I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 4 + 3i$ и $b = -2 + 2i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Решити једначину: $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 40321 & 40341 & 0 \\ 2016 & 2017 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* Дате су матрице $A_{2\times2}$, $B_{2\times3}$, $C_{3\times2}$ и $D_{3\times3}$. Образложити које од следећих матричних операција су дефинисане. Ако јесу дефинисане навести и ког облика је резултат.

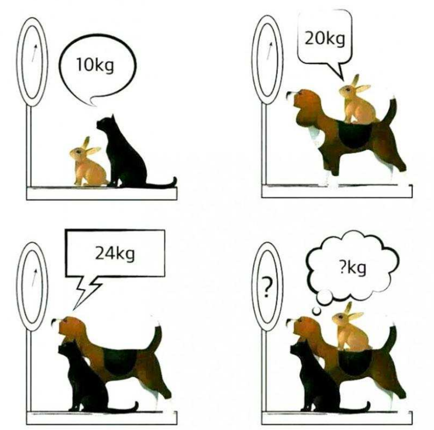
а) $2C + B^{\mathrm{T}}$; **б)** AB; **в)** BA; **г)** $A^3B + C^{\mathrm{T}}D$.

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$AX + X = A - 4X,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

6. *(10 поена)* Ако су зец и мачка тешки $10kg$, зец и пас $20kg$, мачка и пас $24kg$, колико су тешки заједно зец, мачка и пас?



7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & a \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2 - 3}}{(x-2)^3}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента — број индекса — смер

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = -3 + 4i$ и $b = 8 - 8i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Решити једначину: $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$.

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* Дате су матрице $A_{2\times2}$, $B_{2\times3}$, $C_{3\times2}$ и $D_{3\times3}$. Образложити које од следећих матричних операција су дефинисане. Ако јесу дефинисане навести и ког облика је резултат.

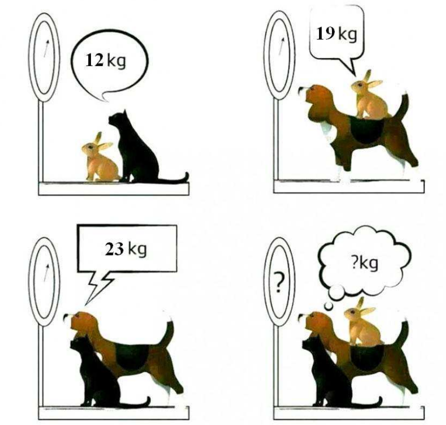
а) BA; **б)** D^{-1}; **в)** $AB + (DC)^{\mathrm{T}}$; **г)** $3A^{\mathrm{T}}B + CD^{\mathrm{T}}$;

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$XB + X = 2B + 4X,$$

при чему је $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

6. *(10 поена)* Ако су зец и мачка тешки $12kg$, зец и пас $19kg$, мачка и пас $23kg$, колико су тешки заједно зец, мачка и пас?



7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 12. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^5}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 5 - 12i$ и $b = -\sqrt{3} - i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Решити једначину: $5^2 \cdot \dfrac{1 - z \cdot i}{2i - z} = -9 + 13i.$

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* Дате су матрице $A_{3\times3}$, $B_{3\times4}$, $C_{4\times3}$ и $D_{4\times4}$. Образложити које од следећих матричних операција су дефинисане. Ако јесу дефинисане навести и ког облика је резултат.

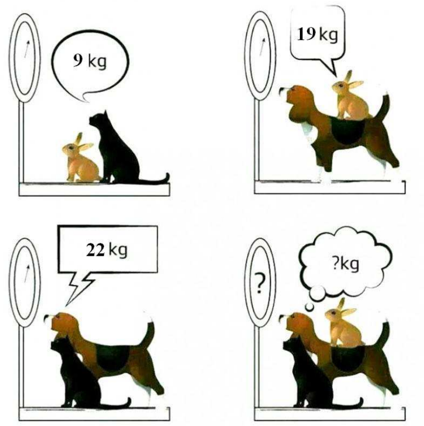
а) $2C + B^{\mathrm{T}}$; **б)** AB; **в)** BA; **г)** $A^3B + C^{\mathrm{T}}D$.

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$CX + X = 2C + 3X,$$

при чему је $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

6. *(10 поена)* Ако су зец и мачка тешки $9kg$, зец и пас $19kg$, мачка и пас $22kg$, колико су тешки заједно зец, мачка и пас?



