

Ivana Vlajić-Naumovska
Borko Čupić
Milan Ivezić
Đorđe Pavlović

OSNOVI ELEKTROENERGETIKE

- ZBIRKA ZADATAKA -

Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija

Beograd, 2019.

Dr Ivana Vlajić-Naumovska
Borko Čupić
Milan Ivezić
Đorđe Pavlović

OSNOVI ELEKTROENERGETIKE
- zbirka zadataka -

Recenzenti:
Dr Aleksandra Grujić
Dr Željko Despotović

Izdavač:
Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, Beograd

Za izdavača: Dr Vera Petrović

Korice: Vladimir Cerić

Štampa: Razvojno - istraživački centar grafičkog inženjerstva TMF Beograd

Tiraž: 30

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд
621.31(075.8)(076)

OSNOVI elektroenergetike : zbirka zadataka / Ivana Vlajić-Naumovska ...
[et al.]. - Beograd : Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih
studija, 2019 (Beograd : Razvojno-istraživački centar grafičkog
inženjerstva TMF). - 157 str. : ilustr. ; 25 cm
Tiraž 30. - Bibliografija: str. 157.
ISBN 978-86-7982-298-7

1. Влајић-Наумовска, Ивана, 1972- [аутор]

а) Електроенергетика - Задаци
COBISS.SR-ID 274228748

SADRŽAJ

P R E D G O V O R	4
1 IZVORI ENERGIJE	5
2 ELEKTROENERGETSKI SISTEMI	27
3 ELEKTRANE	31
4 PRENOS I DISTRIBUCIJA	53
5 ELEKTRIČNE INSTALACIJE	75
6 ELEKTRIČNI PRETVARAČI	89
7 TRANSFORMATORI	118
8 ASINHRONE MAŠINE	131
9 SINHORNE MAŠINE	145
10 MAŠINE JEDNOSMERNE STRUJE	150
LITERATURA	157

P R E D G O V O R

Ova zbirka zadataka prvenstveno je namenjena studentima Visoke škole elektrotehnike i računarstva (VIŠER) u Beogradu, kao prateći pomoćni udžbenik udžbenika "Osnovi elektroenergetike" autora dr Miloša Milankovića, dr Dragoslava Perića i dr Ivane Vlajić-Naumovske. Zbirka je podeljena u poglavlja koja odgovaraju poglavljima pomenutog udžbenika, čime se studentima olakšava savladavanje gradiva. Zbog raznovrsnosti i aktuelnosti sadržaja mogu je koristiti i studenti koji slušaju druge stručne predmete iz oblasti energetike. Motiv za izradu zbirke je želja autora da učine lakšim savladavanje teorijskih znanja iz predmeta "Osnovi elektroenergetike" kroz praktične primere i stvaranje odgovarajuće "fizičke predstave" što doprinosi shvatanju suštine pojava u energetici. Podsticaj za izradu zbirke autori su dobili pre svega od svojih studenata, koji su, prateći predavanja i vežbe, svojim diskusijama i pitanjima ukazali na potrebu da se određene teme dodatno pojasne i obrazlože. Pri formiranju zbirke korišćena je odgovarajuća stručna literatura. Jedan broj zadataka je bio zastupljen na ispitima predmeta "Osnovi elektroenergetike" na VIŠER-u, što je poslužilo kao osnova za izradu ove zbirke.

Autori će biti zahvalni na sugestijama i argumentovanim primedbama. Autori se zahvaljuju recenzentima dr Aleksandri Grujić i dr Željku Despotoviću na pažljivom čitanju rukopisa i na korisnim sugestijama.

Beograd, februar 2019.

Autori

1 IZVORI ENERGIJE

1.1 Uređaj za merenje brzine vetra postavljen na visini od 10 m pokazuje brzinu vetra od 5 m/s. Izračunati brzinu vetra i specifičnu snagu vetra na visini od 50 m. Pretpostaviti temperaturu od 15°C i pritisak od 1 bar. Mereno strujanje vetra se dešava na ravnom terenu sa niskom travom i malim brojem izolovanih prepreka.

Rešenje:

Pošto je snaga vetra proporcionalna trećem stepenu brzine vetra, sa ekonomske tačke gledišta čak i najmanje povećanje brzine vetra može da bude značajno. Usled trenja vazдушnih masa i površine tla brzina vetra raste sa visinom iznad tla. Visinski profil brzine vetra najviše zavisi od stanja površine tla. Jedan od načina modelovanja uticaja hrapavosti površine na visinski profil brzine vetra je:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right) = \left(\frac{H}{H_0}\right)^\alpha$$

gde je v brzina vetra na visini H , v_0 je brzina vetra na visini H_0 , a α je koeficijent trenja. Koeficijent trenja je funkcija konfiguracije trenja iznad koga duva vetar. U tabeli 1.1 date su tipične vrednosti za koeficijent trenja na nekim grubo definisanim tipovima terena.

Tabela 1.1 Tipične vrednosti za koeficijent trenja

Karakteristike terena	Koeficijent trenja α
glatka tvrda zemlja, mirna voda	0,10
visoka trava na stepenastoj zemlji	0,15
visoko rastinje, ograde i grmovi	0,20
pošumljeni predeli, dosta drveća	0,25
mali grad sa drvećem i grmovima	0,30
veliki grad sa visokim zgradama	0,40

Prethodna karakterizacija uticaja terena na brzinu vetra se primenjuje u SAD-u. U Evropi postoji drugačiji pristup, koji je dat sledećim izrazom:

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{\ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)}$$

gde su:

v_1 - brzina vetra izmerena na visini z_1 iznad zemlje,

v_2 - brzina vetra na visini z_2 ,

z_0 - dužina hrapavosti ("roughness length") u datom pravcu vetra.

Klasifikacija hrapavosti površina i odgovarajuće dužine neravnina date su u tabeli 1.2.

Tabela 1.2 Klasa hrapavosti i dužina hrapavosti za različite terene

Klasa hrapavosti	Površina	Opis terena	z_0 [m]
1	More	Otvoreno more	0,0002
2	Glatka	Ravne peščare, sneg, niska vegetacija	0,005
3	Otvorena	Ravni tereni, travnjaci	0,03
4	Otvorena hrapava	Niski usevi, raštrkane visoke prepreke	0,1
5	Hrapava	Visoki usevi, raštrkane prepreke	0,25
6	Veoma hrapava	Voćnjaci, žbunje, brojne prepreke	0,5
7	Zatvorena uređena	Teren sa visokim preprekama (predgrađa, šume)	1
8	Neuređena	Gradska naselja sa višim i nižim objektima	>2

I eksponencijalna i logaritamska jednačina daju samo prvu aproksimaciju zavisnosti brzine vetra od visine. U praksi najbolji rezultati se dobijaju merenjima na licu mesta. Iz tabele 1.2 za opisanu konfiguraciju terena uzima se da je dužina hrapavosti $z_0=0,03$ m. Na temperaturi od 15°C i pritisku od 1 bar gustina vazduha je $\rho=1,225$ kg/m^3 . Koristeći logaritamsku zavisnost može se proračunati brzina vetra na visini od 50 m:

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{\ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)} = 5 \cdot \frac{\ln\left(\frac{50}{0,03}\right)}{\ln\left(\frac{10}{0,03}\right)} = 5 \cdot \frac{7,419}{5,809} = 5 \cdot 1,277 = 6,39 \text{ m/s}$$

Brzina vetra na visini 50 m u analiziranom slučaju je veća za 27,7% u odnosu na brzinu vetra na visini 10 m.

Srednja snaga vetra:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$$

Gustina snage vetra na visini 10 m je:

$$\frac{P_1}{A} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^3 = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 5^3 = 76,6 \text{ W/m}^2$$

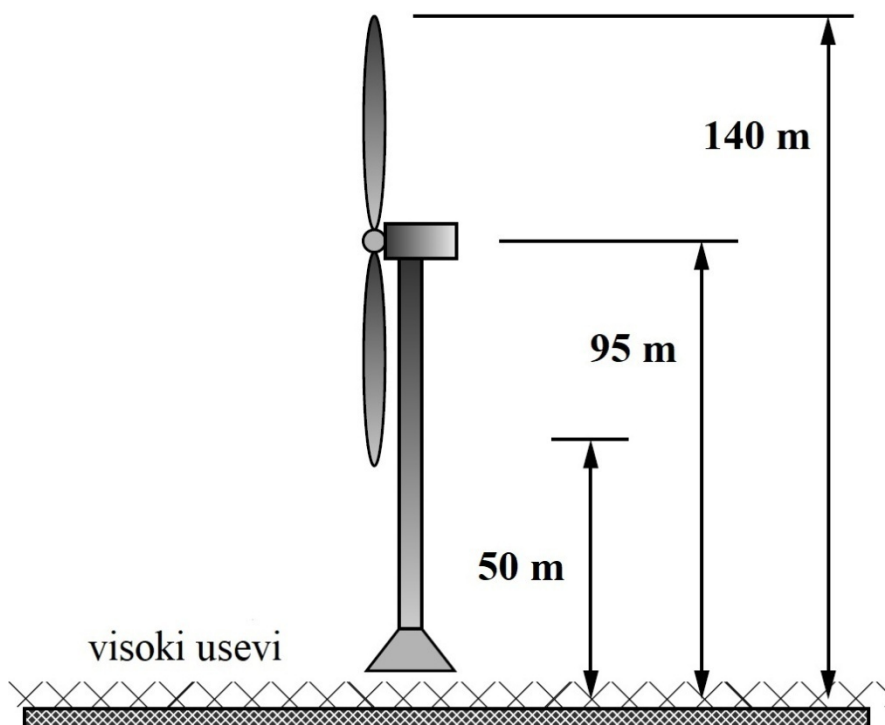
Gustina snaga vetra na visini 50 m je:

$$\frac{P_2}{A} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^3 = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 6,39^3 = 160 \text{ W/m}^2$$

Snaga vetra na visini od 50 m je preko 2 puta veća od snage na 10 m. Ovo je osnovni razlog zbog čega se vetro turbine postavljaju na visoke stubove.

1.2 Vetro turbina Vestas V 90, snage 1,8 MW, montirana je na stub visine 95 metara, na terenu koji karakterišu visoki usevi i raštrkane prepreke. Pri obrtanju elise rotora vetro turbine lopatice dostižu maksimalnu visinu od 140 metara, dok je minimalna visina lopatica pri kretanju elise rotora vetro turbine 50 metara. Na slici 1-1 su prikazane dimenzije elemenata vetroagregata, kao i opis terena u okolini mesta montaže vetroagregata.

Izračunati odnos brzina vetra na referentnoj visini od 50 metara i maksimalnoj visini lopatica pri kretanju elise rotora vetroturbine od 140 metara. Izračunati promenu snage vetra od najviše do najniže visine koju dosegne lopatica pri obrtanju.



Slika 1-1 Dimenzije vetrogeneratora

Rešenje:

Iz tabele 1.2 usvajamo koeficijent hrapavosti $z_0=0,25$ m. U jednačinu za promenu brzine vetra sa visinom usvajamo kao referentnu onu na 50 m.

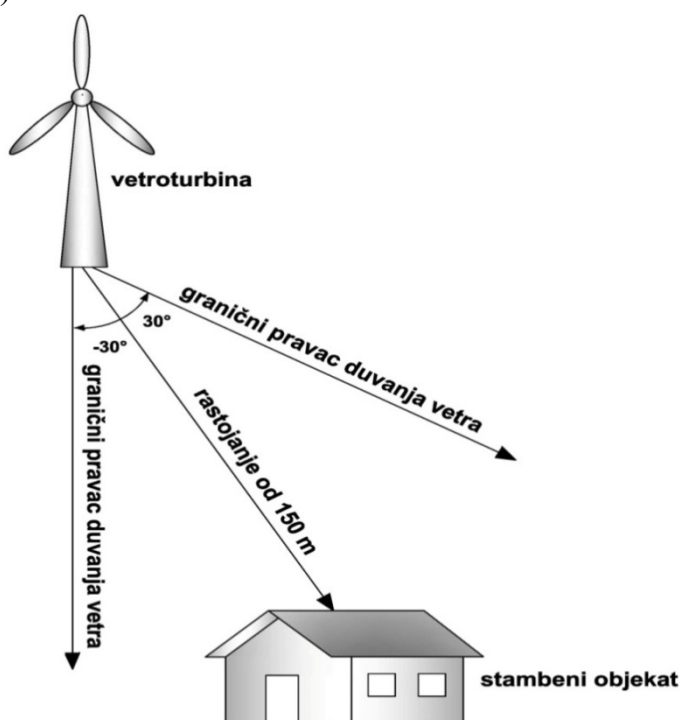
$$v_2 = v_1 \cdot \frac{\ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)} = v_1 \cdot \frac{\ln\left(\frac{140}{0,25}\right)}{\ln\left(\frac{50}{0,25}\right)} = 1,194 \cdot v_1$$

Brzina vetra na visini 140 m je oko 20% veća nego na visini 50 m. Promena snage vetra koju trpi lopatica pri rotaciji vetroturbine je:

$$\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(\frac{1/2 \cdot \rho \cdot A \cdot v_2^3}{1/2 \cdot \rho \cdot A \cdot v_1^3}\right) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = (1,194)^3 = 1,702$$

Snaga vetra na 140 m visine je za oko 70% veća nego na 50 m. Ovaj primer ilustruje važnu činjenicu da brzina vetra i njegova snaga variraju duž visine lopatica vetroagregata. Kod velikih vetroturbina, kod kojih lopatica izlazi na velike visine i samim tim je izložena mnogo većoj snazi vetra nego kada siđe do minimalne visine. Ova pojava dovodi do mehaničkih naprezanja lopatica, što proizvodi buku, ali i postepeno dolazi do zamora materijala lopatice što, naravno, može dovesti do njene havarije. Osim ovog efekta oscilovanje lopatica uzrokuje i stub koji remeti strujanje vetra i uzrokuje izvesno rasterećenje lopatice pri njenom prolasku ispred stuba. Proračun snage i električne energije vetroagregata se računa sa jedinstvenom brzinom koja se ima na visini stuba na koji se postavlja vetroturbina.

1.3 Na slici 1-2 je ilustrovana pozicija vetroturbine i prepreke. Izračunati uticaj prepreke na srednju brzinu vetra na mestu turbine u analiziranom sektoru (30°) ruže vetrova.



Slika 1-2 Pozicija vetroturbine i prepreke

Visina stambenog objekta iznosi 6 m, visina osovine vetroturbine je 12 m, a dužina prepreke iznosi 12 m (širina stambenog objekta).

Rešenje:

U analiziranom sektoru nalazi se kuća koja predstavlja zaklon za vetrove koji pripadaju tom sektoru. Turbina se nalazi u senci zaklona koji smanjuje brzinu vetra na mestu turbine. Zaklon se definiše kao relativno smanjenje brzine vetra prouzrokovano nekom preprekom na datom terenu. U koliko meri će neka prepreka praviti zaklon na određenom mestu zavisi od sledećih faktora:

x - rastojanja od prepreke do vetroturbine,

h - visine prepreke,

H - visine turbine vetroagregata,

L - dužine prepreke,

P - poroznosti prepreke.

Poroznost se za neku prepreku definiše kao odnos otvorene površine i ukupne površine prepreke. Obično se uzima da je poroznost 0 za građevine i 0,5 za drveće. Red sličnih građevina raspoređenih tako da je njihovo međusobno rastojanje jednako trećini dužine pojedine građevine imaće zajedničku poroznost od oko 0,33. Za razne prepreke, podaci o poroznosti se mogu prikazati tabelarno. Poroznost drveća (šuma) menja se sa listanjem, odnosno sa promenom godišnjih doba, pa se kao i dužina hrapavosti mora posmatrati kao parametar koji zavisi od klimatskih uslova.

Tabela 1.3 Poroznost za neke vrste prepreka

Vrsta prepreke	Poroznost P
Zidovi	0
Vrlo gusta (zbijena)	$\leq 0,35$
Gusta (zbijena)	0,35-0,50
Otvorena	$\geq 0,50$

Efekat poroznosti, P ($0 \leq P \leq 1$) se aproksimativno računa množenjem sa faktorom $(1-P)$. Na brzinu vetra takođe utiče i lateralna dužina prepreke (L). Najviše iskustvenih podataka tiču se dvodimenzionalnih ograda ili pojasa

zaklona sa tzv. beskonačnom lateralnom dimenzijom. Uticaj zaklona na brzinu vetra se može definisati sledećom relacijom:

$$v_{cor} = v \cdot [1 - R_2 \cdot R_1 \cdot (1 - P)]$$

gde su v_{cor} - korigovana brzina i v - srednja brzina vetra, u uslovima kada postoji zaklon i bez zaklona, respektivno, a $R_1 = \Delta v / v$ je redukcionni faktor brzine vetra.

Za jednostavne dvodimenzionalne duge prepreke, kao što su dugi redovi drveća, zidovi ili ograde koriste se izrazi iz studije o tunel efektu (Perera, 1981):

$$\frac{\Delta v}{v} = 9,8 \cdot \left(\frac{z_a}{h} \right)^{0,14} \cdot \frac{h}{x} \cdot (1 - P) \cdot \eta \cdot \exp(-0,67 \cdot \eta^{1,5})$$

$$\eta = \frac{z_a}{h} \left(\frac{0,32}{\ln(h/z_0)} \cdot \frac{x}{h} \right)^{-0,47}$$

gde je:

P - poroznost prepreke,

h - visina prepreke,

z_a - visina na kojoj se nalazi anemometar ili osovina vetroturbine,

x - rastojanje od prepreke do mesta merenja.

Redukcionni faktor (R_2) može se približno proceniti redukcijom zaklona pomoću jednostavnih geometrijskih izraza:

$$R_2 = \begin{cases} \left(1 + 0,2 \cdot \frac{x}{L} \right)^{-1} & \text{za } \frac{L}{x} \geq 0,3 \\ 2 \cdot \frac{L}{x} & \text{za } \frac{L}{x} \leq 0,3 \end{cases}$$

Za analizirani slučaj poznati su sledeći podaci:

Tabela 1.4 Udaljenost i dimenzije objekata

Udaljenost od turbine do kuće	$x=150$ m
Visina građevine	$h=6$ m
Visina osovine turbine	$H=12$ m
Dužina prepreke	$L=20$ m

tada je $x/h=25$, a $H/h=2$, što daje $R_1 \approx 16\%$. Kako je dužina kuće 20 m, sledi:

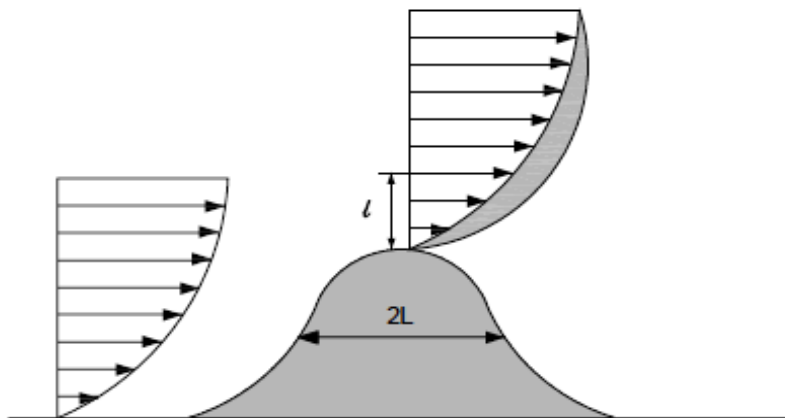
$$R_2 = 2 \cdot \frac{L}{x} = 2 \cdot \frac{20}{150} = 0,27$$

Na kraju, dobija se korigovana vrednost brzine vetra u posmatranom sektoru:

$$v_{kor} = v \cdot (1 - 0,16 \cdot 0,27) = 0,96 \cdot v$$

Za komplikovanije situacije sa više prepreka u jednom sektoru, koriste se komplikovanije računske procedure koje se obično integrišu u odgovarajući softver, kao što je WasP (Wind energy industry standard software). Lokacije za izgradnju vetroturbina u blizini građevina treba izbegavati zbog mogućeg skraćivanja životnog veka zbog stvaranja turbulentnosti vetra oko građevine, kao i zbog smanjene proizvodnje energije.

1.4 Na slici 1-3 je prikazano brdo širine $2L=800$ m i visine $h=150$ m. Brdo je bez prepreka i prekriveno je snegom. Odrediti maksimalno povećanje brzine vetra uzrokovano efektom brda i visinu na kojoj se javlja maksimalno povećanje brzine vetra.



