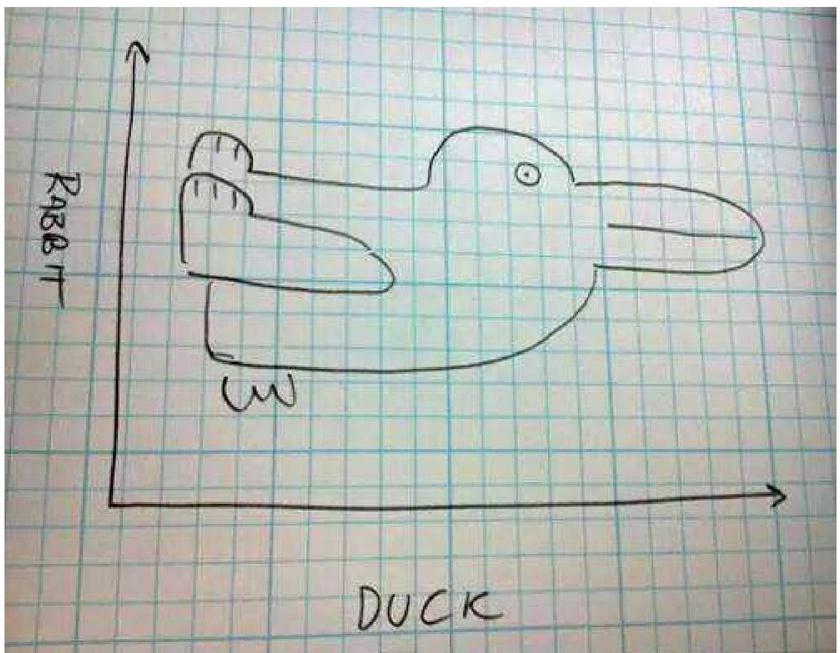
др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

10. термин

Испитивање тока и скицирање графика ф-ја



Испитивање функција:

1. Област дефинисаности функције
(или домен функције) D_f

2. Нуле и знак функције; пресек са y-осом

3. Парност и периодичност функције

4. Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

5. Први извод, монотоност и локални екстреми функције

6. Други извод, конвексност и превојне тачке функције

$\Rightarrow$ Скицирање графика функције.

$\boxed{1.}$ Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ деф $\Rightarrow g(x), h(x)$ деф, $h(x) \neq 0$;

$\boxed{1.}$ Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ деф $\Rightarrow g(x), h(x)$ деф, $h(x) \neq 0$;
- $f(x) = \ln g(x)$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) > 0$

  (исто и за било који лог: $f(x) = \log_a g(x)$);

1. Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ деф $\Rightarrow g(x), h(x)$ деф, $h(x) \neq 0$;
- $f(x) = \ln g(x)$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) > 0$

  (исто и за било који лог: $f(x) = \log_a g(x)$);
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) \geqslant 0$

  (исто и за $\sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ } \ldots$; $\sqrt[3]{g(x)}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф!);

$\boxed{1.}$ Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ деф $\Rightarrow g(x), h(x)$ деф, $h(x) \neq 0$;
- $f(x) = \ln g(x)$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) > 0$

  (исто и за било који лог: $f(x) = \log_a g(x)$);
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) \geqslant 0$

  (исто и за $\sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ } \ldots$; $\sqrt[3]{g(x)}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф!);
- $f(x) = \begin{matrix} \arcsin g(x) \\ \arccos g(x) \end{matrix}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$;

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

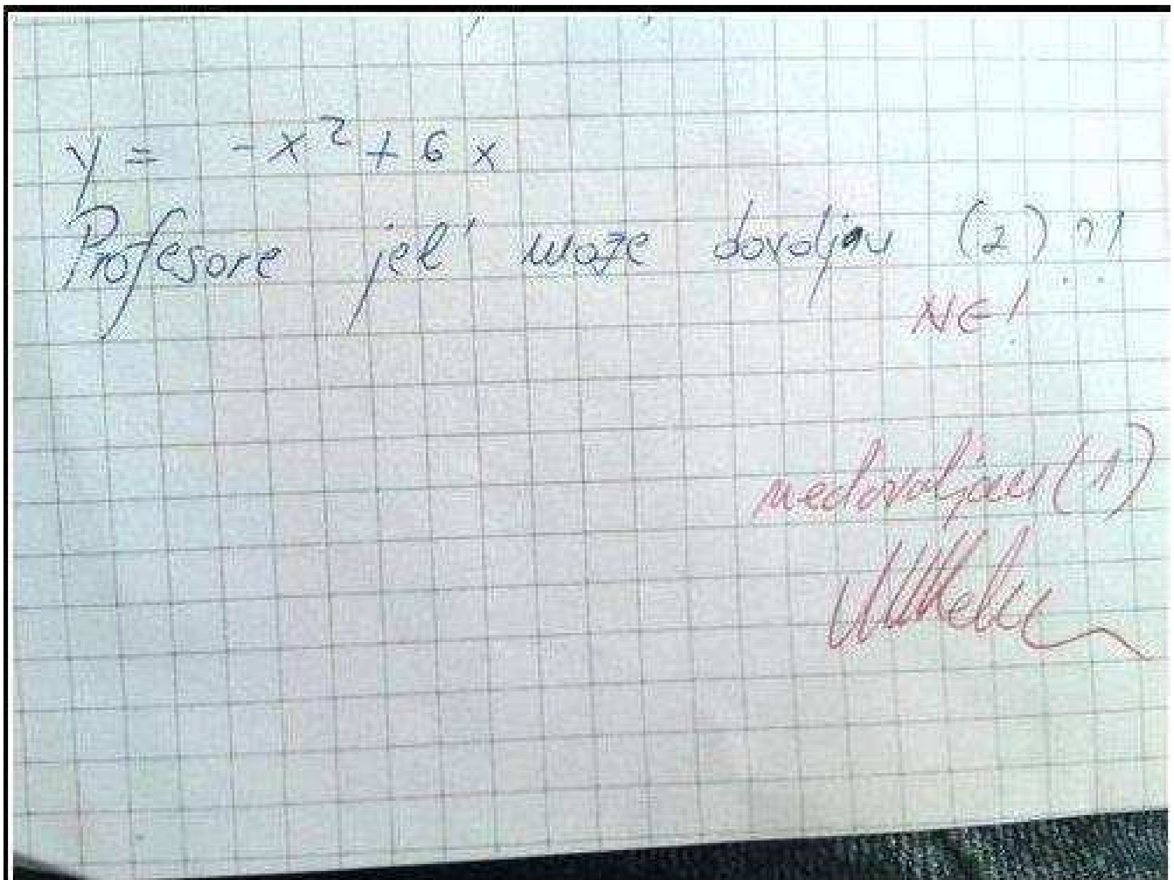
- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ деф $\Rightarrow g(x), h(x)$ деф, $h(x) \neq 0$;
- $f(x) = \ln g(x)$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) > 0$

  (исто и за било који лог: $f(x) = \log_a g(x)$);
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $g(x) \geqslant 0$

  (исто и за $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$ ...; $\sqrt[3]{g(x)}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф!);
- $f(x) = \begin{matrix} \arcsin g(x) \\ \arccos g(x) \end{matrix}$ деф $\Rightarrow g(x)$ деф, $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$;
- остале ф-је (сем tg и ctg) су УВЕК деф!

2. Нуле и знак функције; пресек са y-осом

- Нуле и знак функције → II средње!



$\boxed{\mathbf{2.}}$ Нуле и знак функције; пресек са y-осом

- Нуле и знак функције $\longrightarrow$ II средње!
- Пресек са y-осом је $Y\big(0, f(0)\big)$.

Након ове 2 тачке почињемо цртање фукције!!!

$\boxed{\textbf{3.}}$ Парност и периодичност функције

- $f(x)$ je парна: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = f(x)$.
- $f(x)$ je непарна: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = -f(x)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Парност и периодичност функције

- $f(x)$ је парна: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = f(x)$.
- $f(x)$ је непарна: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = -f(x)$.

Ако није:

$f(-a) \neq f(a) \ \Rightarrow$ није парна.

$f(-a) \neq -f(a) \ \Rightarrow$ није непарна.

3. Парност и периодичност функције

- $f(x)$ је **парна**: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = f(x)$.
- $f(x)$ је **непарна**: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = -f(x)$.

Ако није:

$f(-a) \neq f(a) \ \Rightarrow$ није парна.

$f(-a) \neq -f(a) \ \Rightarrow$ није непарна.

Ако није:

Како функција $f(x)$ нема симетричан домен у односу на $x = 0$ она није ни парна ни непарна!

3. Парност и периодичност функције

- $f(x)$ је **парна**: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = f(x)$.
- $f(x)$ је **непарна**: $(\forall x \in D_f)\ f(-x) = -f(x)$.

Ако <u>није</u>:

$f(-a) \neq f(a) \ \Rightarrow$ није парна.

$f(-a) \neq -f(a) \ \Rightarrow$ није непарна.