7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & cy & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 2y & - & cz & = & -4. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

4 I колоквијум из Инжењерске математике 4

26. новембар 2017.

презиме и име студента	број индекса	смер

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 12 + 5i$ и $b = -1 + \sqrt{3}\,i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Решити једначину: $\dfrac{1 + 3i \cdot z}{z + 2i} = 7 + 3i.$

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 60482 & 60452 \\ 2016 & 2015 \end{vmatrix}.$

4. *(10 поена)* Дате су матрице $A_{3\times3}$, $B_{3\times4}$, $C_{4\times3}$ и $D_{4\times4}$. Образложити које од следећих матричних операција су дефинисане. Ако јесу дефинисане навести и ког облика је резултат.

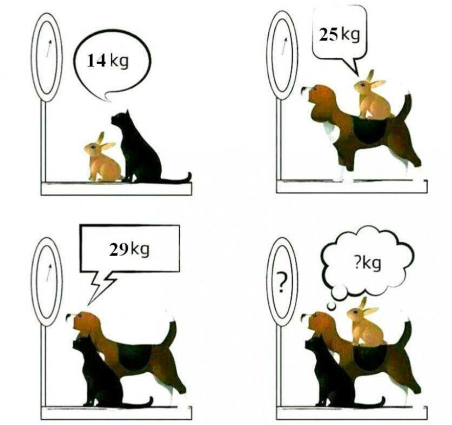
а) BA; **б)** D^{-1}; **в)** $AB + (DC)^{\mathrm{T}}$; **г)** $3A^{\mathrm{T}}B + CD^{\mathrm{T}}$;

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$XD - X = 3D - 5X,$$

при чему је $D = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. *(10 поена)* Ако су зец и мачка тешки $14kg$, зец и пас $25kg$, мачка и пас $29kg$, колико су тешки заједно зец, мачка и пас?



7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -3 \\ 2x & + & dy & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & dz & = & 1. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{e^{2/x}}{x^2 - 4}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 4 + 4i$ и $b = -2 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Одредити реални и имагинарни део од $z = (4 + 4 \cdot i)^{40}$.

3. *(10 поена)* За које вредности x важи неједнакост: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} < -2$?

4. *(10 поена)*

а) Нека су дате матрице $A_{2\times a}$, $B_{5\times b}$, $C_{3\times c}$, $D_{1\times d}$. Одредити бројеве a, b, c, d тако да матрица $B \cdot A \cdot C$ буде истог облика као матрица D^{T}.

б) Нека су дате матрице $A_{4\times a}$, $B_{b\times 2}$, $C_{2\times c}$, $D_{d\times e}$. Одредити бројеве a, b, c, d, e тако да матрица $(A+B)\cdot C$ буде истог облика као матрица D^{-1}.

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$XA = B + 3X,$$

при чему су $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. *(10 поена)* Најкраћа страница троугла, a, је 4 пута мања од обима $O = a + b + c$ тог троугла. Ако би средњу страницу, b, повећали за 50% добили би да је иста као најдужа страница, c. Најдужа страница, c, је за $4cm$ краћа од збира остале две странице у троуглу, $a + b$. Одредити странице тог троугла.

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} w & + & 2x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ w & + & 3x & + & ay & + & 5z & = & 6 \\ w & + & 3x & + & 2y & + & 4z & = & 9 \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{\ln(2x+4)}{(x-3)^6}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 5 + 5\sqrt{3}\,i$ и $b = 1 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Решити једначину: $z^3 = -8i$.

3. *(10 поена)* Одредити алгебарски кофактор A_{21} матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$?

4. *(10 поена)*

а) Нека су дате матрице $A_{2\times a}$, $B_{b\times b}$, $C_{3\times c}$, $D_{d\times 3}$. Одредити бројеве a, b, c, d тако да матрица $2A\cdot B+D\cdot C$ буде истог облика као матрица B^{-1}.

б) Нека су дате матрице $A_{4\times a}$, $B_{b\times 2}$, $C_{2\times c}$, $D_{d\times e}$. Одредити бројеве a, b, c, d, e тако да матрица $A \cdot B \cdot D$ буде истог облика као матрица $C^{\mathrm{T}} - B$.

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$AX = B - 4X,$$

при чему су $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. *(10 поена)* Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 3x & + & by & + & 5z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 9 \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \log \dfrac{6-x}{x-2}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Решити једначину: $z^4 = -4$.