Slika 1-3 Pozicija brda i smer duvanja vetra

Rešenje:

Sa relativnim povećanjem brzine merenim na visini od 10 m u zavisnosti od udaljenosti od vrha brda, relativno povećanje brzine se definiše kao:

$$\Delta S = \frac{v_2 - v_1}{v_1}$$

gde su v_2 i v_1 brzine vetra na istoj visini iznad tla na vrhu brda i u nekoj tački na padini brda, respektivno. Postoje približni izrazi za relativno povećanje brzine vetra i za visinu na kojoj je relativno povećanje brzine vetra maksimalno:

$$\Delta S \approx 2 \cdot \frac{h}{L}$$

$$l \approx 0,3 \cdot z_0 \cdot \left(\frac{L}{z_0} \right)^{0,67}$$

Ovi izrazi često daju dobre rezultate kada je dimenzija brda, normalna na pravac duvanja vetra, mnogo veća od dimenzije L . Tada se problem posmatra kao dvodimenzionalan. Za konkretan primer relativno povećanje brzine vetra na vrhu brda u odnosu na brzinu vetra ispred brda (na kojoj se ne oseća prisustvo brda) je:

$$\Delta S \approx 2 \cdot \frac{h}{L} = 2 \cdot \frac{150}{400} = 0,7$$

Visina na kojoj je povećanje maksimalno:

$$l \approx 0,3 \cdot z_0 \cdot \left(\frac{L}{z_0} \right)^{0,67} = 0,3 \cdot 0,005 \cdot \left(\frac{400}{0,005} \right)^{0,67} \approx 3 \text{ m}$$

Iz prethodno rečenog vidi se da brda vrše veliki uticaj na vazdušni tok i to treba uzeti u obzir što je više moguće, u cilju dobijanja tačnijih rezultata. Treba naglasiti i da svaka druga (pa i mala) promena visine terena ima uticaj na vazdušni tok. Tako, povećanje visine za 5% može imati uticaj do 5% na srednju brzinu vetra, recimo na visini osovine vetroturbine, što se dalje

odražava na povećanje od 15% moguće izlazne snage turbine. Često je teško, a ponekad i nemoguće, u slučaju komplikovanih terena, primeniti jednostavne formule kao što su dve prethodno navedene u cilju određivanja resursa vetra na određenoj lokaciji. Zbog prethodno pomenutih razloga, u većini slučajeva se za proračune koriste numerički modeli.

1.5 Koristeći podatke date u tabeli 1.5 naći srednju godišnju vrednost brzine vetra i srednju godišnju gustinu snage vetra u (W/m^2). Pretpostaviti standardnu gustinu vazduha od $1,225 \text{ kg/m}^3$. Rezultat uporediti sa rezultatom koji bi se dobio kada bi se srednja snaga vetra izračunavala koristeći srednju brzinu vetra.

Tabela 1.5 Trajanje brzine vetra na godišnjem nivou

v(m/s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h/god	24	276	527	729	869	941	946	896	805	690	565	444

v(m/s)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
h/god	335	243	170	114	74	46	28	16	9	5	3	1

Rešenje:

Jednačina za snagu vetra, koja zavisi od brzine vetra, nam pokazuje da ne možemo da dobijemo srednju snagu vetra tako što ćemo u jednačinu umesto brzine primeniti srednju brzinu vetra (zato što snaga zavisi od brzine na treći stepen). Srednja snaga vetra se može definisati na sledeći način:

$$P_{avg} = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \right)_{avg} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot (v^3)_{avg}$$

Drugim rečima moramo da pronađemo srednju vrednost trećeg stepena brzine vetra. Da bi to uradili moramo prvo predočiti neke statističke podatke. Šta se podrazumeva pod srednjom vrednošću neke veličine? Pretpostavimo, na primer, da smo sakupili neke podatke o vetru na određenom mestu i sada hoćemo da nađemo srednju brzinu vetra za vreme tog merenja. Srednja brzina vetra se može posmatrati kao ukupna razdaljina koju je vetar prešao, koji je duvao preko mesta gde je vršeno merenje, podeljena sa vremenom koje mu je bilo potrebno da pređe tu razdaljinu. Pretpostaviti, na primer, da su tokom desetočasovnog perioda, 3 sata bila bez vetra, 3 sata sa vetrom od 5 km/h i 4 sata sa vetrom od 10 km/h. Srednja brzina vetra će biti:

$$v_{avg} = \frac{\text{razdaljina}}{\text{ukupno vreme}}$$

$$v_{avg} = \frac{3\text{ h} \cdot 0\text{ km/h} + 3\text{ h} \cdot 5\text{ km/h} + 4\text{ h} \cdot 10\text{ km/h}}{3\text{ h} + 3\text{ h} + 4\text{ h}}$$

$$v_{avg} = \frac{55\text{ km}}{10\text{ h}} = 5,5\text{ km/h}$$

Sada se može napisati opšta formula za srednju brzinu vetra:

$$v_{avg} = \frac{\sum_i [v_i \cdot (\text{vreme duvanja } v_i)]}{\sum \text{vreme duvanja}}$$

Srednja vrednost trećeg stepena brzine vetra je:

$$(v)_{avg}^3 = \frac{\sum_i [v_i^3 \cdot (\text{vreme duvanja } v_i)]}{\sum \text{vreme duvanja}}$$

gde Σ vreme duvanja, predstavlja ukupno godišnje vreme duvanja vetra, uzevši u obzir vreme trajanja duvanja vetra po svim registrovanim brzinama vetra u toku posmatrane godine, dok vreme duvanja v_i , predstavlja vreme duvanja vetra određene brzine na godišnjem nivou. Kada bi imali anemometar (uređaj za merenje brzine vetra) koji sakuplja podatke sa određenog mesta mogli bi da merimo koliko sati godišnje vetar duva brzinom od 1 m/s (brzine od 0,5÷1,5 m/s), 2 m/s (brzine od 1,5÷2,5 m/s) i tako dalje. Za konkretan primer potrebno je napraviti tabelu da bi odredili srednju vrednost brzine vetra v_{avg} i srednju vrednost trećeg stepena brzine vetra $(v^3)_{avg}$. Uradićemo primer tako što ćemo uzeti jedan red iz tabele, na primer za brzinu od 8 m/s. U toku godine vetar je ukupno 805 h/god duvao sa brzinom od 8 m/s (brzine od 7,5÷8,5 m/s).

$$\text{godišnji udeo sati sa brzinom 8 m/s} = \frac{805\text{ h/god}}{24\text{ h/god} \cdot 365\text{ dan/god}} = 0,0919$$

$$V_{8\text{ m/s}} \cdot (\text{godišnji udeo sati sa brzinom 8 m/s}) = 8\text{ m/s} \cdot 0,0919 = 0,735$$

$$(v_{8\text{m/s}})^3 \cdot (\text{godišnji udeo sati sa brzinom } 8\text{ m/s}) = 8^3 \cdot 0,0919 = 47,05$$

U tabeli 1.6 prikazani su parametri brzine vetra. Registrovane brzine vetra na lokaciji merenja su prikazane u prvoj koloni tabele. Druga kolona tabele sadrži podatak o dužini trajanja duvanja vetra određene brzine u toku godine. Treća kolona predstavlja prikaz vremenskog udela duvanja vetra određene brzine, na godišnjem nivou. Četvrta kolona predstavlja proizvod brzine duvanja vetra i udela vremena duvanja vetra. Poslednja kolona predstavlja proizvod dve prethodne kolone.

Tabela 1.6 Parametri brzine vetra

Brzina vetra v_i [m/s]	Vreme duvanja v_i po godini [h/god]	Udeo sati t_i duvanja vetra v_i po godini	v_i x udeo sati t_i duvanja vetra v_i [m/s]	v_i^3 [m/s] ³	v_i^3 x udeo sati duvanja vetra v_i [m/s] ³
0	24	0,0027	0,000	0	0,00
1	276	0,0315	0,032	1	0,03
2	527	0,0602	0,120	8	0,48
3	729	0,0832	0,250	27	2,25
4	869	0,0992	0,397	64	6,35
5	941	0,1074	0,537	125	13,43
6	946	0,1080	0,648	216	23,33
7	896	0,1023	0,716	343	35,08
8	805	0,0919	0,735	512	47,05
9	690	0,0788	0,709	729	57,42
10	565	0,0645	0,645	1000	64,50
11	444	0,0507	0,558	1331	67,46
12	335	0,0382	0,459	1728	66,08
13	243	0,0277	0,361	2197	60,94
14	170	0,0194	0,272	2744	53,25
15	114	0,0130	0,195	3375	43,92
16	74	0,0084	0,135	4096	34,60
17	46	0,0053	0,089	4913	25,80
18	28	0,0032	0,058	5832	18,64
19	16	0,0018	0,035	6859	12,53

20	9	0,0010	0,021	8000	8,22
21	5	0,0006	0,012	9261	5,29
22	3	0,0003	0,008	10648	3,65
23	1	0,0001	0,003	12167	1,39
24	1	0,0001	0,003	13824	1,58
25	0	0,0000	0,000	15625	0,00
ukupno	8760	1,0000	7,0	8,67	653,24

Srednja vrednost brzine vetra je:

$$v_{avg} = \sum_i [v_i \cdot t_i] = 7,0 \text{ m/s}$$

Srednja vrednost trećeg stepena brzine vetra je:

$$(v^3)_{avg} = \sum_i [v_i^3 \cdot t_i] = 653,24 (\text{m/s})^3$$

Srednja godišnja gustina snage vetra p_{avg} je:

$$p_{avg} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v^3)_{avg} = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 7,0^3 = 210 \text{ W/m}^2$$

Ako izvršimo proračun sa srednjom vrednosti brzina vetra na treći stepen, dobićemo pogrešnu srednju snagu vetra.

$$p_{avg} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_{avg})^3 = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 653,24 = 400 \text{ W/m}^2$$

Iz prethodnog primera se vidi da se srednje snage vetra razlikuju 2 puta, što znači da se čini velika greška ako se pri proračunu snage vetra ne primeni srednja vrednost trećeg stepena brzina vetra.

1.6 Proceniti srednju godišnju snagu vetra na visini od 50 m, ako je srednja brzina vetra na 10 m visine 5 m/s. Pretpostaviti Rayleigh-ovu statistiku, dužinu hrapavosti $z_0=0,1$ m i standardnu gustinu vazduha $\rho=1,225 \text{ kg/m}^3$.

Rešenje:

Nasuprot determinističkom pristupanju pri planiranju termoelektrane, gde možemo željeni opseg snaga i energija dobiti sagorevanjem određene, unapred proračunate, količine goriva ili akumulacionih hidroelektrana gde imamo mogućnost akumulacije primarnog goriva (potencijalne energije vode), vetroelektrane su tipičan primer stohastičkih izvora energije, što znači da se dobar deo analize rada vetroelektrana na određenoj lokaciji oslanja na teoriju verovatnoće. Naime, mi vetar ne možemo planirati. Pravac i brzina vetra na određenoj lokaciji su slučajne promenljive koje zavise od velikog broja geografskih i meteoroloških faktora. Ispitivanje vetra na određenoj lokaciji svodi se na dugotrajna merenja (minimalno 1 godina) pravca i brzine vetra. Na taj način dobijamo iscrpne statističke podatke o pravcu i brzini vetra. Na osnovu prikupljenih podataka pristupa se modelovanju raspodele verovatnoće brzine i pravca duvanja vetra na datoj lokaciji.

Normalizovani diskretni histogram brzina vetra (diskretni histogram čije su vrednosti na ordinatnoj osi podeljene sa ukupnim vremenom za koje se radi statistika, npr. 8760 časova ako je u pitanju analiza na godišnjem horizontu) se često daje u obliku kontinualne funkcije koja se zove funkcija raspodele gustine verovatnoće brzine vetra $f(v)$. Ova funkcija pokazuje verovatnoću učestanosti pojavljivanja određene brzine vetra na analiziranom vremenskom horizontu. Osnovne karakteristike funkcije $f(v)$ su:

- površina ispod cele krive jednaka jedinici,
- površina između dve brzine vetra jednaka verovatnoći da se brzina vetra nađe između te dve brzine.

$$\text{verovatnoća } (0 \leq v \leq \infty) = \int_0^{\infty} f(v) \cdot dv = 1$$

$$\text{verovatnoća } (v_1 \leq v \leq v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot dv$$

Ako hoćemo da procenimo koliko sati godišnje vetar duva između bilo koje dve brzine, jednostavno ćemo pomnožiti prethodnu jednačinu sa 8760 časova:

$$\text{časova/godini} (v_1 \leq v \leq v_2) = 8760 \cdot \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot dv$$

Pomoću $f(v)$ može da se nađe i srednja brzina vetra na sličan način koji je korišćen i u diskretnom pristupu:

$$v_{avg} = \int_0^{\infty} v \cdot f(v) \cdot dv$$

Takođe na sličan način se može naći i srednja vrednost trećeg stepena brzine:

$$(v^3)_{avg} = \int_0^{\infty} v^3 \cdot f(v) \cdot dv$$

Statistike Weibull-a i Rayleigh-a

Za karakterizaciju statistike brzine vetra najčešće se koristi dvoparametarska Weibull-ova funkcija raspodele verovatnoće:

$$f(v) = \frac{k}{c} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^k\right]$$

gde je k faktor oblika, a c je faktor skaliranja. Menjanjem faktora k menja se oblik krive funkcije. Za $k=1$, $f(v)$ funkcija je po obliku nalik na eksponencijalno opadajuću funkciju, to najverovatnije neće biti dobro mesto za vetrogenerator, jer je vetar uglavnom dosta spor. Za $k=2$ vetar duva približno stabilnom brzinom, ali postoje periodi kada vetar duva dosta brže od nekih brzina grupisanih oko maksimuma krive. Za $k=3$ funkcija dobija poznati zvonasti oblik, i mesto koje ima ovakvu funkciju je mesto gde vetar skoro uvek duva i ima približno stalnu brzinu. Pokazalo se da veliki broj lokacija koje su od interesa za gradnju vetroelektrana imaju faktor oblika $k \approx 2$. Za $k=2$ funkcija raspodele gustine verovatnoće brzine vetra dobija posebno ime i naziva se Rayleigh-eva funkcija raspodele verovatnoće brzine vetra:

$$f(v) = \frac{2 \cdot v}{c^2} \cdot \exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

Veći faktor skaliranja pomera karakteristiku ka većim brzinama vetra. Postoji direktna veza između faktora skaliranja c i srednje brzine vetra. Koristeći izraz za Rayleigh-ovu funkciju može se pisati sledeći izraz:

$$v = \int_0^{\infty} v \cdot f(v) \cdot dv = \int_0^{\infty} \frac{2 \cdot v^2}{c^2} \cdot \exp \left[-\left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \cdot dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot c = 0,886 \cdot c$$

odnosno:

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v \cong 1,228 \cdot v$$

Iako je prethodni izraz izveden za Rayleigh-ovu statistiku, prilično je tačan i za opseg faktora oblika k od $1,5 \div 4$. Kombinovanjem prethodnih jednačina, možemo napisati izraz za Rayleigh-ovu funkciju gustine raspodele verovatnoće brzine vetra u funkciji srednje brzine vetra:

$$f(v) = \frac{\pi \cdot v}{2 \cdot v^2} \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]$$

Srednja snaga vetra prema Rayleigh-ovoj statistici

Polazna tačka u ispitivanju karakteristika vetra je da se prikupi najmanja količina podataka sa mernog mesta prema kojima može da se proceni srednja brzina vetra. To se najlakše može uraditi postavljanjem anemometra, na lokaciju merenja brzina vetra. Ovakvi merni uređaji imaju relativno nisku cenu od oko 200 dolara i veoma su laki za upotrebu. Spajanje srednje brzine vetra i pretpostavke da je vetar distribuiran prema Rayleigh-ovoj statistici omogućava nam da odredimo srednju snagu vetra. Sada možemo da pronađemo srednju vrednost trećeg stepena brzine vetra:

$$(v^3)_{avg} = \int_0^{\infty} v^3 \cdot f(v) \cdot dv = \int_0^{\infty} v^3 \cdot \frac{2 \cdot v^2}{c^2} \cdot \exp \left[-\left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \cdot dv = \frac{3}{4} \cdot c^3 \cdot \sqrt{\pi}$$

Možemo dobiti i alternativnu relaciju:

$$(v^3)_{avg} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot v}{\sqrt{\pi}} \right)^3 = \frac{6}{\pi} \cdot v^3 = 1,91 \cdot v^3$$

Prethodna jednačina je veoma interesantna i veoma korisna. Ona nam govori da ako pretpostavimo distribuciju vetra prema Rayleigh-ovoj statistici, tada će srednja vrednost trećeg stepena brzine vetra, biti jednaka srednjoj vrednosti brzine vetra podignutoj na treći stepen i pomnoženoj sa 1,91. Dakle, pretpostavljajući po Rayleigh-ovoj statistici, možemo da prepisemo osnovnu jednačinu za srednju snagu vetra:

$$P = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$$

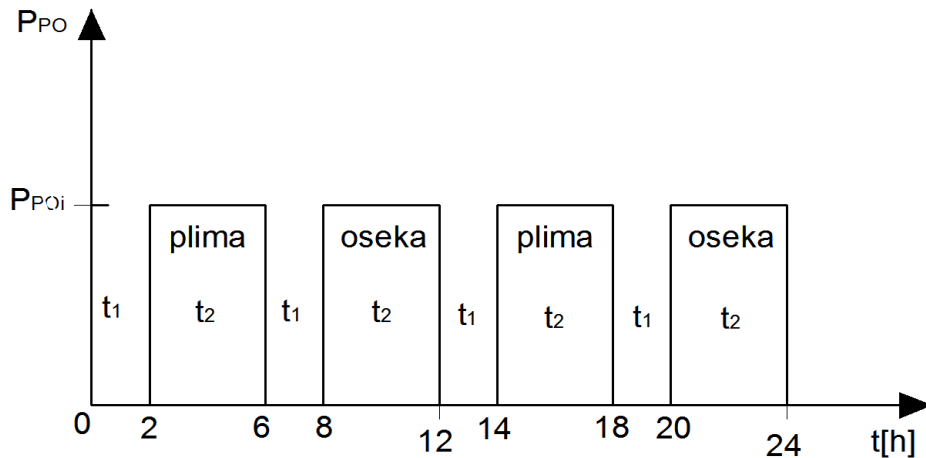
Znači, sa Rayleigh-ovom statistikom, srednja snaga vetra je jednaka snazi koja se ima sa srednjom brzinom vetra pomnoženom sa $6/\pi$. Za konkretan primer prvo koristimo podatke o vetru na visini od 10 m da bi procenili one na 50 m:

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{\ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)} = 5 \cdot \frac{\ln\left(\frac{50}{0,1}\right)}{\ln\left(\frac{10}{0,1}\right)} = 5 \cdot 1,35 = 6,75 \text{ m/s}$$

Sada možemo izračunati srednju gustinu snage vetra uvažavajući Rayleigh-ovu statistiku:

$$P_{50}/A = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^3 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 6,75^3 = 360 \text{ W/m}^2$$

1.7 Elektrana na plimu i oseku ima bazen površine $S=5 \text{ km}^2$ i srednju iskoristivu razliku nivoa vode kod plime i oseke $H=3 \text{ m}$. U toku 24 h plima i oseka nastupaju po 2 puta u jednakim razmacima. Kod svake plime i oseke elektrana radi po 4 časa. Koeficijent korisnog dejstva elektrane na plimu i oseku iznosi 0,8, dok je specifična težina morske vode jednaka 1000 kg/m^3 . Kolika je godišnja proizvodnja energije elektrane i kolika je instalisana snaga?



