih jednačna : Gaus-Jordanov metod

- Iz gornje matrice možemo pročitati rešenje odnosno n-torku (1,2,3), kao i inverznu matricu

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{52}{105} & -\frac{135}{63} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{35} & -\frac{40}{63} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{35} & \frac{65}{63} & -\frac{1}{7} \end{vmatrix}$$

Primenom ove metode može doći do sledećih grešaka:

- Ukoliko je neki pivot element sa kojim se deli jednak nuli, tada će metoda javiti grešku da je sistem singularan.
  - Sistem nije singularan i jednostavnom zamenom redova se može doći do rešenja korišćenjem iste metode.
- Ukoliko je sistem skoro singularan, akumuliranje greške zaokruživanja može dovesti sistem u singularan. Tada metoda javlja grešku.
- Metoda usled greške zaokruživanja može kao rešenje vratiti potuno pogrešne vrednosti. Verovatnoća takve greške raste sa brojem jednačina u sistemu, kao i sa približavanjem sistema singularnom.

Rešavanje sistema linearnih jednačna: Gaus-Jordanov metod

- Primer prve greške:

$$-7x_2 + 4x_3 = 1$$
$$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$$
$$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$$

  - Ukoliko se zamene prva dva reda sistem je moguće rešiti ovom metodom:

$$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$$
$$-7x_2 + 4x_3 = 1$$
$$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$$

- Gauss-Jordanova metoda nije pogodna za korišćenje u komercijalne svrhe, kako zbog gore navedenih problema tako i zbog sporosti ove metode.
  - Metoda je direktna, stabilna i razumljiva te se može koristiti kao kontrola neke druge metode. Takođe je dobra za pedagoške namene.

Gaus-Jordanova metoda rešavanja sistema jednačina

Primenom Gaus-Jordanove metode rešiti sistem jednačina:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -10$$

Ulazi u program:

unos sistema jednačina

Izlazi iz programa:

rešenje unesenog sistema jednačina

Gaus-Jordan 1/4

```
a = [
    [3.0,  2.0,  1.0,  10.0,  1.0,  0.0,  0.0],
    [1.0, -1.0,  2.0,   5.0,  0.0,  1.0,  0.0],
    [2.0, -3.0, -2.0, -10.0,  0.0,  0.0,  1.0]
]
def ispisi(n, m):
    for i in range(n):
        for j in range(n+m):
            print('{:8.2f}'.format(a[i][j]),end='')
        print("")
    print("");
def main():
    m = 1+3;
    n = 3;
    ispisi(n,m); # mogli bi dodati da se matrica a unosi, samo 3x3
    eps = 0.00001;
    #GausJordan
    for k in range(n):
        #da li je pivot element premali
        if (abs(a[k][k])<= eps):
            print("Mala vrednost pivot-a!")
            exit(0)
```

Gaus-Jordan 2/4

```
        for j in range (k+1,n+m):#normalizacija pivot reda
            a[k][j] = a[k][j] / a[k][k]
        a[k][k] = 1;
        print("a[k][k]=a[%d][%d]=1, normalizacija reda %d" % (k,k,k))
        ispisi(n,m);
        #eliminacija k-tog elementa osim pivota
        for i in range(n):
            if (i==k or a[i][k]==0):
                print("(i==k || a[i][k]==0), a[i][k]=a[%d][%d]=%6.2lf,
continue" % (i,k,a[i][k]))
                ispisi(n,m)
                continue
            for j in range(k+1,n+m):
                a[i][j] = a[i][j] - a[i][k] * a[k][j];
                print("a[i][j]=a[%d][%d]=%6.2lf racunanje a[i][j]-
=a[i][k]*a[k][j],k=%d" % (i,j,a[i][j],k))
                ispisi(n,m)
            a[i][k] = 0;
            print("a[i][k]=a[%d][%d]=0, postavljanje nule" % (i,k))
            ispisi(n,m)
        print("sledeca petlja, k=%d\n" % (k+1))
    ispisi(n,m)
if __name__== '__main__': main()
```

Gaus-Jordan 4/5

- Print funkcije u prethodnom kodu ostavite nekomentarisane ako želite da vidite sve korake algoritma za dati ulaz.
- Poslednji korak (ispisi(n,m)) daje sledeći rezultat:

1.00	0.00	0.00	**1.00**	*0.23*	*0.03*	*0.14*
0.00	1.00	0.00	**2.00**	*0.17*	*-0.23*	*-0.14*
0.00	0.00	1.00	**3.00**	*-0.03*	*0.37*	*-0.14*

- Deo matrice rezultata od 0,0 do 2,2 predstavlja jediničnu matricu
- Deo matrice rezultata od 0,3 do 2,3 predstavlja rešenje sistema jednačina
- Deo matrice rezultata od 0,4 do 2,6 predstavlja inverznu matricu, početne matrice na pozicijama od 0,0 do 2,2