3. *(10 поена)* За које вредности x важи неједнакост: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} \leqslant -2x\,?$

4. *(10 поена)*

а) Нека су дате матрице $A_{2\times a}$, $B_{5\times b}$, $C_{3\times c}$, $D_{1\times d}$. Одредити бројеве a, b, c, d тако да матрица $C^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$ буде истог облика као матрица D.

б) Нека су дате матрице $A_{4\times a}$, $B_{b\times 2}$, $C_{2\times c}$, $D_{d\times e}$. Одредити бројеве a, b, c, d, e тако да матрица $(A \cdot C + B \cdot C)^{-1}$ буде истог облика као матрица D.

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$AX = B^{\mathrm{T}} - X,$$

при чему су $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. *(10 поена)* У једној програмерској фирми ради s Срба, r Румуна и t Турака. Зна се да је газда Турчин, па је он запослио једнак број Турака и осталих радника. Када би у фирми радио још 1 Србин било би их дупло више него Румуна. Срба и Турака има укупно 38. Одредити колико радника сваке националности има у тој фирми.

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 3x & - & 10y & + & 6z & = & 5 \\ -2x & + & 3y & + & 7z & = & c. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-2x}}{x^2 + x - 6}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = -1 + \sqrt{3}\, i$ и $b = 4 + 4i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Одредити реални и имагинарни део од $z = (-1 + \sqrt{3}\, i)^{25}$.

3. *(10 поена)* Одредити алгебарски кофактор A_{32} матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$?

4. *(10 поена)*

а) Нека су дате матрице $A_{2\times a}$, $B_{b\times b}$, $C_{3\times c}$, $D_{d\times 3}$. Одредити бројеве a, b, c, d тако да за матрицу $E = A \cdot (B + D) \cdot C$ постоји матрица E^2.

б) Нека су дате матрице $A_{4\times a}$, $B_{b\times 2}$, $C_{2\times c}$, $D_{d\times e}$. Одредити бројеве a, b, c, d, e тако да матрица $B \cdot C \cdot D$ буде истог облика као матрица $C^{\mathrm{T}} - 3A$.

5. *(15 поена)* Решити матричну једначину

$$XA = B^{\mathrm{T}} + 2X,$$

при чему су $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. *(10 поена)* Сестра каже брату: „Ја сада имам два пута више година него што си ти имао када сам ја имала толико година колико ти имаш сада. А када ти будеш имао толико година колико ја имам сада, заједно ћемо имати 63 године.“ Колико је година сестра старија од брата?

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & d \\ 3x & + & 2y & + & dz & = & 4. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{6 + x - x^2}}{e^x - 1}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

______________________ ______________ ________

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = 6 + 8i$ и $b = -2 + 2i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Наћи реалне бројеве x и y такве да важи једнакост $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$.

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 60542 & 2018 \\ 60512 & 2017 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* За дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ израчунати (ако постоје):

а) $A \cdot B^{\mathrm{T}}$; **б)** $B \cdot A^{\mathrm{T}}$; **в)** $A^{\mathrm{T}} \cdot B$; **г)** $A \cdot B^{\mathrm{T}} + 2I$; **д)** $(A^{\mathrm{T}} \cdot B)^2$.

5. *(15 поена)* Наћи x, y, z и w ако је $3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ -2 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x & z \\ w & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + 2I.$

6. *(10 поена)* Нека је дат хомоген систем
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\alpha y & + & 3z & = & 0 \\ x & - & \alpha y & + & 2z & = & 0 \\ x & & & + & \alpha z & = & 0. \end{array}$$

а) Израчунати детерминанту система Δ.

б) За које вредности параметра α систем има и нетривијалних решења, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$?

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & az & = & 1 \\ 2x & + & ay & + & 8z & = & 3. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{6 + 7x + x^2}}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = \sqrt{3} + i$ и $b = 1 + 3i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Број $13 + i$ може да се представи као производ $1 + 2i$ и ког комплексног броја?

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & -4 & 496 & 1230 \\ 2018 & 3027 & 4040 & 9899 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* За дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ израчунати (ако постоје):

а) $A \cdot B^{\mathrm{T}}$; **б)** $B \cdot A^{\mathrm{T}}$; **в)** $A^{\mathrm{T}} \cdot B$; **г)** $A \cdot B^{\mathrm{T}} + 2I$; **д)** $(A^{\mathrm{T}} \cdot B)^2$.

