др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

04. термин

Матрице

Матрице

Теоријски увод

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица је правоугаони низ облика

$$
\begin{array}{cc}
\rightarrow & \multirow{4}{*}{$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$} \\
\rightarrow & \\
 & \\
\rightarrow &
\end{array}
$$

Ова матрица има m *врста* и n *колона*.

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ова матрица има m *врста* и n *колона*.

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ова матрица има m *врста* и n *колона*.

Ако је $m = n$ тада је A квадратна матрица реда n.

Ознаке за матрицу:

$$\left(\quad\right) \qquad \text{или} \qquad \left\|\quad\right\| \qquad \text{или} \qquad \left[\quad\right]$$

Ознаке за детерминанту:

$$\left|\quad\right|$$

Ознаке за матрицу:

$$\Big(\quad \Big) \qquad \text{или} \qquad \Big\| \quad \Big\| \qquad \text{или} \qquad \Big[\quad \Big]$$

Ознаке за детерминанту:

$$\Big| \quad \Big|$$

Две матрице су *једнаке*, $A = B$, ако имају исти облик $m \times n$ и одговарајући елементи су им једнаки: $a_{ij} = b_{ij}$.

МАТРИЧНЕ ОПЕРАЦИЈЕ:

Збир 2 матрице A и B (истог облика $m \times n$) је:

$$A + B = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Множење матрице A бројем k је дато са:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Производ матрица A и B је дефинисан само ако:

$$\underset{m \times p}{A}, \qquad \underset{p \times n}{B} \quad \Rightarrow \quad \underset{m \times n}{C} = A \cdot B.$$

Производ матрица A и B је дефинисан само ако:

$$\underset{m \times p}{A}, \qquad \underset{p \times n}{B} \quad \Rightarrow \quad \underset{m \times n}{C = A \cdot B}.$$

Елементи матрице C су

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

(множимо i–ту врсту A и j–ту колону B).

Елементи матрице C су

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

(множимо i–ту врсту A и j–ту колону B).

У случају да важи

$$A \cdot B = B \cdot A$$

кажемо да матрице A и B *комутирају*.

У случају да важи

$$A \cdot B = B \cdot A$$

кажемо да матрице A и B *комутирају*.

За множење матрица важи *асоцијативност*:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

За множење матрица важи *асоцијативност*:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Јединична матрица је

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{\Huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Huge 0} & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Јединична матрица је

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{\Huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Huge 0} & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

За њу важи:

$$X \cdot I = X \qquad \text{и} \qquad I \cdot X = X.$$

За њу важи:

$$X \cdot I = X \qquad \text{и} \qquad I \cdot X = X.$$

За *инверзну матрицу* A^{-1} квадратне матрице A важи

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

За *инверзну матрицу* A^{-1} квадратне матрице A важи

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Ако постоји инверзна матрица, она је јединствена.

За *инверзну матрицу* A^{-1} квадратне матрице A важи

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Ако постоји инверзна матрица, она је јединствена.

Квадратна матрица A је *регуларна* ако има инверзну матрицу, а *сингуларна* ако нема.

Адјунгована матрица квадратне матрице A је матрица

$$\operatorname{adj} A = \|A_{ij}\|^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix},$$

где су $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ одгов. кофактори.

Теорема 1. Матрица A је регуларна акко је

$$\det(A) \neq 0.$$

Тада је

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj} A.$$

ДЕФИНИЦИЈА:

Субматрица матрице A се добија тако што у A одбацимо неке врсте и/или колоне.

ДЕФИНИЦИЈЕ:

Субматрица матрице A се добија тако што у A одбацимо неке врсте и/или колоне.

Ранг матрице A, $r(A)$, је ред њене највеће регуларне квадратне субматрице.

ДЕФИНИЦИЈЕ:

Субматрица матрице A се добија тако што у A одбацимо неке врсте и/или колоне.

Ранг матрице A, $r(A)$, је ред њене највеће регуларне квадратне субматрице.

Ранг нула–матрице

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

је једнак 0.

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1° замена места 2 врсте (колоне),

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1° замена места 2 врсте (колоне),

2° множење врсте (колоне) бројем $k \neq 0$,

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1° замена места 2 врсте (колоне),

2° множење врсте (колоне) бројем $k \neq 0$,

3° додавање врсте (колоне), помножене неким бројем, другој врсти (колони).

