др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

07. термин

Граничне вредности функција и асимптоте

Испитивање функција:

1. Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

2. Нуле и знак функције; пресек са y-осом

3. Парност и периодичност функције

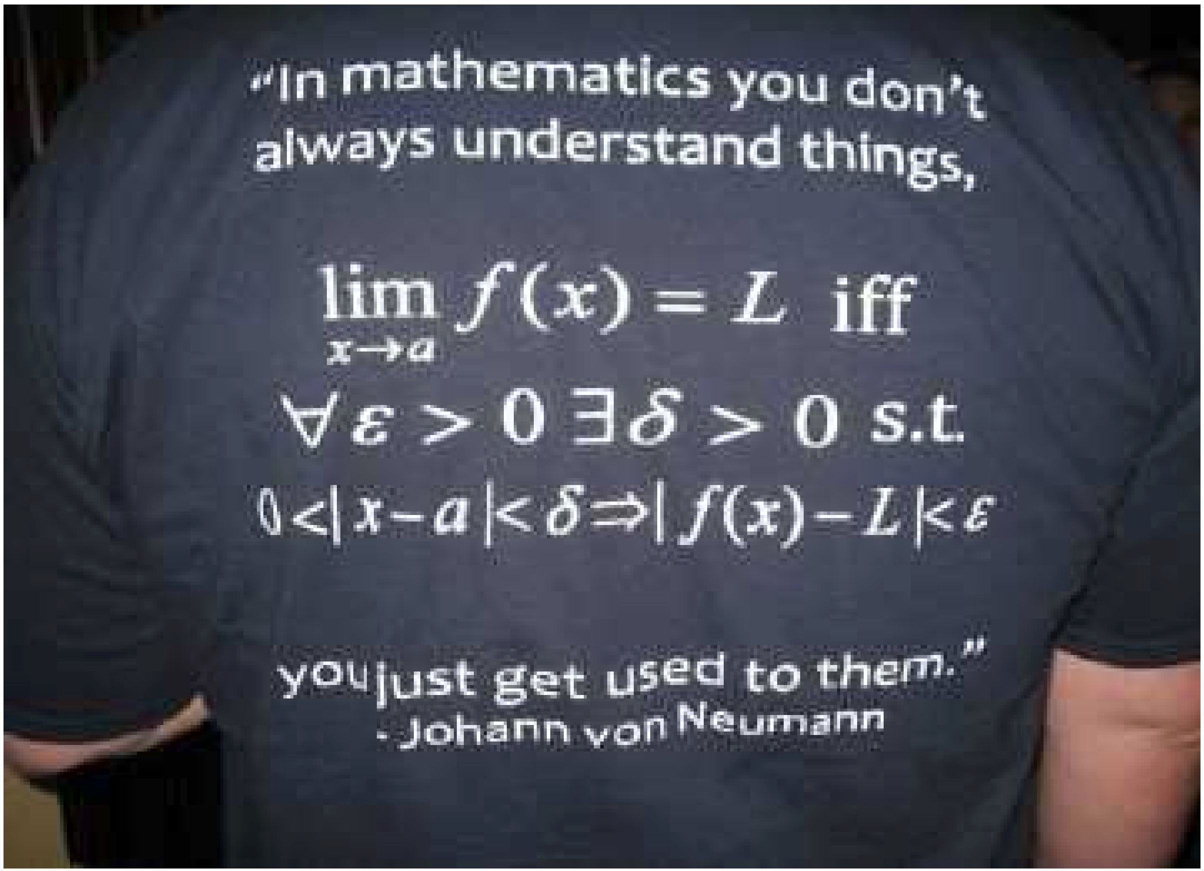
$\boxed{\textbf{4.}}$ Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

5. Први извод, монотоност и локални екстреми функције

6. Други извод, конвексност и превојне тачке функције

$\Rightarrow$ Скицирање графика функције.

4. Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције



$\boxed{\textbf{4.}}$ Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

Дефиниција 1. Нека je функција $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке a (сем у тачки a). Функција $f(x)$ има *граничну вредност* A кад x тежи ка a ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta) \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

То ћемо означавати са $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

Ако је D_f унија интервала облика (a,b) потребно је за сваки од њих одредити: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

Ако је D_f унија интервала облика (a, b) потребно је за сваки од њих одредити: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

Ако је $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ одређујемо: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

Ако је D_f унија интервала облика (a,b) потребно је за сваки од њих одредити: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Ако је $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ одређујемо: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Ако имамо $(a,b]$ одређујемо:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ и вредност $f(b)$

(за $x=b$ ф-ја је деф. и ту израчунавамо вредност функције, а не лимес!)