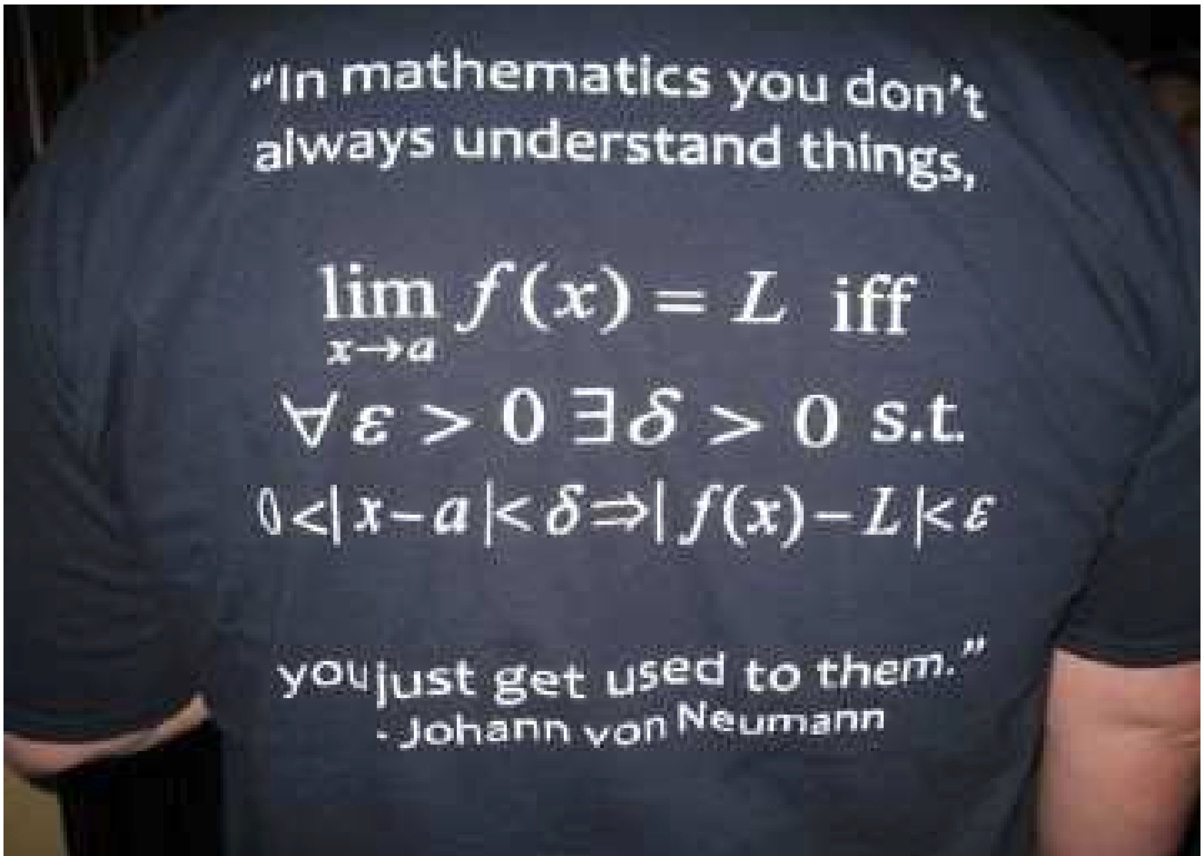
Ако <u>није</u>:

Како функција $f(x)$ нема симетричан домен у односу на $x = 0$ она није ни парна ни непарна!

- $f(x)$ **периодична**:

$(\exists T > 0)(\forall x \in D_f)\ f(x) = f(x + T)$.

4. Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције



4. Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example. This was the result:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = 5$$

Ако је D_f унија интервала облика (a, b) потребно је за сваки од њих одредити: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

Ако је $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ одређујемо: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Ако имамо $(a, b]$ одређујемо:

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ и вредност $f(b)$

(за $x = b$ ф-ја је деф. и ту израчунавамо вредност функције, а не лимес!)

$$\boxed{C \cdot 0 = 0}$$

$$\boxed{\frac{0}{C} = 0}$$

$$\boxed{\frac{C}{\pm\infty} = 0}$$

$$\boxed{\frac{0}{\pm\infty} = 0}$$

$$+C \cdot +\infty = +\infty \qquad +C \cdot -\infty = -\infty$$

$$-C \cdot +\infty = -\infty \qquad -C \cdot -\infty = +\infty$$

$$\frac{+C}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+C}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{-C}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-C}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{+C}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+C}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{-C}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-C}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{+C} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{-C} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{+C} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{-C} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

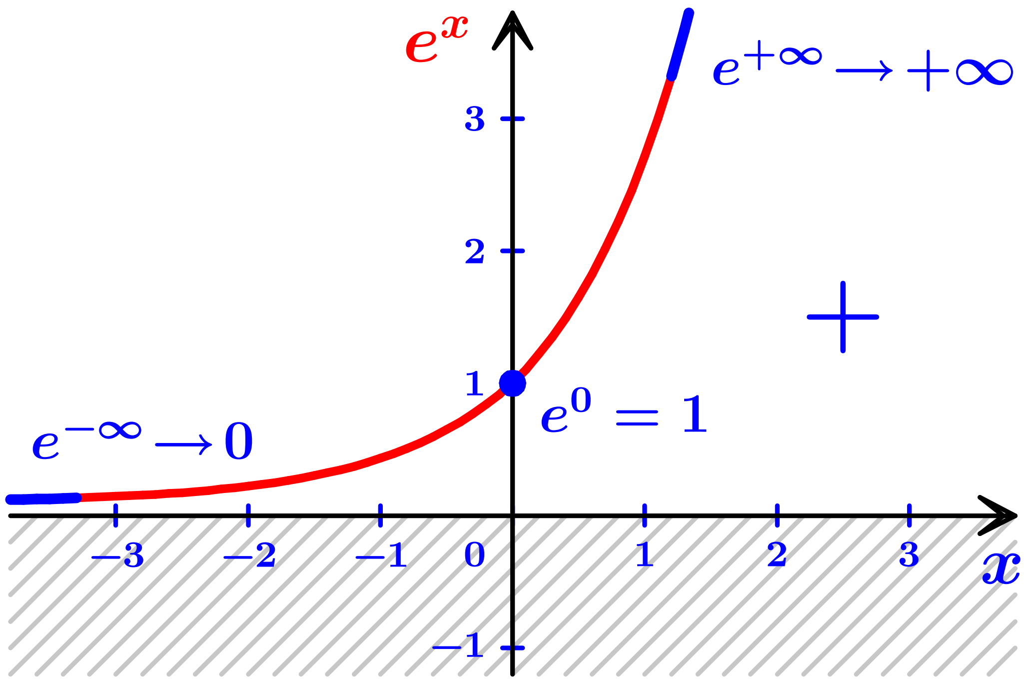
$$\boxed{\frac{+\infty}{+C} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{-C} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{+C} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{-C} = +\infty}$$

$$\boxed{\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty}$$

$$\boxed{e^{+\infty} = +\infty} \qquad \boxed{e^{-\infty} = 0}$$

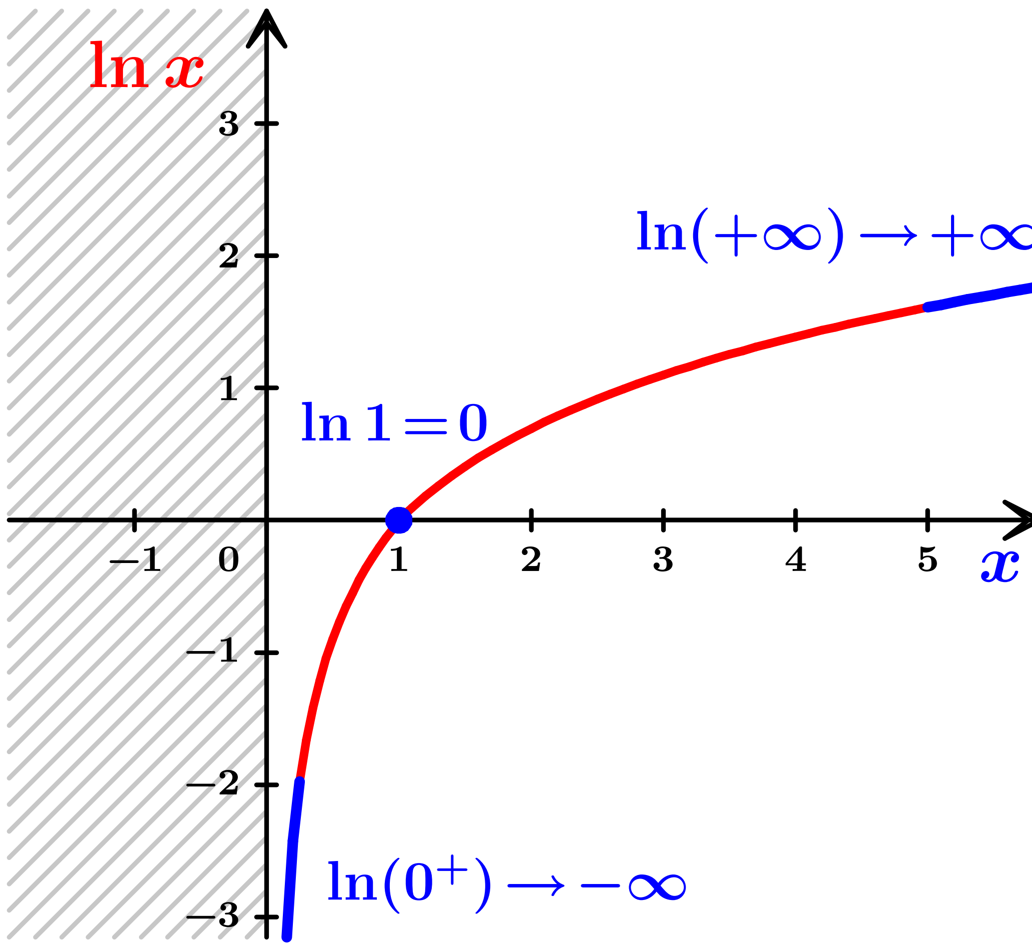
$$\boxed{\ln(0^+) = -\infty} \qquad \boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$$