Slika 1-4 Dijagram dnevnih ciklusa rada elektrane na plimu i oseku

Rešenje:

Maksimalna dnevna potencijalna energija elektrane na plimu i oseku u okviru dva perioda rada sa po jednom plimom i osekom:

$$W_{max} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot H \cdot S$$

Imajući u vidu da ova elektrana na plimu i oseku proizvodi električnu energiju i tokom plime ali i tokom perioda oseke, dnevna energija koju proizvede elektrana na plimu i oseku iznosi:

$$W_{PO} = n \cdot \eta_{po} \cdot (\rho \cdot S \cdot H) \cdot g \cdot H = n \cdot \eta_{po} \cdot F \cdot H$$

$$W_{PO} = 4 \cdot 0,8 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 9,81 \cdot 3$$

$$W_{PO} = 141,3 \cdot 10^{10} \text{ Ws/dan} = 141,3 \cdot 10^{10} \text{ J/dan}$$

U prethodnim izrazima koeficijent 4 predstavlja 4 dnevna ciklusa rada elektrane na plimu i oseku sa po 4 časa rada. Koeficijent za svođenje rezultata proizvedene električne energije elektrane na plimu i oseku u časovima po godini:

$$1s/dan = (1/3600 \text{ h}) / (1/365 \text{ god}) = 0,1014 \text{ h/god}$$

Ukupna proizvedena električna energija elektrane na plimu i oseku na godišnjem nivou (godina od 365 dana), odnosno dnevnom nivou:

$$W_{PO} = 141,3 \cdot 10^{10} \text{ W} \cdot 0,1014 \text{ h/god} = 143,28 \text{ GWh/god}$$

$$W_{PO} = 143,28 \text{ GWh/god} / 365 \text{ dana} = 392,54 \text{ MWh/dan}$$

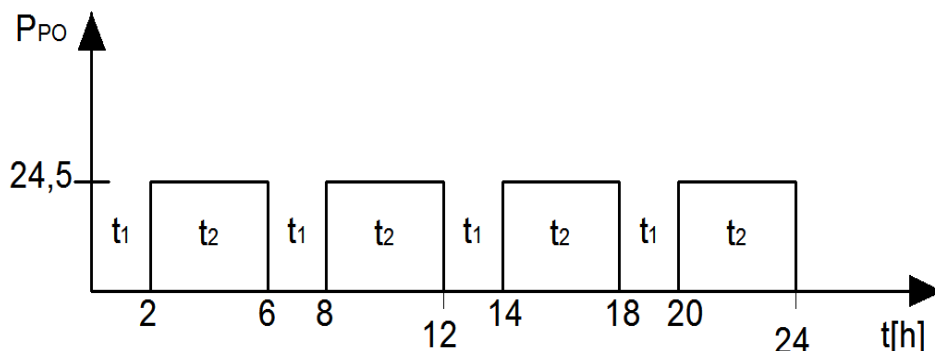
Dnevno vreme rada elektrane na plimu i oseku iznosi:

$$T = 4 \cdot 4 \text{ h} = 16 \text{ h/dan}$$

Instalisana snaga elektrane na plimu i oseku:

$$P_{POi} = W_{PO} / T = 392,4 / 16 = 24,5 \text{ MW}$$

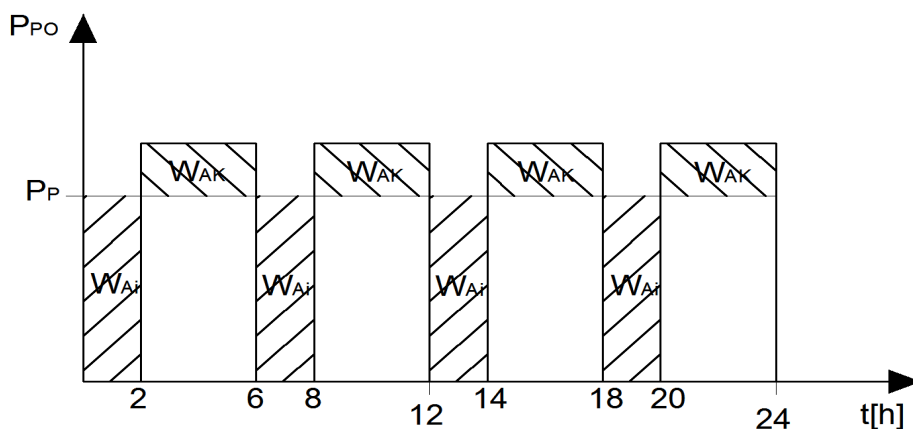
1.8 Elektrana na plimu i oseku, koja radi četiri puta dnevno po 4 časa sa približno konstantnom snagom $P_{po}=24,5 \text{ MW}$, spregnuta je sa pumpno akumulacionom hidroelektranom (PAHE), bez prirodnog dotoka vode. Potrošački konzum treba snabdeti konstantnom snagom. Stepen iskorišćenja električne energije pumpno akumulacione hidroelektrane iznosi 0,7. U okviru perioda t_2 radi elektrana na plimu i oseku, dok u periodima mirovanja nivoa vode u moru t_1 , radi pumpno akumulaciona hidroelektrana. Izračunati godišnju proizvodnju energije za elektrane pojedinačno i za ceo sistem, a za pumpno akumulacionu hidroelektranu odrediti instalisanu snagu.



Slika 1-5 Dijagram dnevnih ciklusa rada elektrane na plimu i oseku

Rešenje:

Imajući u vidu da konzum zahteva napajanje konstantnom snagom elektrana na plimu i oseku (PO) u periodima t_2 treba, u energetsom smislu, da zadovolji konzum i još da deo energije plasira u pumpno akumulacionu hidroelektranu, koja u ovom periodu radi u pumpnom režimu i puni akumulaciju, višak proizvedene električne energije elektrane na plimu i oseku koji se koristi za napajanje pumpi, pumpno akumulacione hidroelektrane se označava sa W_{AK} . Sa W_{Ai} se obeležava električna energija pumpno akumulacione hidroelektrane koja u potpunosti podmiruje dnevne potrebe konzuma P_P . Konzum predstavlja skup potrošača koji se napaja iz istog izvora električne energije na odgovarajućem konzumnom području. Na slici 1-6 je prikazan dijagram dnevnih ciklusa rada elektrane na plimu i oseku. Na slici je prikazan grafički višak proizvedene električne energije elektrane na plimu i oseku koji se označava sa W_{AK} , i električna energija pumpno akumulacione hidroelektrane, obeležena sa W_{Ai} .



Slika 1-6 Dijagram dnevnih ciklusa rada elektrane na plimu i oseku

Električna energija koju proizvodi pumpno akumulaciona hidroelektrana:

$$W_{Ai} = \eta_{PAHE} \cdot W_{AK}$$

Električna energija koju proizvodi hidroelektrana na plimu i oseku, koja preostane nakon potrošnje konzuma i koja se preda pumpno akumulacionoj hidroelektrani:

$$W_{AK} = (P_{PO} - P_P) \cdot t_2$$

Električna energija koju proizvodi pumpno akumulaciona hidroelektrana, može da se izračuna i u funkciji vremena rada pumpno akumulacione hidroelektrane i opterećenja konzuma:

$$W_{Ai} = P_p \cdot t_1$$

Imajući u vidu da je električna energija koju proizvodi pumpno akumulaciona hidroelektrana iskazana prvim i trećim prethodno navedenim izrazom jednaka:

$$P_p \cdot t_1 = \eta_{PAHE} \cdot (P_{PO} - P_p) \cdot t_2$$

Transformacijom izraza dobijamo jednakost:

$$P_p \cdot t_1 + \eta_{PAHE} \cdot P_p \cdot t_2 = \eta_{PAHE} \cdot P_{PO} \cdot t_2$$

$$P_p = (\eta_{PAHE} \cdot P_{PO} \cdot t_2) / (t_1 + \eta_{PAHE} \cdot t_2)$$

Potrošački konzum zahteva konstantno u toku dana instalisanu snagu izvora električne energije:

$$P_p = 14,30 \text{ MW}$$

Instalisana snaga pumpno akumulacione hidroelektrane predstavlja instalisanu aktivnu snagu pumpno akumulacione hidroelektrane tokom perioda pražnjenja akumulacije koja odgovara potrebama konzuma:

$$P_{PAHEi} = W_{Ai} / t_{\text{pražnjenja}}$$

$$P_{PAHEi} = (P_p \cdot t_1) / t_1$$

$$P_{PAHEi} = 14,3 \text{ MW}$$

Godišnja proizvodnja električne energije elektrane na plimu i oseku je:

$$W_{POgod} = 365 \text{ dan/god} \cdot 16 \text{ h/dan} \cdot 24,5 \text{ MW} = 143 \text{ GWh/god}$$

Godišnja proizvodnja električne energije pumpno akumulacione hidroelektrane je:

$$W_{PAHEgod} = 365 \text{ dan/god} \cdot 8 \text{ h/dan} \cdot 14,3 \text{ MW} = 41,8 \text{ GWh/god}$$

Godišnja proizvodnja električne energije sistema elektrana (elektrana na plimu i oseku i pumpno-akumulaciona hidroelektrana) predata potrošačkom konzumu za godinu dana:

$$W_{SISgod} = 365 \text{ dan/god} \cdot 24 \text{ h/dan} \cdot 14,3 \text{ MW} = 125,3 \text{ GWh/god}$$

2 ELEKTROENERGETSKI SISTEMI

2.1 Za kosi raspon $a=270$ m, čije su tačke vešanja užeta sa visinskom razlikom $h=80$ m, od Al/Če užeta nazivnog preseka 240/40 mm², izračunati dužinu lančanice (parabole) za dodatni teret $g=0,18\sqrt{d}$ i naprezanje $\sigma_0=\sigma_{nd}$. Normalno dodatno naprezanje iznosi $\sigma_{nd}=13$ daN/mm², specifična težina lančanice na rasponu $\gamma=3,5\cdot 10^3$ kg/mm²m, prečnik užeta iznosi $d=21,9$ mm, stvarni presek užeta je $S=282,5$ mm². Koeficijent leda iznosi $k_L=1.6$.

Rešenje:

Parametar c iznosi:

$$c^2 = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{270^2 + 80^2} = 281,6 \text{ m}$$

Dodatno opterećenje usled leda:

$$\gamma_d = \frac{k_L \cdot 0,18\sqrt{d}}{S} = \frac{1,6 \cdot 0,18\sqrt{21,9}}{282,5} = 4,77 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mm}^2\text{m}$$

Rezultantno opterećenje je:

$$\gamma_r = \gamma + \gamma_d = (3,5 + 4,77) \cdot 10^{-3} = 8,27 \text{ daN/mm}^2\text{m}$$

Dužina lančanice (parabole) je:

$$L = \sqrt{c^2 + \frac{a^4}{12\left(\frac{\sigma_0}{\gamma_r}\right)}} = \sqrt{281,6^2 + \frac{270^4}{12\left(\frac{13}{8,27 \cdot 10^{-3}}\right)^2}} = 281,9 \text{ m}$$

2.2 Za provodnik dalekovoda Al/Če nazivnog poprečnog preseka 240/40 mm², prečnika $d=21,9$ mm i težine $G=0,987$ daN/m, pokazalo se da su vetrovi vrlo jaki, ali nema opasnosti od pojave leda. Izračunati izuzetno dodatno opterećenje.

Rešenje:

Za proračun voda se usvaja pritisak vetra od $p=130 \text{ daN/m}^2$ i normalni dodatni teret $g_1=0,18\sqrt{d}$. Normalno dodatno opterećenje iznosi:

$$g_1 = 0,18\sqrt{21,9} = 0,842 \text{ daN/m}$$

Sila od pritiska vetra:

$$g_v = p \cdot d = 130 \cdot 0,219 = 2,847 \text{ daN/m}$$

Ukupna vertikalna sila od dvostrukog normalnog dodatnog opterećenja:

$$g_u = G + 2g_1 = 0,987 + 2 \cdot 0,842 = 2,671 \text{ daN/m}$$

Rezultanta od sopstvene težine (deluje vertikalno) i pritiska vetra (deluje horizontalno):

$$g_r = \sqrt{G^2 + g_v^2} = \sqrt{0,987^2 + 2,847^2} = 3,015 \text{ daN/m}$$

Obzirom da je $g_r > g_u$, kao izuzetno dodatno opterećenje uzima se g_r , odnosno rezultanta sopstvene težine i pritiska vetra.

2.3 Za provodnik dalekovoda nazivnog napona 10 kV, Al/Če nazivnog preseka $240/40 \text{ mm}^2$, prečnika $d=0,219 \text{ mm}$ i težine bez leda $G=0,987 \text{ daN/m}$, pri pritisku vetra $p=90 \text{ daN/m}^2$, izračunati ugao otklona provodnika α i faktor k .

Rešenje:

Ugao otklona provodnika α , odnosno zaštitnog užeta izračunava se prema sledećem obrascu:

$$\alpha = \arctg(d \cdot p / G) = \arctg\left(\frac{0,219 \cdot 90}{0,987}\right) = 63,03^\circ$$

gde je:

d - prečnik provodnika, odnosno zaštitnog užeta [m],

p - pritisak vetra [daN/m^2],

G - težina provodnika, odnosno zaštitnog užeta, bez leda [daN].

Razmak između provodnika, odnosno provodnika i zaštitne užadi u sredini raspona jeste razmak koji obezbeđuje da prilikom udara vetra ili otklona provodnika, odnosno užeta ne dođe do približavanja provodnika, odnosno užadi na udaljenosti manjoj od sigurnosnog razmaka. Koeficijent k , čija vrednost zavisi od rasporeda posmatranih provodnika, određuje se prema podacima datim u tabeli 2.1.

Tabela 2.1 Izbor faktora k

Raspored provodnika u sredini raspona za srednji i visoki napon (granične vrednosti)	Formula za $k \geq k_{min}$	Dodatni uslovi za vodove do/iznad 20 kV
Horizontalni raspored ($k_{min}=6$; $D_{min}=60$ cm)	$k = 4 + \frac{\alpha}{25}$	Formula važi i za vodove do 20 kV kada provodnici nisu horizontalni.
Kosi raspored ($k_{min}=7$; $D_{min}=70$ cm)	$k = 2 + \frac{\alpha}{10}$	Formula važi i za vodove iznad 20 kV samo ako je i horizontalna udaljenost između provodnika i zaštitnog užeta najmanje jednaka sigurnosnom razmaku.
Horizontalni raspored ($k_{min}=14$; $D_{min}=140$ cm)	$k = 4 + \frac{\alpha}{5}$	Granični uslov $D_{min}=140$ cm važi samo za vodove iznad 20 kV.
Ovde je: α - ugao otklona provodnika, odnosno zaštitnog užeta od punog pritiska vetra (p) na užu, bez leda, izražen u stepenima ($^{\circ}$)		

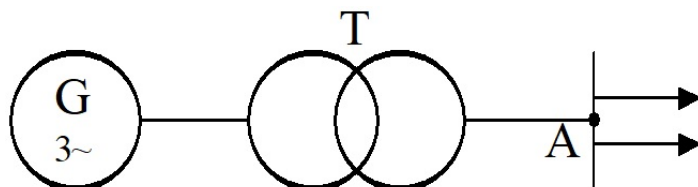
Na osnovu tabele 2.1, koeficijent k se računa primenom izraza:

$$k = 4 + \frac{\alpha}{25} = 4 + \frac{63,3}{25} = 6,5$$

2.4 Odrediti merodavnu struju trofaznog kratkog spoja na mestu A mreže prikazane slikom 2-1. Referentni napon je 35 kV. Zanemariti omski otpor.

Podaci za generator: 20 MVA, 10 kV, sprega Y, $u_k = 11\%$.

Podaci za transformator: 20 MVA, 10 / 35 kV, $u_k = 7\%$.



Slika 2-1 Jednopolna šema dela električne mreže sa kratkim spojem na sabirnicama

Rešenje:

Reaktansa generatora:

$$X_G = u_k \cdot \left(\frac{U_{ref}}{U_n} \right)^2 \cdot \frac{U_n^2}{S_n} = 0,11 \cdot \left(\frac{35}{10} \right)^2 \cdot \frac{(10 \cdot 10^3)^2}{20 \cdot 10^6} = 6,74 \Omega$$

Reaktansa transformatora:

$$X_T = u_k \cdot \left(\frac{U_{ref}}{U_n} \right)^2 \cdot \frac{U_n^2}{S_n} = 0,07 \cdot \left(\frac{35}{35} \right)^2 \cdot \frac{(35 \cdot 10^3)^2}{20 \cdot 10^6} = 4,29 \Omega$$

Struja kratkog spoja na mestu A:

$$I_{KS} = \frac{U_{ref}}{\sqrt{3} \cdot (X_G + X_T)} = \frac{35 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot (6,74 + 4,29)} = 1832 \text{ A}$$

3 ELEKTRANE

3.1 Termoelektrana, čiji je ukupni stepen iskorišćenja 0,25, dnevno troši 36000 tona uglja kalorične vrednosti 8 MJ/kg. Koliko GWh proizvede ova elektrana za godinu dana, ako radi 6000 časova godišnje?

Rešenje:

Ukupna godišnja potrošnja uglja termoelektrane:

$$m = \frac{36000 \cdot 10^3 \text{ kg}}{24 \text{ h}} \cdot 6000 \text{ h} = 9 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Bruto energija uglja:

$$Q = m \cdot q = 9 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot 8 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} = 72,0 \cdot 10^9 \text{ MJ}$$

odnosno izraženo u MWh:

$$Q = 72,0 \cdot 10^9 \text{ MWs} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20,00 \cdot 10^6 \text{ MWh}$$

Proizvedena energija ove termoelektrane za godinu dana je:

$$W = \eta_{TE} \cdot Q = 0,25 \cdot 20,00 \cdot 10^6 \text{ MWh} = 5000 \text{ GWh}$$

3.2 Kapacitet rudnika uglja na kojem se planira izgradnja jedne termoelektrane je 2000 tona uglja dnevno, kalorične vrednosti 8400 kJ/kg. Treba odrediti:

- a) moguću godišnju proizvodnju električne energije izražene u MWh uzevši da je ukupni stepen iskorišćenja termoelektrane 26%,
- b) instalisanu snagu generatora izraženu u MVA uz faktor snage 0,8 ako je vreme trajanja pogona 5000 časova godišnje.

Rešenje:

a) Ukupna godišnja proizvodnja uglja:

$$m = 2000 \frac{\text{t}}{\text{dan}} \cdot 365 \text{ dan} = 730 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

Ukupna godišnja bruto energija uglja:

$$Q = m \cdot q = 730 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 8,4 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} = 6,132 \cdot 10^9 \text{ MJ}$$

Odnosno, izraženo u MWh:

$$Q = 6,132 \cdot 10^9 \text{ MWs} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 1,70 \cdot 10^6 \text{ MWh}$$

Moguća proizvodnja električne energije ove termoelektrane je:

$$W_{\text{mog}} = \eta_{TE} \cdot Q = 0,26 \cdot 1,70 \cdot 10^6 \text{ MWh} = 442 \text{ GWh}$$

b) Instalisanu snagu generatora određujemo iz godišnje moguće proizvodnje električne energije i vremena trajanja pogona, dok instalisanu prividnu snagu u funkciji instalisane aktivne snage generatora i faktora snage:

$$P_i = \frac{W_{\text{mog}}}{t_{\text{rada}}} = \frac{442 \text{ GWh}}{5000 \text{ h}} = 88,4 \text{ MW}$$

$$S_i = \frac{P_i}{\cos \varphi} = \frac{88,4 \text{ MW}}{0,8} = 110,5 \text{ MVA}$$

3.3 Termoelektrana ima generatore od po 30 MVA, faktor snage je 0,8, a stepen iskorišćenja 0,96. Stepen iskorišćenja kotla iznosi 0,8, turbine 0,25, a gubici u cevovodu su 2%. Potrebno je odrediti:

a) koliku snagu, izraženu u megavatima mora da ima pogonska turbina,

b) koliko će uglja kalorične vrednosti 14,6 MJ/kg potrošiti elektrana za 24 časa ako jedan generator radi normalno opterećen tokom celog dana?

Rešenje:

a) Snaga pogonske turbine iznosi:

$$P_T = \frac{P_G}{\eta_G} = \frac{S_G \cdot \cos \varphi}{\eta_G} = \frac{30 \text{ MVA} \cdot 0,8}{0,96} = 25 \text{ MW}$$

b) Za 24 časa generator proizvede električne energije:

$$W_E = 24 \text{ h} \cdot P_G = 24 \text{ h} \cdot S_G \cdot \cos \varphi = 24 \text{ h} \cdot 30 \text{ MVA} \cdot 0,8 = 576 \text{ MWh}$$

Za proizvodnju ove količine električne energije treba da se potroši toplotne energije:

$$Q = \frac{W_E}{\eta_G \cdot \eta_T \cdot \eta_C \cdot \eta_K} = \frac{576 \text{ MWh}}{0,96 \cdot 0,25 \cdot 0,98 \cdot 0,8} = 3061,2 \text{ MWh}$$

odnosno uglja na dan:

$$m = \frac{Q}{q} = \frac{3061,2 \text{ MWh}}{14,6 \frac{\text{MWs}}{\text{kg}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}} = \frac{3061,2 \cdot 3600}{14,6} \text{ kg} = 754816 \text{ kg} = 754,8 \text{ t}$$

3.4 Nuklearna elektrana ima snagu $P=700 \text{ MW}$ i stvarni toplotni stepen iskorišćenja $\eta_s=0,34$. Koliki će biti porast temperature reke kojom se hladi ova elektrana, ako je protok reke $q=210 \text{ m}^3/\text{s}$. Uzeti da toplotni kapacitet vode iznosi $c=4186,8 \text{ J/kg K}$.