$\boxed{4.}$ Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example. This was the result:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = 5$$

$$\boxed{C \cdot 0 = 0} \qquad \boxed{\frac{0}{C} = 0} \qquad \boxed{\frac{C}{\pm\infty} = 0} \qquad \boxed{\frac{0}{\pm\infty} = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} +C \cdot +\infty = +\infty & +C \cdot -\infty = -\infty \\ -C \cdot +\infty = -\infty & -C \cdot -\infty = +\infty \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{+C}{0^+} = +\infty & \dfrac{+C}{0^-} = -\infty \\ \dfrac{-C}{0^+} = -\infty & \dfrac{-C}{0^-} = +\infty \end{array}}$$

$$\frac{+C}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+C}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{-C}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-C}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{+C} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{-C} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{+C} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{-C} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

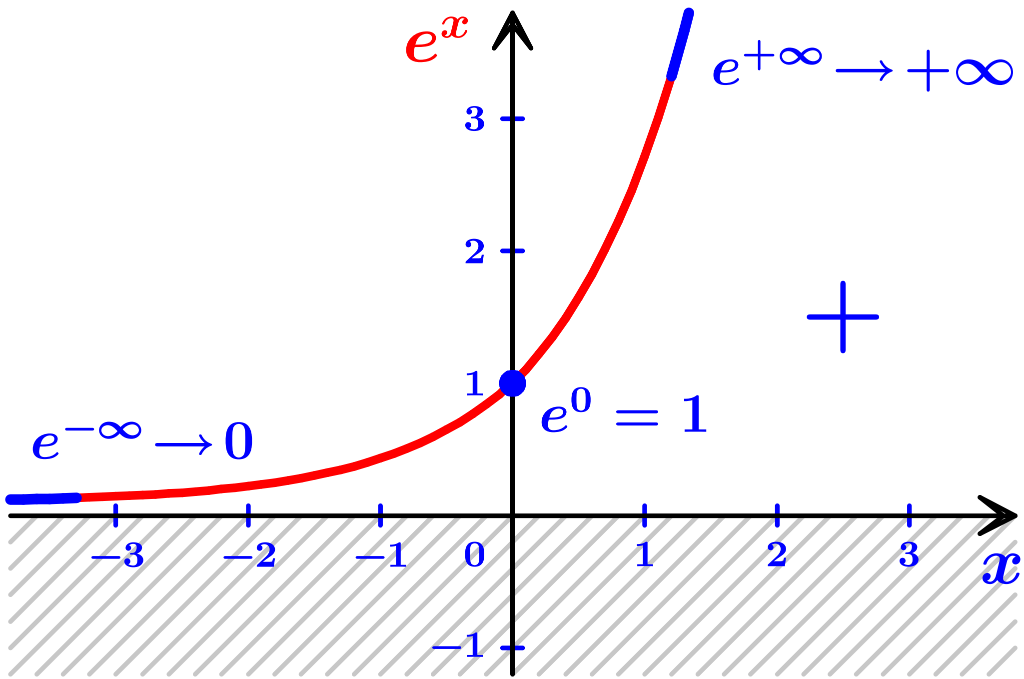
$$\boxed{\frac{+\infty}{+C} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{-C} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{+C} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{-C} = +\infty}$$