$$\boxed{e^{+\infty} = +\infty} \qquad \boxed{e^{-\infty} = 0}$$



$$\boxed{\ln(0^+) = -\infty}$$

$$\boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$$



$$\boxed{e^{+\infty} = +\infty} \qquad \boxed{e^{-\infty} = 0}$$

$$\boxed{\ln(0^+) = -\infty} \qquad \boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$$

$$\frac{0}{0} = \ ??? \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \ ???$$

$$0 \cdot \pm\infty = \ ??? \qquad 1^\infty = \ ??? \qquad 0^0 = \ ???$$

$$\frac{0}{0} = \ ???$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \ ???$$

$$0 \cdot \pm\infty = \ ??? \qquad 1^{\infty} = \ ??? \qquad 0^{0} = \ ???$$

За прва два lim користимо и Лопиталово правило (само за лимесе облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$!) $\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$ $\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Кад имамо $g \cdot h$ облика $0 \cdot \infty$ то сводимо на $\frac{g}{\frac{1}{h}} = \frac{g}{h^{-1}}$ (што је $\frac{0}{0}$) или $\frac{h}{\frac{1}{g}} = \frac{h}{g^{-1}}$ (што је $\frac{\infty}{\infty}$).

Један од ова два свођења води ка решењу, док други даје још сложенији лимес!

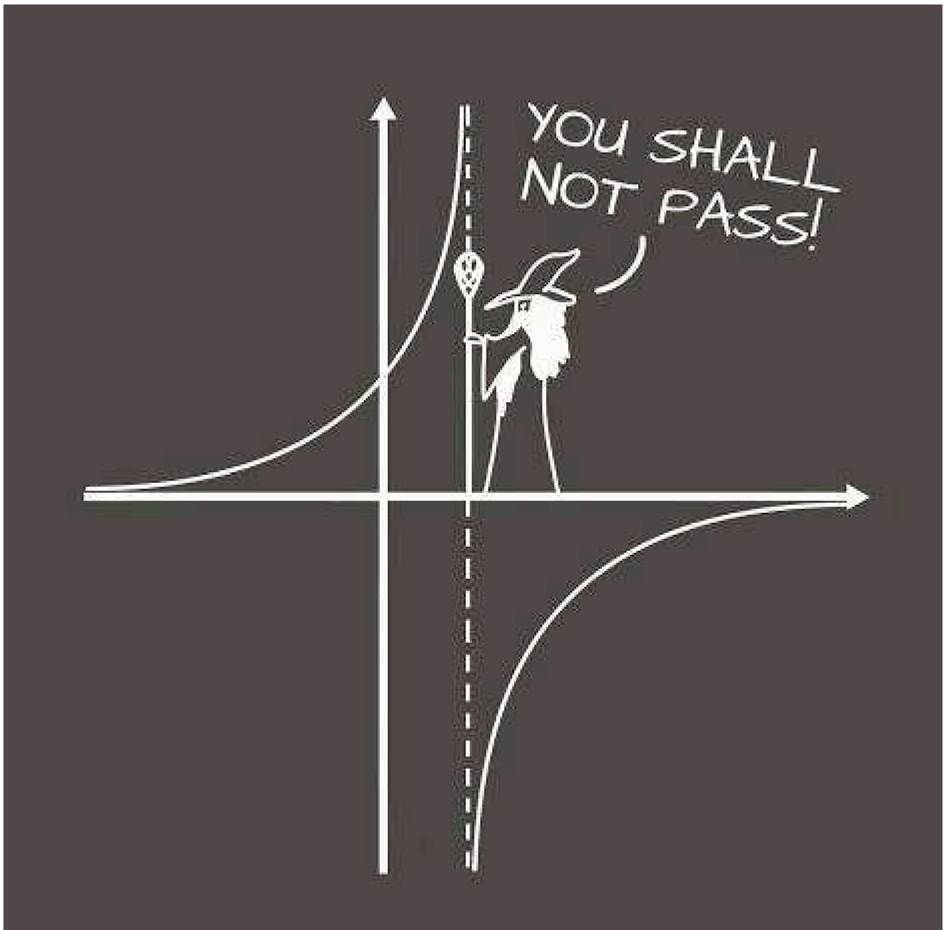
Табличне граничне вредности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=e, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Постоје три врсте асимптота: вертикалне, хоризонталне и косе.



Вертикалне асимптоте се јављају кад имамо прекид у домену D_f.

Права $x = a$ је *вертикална асимптота* ако

- a не припада D_f,
- бар један од лимеса $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ постоји и бесконачан је $(+\infty$ или $-\infty)$.

Ако је $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, где је b коначан број, тада је $y = b$ *лева хоризонтална асимптота*.

Ако је $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, где је b коначан број, тада је $y = b$ *десна хоризонтална асимптота*.

Ако је права $y = b$ и лева и десна хоризонтална асимптота, онда је *обострана хоризонтална асимптота*.

Уколико је $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ бесконачан, тада тражимо леву косу асимптоту.

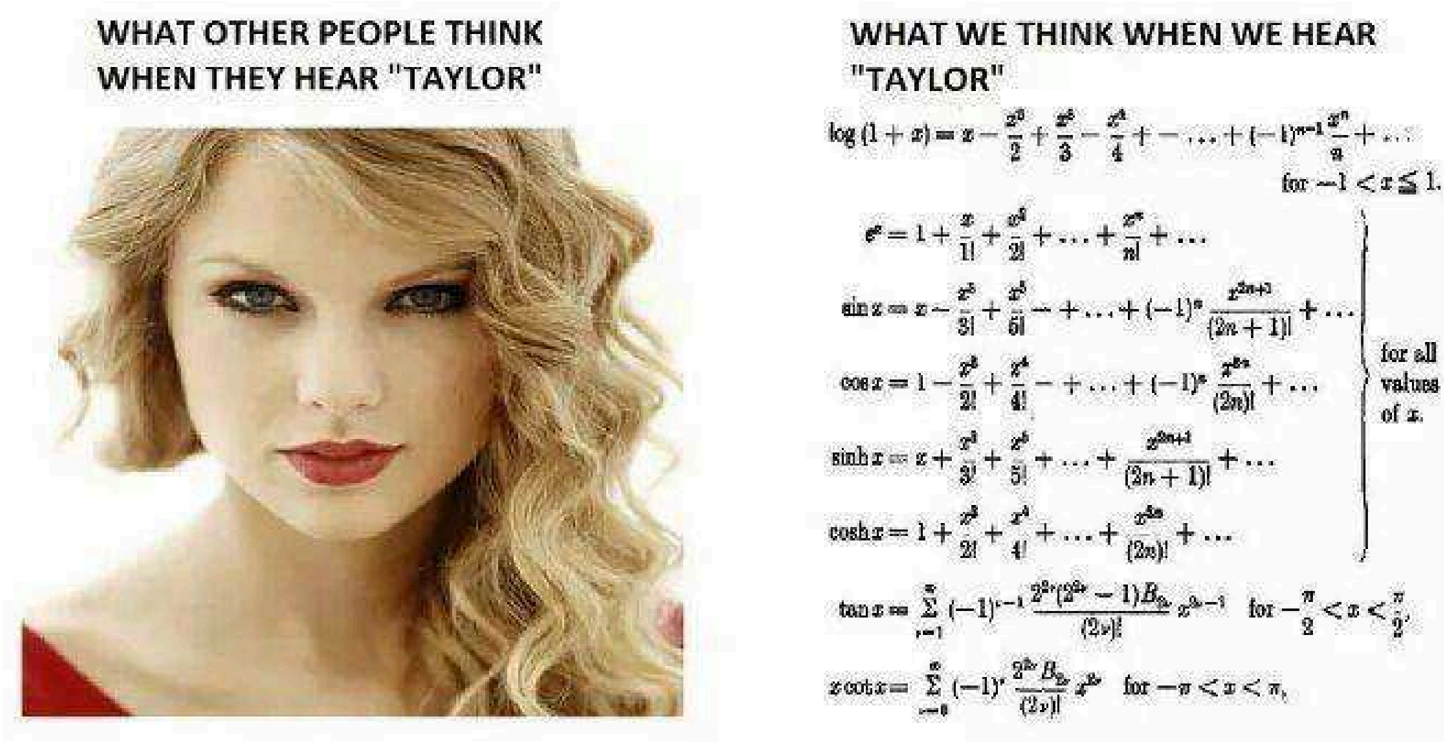
Ако постоје 2 lim:

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ – ако је k коначан и $k \neq 0$, онда тражимо $n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - k \cdot x$ и ако је n коначан тада је *лева коса асимптота* права $y = kx + n$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -||- \Rightarrow$ *десна коса асимптота*.