Rešenje:

Dovedena (uložena) bruto snaga elektrane je:

$$P_d = \frac{P}{\eta_s} = \frac{700 \text{ MW}}{0,34} = 2059 \text{ MW}$$

Odvedena snaga u reku je:

$$P_{od} = P_d - P = 2059 - 700 = 1359 \text{ MW}$$

Odvedena energija u reku je:

$$Q_{od} = P_{od} \cdot \Delta t = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Porast temperature reke je:

$$\Delta T = \frac{P_{od} \cdot \Delta t}{m \cdot c} = \frac{P_{od}}{\gamma \cdot V / \Delta t \cdot c} = \frac{P_{od}}{\gamma \cdot q \cdot c} = \frac{1359 \cdot 10^6}{1000 \cdot 210 \cdot 4186,8} = 1,55 \text{ K}$$

3.5 Reka izvire na 500 m nadmorske visine sa srednjim protokom 20 m³/s i uliva se u more sa srednjim protokom 60 m³/s. Kolika je bruto godišnja energija tog vodotoka (izražena u GWh)? Uzeti da se protok menja linearno sa nadmorskom visinom.

Rešenje:

Bruto snaga vodotoka je:

$$P = \frac{E_{pot}}{t} = \frac{m \cdot g \cdot H}{t} = \frac{\gamma \cdot V \cdot g \cdot H}{t} = \gamma \cdot g \cdot \frac{V}{t} \cdot H = g \cdot \gamma \cdot Q \cdot H$$

$$P = g \cdot \gamma \cdot \int_{H_u}^{H_i} Q(H) \cdot dH = 9,80665 \cdot 10^3 \cdot \int_{H_u}^{H_i} Q(H) \cdot dH$$

gde je Q protok, a H pad vode.

Neto električna snaga vodotoka:

$$P_E = \eta_{HE} \cdot g \cdot \gamma \cdot Q \cdot H$$

gde je η_{HE} ukupan stepen iskorišćenja hidroelektrane.

Uz linearnu promenu toka sa visinom, bruto snagu možemo jednostavno da izračunamo iz površine odgovarajućeg trapeza:

$$P = g \cdot \gamma \cdot \frac{(Q_i + Q_u)}{2} \cdot H = 9,80665 \cdot 10^3 \cdot \frac{(20 + 60)}{2} \cdot 500 = 196,133 \text{ MW}$$

Godišnja bruto energija je:

$$W = P \cdot t = P \cdot 8760 \text{ h} = 196,133 \text{ MW} \cdot 8760 \text{ h} = 1718,125 \text{ GWh}$$

3.6 U termoelektrani se nalaze generatori snage 50 MVA, $\cos\varphi=0,8$. Stepen iskorišćenja celog postrojenja (kotao, turbina i generator) je 27%. Odrediti:

a) koliko je uglja kalorične vrednosti 13 MJ/kg potrebno po jednom agregatu na sat,

b) koliko m^3/s vode bi potrošila hidroelektrana sa padom od 120 m, stepena iskorišćenja 0,7 za proizvodnju iste količine električne energije.

Rešenje:

a) Utrošak uglja po jednom agregatu na sat:

$$W_E = P_G \cdot t = \eta_{TE} \cdot Q \Rightarrow S_G \cdot \cos\phi \cdot t = \eta_{TE} \cdot m \cdot q$$

$$\frac{m}{t} = \frac{S_G \cdot \cos\phi}{\eta_{TE} \cdot q} = \frac{50 \cdot 10^6 \text{ VA} \cdot 0,8}{0,27 \cdot 13 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{Ws}}{\text{kg}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}} = 41,0 \text{ t/h}$$

b) Utrošak vode u hidroelektrani bi iznosio:

$$P = g \cdot \gamma \cdot Q \cdot H = \frac{P_G}{\eta_{HE}} = \frac{S_G \cdot \cos\phi}{\eta_{HE}}$$

$$Q = \frac{S_G \cdot \cos\phi}{g \cdot \gamma \cdot H \cdot \eta_{HE}} = \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{9,80665 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 0,7} = 48,55 \text{ m}^3/\text{s}$$

3.7 U hidroelektrani sa padom vode od 400 m turbina pokreće generator snage 220 MW. Ukupni stepen iskorišćenja turbine i generatora je 0,86. Odrediti potreban priliv vode u akumulaciju, tako da nivo vode u njoj ne opada.

Rešenje:

Snaga turbine iznosi:

$$P_T = \frac{P_G}{\eta} = \frac{220 \cdot 10^6}{0,86} = 255,8 \text{ MW}$$

Električna snaga se računa primenom izraza:

$$P = g \cdot \gamma \cdot Q \cdot H$$

Protok vode u hidroelektrani iznosi:

$$Q = \frac{P}{g \cdot \gamma \cdot H} = \frac{255,8 \cdot 10^6}{9,81 \cdot 10^3 \cdot 400} = 65,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

3.8 U hidroelektrani sa padom vode 40 m i srednjim protokom 30 m³/s ukupan stepen iskorišćenja hidroelektrane je 0,80 a stepen iskorišćenja generatora je 0,95. Odrediti snagu turbine.

Rešenje:

Snaga turbine je:

$$P_T = g \cdot \gamma \cdot H \cdot Q \cdot \eta_T$$

Stepen iskorišćenja turbine se određuje iz ukupnog stepena iskorišćenja hidroelektrane i stepena iskorišćenja generatora:

$$\eta_T = \frac{\eta_{HE}}{\eta_G} = \frac{0,80}{0,95} = 0,842$$

Snaga turbine iznosi:

$$P_T = 9,81 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0,842 = 9912 \text{ kW}$$

3.9 U hidroelektrani sa padom vode od 25 m turbina sa stepenom iskorišćenja 0,85 pokreće generator sa stepenom iskorišćenja 0,92, koji daje u mrežu snagu 700 kW. Treba odrediti za koliko bi pao nivo vode u akumulaciji površine 0,4 km², ako bi priliv vode izostao jedan sat. Pretpostavite da se sa promenom nivoa vode ne menja snaga agregata i da su obale akumulacije vertikalne.

Rešenje:

Snaga turbine iznosi:

$$P_T = \frac{P_g}{\eta_T \cdot \eta_G} = \frac{700 \cdot 10^3}{0,85 \cdot 0,92} = 895,14 \text{ kW}$$

Iz izraza za potencijalnu energiju vode, dobijamo izraz za promenu nivoa vode u akumulaciji:

$$W = P_T \cdot t = m \cdot g \cdot H = \gamma \cdot S \cdot \Delta h \cdot g \cdot H \Rightarrow \Delta h = \frac{P_T \cdot t}{g \cdot \gamma \cdot S \cdot H}$$

Promena nivoa vode u akumulaciji iznosi:

$$\Delta h = \frac{P_T \cdot t}{g \cdot \gamma \cdot S \cdot H} = \frac{895,14 \cdot 10^3 \cdot 3600}{9,81 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^6 \cdot 25} = 0,041 \text{ m}$$

3.10 Jedna hidroelektrana sa padom vode od 80 m i dotokom vode u akumulaciju $q_d = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ radi 16 časova dnevno sa snagom $S = 6 \text{ MVA}$ i faktorom snage $\cos \varphi = 0,9$, uz ukupni stepen iskorišćenja $\eta_{HE} = 0,6$. Odrediti:

- koliko će ova hidroelektrana proizvesti dnevno aktivne električne energije,
- koliko će potrošiti električne energije iz akumulacije za dnevno vreme rada od 16 časova,
- sa kojim protokom radi hidroelektrana.

Napomena: Potrošnja električne energije iz akumulacije praktično ne utiče na veličinu pada jer je akumulaciono jezero velike površine, pa se može uzeti da su pad i stepen iskorišćenja konstantni.

Rešenje:

- Proizvodnja električne energije hidroelektrane:

$$W_E = P_G \cdot t = S \cdot \cos \varphi \cdot t = 6 \text{ MVA} \cdot 0,9 \cdot 16 \text{ h} = 86,4 \text{ MWh}$$

Potrošnja električne energije iz akumulacije jednaka je razlici između proizvedene električne energije i energije dovedene u akumulaciju koja može da se pretvori u električnu sa izvesnim stepenom iskorišćenja.

b) Za 16 časova je doteklo vode:

$$V_d = q_d \cdot t = 3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 16 \cdot 3600 \text{ s} = 172\,800 \text{ m}^3$$

Bruto energija dotoka je:

$$W_d = m \cdot g \cdot H = g \cdot \gamma \cdot V_d \cdot H$$

$$W_d = 9,80665 \cdot 10^3 \cdot 172\,800 \cdot 80 = 1,356 \cdot 10^{11} \text{ Ws} = 37,66 \text{ MWh}$$

Neto energija dotoka je:

$$W_{Ed} = \eta_{HE} \cdot W_d = 0,6 \cdot 37,66 = 22,60 \text{ MWh}$$

Potrošena električna energija iz akumulacije:

$$W_{Epot} = W_E - W_{Ed} = 86,4 - 22,60 = 63,80 \text{ MWh}$$

c) Protok hidroelektrane iznosi:

$$P = g \cdot \gamma \cdot Q \cdot H = \frac{P_G}{\eta_{HE}} = \frac{S_G \cdot \cos \varphi}{\eta_{HE}}$$

$$Q = \frac{S_G \cdot \cos \varphi}{g \cdot \gamma \cdot H \cdot \eta_{HE}} = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 0,9}{9,80665 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 0,6} = 11,47 \text{ m}^3/\text{s}$$

3.11 Akumulaciona hidroelektrana ima korisnu akumulaciju $Q_{ak}=7 \cdot 10^8 \text{ m}^3$, minimalni dotok $q_d=12 \text{ m}^3/\text{s}$, srednji pad 90 m, instalisani protok $q_i=100 \text{ m}^3/\text{s}$. Odrediti instalisanu snagu i garantovanu proizvodnju ove hidroelektrane pod pretpostavkom da je akumulacija puna i da stepen iskorišćenja turbine i generatora iznosi $\eta=0,83$.

Rešenje:

Instalisana snaga:

$$P_i = \eta_{HE} \cdot g \cdot \gamma \cdot q_i \cdot H = 0,83 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 90 = 73,3 \text{ MW}$$

Da bi se odredila garantovana proizvodnja, moramo najpre da odredimo vreme pražnjenja akumulacije, odnosno rad elektrane sa raspoloživom vodom:

$$t = \frac{Q_{ak}}{(q_i - q_d) \cdot 3600} = \frac{7 \cdot 10^8}{(100 - 12) \cdot 3600} = 2210 \text{ h}$$

Garantovana proizvodnja:

$$A = P_i t = 73,3 \text{ MW} \cdot 2210 \text{ h} = 162 \text{ GWh}$$

3.12 Elektroenergetski sistem sa dijagramom dnevne potrošnje kao na slici 3-1 napaja se iz jedne solarne elektrane i jedne pumpno akumulacione hidroelektrane bez prirodnog dotoka vode. Hronološki dijagram moguće dnevne proizvodnje solarne elektrane je dat na slici 3-2. Cena instalisanog kW za solarnu elektranu je 15 novčanih jedinica, a za pumpno akumulacionu hidroelektranu 3 novčane jedinice. Stopa godišnje otplate investicija je $p_{SE}=0,1$ i $p_{PAHE}=0,16$. Step en iskorišćenja pumpno akumulacione hidroelektrane je $\eta_{PAHE}=0,8$. Izračunati cenu 1 kWh električne energije proizvedene u sistemu. Odrediti cenu 1 kWh električne energije i godišnju proizvodnju za oba izvora parcijalno.

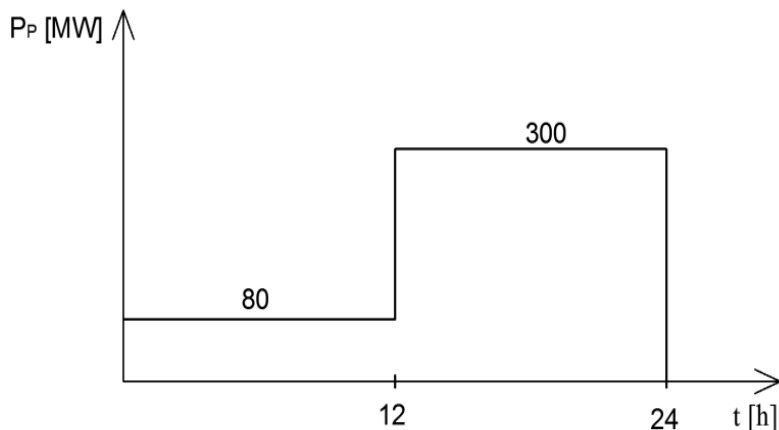
Rešenje:

Energija koju zahtevaju potrošači prikazana je na slici 3-1, sa vremenima trajanja karakterističnih radnih režima i odgovarajućih aktivnih snaga potrošnje. Oba radna režima su karakteristična po konstantnoj potrošnji električne energije potrošača u okviru elektroenergetskog sistema. Radni režimi su prikazani na slici 3-1, sa odgovarajućim aktivnim snagama potrošnje:

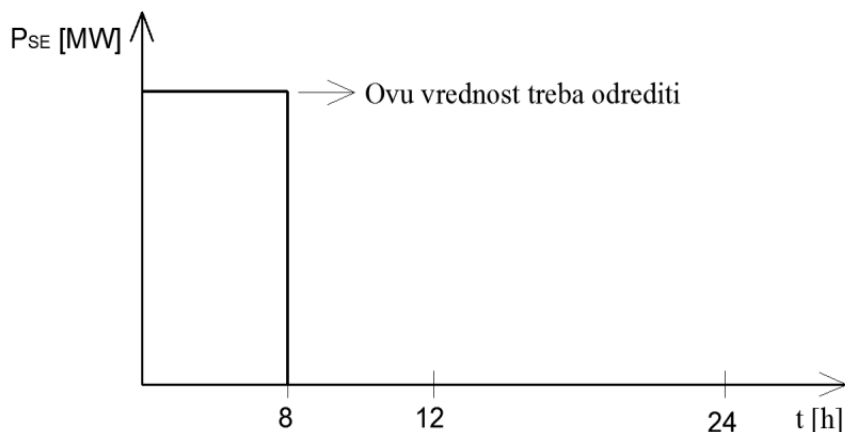
$$W_p = 80 \cdot 12 + 300 \cdot 12 = 4560 \text{ MWh/dan}$$

Energija kojom solarna elektrana direktno snabdeva potrošnju prikazana je na slici 3-2, sa prikazanim vremenom trajanja karakterističnog režima rada, koji odgovara proizvodnji električne energije solarne elektrane:

$$W_i = 80 \cdot 8 = 640 \text{ MWh/dan}$$



Slika 3-1 Dijagram dnevne potrošnje elektroenergetskog sistema



Slika 3-2 Hronološki dijagram moguće dnevne proizvodnje solarne elektrane

Energija kojom solarna elektrana indirektno snabdeva potrošnju putem pumpno akumulacione hidroelektrane:

$$W_{Ai} = W_{PAHE} = 80 \cdot (12 - 8) + 300 \cdot 12 = 3920 \text{ MWh/dan}$$

Ukupna proizvodnja električne energije solarne elektrane je:

$$W_{SE} = W_i + W_{AK} = W_i + W_{Ai} / \eta_{PAHE}$$

$$W_{SE} = 640 + 3920 / 0,8 = 5540 \text{ MWh/dan}$$

Instalisana snaga solarne elektrane:

$$P_{SEi} = \frac{W_{SE}}{t_{SE}} = \frac{5540 \text{ MWh / dan}}{8 \text{ h/dan}} = 692,5 \text{ MW}$$

Ukupna energija akumulacije je:

$$W_{AK} = \frac{W_{Ai}}{\eta_{PAHE}}$$

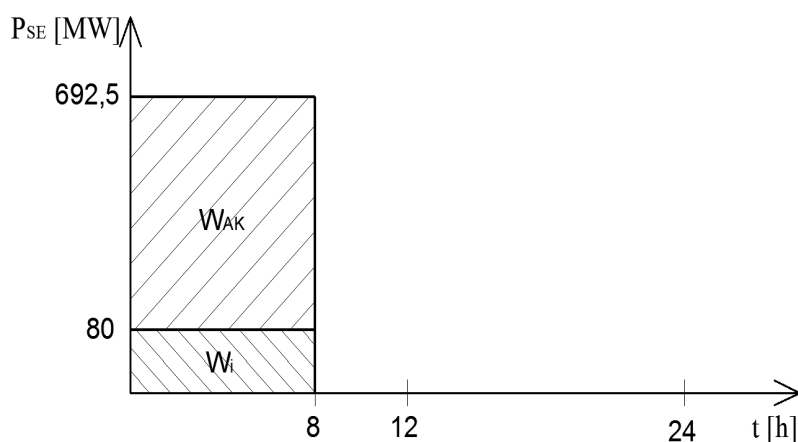
Instalisana snaga pumpno akumulacione hidroelektrane:

$$P_{PAHEi} = \max \left\{ \frac{W_{Ak}}{t_{punjenja}}; \frac{W_{Ai1}}{t_{praznjenja}}; \frac{W_{Ai2}}{t_{praznjenja}} \right\}$$

$$P_{PAHEi} = \max \left\{ \frac{4900}{8}; \frac{80 \cdot 4}{4}; \frac{300 \cdot 12}{12} \right\}$$

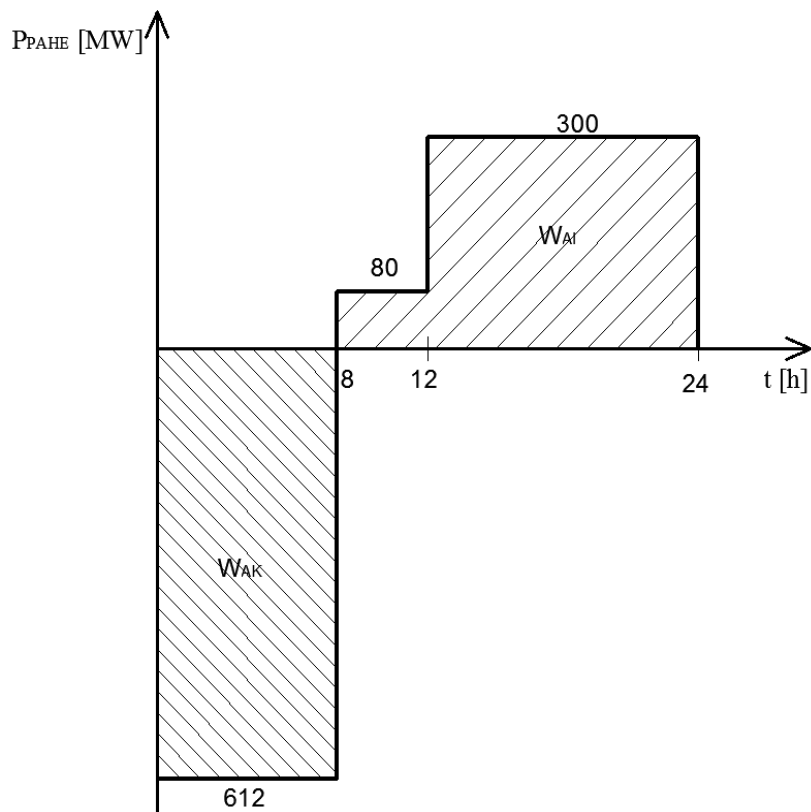
$$P_{PAHEi} = \frac{4900}{8} = 612,5 \frac{\text{MWh}}{\text{dan}}$$

Na slici 3-3 je prikazan dijagram rada solarne elektrane:



Slika 3-3 Dijagram rada solarne elektrane

Na slici 3-4 je prikazan dijagram rada pumpno akumulacione hidroelektrane:



Slika 3-4 Dijagram rada PAHE

Godišnja proizvodnja za izvore pojedinačno:

$$W_{SE\,god} = W_{SE} \cdot 365 = 5540 \cdot 365 = 2022,1 \text{ GWh/god}$$

$$W_{PAHE\,god} = W_{PAHE} \cdot 365 = 3920 \cdot 365 = 1430,8 \text{ GWh/god}$$

Cena energije za solarnu elektranu:

$$c_{SE} = \frac{a_{SE} \cdot P_{SEi}}{W_{SE\,god}} \cdot p_{SE}$$

$$c_{SE} = \frac{15 \cdot 692,5 \cdot 10^3}{2022,1 \cdot 10^3} \cdot 0,1 = 0,51 \frac{\text{NJ}}{\text{MWh}}$$

Cena energije za pumpno akumulacionu hidroelektranu:

$$c_{PAHE} = \frac{a_{PAHE} \cdot P_{PAHEi}}{W_{PAHE \text{ god}}} \cdot p_{PAHE}$$

$$c_{SE} = \frac{3 \cdot 612,5 \cdot 10^3}{1430,8 \cdot 10^3} \cdot 0,1 = 0,21 \frac{\text{NJ}}{\text{MWh}}$$

Cena energije za ceo sistem:

$$c = \frac{a_{PAHE} \cdot P_{PAHEi} \cdot p_{PAHE} + a_{SE} \cdot P_{SEi} \cdot p_{SE}}{W_{P \text{ god}}}$$

$$c = \frac{3 \cdot 612,5 \cdot 0,16 + 15 \cdot 692,5 \cdot 0,1}{4560 \cdot 365} = 0,8 \frac{\text{NJ}}{\text{MWh}}$$

3.13 Kolika bi bila cena električne energije proizvedene u sistemu, u skladu sa zadatkom 3.12, kada bi umesto solarne elektrane radila nuklearna elektrana sa cenom instalisanog kilovata od 3 novčane jedinice, ako je $p_{NE}=0,2$ i cena goriva 1 NJ/MWh. Tehnički minimum nuklearne elektrane je 150 MW. Zanimariti eksploatacione troškove.