5. *(15 поена)* Нека је дата матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Ког облика мора бити матрица X да би важила једнакост $A \cdot X = X \cdot A$? (одговор образложити!)

б) Одредити све матрице X које комутирају са матрицом A, тј. за које важи: $A \cdot X = X \cdot A$.

6. *(10 поена)* Нека је дат систем
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & \beta \\ -x & - & 2\beta y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & \beta z & = & 3. \end{array}$$

а) Израчунати детерминанту система Δ.

б) За које вредности параметра β систем има јединствено решење?

7. *(20 поена)* Решити хомоген систем у зависности од параметара $b \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcl} b^2x & + & by & = & 0 \\ bx & + & b^2y & = & 0. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2 - 4x + 4}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = -2 - 2i$ и $b = 3 + 4i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Производ комплексног броја $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{Z}$, и комплексног броја $w = 5 - 6i$ је реалан број x. Наћи све могуће вредности за z.

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 40361 & 2018 \\ 40341 & 2017 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* За дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ израчунати (ако постоје):

а) $A \cdot B^{\mathrm{T}}$; **б)** $B \cdot A^{\mathrm{T}}$; **в)** $A^{\mathrm{T}} \cdot B$; **г)** $A \cdot B^{\mathrm{T}} + 2I$; **д)** $(A^{\mathrm{T}} \cdot B)^2$.

5. *(15 поена)* Наћи x, y, z и w ако је $2\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ -2 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x & 3z \\ w & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} - 2I.$

6. *(10 поена)* Нека је дат систем
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \gamma y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & -3 \\ x & + & y & + & \gamma z & = & 1. \end{array}$$

а) Израчунати детерминанту система Δ.

б) За које вредности параметра γ систем има јединствено решење?

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ cx & + & y & = & 1 \\ x & + & cy & = & 1 \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{e^{2-x}}{\sqrt{6+2x}}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

I колоквијум из Инжењерске математике

26. новембар 2017.

______________________________ ______________ ________

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(15 поена)* Дати су комплексни бројеви $a = -1 - \sqrt{3}\,i$ и $b = 4 - 2i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

2. *(15 поена)* Нека је дат комплексан број $w = -3 + 8i$. Нека је z комплексан број за који важи $\mathcal{R}e\ z = \mathcal{R}e\ w$, као и да је производ z и w реалан број. Одредити z, као и вредност производа $z \cdot w$.

3. *(10 поена)* Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 & 0 \\ 6 & -4 & 4036 & 0 \\ 9 & 1842 & 6059 & 0 \\ 12 & 798 & 10518 & -1 \end{vmatrix}$.

4. *(10 поена)* За дате матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ израчунати (ако постоје):

а) $A \cdot B^{\mathrm{T}}$; **б)** $B \cdot A^{\mathrm{T}}$; **в)** $A^{\mathrm{T}} \cdot B$; **г)** $A \cdot B^{\mathrm{T}} + 2I$; **д)** $(A^{\mathrm{T}} \cdot B)^2$.

5. *(15 поена)* Нека је дата матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Ког облика мора бити матрица X да би важила једнакост $A \cdot X = X \cdot A$? (одговор образложити!)

б) Одредити све матрице X које комутирају са матрицом A, тј. за које важи: $A \cdot X = X \cdot A$.

6. *(10 поена)* Нека је дат хомоген систем
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\delta y & + & z & = & 0 \\ -x & - & \delta y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & \delta z & = & 0. \end{array}$$

а) Израчунати детерминанту система Δ.

б) За које вредности параметра δ систем има само тривијално решење $(x = y = z = 0)$?

7. *(20 поена)* Решити систем у зависности од параметара $d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcl} dx & + & d^2 y & = & 0 \\ d^2 x & + & dy & = & d. \end{array}$$

8. *(20 поена)* Нека је дата функција $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\ln(5 - x)}$.

а) Одредити област дефинисаности D_f ове функције.

б) Одредити нуле и знак функције.

в) Испитати да ли је дата функција парна/непарна.

А # I колоквијум из Математике 1 **А**

26. новембар 2017.