$$\boxed{\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty}$$

$$\boxed{e^{+\infty} = +\infty} \qquad \boxed{e^{-\infty} = 0}$$

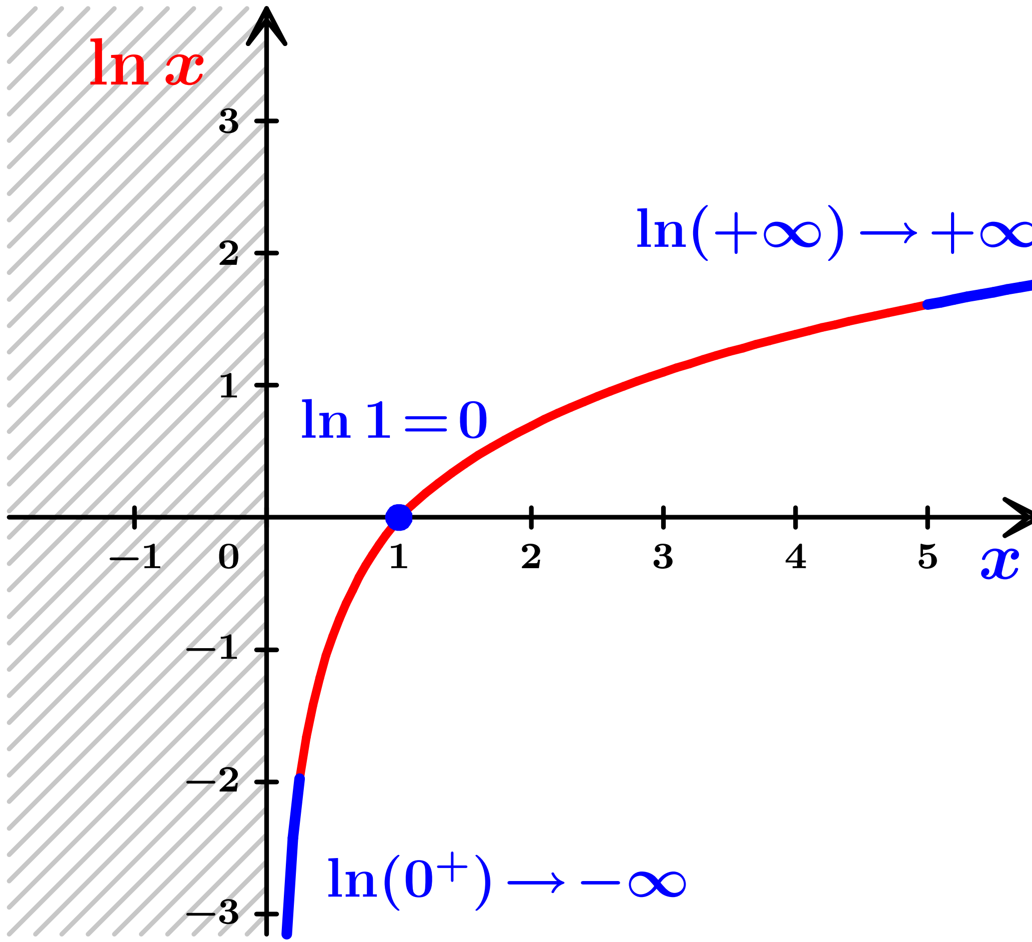
$$\boxed{\ln(0^+) = -\infty} \qquad \boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$$

$$\boxed{e^{+\infty} = +\infty} \qquad \boxed{e^{-\infty} = 0}$$



$$\boxed{\ln(0^+) = -\infty}$$

$$\boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$$



$$\boxed{e^{+\infty} = +\infty} \qquad \boxed{e^{-\infty} = 0}$$

$$\boxed{\ln(0^{+}) = -\infty} \qquad \boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$$

$$\frac{0}{0} = \ ??? \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \ ???$$

$$0 \cdot \pm\infty = \ ??? \qquad 1^{\infty} = \ ??? \qquad 0^{0} = \ ???$$

Табличне граничне вредности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

Таблични граничне вредности:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