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1° замена места 2 врсте (колоне),

2° множење врсте (колоне) бројем $k \neq 0$,

3° додавање врсте (колоне), помножене неким бројем, другој врсти (колони).

Ранг $r(A)$ је број врста матрице A у степенастом облику које немају све елементе 0.

Задаци

1.

Дате су матрице $A_{3\times 2}$, $B_{2\times 3}$, $C_{3\times 2}$ и $D_{3\times 2}$.

Које од следећих операција су дефинисане?

а) $A+B^{\mathrm{T}}$; **б)** AB; **в)** BA; **г)** A^{-1};

д) $AB+CD$; **ђ)** $AB+CD^{\mathrm{T}}$; **е)** $AB+C^{\mathrm{T}}D$.

2. Израчунати $M = AB + 2C$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решење. $\quad M = AB + 2C$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

Решење. $M = AB + 2C$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 3 + 0 - 2 + 0 = 1.$$

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0 + 1 + 4 - 1 = 4.$$

Решење.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$2C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ 10 & -4 & 16 \end{pmatrix},$$

Решење.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$2C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ 10 & -4 & 16 \end{pmatrix},$$

$$M = AB + 2C$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ 10 & -4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 15 & -2 \\ 18 & -11 & 23 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

3. Ако је $A^T = [2 \ 4 \ 6]$, тада је $AA^{\mathrm{T}} =$

и $A^{\mathrm{T}}A =$

3. $A^T = [2 \;\; 4 \;\; 6]$, $\qquad AA^{\mathrm{T}} = ?$ $\qquad$ и $\qquad A^{\mathrm{T}}A = ?$

Решење. $\qquad A \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [2 \;\; 4 \;\; 6] = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

$$3 \times 1 \qquad 1 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 3$$

3. $A^T = [2 \;\; 4 \;\; 6]$, $AA^{\mathrm{T}} = ?$ и $A^{\mathrm{T}}A = ?$

Решење.
$$A \cdot A^{\mathrm{T}} = \underset{3 \times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}} \cdot \underset{1 \times 3}{[2 \;\; 4 \;\; 6]} = \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 16 & 24 \\ 12 & 24 & 36 \end{bmatrix}}$$

3. $A^T = [2 \;\; 4 \;\; 6]$, $\qquad AA^{\mathrm{T}} = ?$ $\qquad$ и $\qquad A^{\mathrm{T}}A = ?$

Решење. $\qquad A \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [2 \;\; 4 \;\; 6] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 16 & 24 \\ 12 & 24 & 36 \end{bmatrix}$

$$3 \times 1 \qquad 1 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 3$$

$$A^{\mathrm{T}}A = [2 \;\; 4 \;\; 6] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = [\qquad]$$

$$1 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 1 \times 1$$

3. $A^T = [2\ \ 4\ \ 6]$, $\qquad AA^{\mathrm{T}} = ?$ $\qquad$ и $\qquad A^{\mathrm{T}}A = ?$

Решење.

$$A \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [2\ \ 4\ \ 6] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 16 & 24 \\ 12 & 24 & 36 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 1 \quad 1 \times 3 \qquad 3 \times 3$$

$$A^{\mathrm{T}}A = [2\ \ 4\ \ 6] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = [\,56\,]$$

$$1 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 1 \times 1$$

3. $A^T = [2\ \ 4\ \ 6]$, $\quad AA^{\mathrm{T}} = ?$ и $A^{\mathrm{T}}A = ?$

Решење. $$A \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [2\ \ 4\ \ 6] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 16 & 24 \\ 12 & 24 & 36 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 1 \quad 1 \times 3 \qquad 3 \times 3$$

$$A^{\mathrm{T}}A = [2\ \ 4\ \ 6] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = [\,56\,]$$

$$1 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 1 \times 1$$

■

4. Ако је $C = A_{3\times 2}B_{a\times 5}$, онда је $a =$ __________
и матрица C је типа __________ .

4. Ако је $C = A_{3\times 2} B_{a\times 5}$, онда је $a =$ ___2___ и матрица C је типа ________ .

4. Ако је $C = A_{3\times 2} B_{a\times 5}$, онда је $a =$ $\underline{\quad 2 \quad}$ и матрица C је типа $\underline{\quad 3\times 5 \quad}$.

$\blacksquare$

5. Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$1 + 0 + 2 - \Big((-1) + 0 + 2\Big) = 2.$$

Решење.