______________________ ______________ ________

презиме и име студента **број индекса** **смер**

1. *(25 поена)* Решити једначину:

$$z^2 + (3 + 2i)z + 5 + i = 0.$$

Одредити за свако од решења реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

2. *(25 поена)* Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1-3x)) - 4\sqrt{1-3x} - 3x + 4}{x^3}.$$

3. *(50 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = -4x\sqrt{1-x^2}$$

Б I колоквијум из Математике 1 Б

26. новембар 2017.

презиме и име студента | број индекса | смер

1. *(25 поена)* Решити једначину:

$$z^2 + (3-2i)z + 5 - 5i = 0.$$

Одредити за свако од решења реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у комплексној равни.

2. *(25 поена)* Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1+2x)) - 4\sqrt{1+2x} + 2x + 4}{x^3}.$$

3. *(50 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}\,.$$

Решења 1. групе

1. $a = 4 + 3i$ и $b = -2 + 2i$.

а) $\mathcal{R}e\ a = 4$, $\mathcal{I}m\ a = 3$, $\bar{a} = 4 - 3i$, $|a| = 5$, $\arg a = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

$\mathcal{R}e\ b = -2$, $\mathcal{I}m\ b = 3$, $\bar{b} = -2 - 2i$, $|b| = 2\sqrt{2}$, $\arg a = \frac{3\pi}{4}$.

б) $a + b = 2 + 5i$, $a - b = 6 + i$, $a \cdot b = -14 + 2i$, $a : b = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4}i$ и $b : a = -\frac{2}{25} + \frac{14}{25}i$,

тј. $\mathcal{R}e\ a + b = 2$, $\mathcal{I}m\ a + b = 5$; $\mathcal{R}e\ a - b = 6$, $\mathcal{I}m\ a - b = 1$; $\mathcal{R}e\ a \cdot b = -14$, $\mathcal{I}m\ a \cdot b = 2$;

$\mathcal{R}e\ a : b = -\frac{1}{4}$, $\mathcal{I}m\ a : b = -\frac{7}{4}$; $\mathcal{R}e\ b : a = -\frac{2}{25}$, $\mathcal{I}m\ b : a = \frac{14}{25}$.

Напомена. Код имагинарног дела комплексног броја се не пише имагинарна јединица i!

2. Дискриминанта квадратне једначине износи $D = b^2 - 4ac = \big(-(3+2i)\big)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5+i) = -15 + 8i$.

Даље треба да извучемо (комплексне) корене из D, тј. да решимо једначину $w^2 = -15 + 8i$. Ако ставимо да је $w = x + iy$ (где су $x, y \in \mathbb{R}$) добијамо $(x^2 - y^2) + 2xyi = -15 + 8i$, одакле имамо систем $x^2 - y^2 = -15$ и $2xy = 8$, који можемо решити пробањем малих вредности за x или y (или из друге изразити y преко x и то уврстити у прву једначину, те решити добијену биквадратну једначину): $x = 1$ и $y = 4$, тј. $w = 1 + 4i$.

Коначно добијамо да су решења: $z_{1,2} = \dfrac{3 + 2i \pm (1 + 4i)}{2}$, тј. $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 1 - i$.

3. Прво ћемо II врсту помножену са (-20) додати I врсти, а затим ћемо од II колоне одузети I. Тиме смо добили детерминанту доње троугаоне матрице:

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 & 0 \\ 2016 & 2017 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} - 20 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2016 & 2017 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{vmatrix}_{\ \mathrm{II-I}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2016 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2018 = 2018.$$

Дату детерминанту смо могли прво развити Лапласовим развојем по III врсти и онда би се свела на рачунање детерминанте 2×2, али и ту због великих бројева би било добро користити особине!

Напомена. Ако би кренули вашим омиљеним Сарусовим правилом, морали би да множите велике бројеве! Стога је овај задатак природно радити помоћу особина детерминанти!

4. $A_{2\times2}$, $B_{2\times3}$, $C_{3\times2}$ и $D_{3\times3}$.

а) Матрице $2C$ и B^{T} су истог облика 2×3, па постоји матрица $2C + B^{\mathrm{T}}$ и она је облика 2×3.

б) Како је $A_{2\times2}$, $B_{2\times3}$ $(2 = 2)$ производ AB постоји и облика је 2×3.

в) Како је $B_{2\times3}$, $A_{2\times2}$ $(3 \neq 2)$ производ BA не постоји.