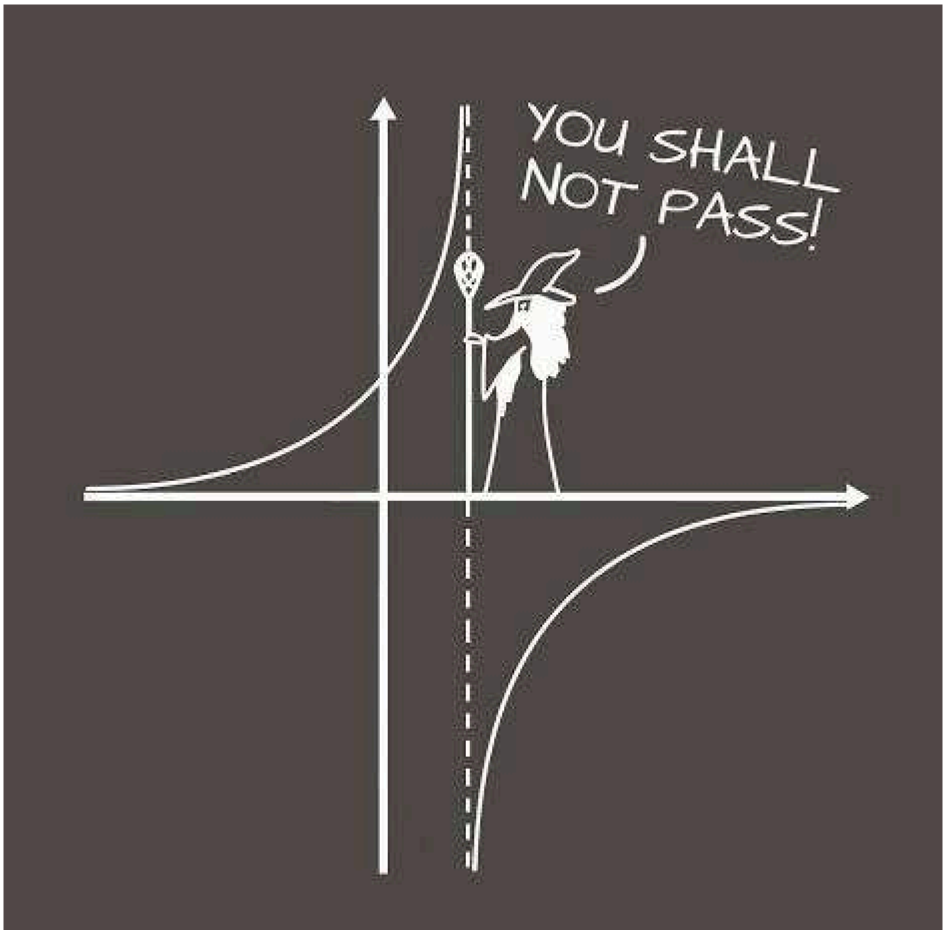
Табличне граничне вредности:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$\lim_{x\to +\infty} (1 + \tfrac{1}{x})^x = e, \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Постоје три врсте асимптота: вертикалне, хоризонталне и косе.



Вертикалне асимптоте се јављају кад имамо прекид у домену D_f.

Права $x = a$ је *вертикална асимптота* ако

- a не припада D_f,
- бар један од лимеса $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ постоји и бесконачан је $(+\infty$ или $-\infty)$.

Ако је $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, где је b коначан број, тада је $y = b$ *лева хоризонтална асимптота*.

Ако је $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, где је b коначан број, тада је $y = b$ *десна хоризонтална асимптота*.

Ако је права $y = b$ и лева и десна хоризонтална асимптота, онда је *обострана хоризонтална асимптота*.

Уколико je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ бесконачан, тада тражимо леву косу асимптоту.

Ако постоје 2 lim:

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ – ако je k коначан и $k \neq 0$, онда тражимо $n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - k \cdot x$ и ако je n коначан тада je *лева коса асимптота* права $y = kx + n$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -||- \Rightarrow$ *десна коса асимптота*.

Ако je $y = kx + n$ и лева и десна коса асимптота, онда je *обострана коса асимптота*.

Задаци

1. 6.1. в).