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$1 + 0 + 2 - \Big((-1) + 0 + 2\Big) = 2.$$

Како je $|A| = 2 \neq 0$ то постоји A^{-1}.

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$1 + 0 + 2 - \Big((-1) + 0 + 2\Big) = 2.$$

Како је $|A| = 2 \neq 0$ то постоји A^{-1}.

Одредимо $\operatorname{adj} A$ и одатле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A$.

Одредимо $\operatorname{adj} A$ и одатле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A$.

При одређивању кофактора имамо

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Кофактори су:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Кофактори су

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Адјунгована матрица је

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Адјунгована матрица је

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица је

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Напомена. Провера: $A \cdot A^{-1} = I$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 2. фебруар 2018. А гр.

Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и A. Одредити матрицу

$$C = 2A^{-1} + B \cdot (A - I)^{\mathrm{T}}.$$

Да ли је матрица C регуларна?

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Одредити $\quad C = 2A^{-1} + B \cdot (A - I)^{\mathrm{T}}$.

Да ли је C регуларна?

Резултати. $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$, $(A-I)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Одредити $\quad C = 2A^{-1} + B \cdot (A - I)^{\mathrm{T}}$.

Да ли је C регуларна?

Резултати. $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$, $(A-I)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$2A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -14 & -4 \end{bmatrix}$, $B \cdot (A-I)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Одредити $\quad C = 2A^{-1} + B \cdot (A - I)^{\mathrm{T}}$.

Да ли је C регуларна?

Резултати. $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$, $(A-I)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$2A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -14 & -4 \end{bmatrix}$, $B \cdot (A-I)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$.

$\det C = 144 \neq 0 \Rightarrow$ C је регуларна. ■

7. Решити матричну једначину

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

7. Решити матричну једначину

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B$$

7. Решити матричну једначину

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \ \underrightarrow{A^{-1}\cdot}$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \; \underrightarrow{A^{-1} \cdot}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \underrightarrow{A^{-1}}\cdot$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \; \underrightarrow{A^{-1}} \cdot$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

У задатку 5 смо добили A^{-1}.

$$X = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 2 & \frac{11}{2} & -5 \end{Vmatrix}.$$

$\blacksquare$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$CX - 2X = 2C$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$CX - 2X = 2C$ $\qquad\qquad$ $X(C-2) = 2C$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тj.

$C\underbrace{X}_{\text{десно}} - 2X = 2C$ $\underbrace{X}_{\text{лево}}(\underbrace{C}_{\text{матр}} - \underbrace{2}_{\text{број}}) = 2C$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$$C\underset{\text{десно}}{X} - 2X = 2C \qquad \cancel{\underset{\text{лево}}{X}(\underset{\text{матр}}{C} - \underset{\text{број}}{2})} = 2C$$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. $\quad CX + X - 3X = 2C$, тј.

$$C\underset{\text{десно}}{X} - 2X = 2C \qquad\qquad \xcancel{\underset{\text{лево}}{X}(\underset{\text{матр}}{C} - \underset{\text{број}}{2})} = 2C \ ↯$$

$$(C - 2I)\underset{\text{десно}}{X} = 2C \Rightarrow X = (C - 2I)^{-1} \cdot 2C.$$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

$CX + X = 2C + 3X,$ за $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$\underset{\text{десно}}{CX} - 2X = 2C$ $\qquad \cancel{\underset{\text{лево}}{X}(\underset{\text{матр}}{C} - \underset{\text{број}}{2})} = 2C$

$\underset{\text{десно}}{(C - 2I)X} = 2C \Rightarrow X = (C - 2I)^{-1} \cdot 2C.$

$M = C - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

$\det M = 2 \neq 0 \Rightarrow$ постоји M^{-1}.

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

$CX + X = 2C + 3X,$ за $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$C\underset{\text{десно}}{X} - 2X = 2C$ $\xcancel{\underset{\text{лево}}{X}(\underset{\text{матр}}{C} - \underset{\text{број}}{2})} = 2C$ $\lightning$

$(C - 2I)\underset{\text{десно}}{X} = 2C \Rightarrow X = (C - 2I)^{-1} \cdot 2C.$

$M = C - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

$\det M = 2 \neq 0 \Rightarrow$ постоји $M^{-1}.$

$\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \operatorname{adj} M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

$CX + X = 2C + 3X,$ за $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$(C - 2I)X = 2C \Rightarrow X = (C - 2I)^{-1} \cdot 2C.$

$M = C - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

$\det M = 2 \neq 0 \Rightarrow$ постоји M^{-1}.