Ако је $y = kx + n$ и лева и десна коса асимптота, онда је *обострана коса асимптота*.

Понекад се за одређивање хоризонталних и косих асимптота могу искористити Тејлорови (тј. Маклоренови) развоји:



$\boxed{\mathbf{5.}}$ Први извод, монотоност и локални екстреми функције

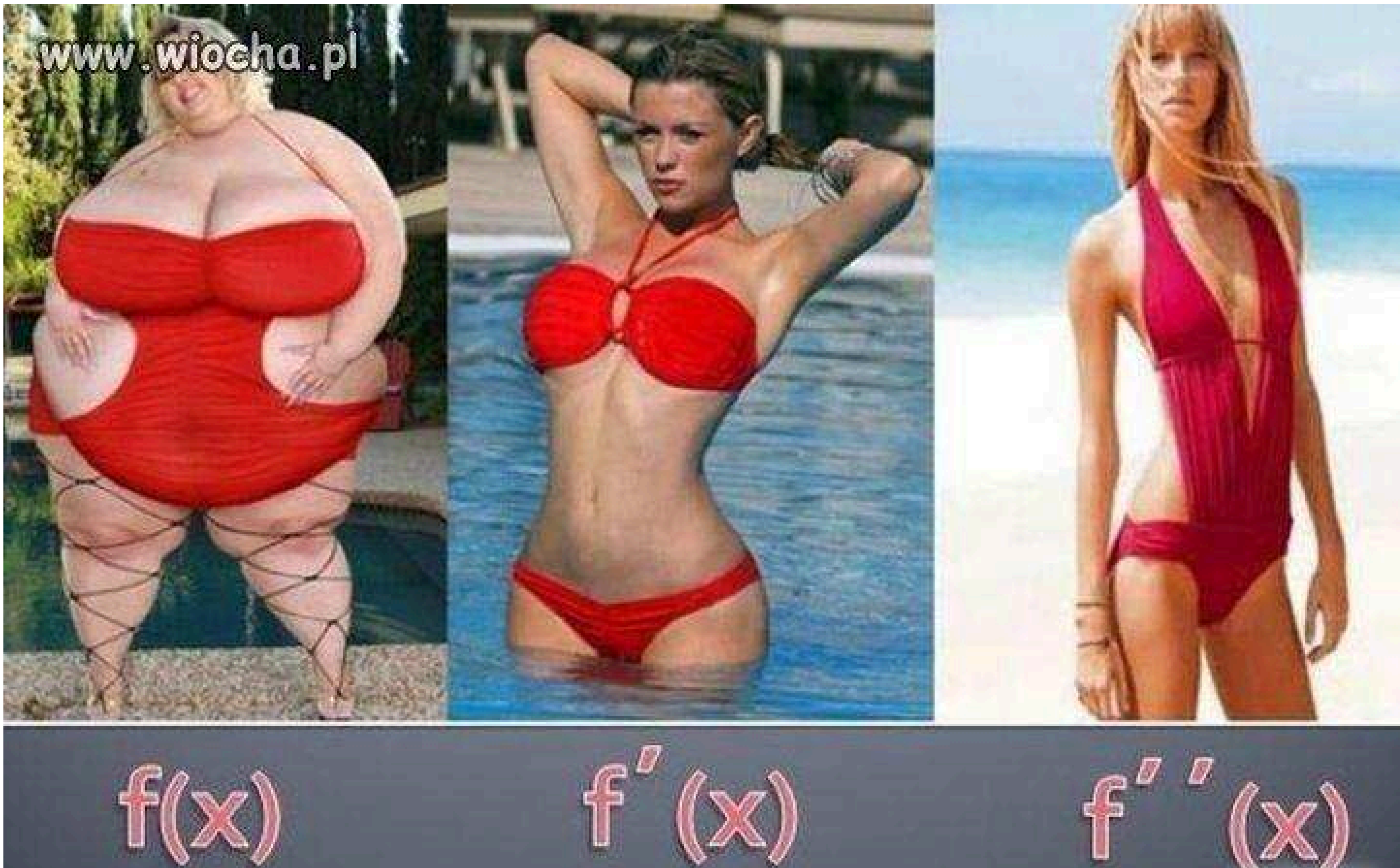
Функција је *монотоно растућа* на (a, b), што означавамо стрелицом $\nearrow$, ако

$$\big(\forall x_1, x_2 \in (a,b)\big) \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2).$$

Функција је *монотоно опадајућа* на (a, b), што означавамо стрелицом $\searrow$, ако

$$\big(\forall x_1, x_2 \in (a,b)\big) \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

5. Први извод, монотоност и локални екстреми функције



5. Први извод, монотоност и локални екстреми функције

Према правилима диференцирања се одреди I извод $f'(x)$ функције $f(x)$.

Даља анализа се своди на одређивање нула и знака I извода:
када је $f'(x_M)=0$ и $x_M \in D$ имамо кандидата за локални екстрем (max или min).

на инт. где је $f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \nearrow$,
на инт. где је $f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \searrow$,

кандидат $x_M = a$ је лок.max ако је f: $\nearrow a \searrow$
(да је max могло и на основу $f''(a)>0$)

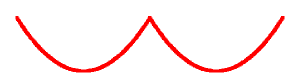
кандидат $x_M = a$ је лок.min ако је f: $\searrow a \nearrow$
(да је max могло и на основу $f''(a)<0$)

када је $f'(x_M) = 0$ и $x_M \in D$ имамо кандидата за локални екстрем (max или min).

на инт. где је $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \nearrow$,
на инт. где је $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \searrow$,

кандидат $x_M = a$ је лок.max ако је f: $\nearrow a \searrow$
(да је max могло и на основу $f''(a) > 0$)

кандидат $x_M = a$ је лок.min ако је f: $\searrow a \nearrow$
(да је max могло и на основу $f''(a) < 0$)

До екстрема можемо доћи и када имамо шпицеве ( или ), као и кад је ф-ја деф. у тачки и само са 1 њене стране.

Остала два случаја ($\searrow a \searrow$ и $\nearrow a \nearrow$) нису екстреми.