Rešenje:

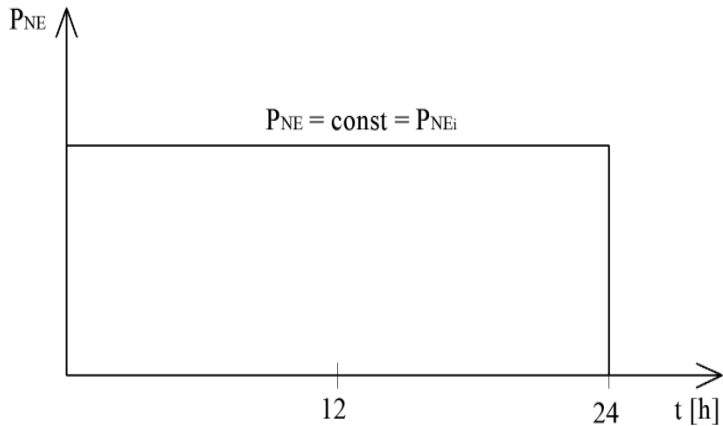
Moguća su dva režima rada nuklearne elektrane:

1) Režim rada kada nuklearna elektrana radi sa konstantnom snagom. Ovo je tehnički najpovoljnije za samu elektranu, ali se veća količina energije rasipa kroz pumpno akumulacionu hidroelektranu.

2) Režim rada kada nuklearna elektrana radi sa tehničkim minimumom u periodu manje, a sa maksimalnom snagom u periodu veće potrošnje. Ovo je energetski povoljnije jer se racionalnije troši gorivo, ali se više opterećuje elektrana i investicioni troškovi su veći.

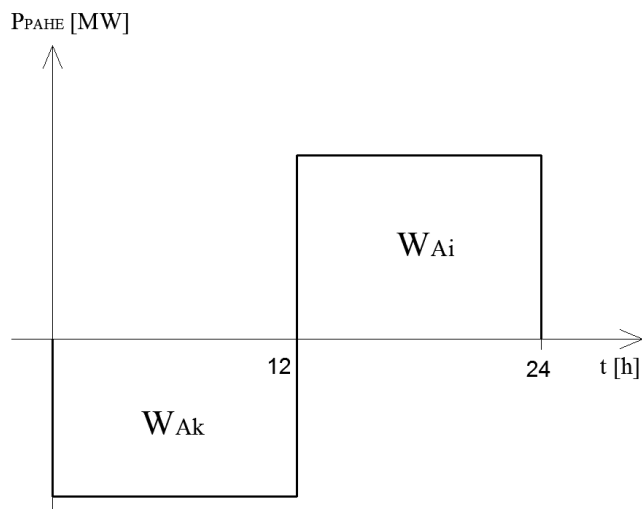
Prvi režim rada nuklearne elektrane:

Na slici 3-5 je prikazan dijagram rada nuklearne elektrane.



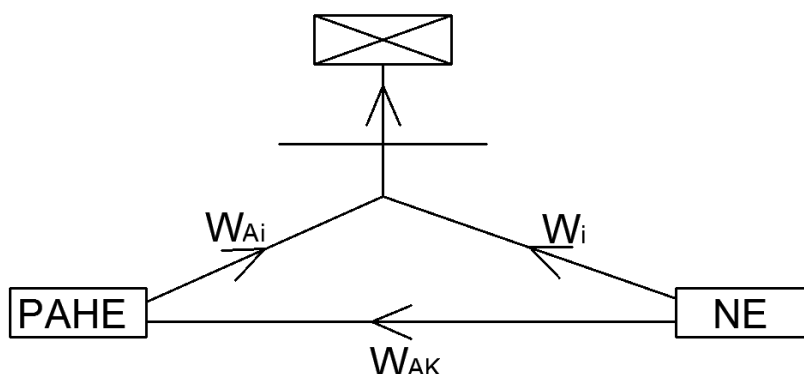
Slika 3-5 Dijagram rada nuklearne elektrane

Vidimo da je potrebno izabrati instalisanu snagu nuklearne elektrane P_{NEi} tako da nuklearna elektrana u periodu $0 \div 12$ časova pokrije potrošnju i preda pumpno akumulacionoj elektrani energiju W_{Ak} , dok je u periodu od $12 \div 24$ časa, proizvedena energija nuklearne elektrane nedovoljna, pa pumpno akumulaciona elektrana daje dodatnu energiju W_{Ai} kao što je prikazano na slici 3-6.



Slika 3-6 Dijagram rada PAHE

Energetski bilans sistema je grafički prikazan na slici 3-7.



Slika 3-7 Energetski bilans sistema

Električna energija koja se preda potrošnji jednaka je zbiru električne energije pumpno akumulacione hidroelektrane i električne energije nuklearne elektrane:

$$W_P = W_{Ai} + W_i$$

Električna energija nuklearne elektrane jednaka je zbiru električnih energija koje nuklearna elektrana preda pumpno akumulacionoj hidroelektrani i potrošnji:

$$W_{NE} = W_i + W_{Ak}$$

Električna energija koja se preda potrošnji sa strane pumpno akumulacione hidroelektrane jednaka je zbiru električnih energija koje nuklearna elektrana preda pumpno akumulacionoj hidroelektrani i električne energije nuklearne elektrane:

$$W_i = W_{NE} + W_{Ak}$$

Električna energija koja se preda potrošnji jednaka je:

$$W_P = W_{Ai} + W_{NE} - W_{Ak}$$

Električna energija koju treba da proizvede nuklearna elektrana jednaka je:

$$W_{NE} = W_P + W_{Ak} - W_{Ai}$$

Električna energija koja se preda potrošnji sa strane nuklearne elektrane jednaka je:

$$W_{Ak} = \frac{W_{Ai}}{\eta_{PAHE}}$$

Sažimanjem prethodna dva izraza, električna energija koju treba da proizvede nuklearna elektrana jednaka je:

$$W_{NE} = W_P + W_{Ai} \cdot \left(\frac{1}{\eta_{PAHE}} - 1 \right) \quad (1)$$

Prethodna jednačina sadrži dve nepoznate veličine (W_{NE} i W_{Ai}), pa je za njeno rešavanje potrebna još jedna relacija između tih veličina koju dobijamo iz uslova bilansa snaga. Kada pumpno akumulaciona elektrana radi u generatorskom režimu rada ($12 \div 24$) časova, tada je zbir snaga nuklearne elektrane i pumpno akumulacione hidroelektrane jednak maksimalnoj snazi potrošnje:

$$P_{NE} + P_{PAHEg} = P_{Pmax}$$

$$P_{NE} \cdot 12 + P_{PAHEg} \cdot 12 = P_{Pmax} \cdot 12$$

$$\frac{W_{NE}}{2} + W_{Ai} = P_{Pmax} \cdot 12$$

Zamenom relacije (1) u prethodnu jednačinu dobija se:

$$\frac{1}{2} \left[W_P + W_{Ai} \cdot \left(\frac{1}{\eta_{PAHE}} - 1 \right) \right] + W_{Ai} = P_{Pmax} \cdot 12$$

Rešavanjem se dobija:

$$W_{Ai} = 1173,3 \text{ MWh}$$

$$W_{Ak} = \frac{W_{Ai}}{\eta_{PAHE}} = 1466,67 \text{ MWh}$$

Da bismo odredili ukupnu energiju nuklearne elektrane moramo posmatrati snagu koju je nuklearna elektrana davala u generatorskom i u motornom režimu rada pumpno akumulacione hidroelektrane jer od toga zavisi i isporuka energije nuklearne elektrane.

Generatorski režim:

$$(G) \rightarrow P_{PAHEg} = \frac{W_{Ai}}{t_{\text{pražnjenja}}} = 97,78 \text{ MW}$$

Pumpni režim:

$$(M) \rightarrow P_{PAHEp} = \frac{W_{Ak}}{t_{\text{punjenja}}} = 122,2 \text{ MW}$$

Instalisana snaga pumpno akumulacione hidroelektrane je:

$$P_{PAHEi} = \max(P_{PAHEg}, P_{PAHEp}) = 122,2 \text{ MW}$$

Instalisana snaga nuklearne elektrane se može odrediti iz relacije:

$$P_{NEi} = P_{P\max} - P_{PAHEg} = 202,22 \text{ MW}$$

Da bismo odredili ukupnu cenu sistema moramo uzeti u obzir i troškove goriva nuklearne elektrane. Usvajamo kao poznate vrednosti za nuklearne elektrane:

$$c_{NE} = 1 \frac{\text{NJ}}{\text{MWh}}, \quad \eta_{NE} = 0,3$$

Ukupna električna energija nuklearne elektrane, koja se proizvede godišnje, može se izračunati na dva načina:

$$W_{NEgod} = P_{NEi} \cdot 365 \cdot 24 = 1771,3 \frac{\text{GWh}}{\text{god}}$$

$$W_{NEgod} = W_{Pgod} + W_{Akgod} - W_{Aigod} = 1771,3 \frac{\text{GWh}}{\text{god}}$$

Ukupna cena energije je:

$$c = \frac{a_{NE} \cdot p_{NE} \cdot P_{NEi} + a_{PAHE} \cdot p_{PAHE} \cdot P_{PAHEi} + \frac{W_{NEgod}}{\eta_{NE}} \cdot c_{NEg}}{W_{Pgod}}$$

$$c = 3,655 \cdot 10^{-3} \frac{\text{NJ}}{\text{kWh}}$$

Drugi režim rada nuklearne elektrane:

Pumpni režim:

$$P_{NEmin} = P_{Pmin} + P_{PAHEp}$$

Instalisana snaga pumpno akumulacione hidroelektrane u pumpnom režimu rada:

$$P_{PAHEp} = P_{NEmin} - P_{Pmin} = 150 \text{ MW} - 80 \text{ MW} = 70 \text{ MW}$$

Instalisana snaga pumpno akumulacione hidroelektrane u pumpnom režimu rada za vreme punjenja akumulacije:

$$P_{PAHEp} = \frac{W_{Ak}}{t_{punjenja}}$$

Električna energija akumulacije pumpno akumulacione hidroelektrane u pumpnom režimu rada za vreme punjenja akumulacije:

$$W_{Ak} = P_{PAHEp} \cdot t_{punjenja} = 70 \text{ MW} \cdot 12 \text{ h} = 840 \text{ MWh}$$

Električna energija pumpno akumulacione hidroelektrane u pumpnom režimu rada za vreme punjenja akumulacije:

$$W_{Ai} = \eta_{PAHE} \cdot W_{Ak} = 0,8 \cdot 840 \text{ MWh} = 672 \text{ MWh}$$

Generatorski režim:

$$P_{PAHEg} = \frac{W_{Ai}}{t_{pražnjenja}} = \frac{672 \text{ MWh}}{12 \text{ h}} = 56 \text{ MW}$$

Instalisana snaga pumpno akumulacione hidroelektrane:

$$P_{PAHEi} = \max(P_{PAHEg}; P_{PAHEp}) = 70 \text{ MW}$$

Instalisana snaga nuklearne elektrane:

$$P_{NEi} = P_{Pmax} - P_{PAHEg} = 300 \text{ MW} - 56 \text{ MW} = 244 \text{ MW}$$

Godišnja proizvodnja električne energije nuklearne elektrane:

$$W_{NEgod} = (P_{NEmin} \cdot 12 + P_{NEi} \cdot 12) \cdot 365 = 1725,72 \frac{\text{GWh}}{\text{god}}$$

Cena proizvedene električne energije:

$$c = \frac{a_{NE} \cdot p_{NE} \cdot P_{NEi} + a_{PAHE} \cdot p_{PAHE} \cdot P_{PAHEi} + \frac{W_{NEgod}}{\eta_{NE}} \cdot c_{NEg}}{W_{Pgod}}$$

$$c = 3,564 \cdot 10^{-3} \frac{\text{NJ}}{\text{kWh}}$$

Ako bi nuklearna elektrana radila umesto solarne elektrane, može se zaključiti sledeće:

- povoljnije je koristiti solarne elektrane jer se ne plaća skupo gorivo,
- bez obzira što su investicioni troškovi veći, povoljniji po ceni je režim rada nuklearne elektrane opisan u drugom režimu rada.

3.14 U jednoj elektrani preko trofaznog kabla dužine 400 m potrebno je preneti snagu potrošača od 200 kW pri naponu na kraju kabla 380 V. Zanemarujući induktivnost kabla, odrediti potreban presek žila kabla da pad napona u kablju ne bude veći od 5%. Odrediti takođe gubitak snage u dovodu i napon na početku voda za faktor snage potrošača $\cos\varphi=0,8$. Specifična provodnost bakra iznosi $57 \mu\text{S}$.

Rešenje:

Pad napona u kablju (vodu) pojavljuje se zbog struje kroz aktivni i reaktivni otpor voda. Zbog pada napona on je na kraju voda manji nego na početku. Potrošači električne energije su osetljivi na promene napona. Najosetljivije su svetiljke sa usijanom niti. Napon veći od 5% im smanjuje vek trajanja za 55%, dok kada je napon manji od naznačenog svetlosni fluks se naglo smanjuje. Kod asinhronih motora, sa smanjivanjem napona se povećava strujno opterećenje tako da dolazi do povećanog zagrevanja motora. Kod nisko naponskih kraćih vodova može se zanemariti induktivni otpor voda i računati samo sa aktivnim otporom, dok se kod dužih vodova, naročito onih sa velikim presekom mora uzeti u obzir i induktivni otpor.

Pad napona se može definisati kao:

$$\Delta U = |\underline{U}_1| - |\underline{U}_2| = U_1 - U_2$$

gde je U_1 napon na početku voda, a U_2 napon na kraju voda.

Uz zanemarenje induktivnog otpora voda, pad napona je:

$$\Delta U = R \cdot I$$

Pad napona ΔU može se zameniti razlikom projekcije napona U_1 na osu napona U_2 i napona U_2 , a da se ne učini značajna greška:

$$\Delta U = U_1 - U_2 \cong (U_2 + R \cdot I \cdot \cos \varphi) - U_2 = R \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Kod jednofaznih naizmjeničnih mreža, pad napona iznosi:

$$\Delta U = R \cdot I \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \frac{2 \cdot l}{S} \cdot \frac{P}{U_2 \cdot \cos \varphi} \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \frac{2 \cdot l}{S} \cdot \frac{P}{U_2}$$

Dvostruka dužina l uzima se zbog otpora odlaznog i povratnog voda. Procentualni pad napona iznosi:

$$\Delta u [\%] = 100 \cdot \frac{\Delta U}{U_2} = \frac{200 \cdot \rho \cdot P \cdot l}{S \cdot U_2^2}$$

Kod trofaznih vodova struja je jednaka:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_2 \cdot \cos \varphi}$$

i u obzir dolazi samo jednostruka dužina voda. Pad napona tada iznosi:

$$\Delta U_f = R \cdot I_1 \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_2 \cdot \cos \varphi} \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_2}$$

Pošto je $\Delta U = \sqrt{3} \cdot \Delta U_f$, procentualni pad napona iznosi:

$$\Delta u [\%] = \frac{100 \cdot \rho \cdot P \cdot l}{S \cdot U_2^2}$$

Gubitak snage u vodu može takođe da utiče na presek provodnika. Snaga se troši na zagrevanje provodnika. Za trofazni vod ona iznosi:

$$P_g = 3 \cdot R \cdot I_1^2 = 3 \cdot R \cdot \left(\frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_2 \cdot \cos \varphi} \right)^2 = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot \frac{P^2}{U_2^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Procentualni gubitak snage je:

$$p [\%] = 100 \cdot \frac{P_g}{P} = \frac{100 \cdot \rho \cdot P \cdot l}{S \cdot U_2^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Potreban presek kabla određujemo iz uslova za pad napona:

$$\Delta u [\%] = \frac{100 \cdot \rho \cdot P_2 \cdot l}{S \cdot U_2^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{100 \cdot \rho \cdot P_2 \cdot l}{\Delta u [\%] \cdot U_2^2} = \frac{100 \cdot \frac{1}{57} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 400}{5 \cdot 380^2} = 194,4 \text{ mm}^2$$

Usvajamo sledeći veći standardni presek kabla, a to je 240 mm^2 .

Naznačena struja je:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_2 \cdot \cos \varphi} = \frac{200 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,8} = 379,8 \text{ A}$$

Užad za nadzemne vodove ovog preseka imaju sledeću dozvoljenu trajnu struju pri povišenju temperature od 40 °C: 630 A za bakar, odnosno 513 A za aluminijum. Dakle, presek zadovoljava, s obzirom na dozvoljenu trajnu struju.

Pad napona je sada:

$$\Delta u [\%] = \frac{100 \cdot \rho \cdot P_2 \cdot l}{S \cdot U_2^2} = \frac{100 \cdot \frac{1}{57} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 400}{240 \cdot 380^2} = 4,05 \%$$

odnosno, apsolutno:

$$\Delta U = \frac{u [\%]}{100} \cdot U_2 = 0,0405 \cdot 380 = 15,4 \text{ V}$$

Napon na početku voda treba da bude:

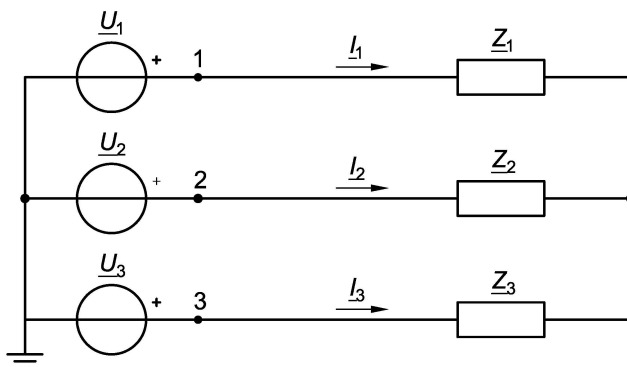
$$U_1 = U_2 + \Delta U = 380 + 15,4 = 395,4 \text{ V}$$

Gubitak snage u kablju je:

$$p [\%] = \frac{100 \cdot \rho \cdot P \cdot l}{S \cdot U_1^2 \cdot \cos^2 \varphi} = \frac{100 \cdot \frac{1}{57} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 400}{240 \cdot 380^2 \cdot 0,8^2} = 6,3 \%$$

4 PRENOS I DISTRIBUCIJA

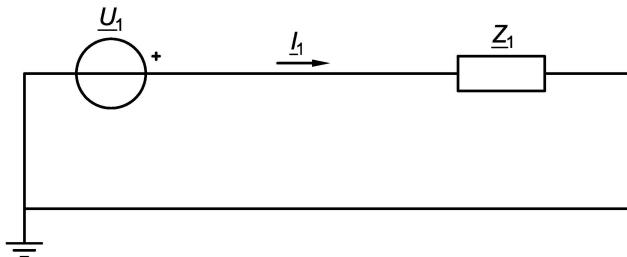
4.1 Izračunati fazne struje kroz trofazni simetrični potrošač u trofaznom simetričnom kolu prikazanom na slici 4-1. Poznate su vrednosti faznih napona i impedansi potrošača $U_1=U_2=U_3=230$ V i $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3=(10+j50) \Omega$.