$\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \operatorname{adj} M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$

$X = M^{-1} \cdot 2C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

8. 5. I кол 2017-8. 3. гр.

$CX + X = 2C + 3X$, за $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. $CX + X - 3X = 2C$, тј.

$(C - 2I)X = 2C \Rightarrow X = (C - 2I)^{-1} \cdot 2C$.

$M = C - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$\det M = 2 \neq 0 \Rightarrow$ постоји M^{-1}.

$\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \operatorname{adj} M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

$X = M^{-1} \cdot 2C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -14 & -21 \end{bmatrix}$. ■

9. Решити матричну једначину:

$$XA = X + A, \quad \text{где је} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Решити матричну једначину:

$$XA = X + A, \quad \text{где је} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Резултати. $\quad XA - X = A, \qquad X(A - I) = A,$

$$X = A(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\blacksquare$

10. Ако су A, B, X и $B - I$ регуларне матрице, одредити матрицу X из матричне једначине

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}.$$

Решење 1. $$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

Решење 1. $$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

Решење 1. $$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \; \underset{\longrightarrow}{A^{-1}} \cdot$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \; \underrightarrow{A^{-1}} \cdot$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}} \cdot$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X} \cdot$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}} \cdot$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X} \cdot$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}\cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X\,\cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \qquad / \ \underleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}}\cdot$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X}\cdot$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \qquad / \ \cdot\underleftarrow{B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}\color{violet}{BB^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}\cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X\cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \qquad / \ \underleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \qquad / \ \underleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}\cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X\cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \qquad / \ \underleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \qquad / \ \underleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

$$(B - I)B^{-1}A = X$$

Решење 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \qquad / \ \underrightarrow{A^{-1}\cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \qquad / \ \underrightarrow{X\cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \qquad / \ \underleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \qquad / \ \underleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

$$X = (B - I)B^{-1}A. \qquad \blacksquare$$

Решење 2. Из $X^{-1}(B-I)=A^{-1}B$:

$$X^{-1}=A^{-1}B(B-I)^{-1}$$

Решење 2. Из $X^{-1}(B-I) = A^{-1}B$:

$$X^{-1} = A^{-1}B(B-I)^{-1}$$

и онда је

$$X = (X^{-1})^{-1} = (A^{-1}B(B-I)^{-1})^{-1}$$

Решење 2. Из $X^{-1}(B-I)=A^{-1}B$:

$$X^{-1}=A^{-1}B(B-I)^{-1}$$

и онда је

$$X=(X^{-1})^{-1}=(A^{-1}B(B-I)^{-1})^{-1}$$

па из формуле $(M\cdot N)^{-1}=N^{-1}\cdot M^{-1}$

Решење 2. Из $X^{-1}(B-I)=A^{-1}B$:

$$X^{-1}=A^{-1}B(B-I)^{-1}$$

и онда је

$$X=(X^{-1})^{-1}=(A^{-1}B(B-I)^{-1})^{-1}$$

па из формуле $(M\cdot N)^{-1}=N^{-1}\cdot M^{-1}$

добијамо

$$X=(B-I)B^{-1}A.$$

■

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}.$

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - t^2 & 0 \\ 2 - 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$.

$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-t^2 & 0 \\ 2-2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$2t - t^2 = 1$,

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$.

$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - t^2 & 0 \\ 2-2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$2t - t^2 = 1$, $0 = 0$,

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$.

$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-t^2 & 0 \\ 2-2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$2t - t^2 = 1$, $0 = 0$, $2 - 2t = 0$,

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-t^2 & 0 \\ 2-2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$2t - t^2 = 1$, $0 = 0$, $2 - 2t = 0$, $1 = 1$.

11. За дату матрицу $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, одредити t тако да је:

$$2A - A^2 = I.$$

Решење. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$.

$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-t^2 & 0 \\ 2-2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$2t - t^2 = 1$, $0 = 0$, $2 - 2t = 0$, $1 = 1$.

Решење овог система је $t = 1$. ■

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 = b$,

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 = b$, $ab + 1 = 0$,

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 = b$, $ab + 1 = 0$, $0 = a + 1$,

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 = b$, $ab + 1 = 0$, $0 = a + 1$, $b = 1$.