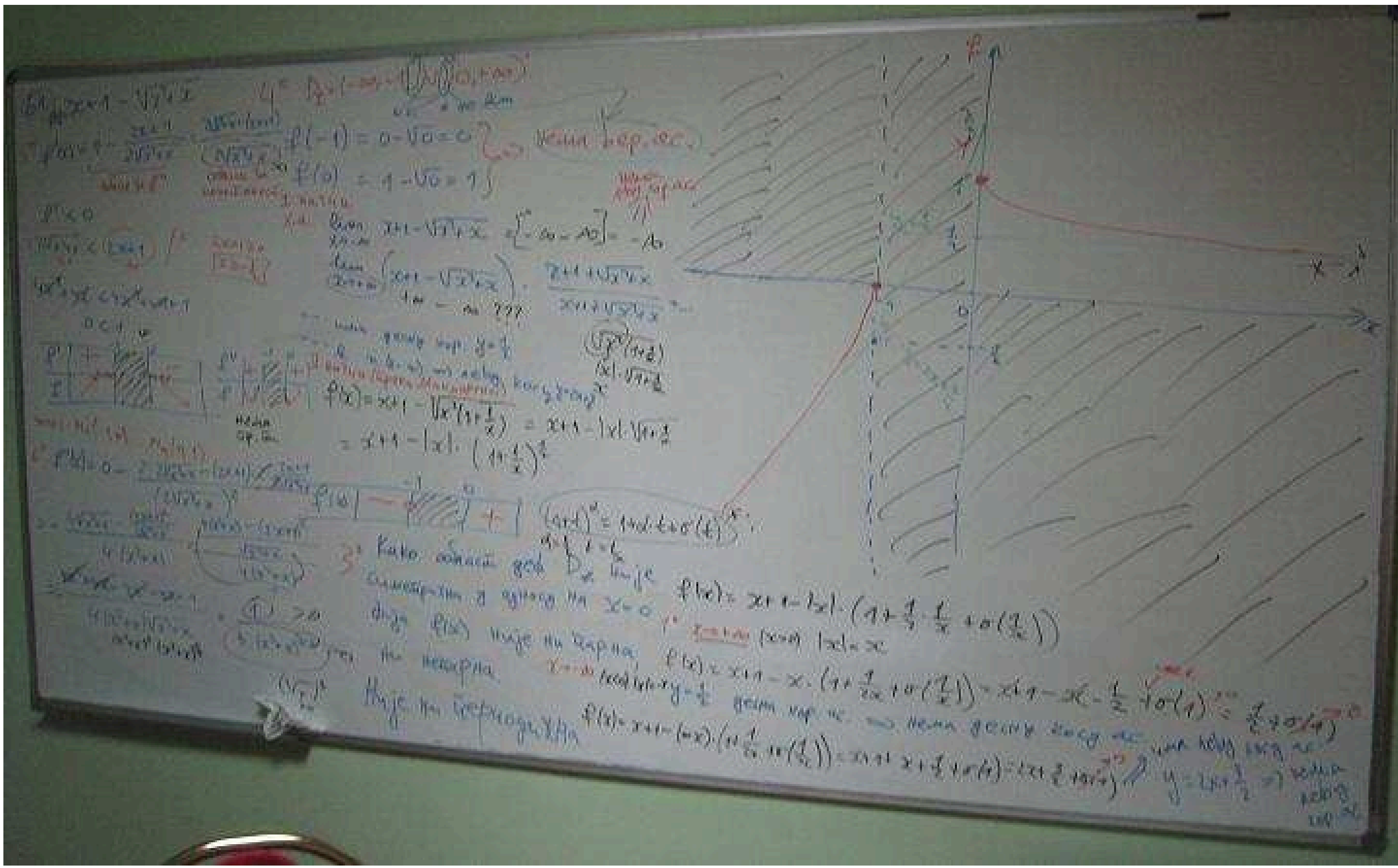
Ако смо добили екстрем тад треба израчунати вредност функције, $f(a)$, и тачку $M(a, f(a))$ означавамо на графику.

Код прекида и шпицева, треба испитати и начин како (тј. под којим углом) функција „улази“ у неку тачку или „излази“ из ње.

Нпр. када у прекиду $x = a$ имамо да је $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ коначан, онда је коефицијент правца k под којим график улази у тачку $T(a, b)$ дат са $k = \lim_{x \to a^-} f'(x)$.

Коефицијент n (пресек праве са y-осом) добијамо из једнакости $b = k \cdot a + n$.

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x}$$



$\boxed{\mathbf{6.}}$ Други извод, конвексност и превојне тачке функције

Функција је *конвексна* (или *конвексна надоле*) на (a, b), што означавамо $\cup$, ако $\big(x_1, x_2 \in (a, b)\big)$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Функција је *конкавна* (или *конвексна нагоре*) на (a, b), што означавамо $\cap$, ако $\big(x_1, x_2 \in (a, b)\big)$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Други извод, конвексност и превојне тачке функције

Израчунамо II извод $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$.

Даља анализа се своди на одређивање нула и знака II извода:

за $f''(x) = 0$ имамо кандидата за превојну тачку.

на инт. $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \cup$ (конвексна),

на инт. $f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \cap$ (конкавна),

кандидат $x_M = a$ је превојна тачка ако је f: $\cup\ a\ \cap$ или $\cap\ a\ \cup$

И код п.т. одређујемо вредност функције, $f(a)$, и тачку $P(a, f(a))$ означавамо на графику.

Напомена. Погрешно је рећи да је функција конвексна на унији интервала (тј. тамо где је $f''(x) > 0$), јер је она конвексна на сваком од тих интервала понаособ!

Слично важи и за монотоност.

Стога, је монотоност и конвексност боље само записивати у таблици.

$\Rightarrow$ Скицирање графика функције.

Све претходно добијене тачке (нуле фунције, пресек са y-осом, минимуми, максимуми, превојне тачке), као и граничне вредности су већ унете на график, тако да остаје само последњи корак:

„Спојити тачкице и цртице, али водити рачуна о монотоности и конвексности!“

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)} \,.$$

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

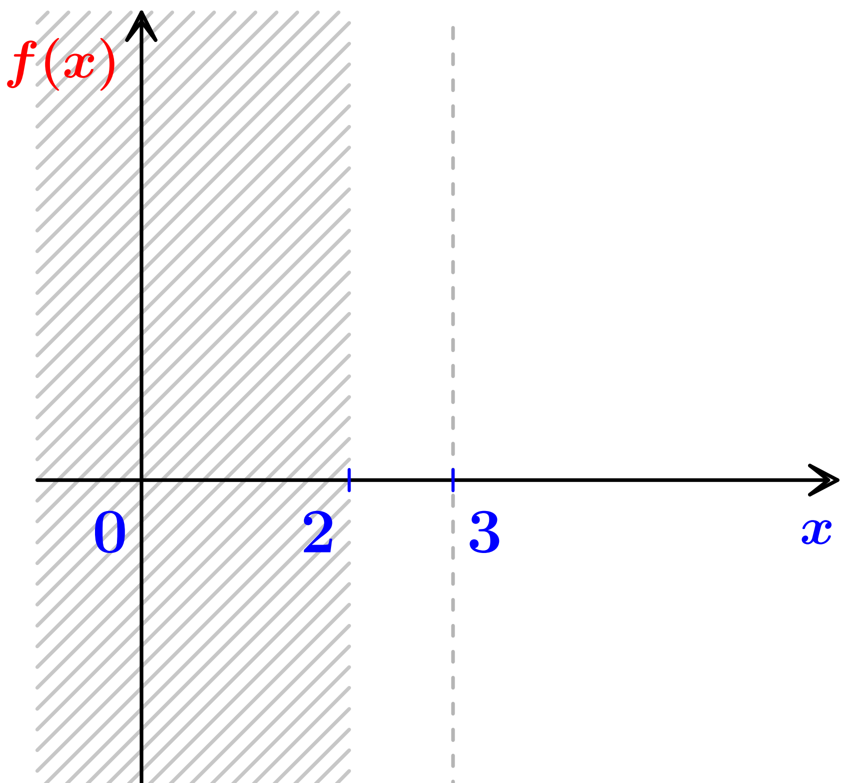
1° Разломак је деф. када су и именилац и бројилац деф. и кад је именилац $\neq 0$:

- полином $(x-2)^2$ је увек деф;
- лог. $\ln(x-2)$ је деф. за $x-2>0$, тј. $x>2$;
- $\ln(x-2) \neq 0 = \ln 1$, па је $x-2 \neq 1$, тј, $x \neq 3$.

Област дефинисаности је: $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$.

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење. 1° Домен je: $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$.



1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење. 2° Нуле:

$f(x)=\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0$

$\Rightarrow x=2$

1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење. 2° Нуле:

$f(x)=\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0$

$\Rightarrow x=2 \notin D_f$, па није нула!

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење. 2° Нуле:

$f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)} = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \notin D_f$, па није нула!

$0 \notin D_f \Rightarrow$ нема пресек са y-осом!

1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

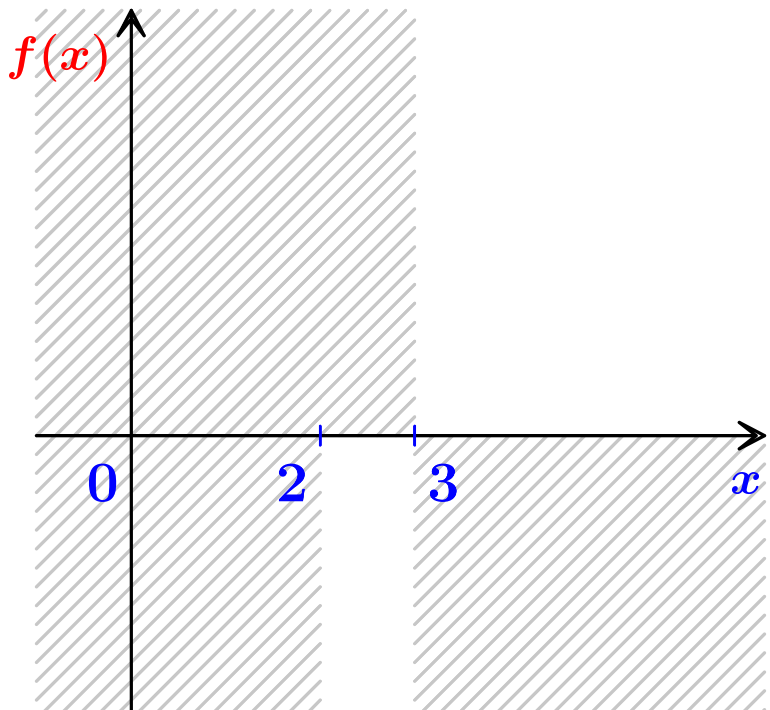
Решење. 2° Знак:

	$(-\infty,2]$	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$(x-2)^2$	x	$+$	$+$	$+$
$\ln(x-2)$	x	$-$	x	$+$
$f(x)$	x	$-$	x	$+$

1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење. 2° Знак:

	$(-\infty,2]$	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$(x-2)^2$	x	$+$	$+$	$+$
$\ln(x-2)$	x	$-$	x	$+$
$f(x)$	x	$-$	x	$+$



1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење. 3°

Како $D_f=(2,3)\cup(3,+\infty)$ није симетричан у односу на $x=0$, ф-ја $f(x)$ није ни парна, ни непарна.