Slika 4-1 Simetrično trofazno kolo sa potrošačima vezanim u "zvezdu"

Rešenje:

U slučaju simetričnog trofaznog sistema sa generatorom i prijemnikom vezanim u zvezdu, zvezdišta se mogu kratko spojiti. Preuređivanjem šeme mogu se dobiti tri prosta nezavisna kola, koja se sastoje od jedne faze generatora, odgovarajućeg faznog provodnika i jedne faze prijemnika. Rešavanjem odgovarajućeg prostog kola za prvu fazu (slika 4-2) dobijamo faznu struju potrošača $\underline{I}_1$:



Slika 4-2 Izgled kola za prvu fazu

Kompleksna vrednost struje u prvoj fazi iznosi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230e^{j0}}{10 + j50} = \frac{23}{\sqrt{1^2 + 5^2} e^{j \arctg \frac{5}{1}}} = 4,5e^{-j80} \text{ A}$$

Zbog simetrije, struje druge dve faze imaju iste efektivne vrednosti, ali su fazno pomerene za $-2\pi/3$, odnosno $-4\pi/3$, u odnosu na $\underline{I}_1$. Dakle:

$$\underline{I}_2 = 4,5e^{-j200} \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = 4,5e^{-j320} \text{ A}$$

Napomena: U slučaju kada je prijemnik vezan u trougao, nije moguće odmah primeniti prethodno opisanu analizu svođenjem na jednu fazu. Potrebno je najpre transformisati potrošač u zvezdu, a tek zatim problem svesti na prethodni.

4.2 U trofaznom kolu prikazanom na slici 4-1 efektivne vrednosti faznih napona su $U_1=U_2=U_3=230 \text{ V}$, vrednosti impedansi $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3=(10-j30) \Omega$.

a) Izračunati fazne struje trofaznog potrošača.

b) Na istom fazorskom dijagramu nacrtati fazne struje i fazne napone.

Rešenje:

a) Sistem je simetričan, pa je dovoljno analizirati samo jednu fazu:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230e^{j0}}{10 - j30} = \frac{23}{\sqrt{1^2 + 3^2} e^{j \arctg \frac{3}{1}}} = 7,3e^{j71,6} \text{ A}$$

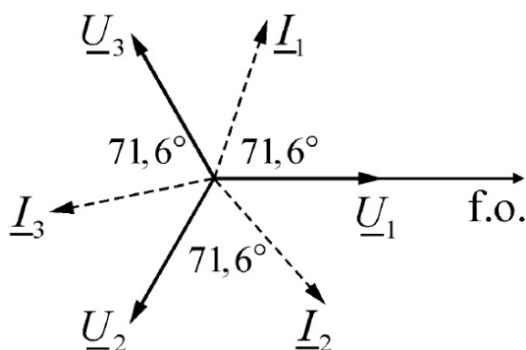
Sve ostale struje imaju istu efektivnu vrednost i prednjače ispred svojih faznih napona za isti ugao od $71,6^\circ$, dakle:

$$\underline{I}_2 = 7,3e^{j143,2} \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = 7,3e^{j214,8} \text{ A}$$

Napomena: U ovom zadatku potrošač ima kapacitivni karakter, zbog čega fazne struje prednjače ispred odgovarajućih faznih napona, za razliku od prošlog primera kada je impedansa bila induktivnog karaktera.

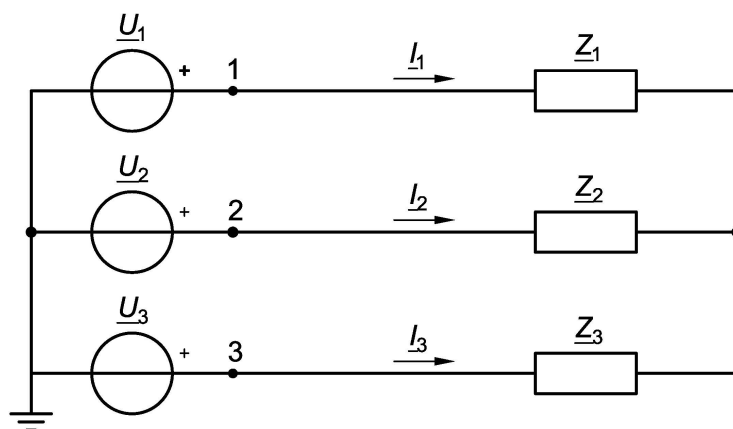
b) Fazorski dijagram faznih napona i struja je prikazan na slici 4-3.



4-3 Fazorski dijagram faznih napona i struja

4.3 Na slici 4-4 prikazan je simetričan trofazni sistem sa prijemnikom vezanim u "zvezdu". Poznate su efektivne vrednosti faznih napona $U_1=U_2=U_3=230$ V i impedansi $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3=(20+j50) \Omega$.

- Napisati kompleksni oblik sva tri fazna napona.
- Nacrtati prvu fazu kola i izračunati prvu faznu struju trofaznog potrošača.
- Predstaviti fazore faznih napona na istom fazorskom dijagramu.



Slika 4-4 Simetrično trofazno kolo

Rešenje:

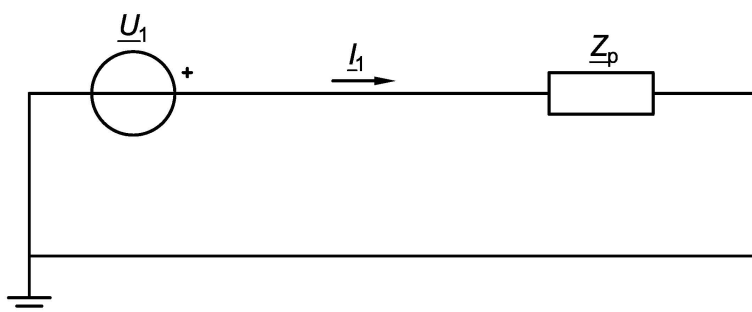
a) Fazni naponi:

$$\underline{U}_1 = 230e^{j0} \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = 230e^{-j120} \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = 230e^{-j240} \text{ V}$$

b) Za simetričan trofazni sistem, kada su generator i prijemnik vezani u "zvezdu", analiza sistema može da se izvrši svođenjem na jednu fazu. U simetričnom trofaznom sistemu potencijali zvezdišta generatora i zvezdišta prijemnika su jednaki, pa se ove dve tačke mogu kratko spojiti. Tako se dolazi do kola jedne faze (slika 4-5).

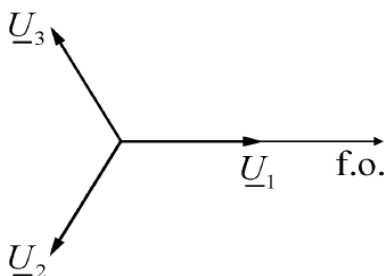


4-5 Prva faza simetričnog trofaznog kola

Struja u kolu prikazanom na slici 4-5 je ujedno i prva fazna struja, čija vrednost iznosi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230e^{j0}}{20 + j50} = \frac{23}{\sqrt{2^2 + 5^2} e^{j \arctg \frac{5}{2}}} = 4,27e^{-j68,2} \text{ A}$$

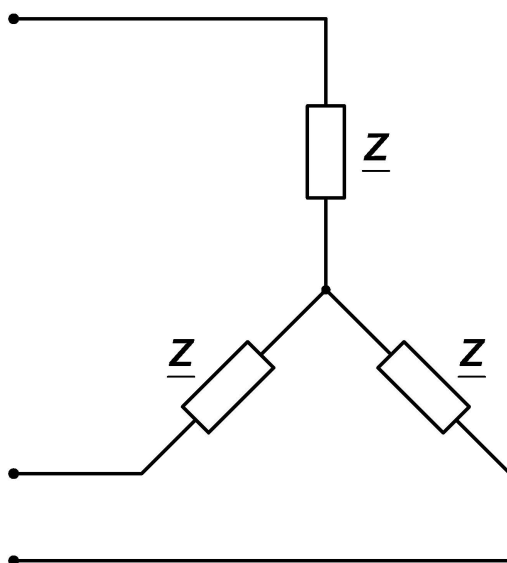
c) Fazorski dijagram faznih napona je prikazan na slici 4-6.



Slika 4-6 Fazorski dijagram faznih napona direktnog simetričnog sistema

4.4 Trofazni simetrični potrošač impedanse $\underline{Z}=(10+j10) \Omega$, vezan u zvezdu (slika 4-7), priključen je na trofaznu simetričnu mrežu efektivne vrednosti napona $U=230\sqrt{3}$ V. Odrediti:

- fazne i linijske struje,
- aktivnu i reaktivnu snagu trofaznog potrošača.



Slika 4-7 Simetričan trofazni potrošač vezan u "zvezdu"

Rešenje:

U slučaju kada je trofazni potrošač vezan u "zvezdu", impedansa svake faze priključena je između zvezdišta potrošača i odgovarajućeg priključka na mrežu (slika 4-1).

Simetričan (ili uravnotežen) potrošač u svakoj fazi ima impedanse istih karakteristika, odnosno impedanse jednakih modula i argumenata. Prema tome, impedansa svake faze potrošača vezanog u spoju "zvezda" priključena je na fazni napon mreže. U slučaju da u postavci zadatka nije naglašeno koji je napon mreže zadat (fazni ili linijski), podrazumeva se da je zadati napon **linijski**. Ukoliko nije naglašeno kojeg su redosleda naponi, usvaja se da su zadati naponi **direktnog** redosleda faza.

- Poznati su linijski naponi trofazne mreže:

$$\underline{U}_{12} = 230\sqrt{3}e^{j0} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{23} = 230\sqrt{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{31} = 230\sqrt{3}e^{-j\frac{4\pi}{3}} \text{ V}$$

Koristeći vezu između faznih i linijskih napona direktnog simetričnog trofaznog sistema, imamo da je:

$$\underline{U}_1 = \frac{230\sqrt{3}}{\sqrt{3}} e^{j(0 - \frac{\pi}{6})} = 230e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{230\sqrt{3}}{\sqrt{3}} e^{j(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 230e^{-j\frac{5\pi}{6}} \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = \frac{230\sqrt{3}}{\sqrt{3}} e^{j(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 230e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ V}$$

Impedansa potrošača $\underline{Z} = (10 + j10) \Omega$, takođe se može izraziti:

$$\underline{Z} = 10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$$

Kako je fazni napon potrošača jednak faznom naponu mreže, struju po pojedinim fazama moguće je odrediti primenom Omovog zakona:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{230e^{-j\frac{\pi}{6}}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{23}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{5\pi}{12}} \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{230e^{-j\frac{5\pi}{6}}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{23}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{13\pi}{12}} \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{230e^{j\frac{\pi}{2}}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{23}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ A}$$

Linijne i fazne struje su u ovom slučaju jednake.

b) Svaki trofazni potrošač moguće je razmatrati kao tri odvojena jednofazna potrošača, pri čemu je ukupna aktivna snaga trofaznog potrošača jednaka sumi snaga tri jednofazna potrošača. Aktivna snaga trofaznog simetričnog potrošača ista je po svim fazama, jer je impedansa istih karakteristika u svakoj fazi.

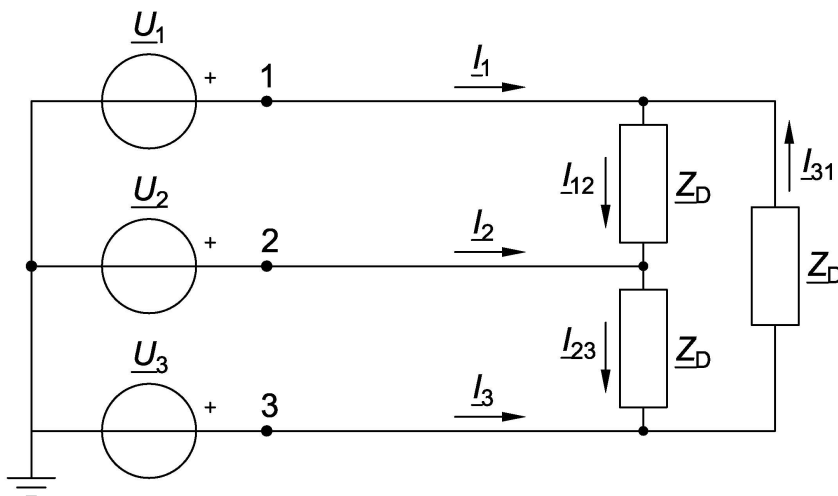
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 3P_1 = 3RI_1^2$$

$$P = 3 \cdot 10 \cdot \left(\frac{23}{\sqrt{2}}\right)^2 = 7935 \text{ W}$$

Ukupna reaktivna snaga trofaznog simetričnog potrošača vezanog u "zvezdu" je:

$$Q = 3Q_1 = 3XI_1^2 = 3 \cdot 10 \cdot \left(\frac{23}{\sqrt{2}}\right)^2 = 7935 \text{ VAr}$$

4.5 U trofaznom kolu sa slike 4-8 poznate su efektivne vrednosti faznih napona $U_1=U_2=U_3=230 \text{ V}$, kao i vrednosti impedansi $Z_D=(10-j10) \Omega$. Odrediti struje kroz potrošač I_{12}, I_{23}, I_{31} .



Slika 4-8 Trofazni potrošač vezan u "trougao"

Rešenje:

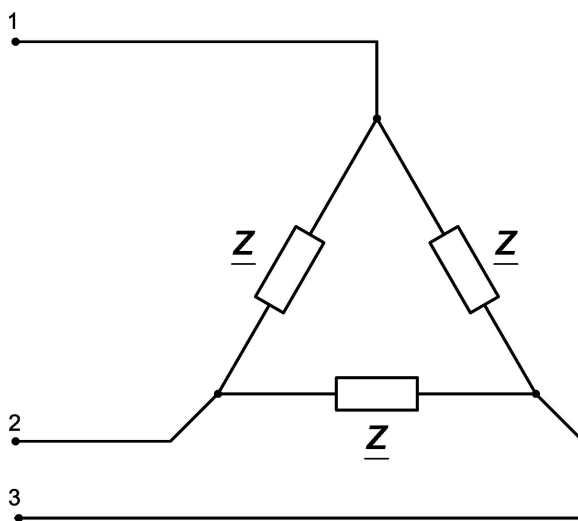
Svaka od impedansi $\underline{Z}_D$ povezana je između dva fazna provodnika, odnosno na linijskom je naponu, pa je:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_D} = \frac{230\sqrt{3}e^{j30}}{10 - j10} = \frac{23}{\sqrt{2^2 + 5^2} e^{j \cdot \arctg(-\frac{10}{10})}} = 28,2e^{j30}e^{j45} = 28,2e^{j75} \text{ A}.$$

Sve ostale struje imaju istu efektivnu vrednost i prednjače ispred svojih međufaznih napona za isti ugao od 45 stepeni.

4.6 Trofazni simetrični potrošač, čije su impedanse $\underline{Z}=(10+j10) \Omega$, vezan je u "trougao" (slika 4-9). Potrošač je priključen na električnu mrežu efektivnog faznog napona $U=230 \text{ V}$. Odrediti:

- struje kroz potrošač,
- struje kroz vod koji spaja priključak faze potrošača sa mrežom,
- aktivnu i reaktivnu snagu trofaznog potrošača.



Slika 4-9 Simetričan trofazni potrošač vezan u "trougao"

Rešenje:

Date su vrednosti faznog napona mreže (početna faza nije data, pa usvajamo vrednost od 0°):

$$\underline{U}_1 = 230e^{j0} \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = 230e^{-j\frac{2\pi}{3}} \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = 230e^{-j\frac{4\pi}{3}} \text{ V}$$

Koristeći vezu između faznih i linijskih napona direktnog redosleda faza, dobija se:

$$\underline{U}_{12} = 230\sqrt{3}e^{j(0+\frac{\pi}{6})} = 230\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{23} = 230\sqrt{3}e^{j(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 230\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{31} = 230\sqrt{3}e^{j(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 230\sqrt{3}e^{-j\frac{7\pi}{6}} \text{ V}$$

a) Krajevi svake od tri impedanse potrošača vezani su između dva fazna provodnika (slika 4-8) i nalaze se na međufaznom (linijskom) naponu, pa struje kroz potrošač možemo izračunati koristeći Omov zakon:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{j\frac{\pi}{6}}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = 20\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{12}} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{-j\frac{\pi}{2}}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = 20\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{-j\frac{7\pi}{6}}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = 20\sqrt{2}e^{-j\frac{17\pi}{12}} \text{ A}$$

b) Struje kroz linije generatora određujemo primenom prvog Kirhofovog zakona (smerovi sa slike 4-8):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 20\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{12}} - 20\sqrt{2}e^{-j\frac{17\pi}{12}} = 20\sqrt{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{12}} - e^{-j\frac{17\pi}{12}}\right)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 20\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} - 20\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{12}} = 20\sqrt{2}\left(e^{-j\frac{3\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{12}}\right)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 20\sqrt{2}e^{-j\frac{17\pi}{12}} - 20\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} = 20\sqrt{2}\left(e^{-j\frac{17\pi}{12}} - e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)$$

Odakle je:

$$I_1 = 49e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ A}$$

$$I_2 = 49e^{-j\frac{11\pi}{12}} \text{ A}$$

$$I_3 = 49e^{-j\frac{19\pi}{12}} \text{ A}$$

c) Aktivna i reaktivna snaga trofaznog potrošača:

$$P = 3P_1 = 3RI_1^2 = 3 \cdot 10 \cdot (20\sqrt{2})^2 = 24 \text{ kW}$$

$$Q = 3Q_1 = 3XI_1^2 = 3 \cdot 10 \cdot (20\sqrt{2})^2 = 24 \text{ kVAr}$$

4.7 Na simetričnu trofaznu mrežu nominalnog napona $U=400 \text{ V}$, priključena su tri otpornika otpornosti $R=10 \Omega$. Ovi otpornici su prvo vezani u "zvezdu", a zatim u "trougao" (kao na slikama 4-10a i 4-10b). Odrediti efektivne vrednosti struja kroz otpornike, kao i aktivnu i reaktivnu snagu u slučajevima:

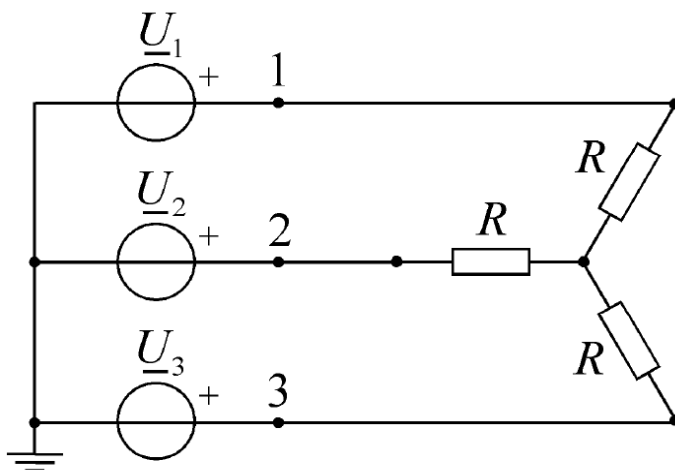
a) kada su vezani u "zvezdu",

b) kada su vezani u "trougao".

Rešenje:

Pod nominalnim naponom trofaznog sistema podrazumeva se efektivna vrednost međufaznog napona, koja iznosi $U_n=400 \text{ V}$. Fazni napon je $\sqrt{3}$ puta manji i iznosi 230 V .