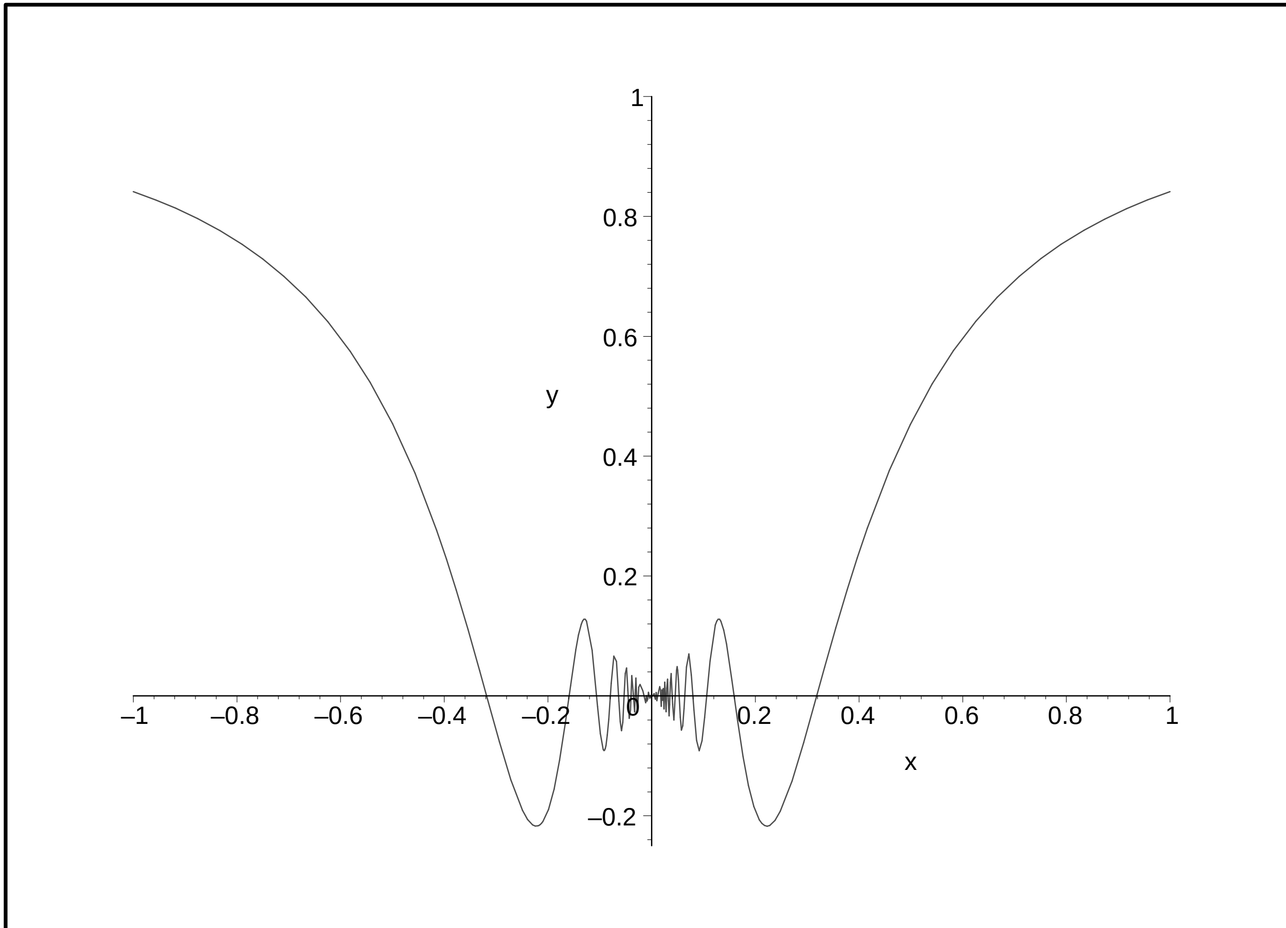
Користећи дефиницију граничне вредности функције доказати да је

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Решење. Како за синус важи $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ имамо да је за ε из дефиниције $\delta = \varepsilon$ и тада имамо да за

$$0 < |x| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \cdot 1 \leqslant \varepsilon = \delta.$$

Тиме смо показали да је $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$ ■


1
0.8
0.6
y
0.4
0.2
–0.2
–1
–0.8
–0.6
–0.4
–0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

Израчунати граничне вредности:

2. 6.2. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x + 1}.$$

2. 6.2. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x+1}.$$

Решење.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x+1}=\frac{2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2}{2+1}=\frac{24}{3}=8.$$

■

3. 6.4. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

3. 6.4. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}\,.$$

Решење.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} =$$

3. 6.4. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Решење.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\cancel{-}1)(x+1)}{(x\cancel{-}1)(2x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

■

4. 6.4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}\,.$$

Решење 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}$$

4. 6.4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}\ .$$

Решење 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(1+\frac{2}{x})}{x\cdot(2+\frac{1}{x})}$$

Решење 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}$$

Решење 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot(1+\frac{2}{x})}{\cancel{x}\cdot(2+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

$$\frac{C}{\infty}\longrightarrow 0$$

Решење 2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Решење 2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

5. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-5} \right)^3.$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-5}\right)^3.$

Решење.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-5}\right)^3=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}\right)^3$$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-5}\right)^3.$