Негативне вредности ф-је $\big($за $x\in(2,3)\big)$ се не понављају периодично, па функција $f(x)$ није ни периодична.

1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

4° $D_f=(2,3)\cup(3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to2^+}f(x),\quad \lim_{x\to3^-}f(x),\quad \lim_{x\to3^+}f(x)\quad \text{и}\quad \lim_{x\to+\infty}f(x).$$

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}\,.$

Решење.

4° $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{(2^+-2)^2}{\ln(2^+-2)} = \frac{(0^+)^2}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty}\right] = 0$$

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

4° $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{(2^+-2)^2}{\ln(2^+-2)} = \frac{(0^+)^2}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty}\right] = 0$$

lim коначан $\Rightarrow$ $f(x)$ нема верт. асимп. $x = 2$.

1. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

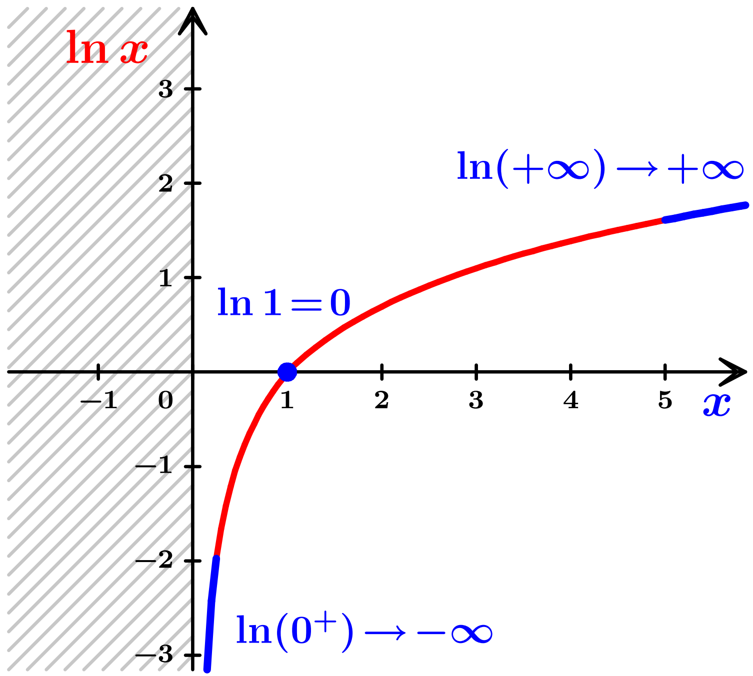
4° $D_f=(2,3)\cup(3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x),\quad \lim_{x\to 3^-} f(x),\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\left[\frac{(3^- -2)^2}{\ln(3^- -2)}=\frac{(1^-)^2}{\ln(1^-)}=\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\left[\frac{(3^+ -2)^2}{\ln(3^+ -2)}=\frac{(1^+)^2}{\ln(1^+)}=\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{(3^- - 2)^2}{\ln(3^- - 2)} = \frac{(1^-)^2}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$



$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{(3^+ - 2)^2}{\ln(3^+ - 2)} = \frac{(1^+)^2}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

4° $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{(3^- - 2)^2}{\ln(3^- - 2)} = \frac{(1^-)^2}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{(3^+ - 2)^2}{\ln(3^+ - 2)} = \frac{(1^+)^2}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

4° $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{(3^- - 2)^2}{\ln(3^- - 2)} = \frac{(1^-)^2}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{(3^+ - 2)^2}{\ln(3^+ - 2)} = \frac{(1^+)^2}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

lim бесконачни $\Rightarrow$ $f(x)$ има верт. асимп. $x = 3$.

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

4° $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x-2)\cdot 1}{\frac{1}{x-2}\cdot 1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2(x-2)^2 = +\infty$$

1. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

Решење.

4° $D_f = (2,3) \cup (3,+\infty)$ $\Rightarrow$ треба наћи:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)} \overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{2(x-2)\cdot 1}{\frac{1}{x-2}\cdot 1} =$$

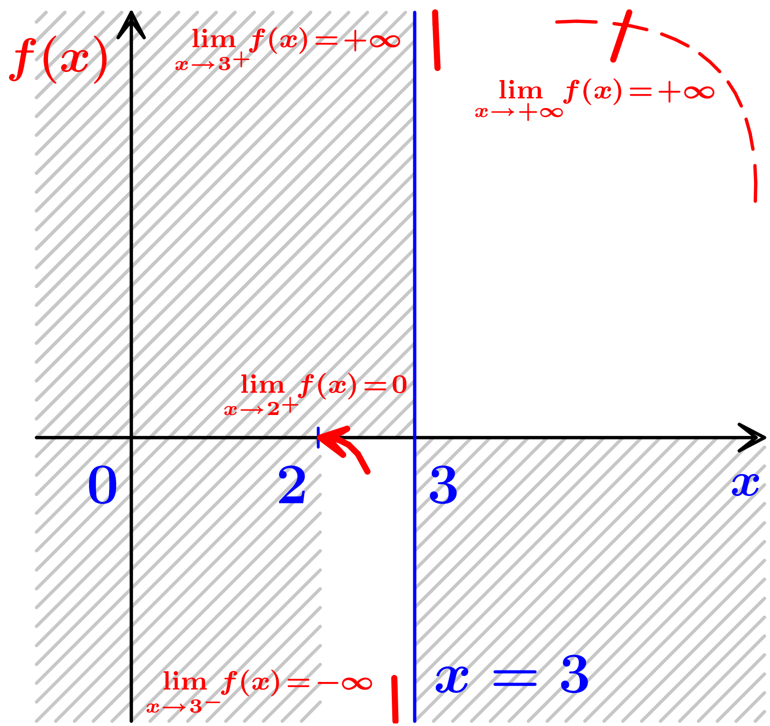
$$\lim_{x\to +\infty} 2(x-2)^2 = +\infty$$

lim бесконачан $\Rightarrow$ $f(x)$ нема десну хор. асимп.

4° $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ нема верт. асимп. $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$
$f(x)$ има верт. асимп. $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x)$ нема десну хор. асимп.



4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \ldots$$ може и тако али компликовани изводи

4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x}\cdot\frac{x-2}{\ln(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}}\cdot\frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1-\tfrac{2}{x})}_{\to 1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\ln(x-2)} = 1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$*$ може када је бар један од ова 2 лимеса коначан број $\neq 0$ $\quad (1)$

4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x-2}{\ln(x-2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}}\cdot\frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x\to+\infty}(1-\cancelto{1}{\tfrac{2}{x}})\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\ln(x-2)} = 1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} x-2 = +\infty.$$

$*$ може када је бар један од ова 2 лимеса коначан број $\neq 0$ (1)

4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} (1-\overset{1}{\cancel{\tfrac{2}{x}}}) \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\ln(x-2)} = 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} x-2 = +\infty.$$

lim бесконачан $\Rightarrow$ $f(x)$ нема ни десну косу ас.

4° $f(x)$ нема десну хор. ас, па може да има десну косу ас.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{x\ln(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} (1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0})^{\nearrow 1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\ln(x-2)} = 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

$$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} x-2 = +\infty.$$

lim бесконачан $\Rightarrow$ $f(x)$ нема ни десну косу ас.

$-\infty \notin D_f$ $\Rightarrow$ нема ни леву хор. ас ни леву косу ас.

5° $f'(x) = \dfrac{\big(2\ln(x-2)-1\big)\cdot(x-2)}{\ln^2(x-2)}$.

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \big(2\ln(x-2)-1\big)\cdot(x-2) = 0.$

$x \neq 2$ (jер $2 \notin D_f$), па je $2\ln(x-2) - 1 = 0.$

Из $\ln(x-2) = \frac{1}{2} = \ln e^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow x - 2 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$,
па je jeдина нула I извода $x = \sqrt{e} + 2$.

5° $f'(x) = \dfrac{\big(2\ln(x-2)-1\big)\cdot(x-2)}{\ln^2(x-2)}$.