Simetričan trofazni sistem sa vezom otpornika u "zvezdu" prikazan je na slici 4-10a:



Slika 4-10a Simetričan sistem sa vezom otpornika u "zvezdu"

a) Pri sprezi otpornika u "zvezdu" figuriše fazni napon, pa su efektivne vrednosti struja kroz otpornike:

$$I_{RY} = \frac{U_1}{R} = \frac{400}{10\sqrt{3}} = 23,094 \text{ A}$$

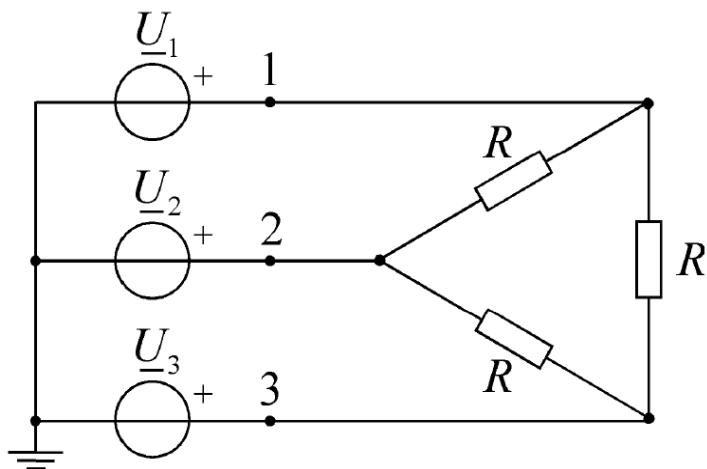
Snaga jednog otpornika jednaka je:

$$P_{RY} = R \cdot I_{RY}^2 = 10 \cdot 23,094^2 = 5,333 \text{ kW}$$

Ukupna snaga sva tri otpornika iznosi:

$$P_Y = 3 \cdot P_{RY} = 16 \text{ kW}$$

Simetričan trofazni sistem sa vezom otpornika u "trougao" prikazan je na slici 4-10b. Opterećenja predstavljaju aktivni otpori R , simetrično raspoređeni po fazama. Ovakav simetričan trofazni sistem je karakterističan po prisustvu linijskih (međufaznih) napona na potrošačima, koji se napajaju iz sistema simetričnog trofaznog generatora, sa faznim pomerajem od 120° , između kompleksnih faznih napona:



Slika 4-10b Simetričan sistem sa vezom otpornika u "trougao"

b) Pri sprezi otpornika u "trougao" uzimamo vrednost međufaznog napona, pa su efektivne vrednosti struja kroz otpornike:

$$I_{RA} = \frac{U_{12}}{R} = \frac{400}{10} = 40 \text{ A}$$

Snaga jednog otpornika jednaka je:

$$P_{RA} = R \cdot I_{RA}^2 = 10 \cdot 40^2 = 16 \text{ kW}$$

Ukupna snaga celokupnog potrošača (sva tri otpornika) iznosi:

$$P_{\Delta} = 3 \cdot P_{RA} = 54 \text{ kW}$$

4.8 Na simetričnu trofaznu mrežu međufaznog napona $U=400 \text{ V}$, priključena su dva simetrična prijemnika. Prvi prijemnik se sastoji od tri otpornika otpornosti $R_Y=10 \Omega$ vezanih u "zvezdu", a drugi od tri otpornika otpornosti $R_{\Delta}=30 \Omega$ vezanih u "trougao". Odrediti:

- snagu prvog prijemnika,
- snagu drugog prijemnika,
- uporediti izračunate snage.

Rešenje:

a) Prema postupku iz prethodnog zadatka, snaga prvog prijemnika iznosi:

$$P_Y = 3 \cdot P_{RY} = 3 \cdot R \cdot I_{RY}^2 = \frac{3U_1^2}{R} = 54 \text{ kW}$$

b) Pri vezi u "trougao", otpornici se nalaze na međufaznom naponu, pa su efektivne vrednosti njihovih struja:

$$I_{RA} = \frac{U_{12}}{R} = \frac{400}{30} = 13,333 \text{ A}$$

Snaga jednog otpornika jednaka je:

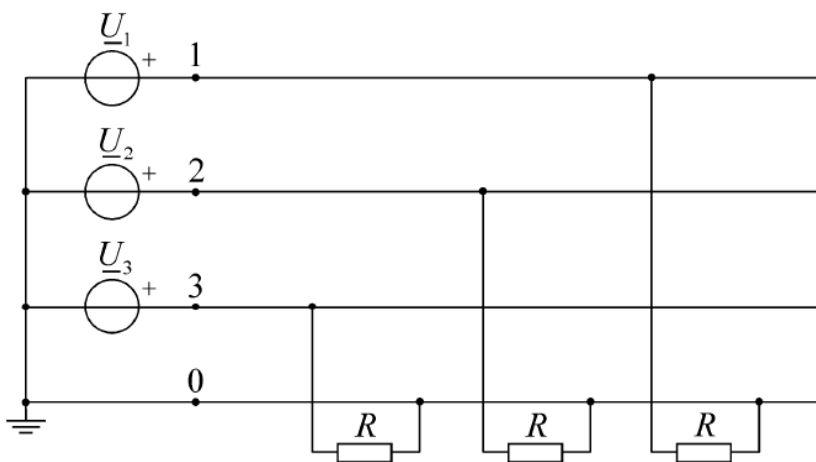
$$P_{RA} = R \cdot I_{RA}^2 = 30 \cdot 13,333^2 = 16 \text{ kW}$$

Snaga drugog prijemnika (vezanog u "trougao") iznosi:

$$P_{\Delta} = 3 \cdot P_{RA} = 54 \text{ kW}$$

c) Snage izračunate pod a) i b) su jednake.

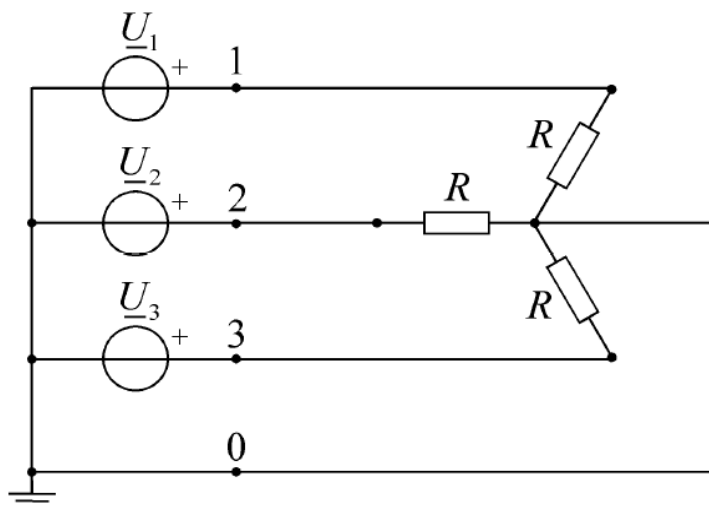
4.9 Na simetričnu trofaznu mrežu faznog napona $U=230 \text{ V}$, priključena su tri jednofazna prijemnika jednakih otpornosti $R=11,5 \Omega$, kao na slici 4-11. Odrediti struje kroz otpornike, kao i njihove snage.



Slika 4-11 Simetrično trofazno kolo sa tri jednofazna prijemnika

Rešenje:

Opisana veza tri jednofazna prijemnika može se interpretirati kao simetričan trofazni prijemnik vezan u "zvezdu", sa uzemljenim zvezdištem (slika 4-12).



Slika 4-12 Trofazni prijemnik vezan u "zvezdu" sa uzemljenim zvezdištem

Zbog simetrije, zadato kolo može se analizirati svođenjem na jednu fazu. Efektivne vrednosti struja kroz otpornike su:

$$I_R = \frac{U_1}{R} = \frac{230}{11,5} = 20 \text{ A}$$

Snaga jednog jednofaznog prijemnika iznosi:

$$P_R = R \cdot I^2 = 11,5 \cdot 20^2 = 4,6 \text{ kW}$$

4.10 Na simetričnu mrežu napona $U=400 \text{ V}$, priključen je induktivni prijemnik vezan u "zvezdu", čije impedanse (po fazi) iznose $\underline{Z}=(5+j8,66) \Omega$, kao na slici 4-10a. Odrediti:

- kompleksne struje kroz impedanse,
- aktivnu i reaktivnu snagu svake impedanse,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu prijemnika,
- nacrtati fazorski dijagram napona i struja prijemnika.

Rešenje:

Kompleksna impedansa $\underline{Z} = (5 + j8,66) \Omega$, može se napisati u eksponencijalnom obliku, i to:

$$\underline{Z} = (5 + j8,66) = \sqrt{5^2 + 8,66^2} e^{j \cdot \arctg \frac{8,66}{5}} = 10 e^{j60} \Omega$$

Pošto je u pitanju veza u "zvezdu", kompleksni naponi na impedansama su fazni:

$$\underline{U}_1 = 230 e^{j0} \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = 230 e^{-j120} \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = 230 e^{-j240} \text{ V}$$

a) Struje kroz kompleksne impedanse su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{230 e^{j0}}{10 e^{j60}} = 23 e^{-j60} \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{230 e^{-j120}}{10 e^{j60}} = 23 e^{-j180} \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{230 e^{-j240}}{10 e^{j60}} = 23 e^{-j300} \text{ A}$$

b) Kompleksne snage sve tri impedanse su jednake, i mogu se odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_Z = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 230 e^{j0} \cdot (23 e^{-j60})^* = 5,29 e^{j60} \text{ kVA}$$

Aktivna snaga jednaka je realnom delu kompleksne i iznosi:

$$P_Z = R_e \{S_Z\} = 5,3 \cos(60) = 2,65 \text{ kW}$$

Reaktivna snaga jednaka je imaginarnom delu kompleksne snage i iznosi:

$$Q_Z = I_m \{S_Z\} = 5,3 \sin(60) = 4,59 \text{ kVA}$$

c) Kompleksna, aktivna i reaktivna snaga trofaznog prijemnika mogu se odrediti sabiranjem snaga pojedinačnih impedansi:

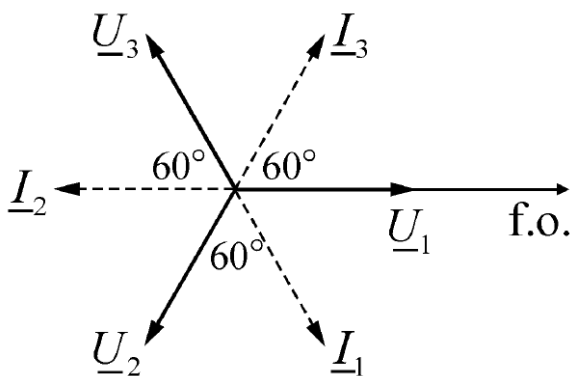
$$P_Y = 3 \cdot P_Z = 3 \cdot 2,65 \approx 8 \text{ kW}$$

$$Q_Y = 3Q_Z = 3 \cdot 4,59 = 13,77 \text{ kVAr}$$

Prividna snaga trofaznog prijemnika jednaka je:

$$S_Y = \sqrt{P_Y^2 + Q_Y^2} = 16 \text{ kVA}$$

d) Fazorski dijagram napona i struja prijemnika prikazan je na slici 4-13.



Slika 4-13 Fazorski dijagram faznih napona i struja

4.11 Na simetričnu trofaznu mrežu napona $U=400 \text{ V}$, priključen je induktivni prijemnik vezan u "trougao", čije impedanse po fazi iznose $\underline{Z}=(5+j8,66) \Omega$, kao na slici 4-10b. Odrediti:

- kompleksne struje kroz impedanse,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu prijemnika,
- aktivnu i reaktivnu snagu svake impedanse,
- nacrtati fazorski dijagram napona i struja prijemnika.

Rešenje:

Kompleksni naponi na impedansama su međufazni (linijski napon prednjači nad faznim za 30°):

$$\underline{U}_{12} = 230\sqrt{3}e^{j(0+60)} = 230\sqrt{3}e^{j30} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{23} = 230\sqrt{3}e^{j(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 230\sqrt{3}e^{-j90} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{31} = 230\sqrt{3}e^{j(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 230\sqrt{3}e^{-j210} \text{ V}$$

a) Struje kroz kompleksne impedanse su:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{j30}}{10e^{j60}} = 40e^{-j30} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{-j90}}{10e^{j60}} = 40e^{-j150} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{-j210}}{10e^{j60}} = 40e^{-j270} \text{ A}$$

b) Kompleksne snage sve tri impedanse su jednake:

$$S_Z = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_{12}^* = 400e^{j30} \cdot (40e^{-j30})^* = 16e^{j60} \text{ kVA}$$

Aktivna snaga i reaktivna snaga impedansi su:

$$P_Z = R_e \{S_Z\} = 16 \cos(60) = 8 \text{ kW}$$

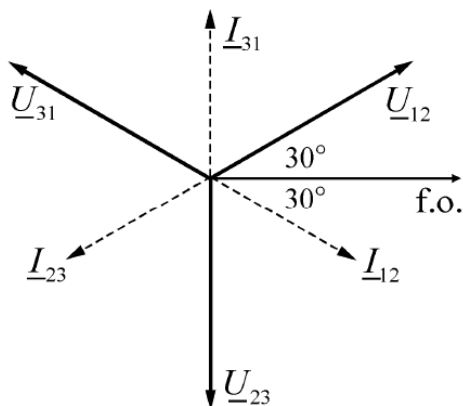
$$Q_Z = I_m \{S_Z\} = 16 \sin(60) = 13,86 \text{ kVAr}$$

c) Kompleksna, aktivna i reaktivna snaga trofaznog prijemnika mogu se odrediti sabiranjem snaga pojedinačnih impedansi:

$$P_\Delta = 3 \cdot P_Z = 3 \cdot 8 = 24 \text{ kW}$$

$$Q_\Delta = 3Q_Z = 3 \cdot 13,86 = 41,58 \text{ kVAr}$$

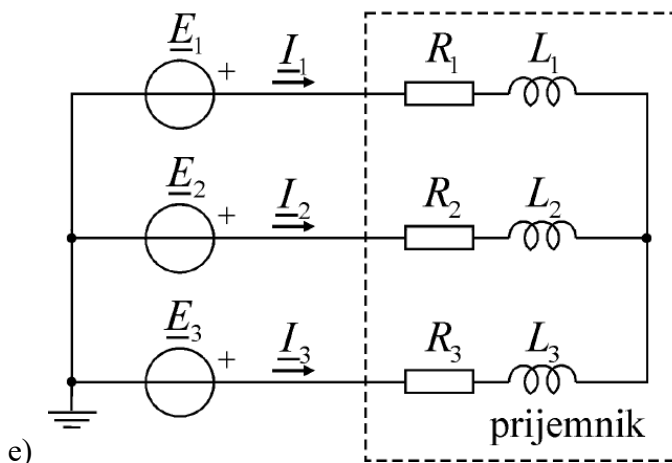
d) Fazorski dijagram napona i struja prijemnika prikazan je na slici 4-14.



Slika 4-14 Fazorski dijagram međufaznih napona i struja

4.12 U kolu sa slike 4-15 poznate su efektivne vrednosti elektromotornih sila $E_1=E_2=E_3=230$ V, otpornosti $R_1=R_2=R_3=10$ Ω , kao i induktivnosti prijemnika $L_1=L_2=L_3=1$ H. Frekvencija je jednaka frekvenciji gradske mreže (50 Hz). Odrediti:

- kompleksne predstavnike struja trofaznog prijemnika,
- kompleksni napon na otporniku R_1 ,
- kompleksni napon na kalemu L_1 ,
- na istom fazorskom dijagramu nacrtati struje i napone generatora.



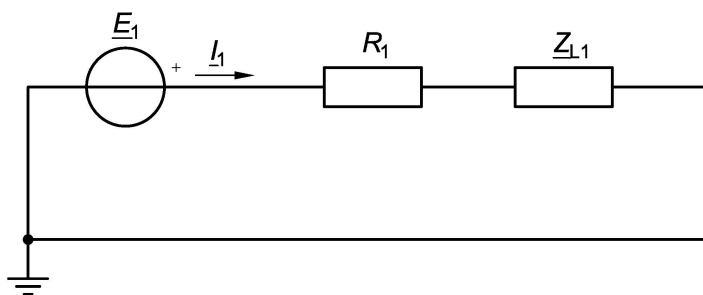
Slika 4-15 Simetrično kolo sa induktivnim potrošačem vezanim u "zvezdu"

Rešenje:

a) Frekvencija gradske mreže iznosi 50 Hz. Impedanse kalema jednake su:

$$\underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_{L2} = \underline{Z}_{L3} = j\omega L_1 = j2\pi fL_1 = j314 \Omega$$

Obzirom da je sistem simetričan i da su generator i prijemnik vezani u "zvezdu", analiza sistema može da se sprovede svođenjem na jednu fazu (slika 4-16).



Slika 4-16 Svođenje kola na jednu fazu

Struju u kolu izračunavamo:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \underline{Z}_{L1}} = \frac{230e^{j0}}{100 + j314} = \frac{230e^{j0}}{\sqrt{100^2 + 314^2} e^{j \arctg \frac{314}{100}}} = 0,7e^{-j72,3} \text{ A}$$

Ostale struje imaju isti intenzitet kao struja $\underline{I}_1$, samo fazno kasne za 120, odnosno 240 stepeni:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120} = 0,7e^{-j192,3} \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240} = 0,7e^{-j312,3} \text{ A}$$

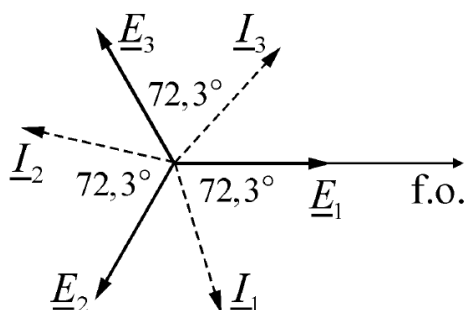
b) Kompleksni napon na otporniku R_1 je:

$$\underline{U}_{R1} = R_1 \cdot \underline{I}_1 = 100 \cdot 0,7e^{-j72,3} = 70e^{-j72,3} \text{ V}$$

c) Kompleksni napon na impedansi $\underline{Z}_{L1}$ jednak je:

$$\underline{U}_{L1} = \underline{Z}_{L1} \cdot \underline{I}_2 = j314 \cdot 0,7e^{-j72,3} = 314e^{-j90} \cdot 0,7e^{-j72,3} = 219,8e^{-j17,7} \text{ V}$$

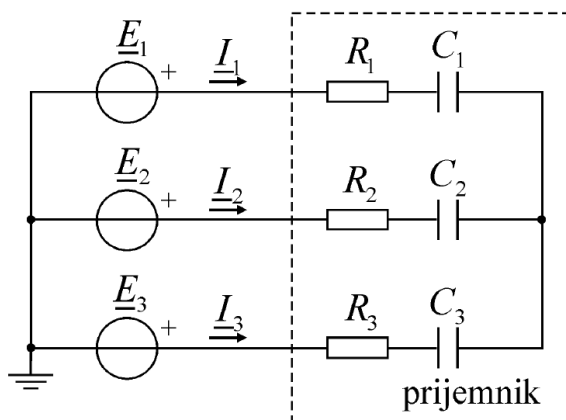
d) Sve struje imaju iste efektivne vrednosti i kasne za naponima generatora za isti ugao od $72,3^\circ$. Fazorski dijagram struja i napona generatora prikazan je na slici 4-17.



Slika 4-17 Fazorski dijagram faznih elektromotornih sila i struja

4.13 U kolu sa slike 4-18 poznate su efektivne vrednosti elektromotornih sila $E_1=E_2=E_3=230$ V, otpornosti $R_1=R_2=R_3=10$ Ω , kao i kapacitivnosti prijemnika $C_1=C_2=C_3=100$ μ F. Frekvencija je jednaka frekvenciji gradske mreže (50 Hz). Odrediti:

- kompleksne predstavnike struja trofaznog prijemnika,
- kompleksni napon na otporniku R_2 ,
- kompleksni napon na kondenzatoru C_3 ,
- na istom fazorskom dijagramu nacrtati struje i napone generatora.



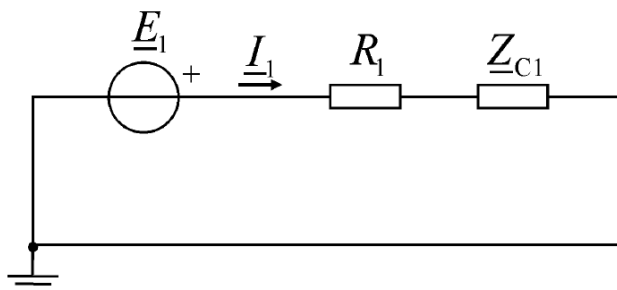
Slika 4-18 Simetrično kolo sa kapacitivnim potrošačem vezanim u "zvezdu"

Rešenje:

a) Frekvencija gradske mreže iznosi 50 Hz. Impedanse kalema jednake su:

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_{C3} = -j \frac{1}{\omega C_1} = -j \frac{1}{2\pi f C_1} = -j \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j31,85 \Omega$$

Obzirom da je sistem simetričan i da su generator i prijemnik vezani u "zvezdu", analiza sistema može da se sprovede svođenjem na jednu fazu (slika 4-19).