Решење.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-5}\right)^3=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3-\frac{5}{x}\right)}\right)^3=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{5}{x}}\right)^3$$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-5}\right)^3.$

Решење.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-5}\right)^3=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\,(2+\frac{1}{x})}{\cancel{x}\,(3-\frac{5}{x})}\right)^3=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{5}{x}}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\,. \qquad \blacksquare$$

6. 6.5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \, .$$

6. 6.5. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,.$$

Решење 1. $$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

6. 6.5. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,.$$

Решење 1. $$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$$

6. 6.5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Решење 1. $$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

6. 6.5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,.$$

Решење 1. $$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

6. 6.5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решење 2. $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$, па користимо таблични лимес $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$ са $\alpha=\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}=\frac{1}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

7. 6.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$.

7. 6.6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^3 + x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^3 + x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$.

Решење.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3 + x + 1}{3x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(-3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})}$$

7. 6.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$.

Решење.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = -1.$$

7. 6.6. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$$ и $$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}.$$

Решење.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=-1.$$

■

7. 6.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$.

Решење.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = -1. \qquad \blacksquare$$

Напомена. $\Rightarrow f(x) = \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ има обострану хоризонталну асимптоту $y=-1$.

8. 6.7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

8. 6.7. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Решење. $$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

8. 6.7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Решење. $$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

$x \to +\infty$ (тад је $x > 0$) па имамо $\sqrt{x^2} = |x| = x$,

8. 6.7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решење. $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

$x \longrightarrow +\infty$ (тад je $x > 0$) па имамо $\sqrt{x^2} = |x| = x$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}$$

8. 6.7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Решење. $$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

$x\longrightarrow+\infty$ (тад је $x>0$) па имамо $\sqrt{x^2}=|x|=x$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1}=1$$

8. 6.7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Решење. $$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

$x \to -\infty$ (тад je $x < 0$) имамо $\sqrt{x^2} = |x| = -x$,

8. 6.7. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ и $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решење. $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

$x\to-\infty$ (тад je $x<0$) имамо $\sqrt{x^2}=|x|=-x$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}$$

8. 6.7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Решење. $$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

$x\to-\infty$ (тад је $x<0$) имамо $\sqrt{x^2}=|x|=-x$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1}=-1.$$

■

Напомена.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

има десну хоризонталну асимптоту $y=1$.

Напомена.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1 \ \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

има десну хоризонталну асимптоту $y = 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1 \ \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

има леву хоризонталну асимптоту $y = -1$.

9. 6.8. $$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right).$$

Упутства. Идеје из претходна 3 задатка. $L = 2$. ∎

10. 6.9. $$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right].$$

Упътства. $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

$L=0.$ ■

11. 6.10. $$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx},\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$$

11. 6.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Решење.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{\dfrac{\sin bx}{bx}} \cdot \frac{ax}{bx}$$

11. 6.10. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx},\ a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0.$$

Решење.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin ax}{ax}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\sin bx}{bx}}_{\to 1}}\cdot\frac{a\cancel{x}}{b\cancel{x}}=\frac{a}{b}.\qquad\blacksquare$$

12. 6.11. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

12. 6.11. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,.$$

Решење.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=$$

12. 6.11. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\,.$$

Решење.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

12. 6.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решење.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

12. 6.11. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\,.$$

Решење.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\underset{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}\,.$$

■

13. 6.12. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}.$$

13. 6.12. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}.$$

Решење.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=$$

13. 6.12. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}.$$

Решење.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}\cdot\frac{6}{3x-4}\cdot\frac{x+1}{3}}=$$

13. 6.12. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}.$$

Решење.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{(x+1)/3} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}\cdot\frac{6}{3x-4}\cdot\frac{x+1}{3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{2x+2}{3x-4}} =$$

Решење.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}\cdot\frac{6}{3x-4}\cdot\frac{x+1}{3}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{2x+2}{3x-4}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}}_{e}\right)^{\frac{2+\frac{2}{x}}{3-\frac{4}{x}}}=e^{\frac{2}{3}}\qquad\blacksquare$$

14. 6.13. $$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} \, .$$

14. 6.13. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\ .$$

Решење. $$L=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\ .$$

14. 6.13. $\displaystyle \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решење. $$L = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} .$$