	$(-\infty, 2]$	$(2,3)$	3	$(3, \sqrt{e}+2)$	$\sqrt{e}+2$	$(\sqrt{e}+2, +\infty)$
$2\ln(x-2)-1$	x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln^2(x-2)$	x	$+$	x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	x	$-$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	x	$\searrow$	x	$\searrow$	M min	$\nearrow$

$$5^\circ \quad f'(x) = \frac{\big(2\ln(x-2)-1\big)\cdot(x-2)}{\ln^2(x-2)}.$$

	$(-\infty,2]$	$(2,3)$	3	$(3,\sqrt{e}+2)$	$\sqrt{e}+2$	$(\sqrt{e}+2,+\infty)$
$2\ln(x-2)-1$	x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln^2(x-2)$	x	$+$	x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	x	$-$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	x	$\searrow$	x	$\searrow$	M min	$\nearrow$

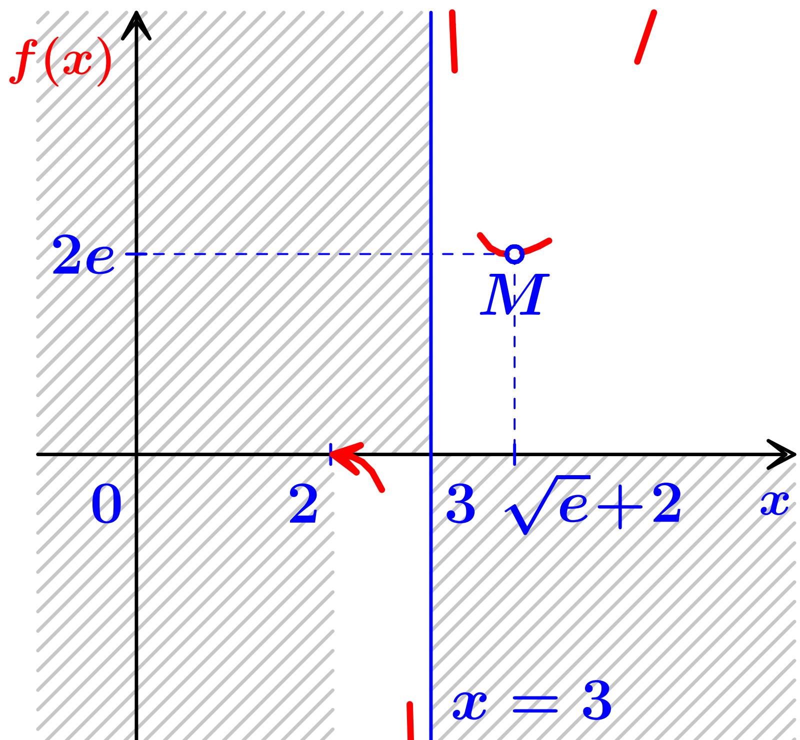
$$f(\sqrt{e}+2)=f(e^{\frac{1}{2}}+2)=\frac{(e^{\frac{1}{2}}+2-2)^2}{\ln(e^{\frac{1}{2}}+2-2)}=\frac{(e^{\frac{1}{2}})^2}{\ln(e^{\frac{1}{2}})}=2e.$$

min je $M(\sqrt{e}+2,2e)$.

5° $f'(x) = \dfrac{\big(2\ln(x-2)-1\big)\cdot(x-2)}{\ln^2(x-2)}$.

	$(-\infty,2]$	$(2,3)$	3	$(3,\sqrt{e}+2)$	$\sqrt{e}+2$	$(\sqrt{e}+2,+\infty)$
$f(x)$	x	$\searrow$	x	$\searrow$	M min	$\nearrow$

min je $M(\sqrt{e}+2, 2e)$.



6° $f''(x) = \dfrac{2\ln^2(x-2) - 3\ln(x-2) + 2}{\ln^3(x-2)}$.

Уведимо смену $t = \ln(x-2)$: $2t^2 - 3t + 2$, чија је дискриминанта $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$, па нема реалних нула. Како је коефицијент уз t^2, $a = 2 > 0$ добијамо да је увек $2t^2 - 3t + 2 > 0$, па је и $2\ln^2(x-2) - 3\ln(x-2) + 2 > 0$.

6° $f''(x) = \dfrac{2\ln^2(x-2) - 3\ln(x-2) + 2}{\ln^3(x-2)}$.

	$(-\infty, 2]$	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$2\ln^2(x-2) - 3\ln(x-2) + 2$	x	$+$	$+$	$+$
$\ln^3(x-2)$	x	$-$	x	$+$
$f''(x)$	x	$-$	x	$+$
$f(x)$	x	$\cap$	x	$\cup$

6° $f''(x) = \dfrac{2\ln^2(x-2) - 3\ln(x-2) + 2}{\ln^3(x-2)}$.

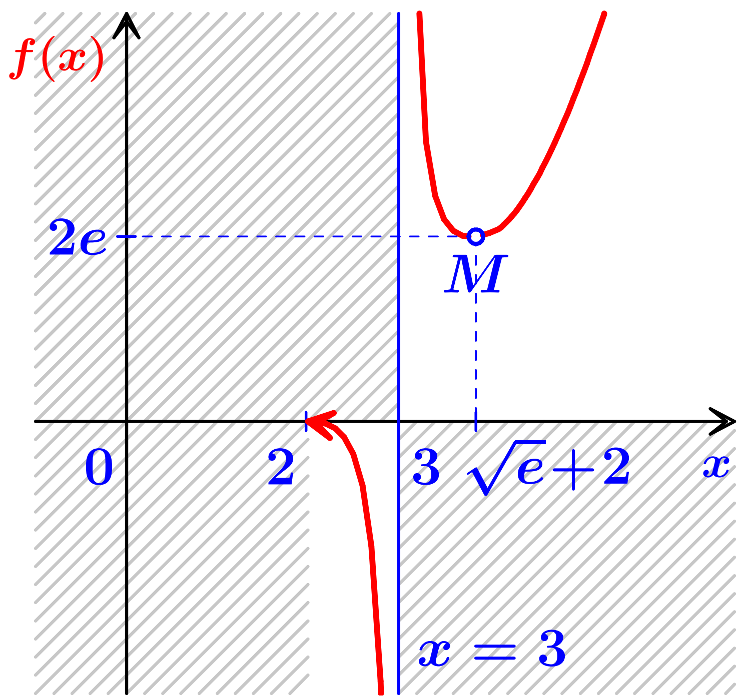
	$(-\infty, 2]$	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$2\ln^2(x-2) - 3\ln(x-2) + 2$	x	$+$	$+$	$+$
$\ln^3(x-2)$	x	$-$	x	$+$
$f''(x)$	x	$-$	x	$+$
$f(x)$	x	$\cap$	x	$\cup$

Превојних тачака нема (јер $3 \notin D_f$).

6° $f''(x) = \dfrac{2\ln(x-2)^2 - 3\ln(x-2) + 2}{\ln^3(x-2)}$.

	$(-\infty, 2]$	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	x	$\cap$	x	$\cup$

Превојних тачака нема (јер $3 \notin D_f$).



2. $f(x) = (3x - 1)e^{2/x}$.

2. $f(x) = (3x-1)e^{2/x}$.

1° $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Нула је $x = \frac{1}{3}$. Знак: $-$ $\mathbf{0}$ $-$ $\boxed{\mathbf{\frac{1}{3}}}$ $+$.

Пресек са y-осом нема.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° Косу асимптоту можемо добити и користећи Маклоренов развој: $x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{2}{x} \to 0$

$$f(x) = (3x-1)e^{2/x} = (3x-1) \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

2. $f(x) = (3x-1)e^{2/x}$.

4° Косу асимптоту можемо добити и користећи Маклоренов развој: $x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{2}{x} \to 0$

$$f(x) = (3x-1)e^{2/x} = (3x-1)\cdot\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$3x - 1 + 6 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + o(1) = 3x + 5 + o(1).$$

$y = 3x + 5$ је обострана коса ас. $\Rightarrow$ нема хор.ас.

5° $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{x^2}\, e^{2/x}.$

2. $f(x) = (3x-1)e^{2/x}$.

5° $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{x^2}\, e^{2/x}$. Монотоност:

$$\nearrow \mathbf{0} \nearrow \boxed{\mathbf{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}} \searrow \boxed{\mathbf{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}} \nearrow .$$

Лок.max је $M_1(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, (2-\sqrt{3})e^{3+\sqrt{3}})$.

Лок.min је $M_2(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, (2+\sqrt{3})e^{3-\sqrt{3}})$.

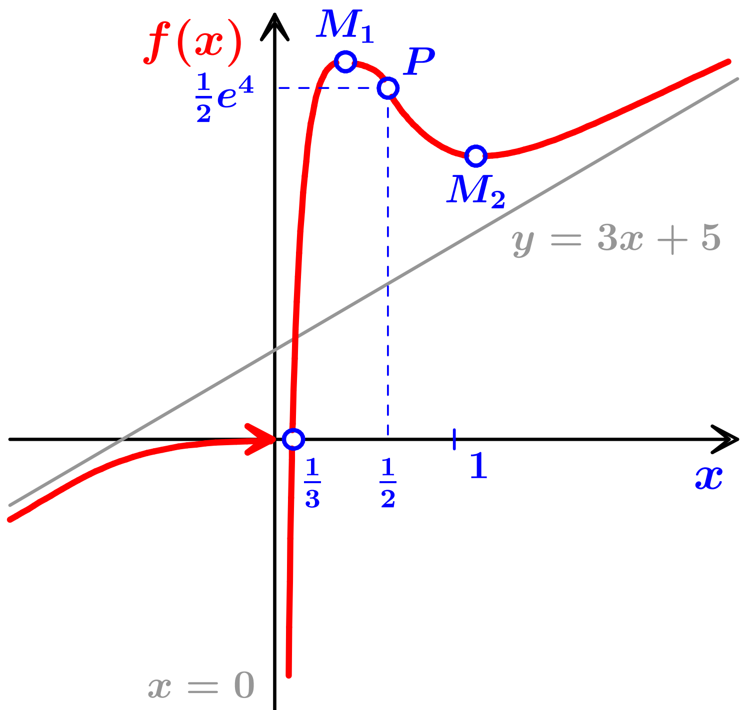
$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$ график функције улази хоризонтално ($k=0$ код $y = k\cdot x + n$) у нулу.