г) Како је $A_{2\times2}$ квадратна матрица постоји и матрица $A^3 = A \cdot A \cdot A$ и она је исто облика 2×2, $B_{2\times3}$ $(2 = 2)$ те производ A^3B постоји и облика је 2×3.
$C^{\mathrm{T}}_{2\times3}$, $D_{3\times3}$ $(3 = 3)$ те производ $C^{\mathrm{T}}D$ постоји и облика је 2×3.
Матрице A^3B и $C^{\mathrm{T}}D$ су истог облика 2×3, па постоји и збир матрица $A^3B + C^{\mathrm{T}}D$ и она је облика 2×3.

5. Када пребацимо све непознате матрице X на леву страну једнакости добијамо $AX + 5X = A$. Сада можемо на левој страни извући матрицу X (водити рачуна да она множи A са десне стране, па је и извлачимо са десне стране!): $(A + 5I) \cdot X = A$.
Помножимо дату једнакост са $(A + 5I)^{-1}$ са леве стране (то можемо ако је $\det(A + 5I) \neq 0$) и добијамо $(A + 5I)^{-1} \cdot (A + 5I) \cdot X = (A + 5I)^{-1} \cdot A$.
Када искористимо да је производ матрице и њене инверзне матрице јединична матрица I добијамо $I \cdot X = (A + 5I)^{-1} \cdot A$, тј. $X = (A + 5I)^{-1} \cdot A$.

Сада треба израчунати овај производ за матрице дате у задатку.

Означимо са $B = A + 5I = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ и за њу тражимо инверзну:

$\det B = 3 \cdot 8 - (-5) \cdot (-5) = 24 - 25 = -1 \neq 0$ па постоји B^{-1}. $\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \operatorname{adj} B = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Коначно имамо $X = (A+5I)^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 25 \\ 25 & 16 \end{bmatrix}$.

6. Дате слике представљају систем:

$$z + m = 10, \qquad z + p = 20, \qquad m + p = 24$$

(где z означава масу зеца, m мачке и p пса).

Ако саберемо све 3 једначине добијамо $2(z+m+p) = 54$, одакле одмах следи да су све 3 животиње $z + m + p = 27kg$.

Напомена. Задатак смо могли да решавамо и као класични систем (нпр. Гаусовим системом елиминације) и тада би добили $(z, m, p) = (3, 7, 17)$.

7. $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & a \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1. \end{array}$

Детерминанта система је $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a - 3$, па ћемо имати 2 случаја: 1° $a \neq 3$ и 2° $a = 3$.

1° $a \neq 3$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење.
Из детерминанти $\Delta_x = 3a^2 - 3a - 18 = 3(a-3)(a+2)$, $\Delta_y = -2a^2 + 2a + 12 = -2(a-3)(a+2)$ и $\Delta_z = 3 - a$ на основу Крамерових формула добијамо: $(x, y, z) = (3a+6, -2a-4, -1)$.

2° $a = 3$ $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ и онда морамо Гаусовим системом елиминације.

Заменимо свако a у полазном систему да је 3: $\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & 3z & = & 2 & \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 3 & \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array}$

$\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & 3z & = & 2 & \\ & & y & - & 7z & = & -3 & \\ & & y & - & 7z & = & -3 & \mathrm{III} - \mathrm{II} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 7z & = & -3 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 7z & = & -3 \end{array}$

x, y су везане променљиве, а z је слободна променљива: $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Из II добијамо $y = 7t - 3$, па онда из I добијамо $x = 5 - 10t$.

У овом случају добијамо да систем има бесконачно много решења која зависе од 1 параметра:
$(x, y, z) = (5 - 10t, 7t - 3, t)$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2 - 3}}{(x-2)^3}$.

а) Разломак је деф. када је $\underbrace{\sqrt{4x - x^2 - 3}\text{ деф.}}_{4x - x^2 - 3 \geqslant 0}$ и $\underbrace{(x-2)^3\text{ деф.}}_{\text{увек}}$ и $\underbrace{(x-2)^3 \neq 0}_{x - 2 \neq 0}$.

Квадратна неједначина $-x^2 + 4x - 3 \geqslant 0$ има решење $x \in [1, 3]$, што са другим условом $x \neq 2$ даје област дефинисаности $D_f = [1, 2) \cup (2, 3]$.

б) Разломак $f(x) = 0$ када му је бројилац $\sqrt{4x - x^2 - 3} = 0 \Rightarrow 4x - x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.
Како оба решења припадају D_f добијамо да су нуле: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

За знак функције правимо таблицу:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$\sqrt{4x - x^2 - 3}$	x	0	+	+	+	0	x
$(x-2)^3$	x	−	−	x	+	+	x
$f(x)$	x	0	−	x	+	0	x

в) Како D_f није симетричан у односу на $x = 0$, функција $f(x)$ није ни парна ни непарна.