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$$

14. 6.13. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решење. $L = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

$$\ln L \quad = \quad \ln \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{1/x^2}$$

14. 6.13. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Решење. $L = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

$$
\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \to 0} \ln (\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x)
\end{aligned}
$$

14. 6.13. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\,.$$

Решење. $$L=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\,.$$

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\,.\end{aligned}$$

14. 6.13. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\,.$$

Решење. $$L=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\,.$$

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x = \cos(2\cdot\tfrac{x}{2}) &= \cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}\\ &= (1-\sin^2\tfrac{x}{2})-\sin^2\tfrac{x}{2}=1-2\sin^2\tfrac{x}{2}\,.\end{aligned}$$

Решење. $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos(2\cdot \tfrac{x}{2}) = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2} \\
&= (1 - \sin^2 \tfrac{x}{2}) - \sin^2 \tfrac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \tfrac{x}{2} .
\end{aligned}$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2}$$

Решење. $\quad L = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos(2 \cdot \tfrac{x}{2}) = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2} \\
&= (1 - \sin^2 \tfrac{x}{2}) - \sin^2 \tfrac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \tfrac{x}{2} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{-2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}}
\end{aligned}$$

Решење. $\quad L = \lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \to 0} \ln(\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} . \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{-2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{-2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2
\end{aligned}$$

Решење. $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}\,.$

$$
\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln (\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\,. \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}}_{\to 1} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}\Bigg)^2 \\
&= 1 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln (\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\,. \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}_{1} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}\Bigg)^2 \\
&= 1 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

$\ln L = -\frac{1}{2}$, тј. $\ln L = \ln e^{-\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
\ln L &= \ln \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\,. \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}_{1} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}\Bigg)^2 \\
&= 1 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\ln L = \ln e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow L = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,. \qquad \blacksquare
$$

15. 6.14.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}.$$

15. 6.14. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}.$$

Упутства. Користимо идеје из претходних задатака. $L=-2$. ■

16. $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{7x + 3x^2}{4x + x^2}.$

16. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x + 3x^2}{4x + x^2}$.

Решење. $$L = \lim_{x \to 0} \frac{7x + 3x^2}{4x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(7 + 3x)}{\cancel{x}(4 + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{7 + 3x}{4 + x} = \frac{7 + 0}{4 + 0} = \frac{7}{4}\,.$$ ■

17. 6.16. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}.$$

17. 6.16. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}.$$

Упутства. Одредити $\ln L$. $L=\sqrt{ab}$. ■

18. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$ и $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$ и $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$.

Решење.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x-5}{3-x} = \left[\frac{3^2+3-5}{3-3^-} = \frac{+7}{0^+}\right] = +\infty.$$

18. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$ и $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$.

Решење.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x-5}{3-x} = \left[\frac{3^2+3-5}{3-3^-} = \frac{+7}{0^+}\right] = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+x-5}{3-x} = \left[\frac{3^2+3-5}{3-3^+} = \frac{+7}{0^-}\right] = -\infty.$$

■

18. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$ и $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$.

Решење.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x-5}{3-x} = \left[\frac{3^2+3-5}{3-3^-} = \frac{+7}{0^+}\right] = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+x-5}{3-x} = \left[\frac{3^2+3-5}{3-3^+} = \frac{+7}{0^-}\right] = -\infty.$$

■

Напомена. $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$

има вертикалну асимптоту $x = 3$.

Напомена. $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x}$

има вертикалну асимптоту $x = 3$.

Домаћи. Одредити хоризонталне и/или косе асимптоте функције $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x}$.

Напомена. $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$

има вертикалну асимптоту $x = 3$.

Домаћи. Одредити хоризонталне и/или косе асимптоте функције $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$.

Резултати.

$\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty \Rightarrow$ нема хор.ас.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1, n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - k\cdot x = -4$

$\Rightarrow y = -x - 4$ је обострана коса ас. ■

19. I кол. 2017-8.

Дата је функција

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-3}.$$

а) Израчунати $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

б) Који закључак (по питању асимптота) добијамо на основу ових лимеса?

19. I кол. 2017-8.

Дата је функција

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-3}.$$

а) Израчунати $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

б) Који закључак (по питању асимптота) добијамо на основу ових лимеса?

ЗА ДОМАЋИ!

КРАЈ ЧАСА