6° $f''(x) = \dfrac{8x-4}{x^4}\, e^{2/x}$.

2. $f(x) = (3x-1)e^{2/x}$.

6° $f''(x) = \dfrac{8x-4}{x^4}\,e^{2/x}$. Конвексност:

$\cap$ $\mathbf{0}$ $\cap$ $\boxed{\mathbf{\tfrac{1}{2}}}$ $\cup$. Превојна тачка је $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^4)$.



3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

1° $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$
Вертикална ас. $x = 0$, нема хоризонталних ас, обострана коса ас. је $y = -x + 1$.

5° $f' = -\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1\right)$. Монотоност: $\searrow$ $\mathbf{0}$ $\searrow$.

Нема локалних екстрема.

3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

5° $f' = -\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1\right)$. Монотоност: $\searrow$ $\mathbf{0}$ $\searrow$.

Нема локалних екстрема.

2° Како је $f(1) = e - 1 > 0$ и $f(2) = \sqrt{e} - 2 < 0 \Rightarrow$ има нулу $x = \alpha \in (1, 2)$.

Нумерички се може добити $\alpha \approx 1.763222834$.

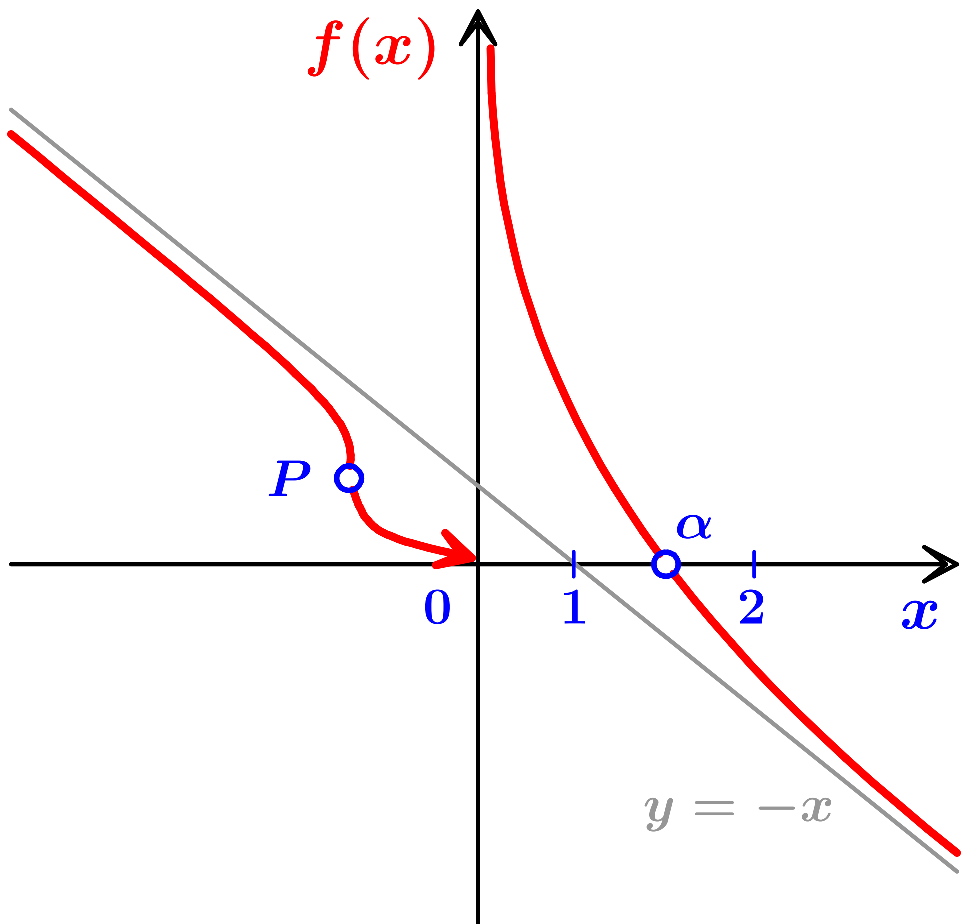
Знак: $+$ $\mathbf{0}$ $+$ $\boxed{\boldsymbol{\alpha}}$ $-$.

6° $f'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$.

Конвексност: $\cap$ $\boxed{\mathbf{-1/2}}$ $\cup$ $\mathbf{0}$ $\cup$.

Превојна тачка је $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\right)$.

3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x.$



4. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

1° $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

2° Нуле су $x = 0$ и $x = \frac{27}{8}$. Знак: $- \boxed{\mathbf{0}} - \boxed{\mathbf{\frac{27}{8}}} +$.

Пресек са y-осом је $Y(0,0)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° Нема прекида у $D_f \Rightarrow$ нема вер.ас.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \ n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - k \cdot x = -\infty.$

Нема асимптота.

5° $f' = 2 - \frac{2}{x^{1/3}}$. Монотоност: $\searrow \boxed{\mathbf{0}} \nearrow \boxed{\mathbf{1}} \searrow$.

4. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

5° $f' = 2 - \dfrac{2}{x^{1/3}}$. Монотоност: $\searrow \boxed{\mathbf{0}} \nearrow \boxed{\mathbf{1}} \searrow$.

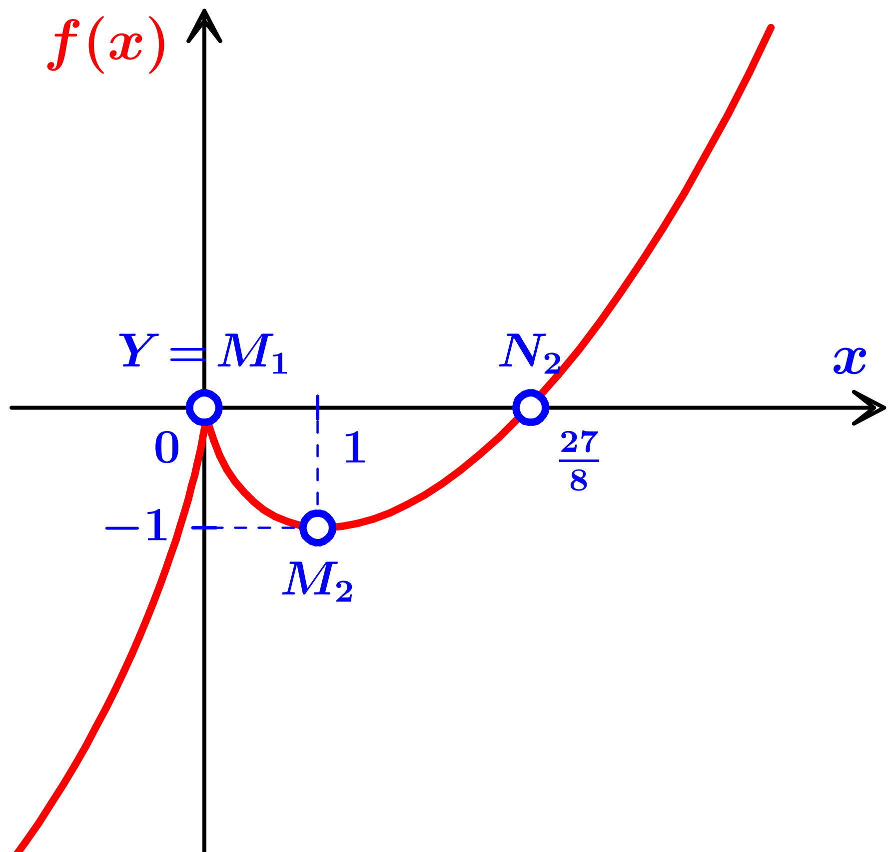
Лок.max је $M_1(0,0)$, а лок.min $M_2(1,-1)$.

Напомена. У тачки M_1 први извод $f'(x)$ није дефинисан, али $f(x)$ јесте, па имамо локални максимум! На графику је ту шпиц и у тачку $(0,0)$ и из ње график излази вертикално.

6° $f'' = \dfrac{2}{3x^{4/3}}$. Конвексност: $\cup \boxed{\mathbf{0}} \cup$.

Нема превојних тачака.

4. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.



КРАЈ ЧАСА