Напомена. Погрешно је радити са $f(-x)$ како су вас навикли у средњој школи! Погледати предавања!

Решења 2. групе

1. $a = -3 + 4i$ и $b = 8 - 8i$.

а) $\mathcal{R}e\ a = -3$, $\mathcal{I}m\ a = 4$, $\overline{a} = -3 - 4i$, $|a| = 5$, $\arg a = \pi + \operatorname{arctg}(-\frac{4}{3}) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

$\mathcal{R}e\ b = 8$, $\mathcal{I}m\ b = -8$, $\overline{b} = 8 + 8i$, $|b| = 8\sqrt{2}$, $\arg a = -\frac{\pi}{4}$.

б) $a + b = 5 - 4i$, $a - b = -11 + 12i$, $a \cdot b = 8 + 56i$, $a : b = -\frac{7}{16} + \frac{1}{16}i$ и $b : a = -\frac{56}{25} - \frac{8}{25}i$,

тј. $\mathcal{R}e\ a + b = 5$, $\mathcal{I}m\ a + b = -4$; $\mathcal{R}e\ a - b = -11$, $\mathcal{I}m\ a - b = 12$; $\mathcal{R}e\ a \cdot b = 8$, $\mathcal{I}m\ a \cdot b = 56$;

$\mathcal{R}e\ a : b = -\frac{7}{16}$, $\mathcal{I}m\ a : b = \frac{1}{16}$; $\mathcal{R}e\ b : a = -\frac{56}{25}$, $\mathcal{I}m\ b : a = -\frac{8}{25}$.

Напомена. Код имагинарног дела комплексног броја се не пише имагинарна јединица i!

2. Дискриминанта квадратне једначине износи $D = b^2 - 4ac = \big(-(3-2i)\big)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - 5i) = -15 + 8i$.

Даље треба да извучемо (комплексне) корене из D, тј. да решимо једначину $w^2 = -15 + 8i$. Ако ставимо да је $w = x + iy$ (где су $x, y \in \mathbb{R}$) добијамо $(x^2 - y^2) + 2xyi = -15 + 8i$, одакле имамо систем $x^2 - y^2 = -15$ и $2xy = 8$, који можемо решити пробањем малих вредности за x или y (или из друге изразити y преко x и то уврстити у прву једначину, те решити добијену биквадратну једначину): $x = 1$ и $y = 4$, тј. $w = 1 + 4i$.

Коначно добијамо да су решења: $z_{1,2} = \dfrac{3 - 2i \pm (1 + 4i)}{2}$, тј. $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 1 - 3i$.

3. Прво ћемо III врсту помножену са (-30) додати II врсти, а затим ћемо од III колоне одузети II. Тиме смо добили детерминанту доње троугаоне матрице:

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix} \ \mathrm{II} - 30 \cdot \mathrm{II} \ = \begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}_{\mathrm{III}-\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2016 & -1 \end{vmatrix} = 1009 \cdot 2 \cdot (-1) = -2018.$$

Дату детерминанту смо могли прво развити Лапласовим развојем по I врсти и онда би се свела на рачунање детерминанте 2×2, али и ту због великих бројева би било добро користити особине!

Напомена. Ако би кренули вашим омиљеним Саррусовим правилом, морали би да множите велике бројеве! Стога је овај задатак природно радити помоћу особина детерминанти!

4. $A_{2\times2}$, $B_{2\times3}$, $C_{3\times2}$ и $D_{3\times3}$.

а) Како је $B_{2\times3}$, $A_{2\times2}$ $(3 \neq 2)$ производ BA не постоји.

б) Како је $D_{3\times3}$ квадратна матрица, она има инверзну матрицу D^{-1} ако је $\det D \neq 0$ (ако је $\det D = 0$ онда не постоји D^{-1}).

в) Како је $A_{2\times2}$, $B_{2\times3}$ $(2 = 2)$ производ AB постоји и облика је 2×3.
$D_{3\times3}$, $C_{3\times2}$ $(3 = 3)$ те производ DC постоји и облика је 3×2, а онда постоји и транспонована матрица $(DC)^{\mathrm{T}}$ и она је облика 2×3.
Матрице AB и $(DC)^{\mathrm{T}}$ су истог облика 2×3, па постоји и збир $AB + (DC)^{\mathrm{T}}$ и он је облика 2×3.