Interpolacija

- Interpolacija je proces koji ima brojne primene među kojima su najznačajnije računarska grafika i numerička analiza.
- Neki primeri kada je potrebna interpolacija mogu biti:
  - Poznat je samo određen broj vrednosti neke funkcije i potrebno je pronaći vrednosti u drugim tačkama.
  - Ponekad je vremenski zahtevno izračunavanje kompleksne (ali glatke) funkcije više puta. Tada se može koristiti polinom da se aproksimira funkcija što će smanjiti vreme računanja.
- Problem koji se rešava je:
  za zadate vrednosti $(t_i, y_i), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad t_1 < t_2 < \ldots < t_m$

  odrediti funkciju $f(t_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m$

  tako da važi: f je *interpolaciona* funkcija ili *interpolant*
- Pored vrednosti funkcije mogu se zadati i dodatni podaci (vrednosti izvoda) oskulatorne interpolacije
- Takođe se mogu postaviti i dodatna ograničenja (monotonost, glatkost, konveksnost,...) za interpolacionu funkciju

APROKSIMACIJA ALGEBARSKIM POLINOMIMA

Najčešća aproksimacija

Baza: $\phi_j(t) = t^{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n,$

Interpolacioni polinom: $p_{n-1}(t) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}$

Sistem za određivanje parametara (A – Vandermonodova matrica)

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y$$

APROKSIMACIJA ALGEBARSKIM POLINOMIMA
PRIMER

Ulazni podaci: $(t_1, y_1),\ (t_2, y_2),\ (t_3, y_3)$

$(-2, -27),\ (0, -1),\ (1, 0)$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = [-1 \quad 5 \quad -4]^T \longrightarrow \qquad p_2(t) = -1 + 5t - 4t^2$$

LAGRANŽOVA INTERPOLACIJA

Za skup tačaka $(t_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n$ Lagranžova baza je:

$$\ell_j(t) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (t - t_k) \ / \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (t_j - t_k), \quad j = 1, \ldots, n$$

Oblik interpolacionog polinoma je:

$$p_{n-1}(t) = y_1\ell_1(t) + y_2\ell_2(t) + \cdots + y_n\ell_n(t)$$

Primer:

$(t_1, y_1),\ (t_2, y_2),\ (t_3, y_3)$ $\qquad$ $(-2, -27), (0, -1),\ (1, 0)$

$$p_2(t) = y_1\frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + y_2\frac{(t - t_1)(t - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}$$

$$+ y_3\frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$p_2(t) = -27\frac{t(t - 1)}{(-2)(-2 - 1)} + (-1)\frac{(t + 2)(t - 1)}{(2)(-1)}$$

LAGRANŽOVA INTERPOLACIJA

```
def main():
    points = int(input("Unesite broj ulaznih tacaka = "))
    x = []
    y = []
    print("Unesite koordinate ulaznih tacaka !");
    for i in range(points):
      x.append(float(input('x{:02d} = '.format(i))))
      y.append(float(input('y{:02d} = '.format(i))))
      print("------------>(x,y)=(",x[i],",",y[i],")")
    t = float(input("\nUnesite za koji x zelite interpolaciju f(x), x= "))

    total = 0.0
    for j in range(points):
        temp = 1.0
        for k in range(points):
            if (k != j ):
                temp = temp * (t - x[k]) / (x[j] - x[k])
        temp *= y[j]
        total += temp
    print('\nf(x) = f({}) = {}'.format(t,total))

if __name__ == '__main__': main()
```

LAGRANŽOVA INTERPOLACIJA

Izlaz:

```
Unesite broj ulaznih tacaka = 3
Unesite koordinate ulaznih tacaka !
x00 =  -2
y00 = -27
------------>(x,y)=( -2.0 , -27.0 )
x01 =  0
y01 = -1
------------>(x,y)=( 0.0 , -1.0 )
x02 = 1
y02 = 0
------------>(x,y)=( 1.0 , 0.0 )

Unesite za koji x zelite interpolaciju f(x), x=  -1

f(x) = f(-1.0) = -10.0
```

NJUTNOVA INTERPOLACIJA

Za skup parova $(t_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n$ Njutnova baza je

$$\pi_j(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k), \quad j = 1, \ldots, n$$

Polinom je:

$$p_{n-1}(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + \cdots$$

$$+ x_n(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{n-1})$$

NJUTNOVA INTERPOLACIJA - PRIMER

$(t_1, y_1),\ (t_2, y_2),\ (t_3, y_3)$ $\quad (-2, -27),\ (0, -1),\ (1, 0)$

Sa Njutnovom bazom sistem je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Za zadate tačke je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} -27 & 13 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$p(t) = -27 + 13(t+2) - 4(t+2)t$$