12. За матрице $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ одредити параметре a и b, тако да важи:

$$AB = BA.$$

Решење. $AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 = b$, $ab+1 = 0$, $0 = a+1$, $b = 1$.

Решење овог система је $a = -1$, $b = 1$. ■

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упутство. $A \cdot X = X \cdot A$

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упутство. $\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times ?}{X} = X \cdot A$

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упутство. $$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times ?}{X} = \underset{?\times 2}{X} \cdot \underset{2\times 2}{A}$$

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упутство. $\underset{2\times 2}{A} \cdot \underbrace{\underset{2\times ?}{X} = \underset{?\times 2}{X}}_{2\times 2} \cdot \underset{2\times 2}{A}$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упутство.

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underbrace{\underset{2\times ?}{X} = \underset{?\times 2}{X}}_{2\times 2} \cdot \underset{2\times 2}{A}$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

■

ЗА ДОМАЋИ!

14. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решење.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{IV} - 4\cdot \mathrm{I} \end{array}$$

Решење.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{IV} - 4 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{IV} - \mathrm{II} \end{array}$$

Решење.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{IV} - 4\cdot\mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mathrm{IV} - \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mathrm{IV} - \mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Решење.

$$A=\begin{bmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&-4&2\\2&-4&3&1&0\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}\\ \\ \mathrm{IV}-4\cdot\mathrm{I}\end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&-4&2\\0&0&1&9&-4\\0&1&-1&3&1\\0&1&0&12&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\0&0&1&9&-4\\0&1&0&12&-3\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II}\end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\0&0&1&9&-4\\0&0&1&9&-4\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \mathrm{IV}-\mathrm{III}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\0&0&1&9&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

па je $r(A)=3$. ■

15. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a.

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a-1)(a+8).$$

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a-1)(a+8).$$

1° За $a \neq 1, -8$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ регуларна $\Rightarrow r(A) = 3$.

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a-1)(a+8).$$

1° За $a \neq 1, -8$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ регуларна $\Rightarrow r(A) = 3$.

2° За $a = 1$ или 3° за $a = -8$

$|A| = 0 \Rightarrow A$ сингуларна $\Rightarrow r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) < 3$.

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a-1)(a+8).$$

1° За $a \neq 1, -8$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ регуларна $\Rightarrow r(A) = 3$.

2° За $a = 1$ или 3° за $a = -8$

$|A| = 0 \Rightarrow A$ сингуларна $\Rightarrow r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) < 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

2° За $a = 1$: у A заменимо свако a са 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

2° За $a = 1$: у A заменимо свако a са 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

2° За $a = 1$: у A заменимо свако a са 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па је $r(A) = 2$.

3° За $a = -8$: у A замениmo свако a са -8:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

3° За $a = -8$: у A заменимо свако a са -8:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

3° За $a=-8$: у A заменимо свако a са -8:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 8\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 8 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 8\\ 3 & 8 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}\end{matrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 10\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -5 & 10\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \mathrm{III}-5\cdot\mathrm{II}\end{matrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

3° За $a=-8$: у A заменимо свако a са -8:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 8\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 8 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 8\\ 3 & 8 & -1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}\end{array}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 10\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -5 & 10\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{III}-5\cdot\mathrm{II}\end{array}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

па је $r(A)=2$.

ЗАКЉУЧАК:

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{за } a \neq 1, -8 \\ 2 & \text{за } a = 1 \text{ или } a = -8. \end{cases}$$

$\blacksquare$

16. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix}$$

у зависности од реалних параметара a и b.

Решење.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \sim$$

Решење.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

Решење.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix}.$$

Решење.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{a-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{b-3} & b-3 \end{pmatrix}.$$

1° Ако је $a \neq 1$ и $b \neq 3$ онда је $r(A) = 3$.

2° За $b = 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2° За $b = 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па je $r(A) = 2$.

3° За $a = 1$ и $b \neq 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{III} \cdot \tfrac{1}{b-3} \qquad \sim$$

3° За $a = 1$ и $b \neq 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} \cdot \frac{1}{b-3} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - \mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3° За $a = 1$ и $b \neq 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix}_{\text{III} \cdot \frac{1}{b-3}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\text{III} - \text{II}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

па је $r(A) = 3$.

ЗАКЉУЧАК:

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{за } b \neq 3 \\ 2 & \text{за } b = 3. \end{cases}$$

$\blacksquare$

КРАЈ ЧАСА