г) Како је $C_{3\times2}$, $D^{\mathrm{T}}_{3\times3}$ $(2 \neq 3)$ производ CD^{T} не постоји, па не постоји ни $3A^{\mathrm{T}}B + CD^{\mathrm{T}}$.

5. Када пребацимо све непознате матрице X на леву страну једнакости добијамо $XB - 3X = 2B$. Сада можемо на левој страни извући матрицу X (водити рачуна да она множи B са леве стране, па је и извлачимо са леве стране!): $X \cdot (B - 3I) = 2B$.
Помножимо дату једнакост са $(B - 3I)^{-1}$ са десне стране (то можемо ако је $\det(B - 3I) \neq 0$) и добијамо $X \cdot (B - 3I) \cdot (B - 3I)^{-1} = 2B \cdot (B - 3I)^{-1}$.
Када искористимо да је производ матрице и њене инверзне матрице јединична матрица I добијамо да је $X \cdot I = 2B \cdot (B - 3I)^{-1}$, тј. $X = 2B \cdot (B - 3I)^{-1}$.

Сада треба израчунати овај производ за матрице дате у задатку.

Означимо са $A = (B - 3I) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ и за њу тражимо инверзну:

$\det A = (-5)\cdot(-3) - 4\cdot 4 = 15 - 16 = -1 \neq 0$ па постоји A^{-1}. $\quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \dfrac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Коначно имамо $X = 2B \cdot (B - 3I)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 24 \\ 24 & 32 \end{bmatrix}$.

6. Дате слике представљају систем:

$$z + m = 12, \qquad z + p = 19, \qquad m + p = 23$$

(где z означава масу зеца, m мачке и p пса).

Ако саберемо све 3 једначине добијамо $2(z + m + p) = 54$, одакле одмах следи да су све 3 животиње $z + m + p = 27kg$.

Напомена. Задатак смо могли да решавамо и као класични систем (нпр. Гаусовим системом елиминације) и тада би добили $(z, m, p) = (4, 8, 15)$.

7. $\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 12. \end{array}$

Детерминанта система је $\Delta = \begin{vmatrix} b & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 - b$, па ћемо имати 2 случаја: $1^\circ\ b \neq 1$ и $2^\circ\ b = 1$.

$1^\circ\ b \neq 1$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење.
Из детерминанти $\Delta_x = 12$, $\Delta_y = 9 - 9b$ и $\Delta_z = 2b - 14$ на основу Крамерових формула добијамо: $(x, y, z) = (\frac{12}{1-b}, 9, \frac{2b-14}{1-b})$.
$2^\circ\ b = 1$ $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 12 \neq 0$ па добијамо да систем нема решења.

8. $f(x) = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^5}$.

а) Разломак је деф. када је $\underbrace{\ln(1 - x^2)\text{ деф.}}_{1-x^2>0}$ и $\underbrace{x^5\text{ деф.}}_{\text{увек}}$ и $\underbrace{x^5 \neq 0}_{x\neq 0}$.

Квадратна неједначина $-x^2 + 0x + 1 > 0$ има решење $x \in (-1, 1)$, што са другим условом $x \neq 0$ даје област дефинисаности $D_f = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

б) Разломак $f(x) = 0$ када му је бројилац $\ln(1-x^2) = 0$, тј. $\ln(1-x^2) = \ln 1 \Rightarrow 1-x^2 = 1$, $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Како ово решење не припада D_f добијамо да функција $f(x)$ нема нуле.
За знак функције правимо таблицу (како важи $0 < 1 - x^2 < 1$ за све $x \in D_f$ то ће бити $\ln(1 - x^2) < 0$):

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$\ln(1 - x^2)$	x	x	$-$	0	$-$	x	x
x^5	x	x	$-$	x	$+$	x	x
$f(x)$	x	x	$+$	x	$-$	x	x

в) Како је D_f симетричан у односу на $x = 0$, из тога не можемо ништа закључити.
Како је $f(-x) = \dfrac{\ln(1 - (-x)^2)}{(-x)^5} = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{-x^5} = -\dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^5} = -f(x)$ добијамо да је $f(x)$ непарна функција.

Резултати осталих група биће постављени наредних дана.