4-19 Svođenje kola na jednu fazu

Struja u prvoj fazi kola se izračunava:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \underline{Z}_{C1}} = \frac{230e^{j0}}{20 - j31,85} = \frac{230e^{j0}}{\sqrt{20^2 + 31,85^2} e^{j \arctg \frac{-31,85}{20}}} = 6,1e^{j57,9} \text{ A}$$

Ostale struje imaju isti intenzitet kao struja $\underline{I}_1$, samo fazno kasne za 120, odnosno 240 stepeni:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120} = 6,1e^{-j62,1} \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240} = 6,1e^{-j182,1} \text{ A}$$

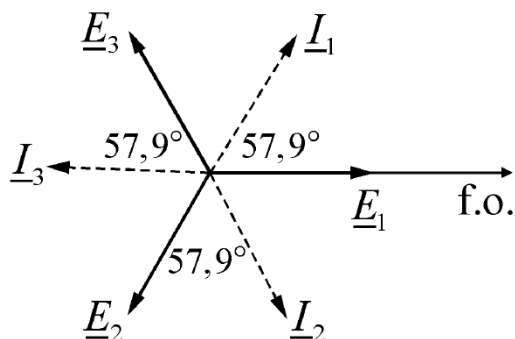
b) Kompleksni napon na otporniku R_2 je:

$$\underline{U}_{R2} = R_2 \cdot \underline{I}_2 = 20 \cdot 6,1e^{-j62,1} = 122e^{-j62,1} \text{ V}$$

c) Kompleksni napon na impedansi $\underline{Z}_{C1}$ jednak je:

$$\underline{U}_{C3} = \underline{Z}_{C1} \cdot \underline{I}_3 = -j31,85 \cdot 6,1e^{-j182,1} = 31,85e^{-j90} \cdot 6,1e^{-j182,1} = 194,3e^{-j271,1} \text{ V}$$

d) Sve struje imaju iste efektivne vrednosti i prednjače za naponima generatora za isti ugao od $57,9^\circ$. Fazorski dijagram struja i napona generatora prikazan je na slici 4-20.



Slika 4-20 Fazorski dijagram faznih elektromotornih sila i struja

5 ELEKTRIČNE INSTALACIJE

5.1 Izračunati nominalnu struju monofaznog termičkog prijemnika snage $P_n=1$ kW, priključenog na niskonaponsku električnu mrežu nominalnog napona $U_n=230$ V.

Rešenje:

Kako je u pitanju čisto otporan potrošač, on razvija samo aktivnu snagu određenu izrazom:

$$P_n = U_n \cdot I_n$$

Nominalna struja potrošača je:

$$I_n = \frac{P_n}{U_n} = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 4,35 \text{ A}$$

5.2 Izračunati nominalnu struju trofaznog potrošača snage $P_n=6$ kW i faktora snage $\cos\varphi=0,9$ koji je priključen na niskonaponsku električnu mrežu nominalnog napona $U_n=400$ V.

Rešenje:

Potrošač osim aktivne snage razvija i reaktivnu snagu, pa će njegova nominalna struja zavisiti i od aktivne i od reaktivne snage, tj. od njegove prividne snage koja je određena izrazom:

$$S_n = \frac{P_n}{\cos \varphi}$$

Prividna snaga trofaznog potrošača je definisana relacijom:

$$S_n = \sqrt{3} \cdot U_n \cdot I_n$$

gde su:

U_n - nominalni linijski napon,

I_n - struja u napojnomvodu svake od faza.

Izjednačavanjem prethodne dve relacije, dobija se izraz za nominalnu struju motora:

$$I_n = \frac{P_n}{\sqrt{3} \cdot U_n \cdot \cos \varphi}$$

$$I_n = \frac{6 \cdot 10^3 \text{ W}}{\sqrt{3} \cdot 400 \text{ V} \cdot 0,9} = 9,62 \text{ A}$$

5.3 Trofazni asinhroni motor pokreće radnu mašinu stepena iskorišćenja $\eta=0,8$ i korisne snage $P_{RM}=9 \text{ kW}$. Motor faktora snage $\cos \varphi=0,7$ treba priključiti na niskonaponsku električnu mrežu napona $U_n=400 \text{ V}$. Iz tabele 5.1 izabrati tromi topljivi osigurač koji je potrebno ugraditi na početak napojnog voda kojim je motor povezan na mrežu. Iz tabele 5.2 izabrati poprečni presek bakarnog provodnika kojim napojni vod treba da bude izveden.

Tabela 5.1 Nominalne struje niskoučinskih tromih osigurača

I_{os}	10 A	16 A	20 A	25 A	35 A	50 A
----------	------	------	------	------	------	------

Tabela 5.2 Trajno dozvoljene struje bakarnih provodnika

$S [\text{mm}^2]$	1,5	2,5	4	6	10
$I_n [\text{A}]$	13	17,5	23	29	39

Rešenje:

Snaga koju motor uzima iz mreže:

$$P_n = \frac{P_{RM}}{\eta}$$

Shodno izrazu za nominalnu struju iz zadatka 5.2, struja u svakoj od faza napojnog voda je:

$$I_n = \frac{P_n / \eta}{\sqrt{3} \cdot U_n \cdot \cos \varphi}$$
$$I_n = \frac{9 \cdot 10^3 \text{ W} / 0,8}{\sqrt{3} \cdot 400 \text{ V} \cdot 0,7} = 23,20 \text{ A}$$

Nominalna struja osigurača mora da bude veća od nominalne struje potrošača. Kako se osigurači izrađuju sa standardizovanim vrednostima nominalnih struja (tabela 5.1), potrebno je izabrati osigurač sa što manjom nominalnom strujom, a da mu pritom nominalna struja bude veća od struje potrošača. Prema tabeli 5.1, usvajamo osigurač nominalne struje:

$$I_{os} = 25 \text{ A}$$

Kako bi osigurač imao funkciju zaštite napojnog voda od preopterećenja, trajno dozvoljena struja napojnog voda mora biti veća od nominalne struje osigurača. Prema tabeli 5.2, usvajamo provodnik poprečnog preseka:

$$S = 6 \text{ mm}^2$$

Kao zaključak o izboru poprečnog preseka provodnika i pripadajućeg osigurača možemo formulisati relaciju:

$$I_n < I_{os} < I_{tr doz}$$

gde je:

I_n - nominalna struja potrošača,

I_{os} - nominalna struja osigurača,

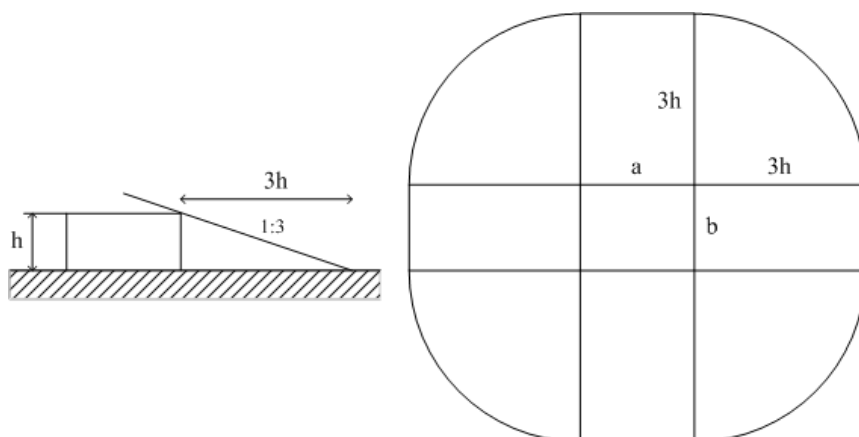
$I_{tr doz}$ - trajno dozvoljena struja provodnika.

5.4 Izračunati ekvivalentnu prihvatnu površinu objekta sa ravnim krovom visine 4 m čija je osnova pravougaonik dužine $a=8$ m i širine $b=6$ m. Objekat je usamljen i nalazi se na ravnom tlu. Koliko bi bilo relativno povećanje ekvivalentne prihvatne površine ovog objekta ako bi se na njemu dogradio kosi krov na dve vode visine $k=2$ m, paralelan dužoj stranici osnove objekta?

Rešenje:

Ekvivalentna prihvatna površina objekta (A_e) se definiše kao površina tla koja sadrži sve tačke u koje bi, da nema objekta, mogli da udare gromovi koji bi pod nagibom ne manjim od 1:3 udarili u sam objekat.

Način konstruisanja i izgled linije koja određuje ekvivalentnu prihvatnu površinu su prikazani na slici 5-1.



Slika 5-1 Ekvivalentna prihvatna površina objekta

Kao što se može videti sa slike 5-1, ekvivalentna prihvatna površina se sastoji iz:

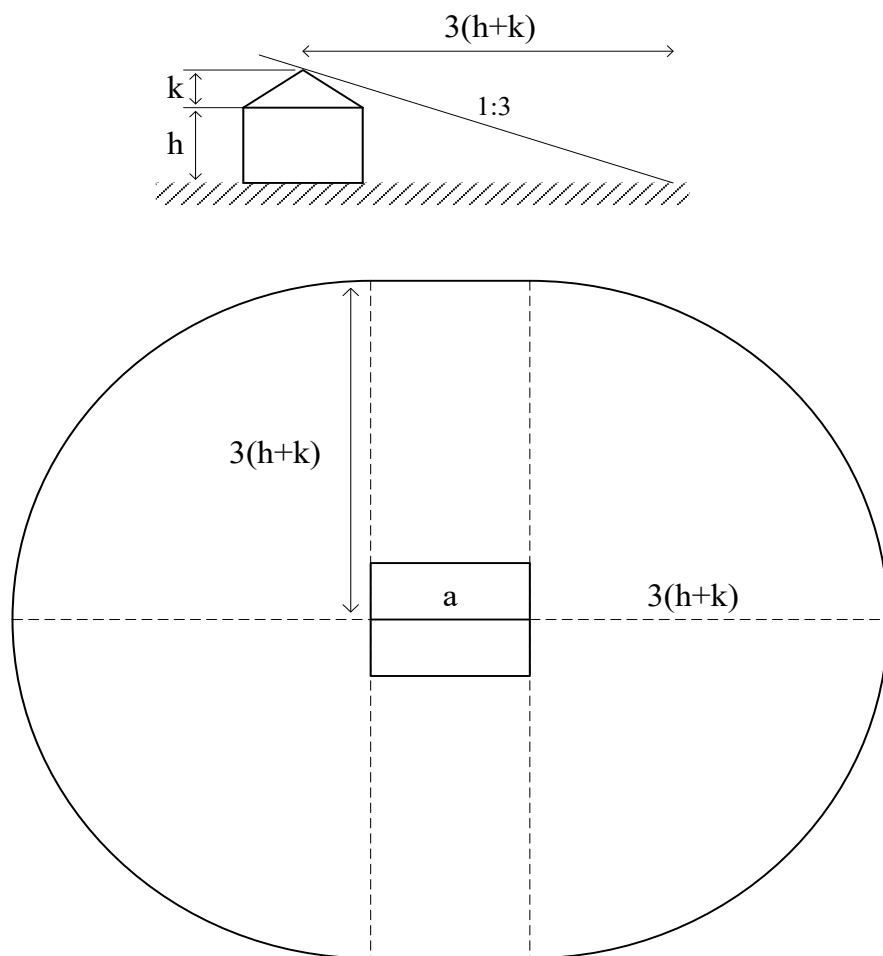
- jednog pravougaonika dimenzija a i b ,
- dva pravougaonika dimenzija $3h$ i a ,
- dva pravougaonika dimenzija $3h$ i b ,
- četiri četvrtine kruga poluprečnika $3h$.

Ekvivalentna površina objekta sa ravnim krovom iznosi:

$$A_e^I = a \cdot b + 2(a \cdot 3h) + 2(b \cdot 3h) + (3h)^2 \pi$$

$$A_e^1 = a \cdot b + 6h(a+b) + 9\pi h^2$$

Dodavanjem kosog krova objektu i ekvivalentna prihvatna površina dobijaju izgled prikazan na slici 5-2.



Slika 5-2 Ekvivalentna prihvatna površina objekta sa krovom

U ovom slučaju se ekvivalentna prihvatna površina sastoji od:

- dva pravougaonika dimenzija $3(h+k)$ i a ,
- četiri četvrtine kruga poluprečnika $3(h+k)$.

Ekvivalentna površina objekta sa kosim krovom iznosi:

$$A_e^2 = 2 \cdot a \cdot (h + k) + (3(h + k))^2 \pi$$

$$A_e^2 = 2 \cdot 8 \text{ m} \cdot 3 \cdot (4 \text{ m} + 2 \text{ m}) + (3 \cdot (4 \text{ m} + 2 \text{ m}))^2 \pi$$

$$A_e^2 = 1305,88 \text{ m}^2$$

Relativno povećanje ekvivalentne prihvatne površine je:

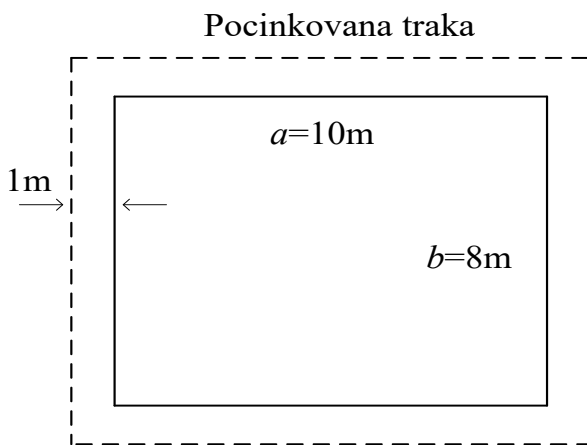
$$\frac{A_e^2}{A_e^1} = \frac{1305,88 \text{ m}^2}{836,39 \text{ m}^2} = 1,56$$

Dodavanjem kosog krova se ekvivalentna prihvatna površina objekta povećala za 56%.

5.5 Uzemljivač stambenog objekta je izveden u obliku pravougaone konture od pocinkovane gvozdene trake dimenzija poprečnog preseka 25 mm x 4 mm. Traka je ukopana na dubinu od 80 cm i udaljena 1 m od osnove objekta. Objekat ima pravougaonu osnovu dimenzija 10 m x 8 m. Izračunati otpornost uzemljenja ako je tlo u koje je ukopana traka homogeno i ima specifičnu otpornost od 100 Ωm .

Rešenje:

Izgled osnove objekta i konture uzemljivača je prikazan na slici 5-3.



Slika 5-3 Izgled konture uzemljivača

Otpornost uzemljenja uzemljivača u obliku pravougaone konture je određena izrazom:

$$R_k = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{8L^2}{\pi p h}$$

gde je:

ρ - specifična otpornost tla,

L - ukupna dužina konture,

p - duža stranica poprečnog preseka trake,

h - dubina na koju je ukopana kontura uzemljivača.

Ukupna dužina konture uzemljivača je:

$$L = 2(a + b) = 2 \cdot (10 \text{ m} + 8 \text{ m}) = 44 \text{ m}$$

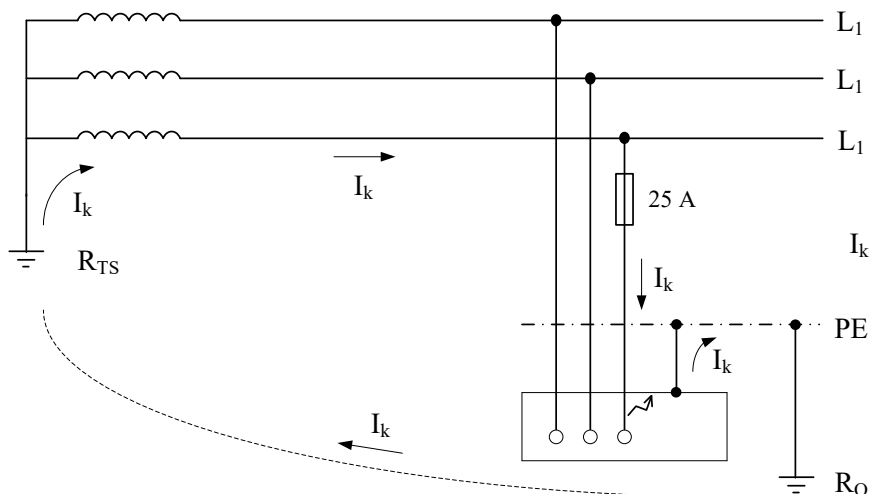
Otpornost uzemljenja je:

$$R_k = \frac{100 \Omega \text{m}}{2\pi \cdot 44 \text{ m}} \ln \frac{8 \cdot (44 \text{ m})^2}{\pi \cdot 0,025 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ m}} = 4,49 \Omega$$

5.6 U potrošaču smeštenom u objektu u kome je primenjen TT sistem zaštite od indirektnog dodira došlo je do kratkog spoja jednog od faznih provodnika sa kućištem potrošača. Da li je topljivi osigurač nominalne struje 25 A efikasna zaštita, ako je otpornost uzemljenja transformatorske stanice $R_{TS}=3 \Omega$, a otpornost uzemljenja objekta $R_0=8 \Omega$. Smatrati da su impedanse namotaja transformatora kao i faznih i zaštitnog provodnika zanemarljive. Ugradnja dodatnih zaštitnih elemenata nije predviđena.

Rešenje:

Zaštitno uzemljenje (TT sistem zaštite) se ostvaruje povezivanjem pomoću zaštitnih provodnika svih izloženih elektroprovodnih delova instalacije koji u normalnom pogonu nisu pod naponom sa zemljom, odnosno zajedničkim uzemljivačem objekta. Šematski prikaz je dat na slici 5-4.



Slika 5-4. Šematski prikaz TT sistema zaštite

Pri kratkom spoju faznog provodnika i kućišta uređaja struja kratkog spoja se zatvara petljom kvara koja se sastoji od transformatora, faznog provodnika do mesta kvara, zaštitnog provodnika od mesta kvara do uzemljivača (otpornosti uzemljenja objekta R_0), povratnog puta kroz zemlju između uzemljivača objekta i uzemljivača neutralne tačke sekundara transformatora (otpornosti R_{TS}). Struja kratkog spoja je:

$$I_k = \frac{U_f}{Z_k}$$

gde je:

Z_k - impedansa petlje kvara,

U_f - nominalni fazni napon.

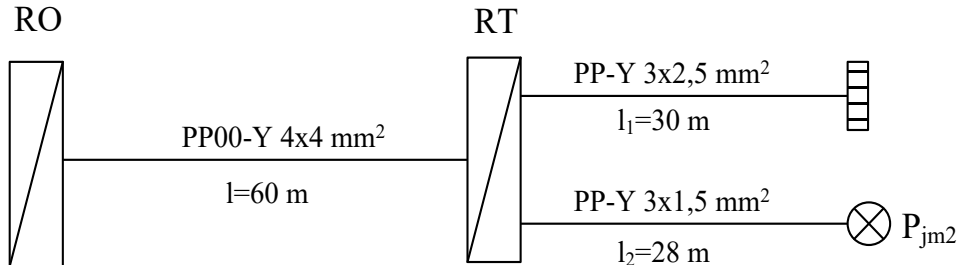
Kako se impedanse namotaja transformatora kao i impedansa faznog i zaštitnog provodnika mogu zanemariti, ukupna impedansa petlje kvara se sastoji iz redno vezanih otpornosti uzemljenja objekta i uzemljenja transformatorske stanice, pa je struja kratkog spoja:

$$I_k = \frac{U_f}{R_0 + R_{TS}}$$

$$I_k = \frac{230 \text{ V}}{8 \Omega + 3 \Omega} = 20,91 \text{ A}$$

Pošto je $I_k < 25 \text{ A}$, jasno je da osigurač neće isključiti ovo strujno kolo i samim tim ne predstavlja efikasnu zaštitu od indirektnog dodira.

5.7 Razvodna tabla RT se napaja iz razvodnog ormana RO provodnikom tipa PP00-Y 4x4 mm² dužine $l=60 \text{ m}$, kao što je prikazano na slici 5-5. Iz razvodne table se napajaju dva potrošača: termički uređaj maksimalne jednovremene snage 4000 W bakarnim provodnikom PP-Y 3x2,5 mm² dužine 30 m i grupa od 6 sijalica sa užarenim vlaknom, svaka snage 300 W, bakarnim provodnikom PP-Y 3x1,5 mm² dužine 28 m. Proceniti da li su provodnici od RT do potrošača korektno izabrani sa stanovišta dozvoljenog pada napona.



Slika 5-5 Instalacija od RO do potrošača

Rešenje:

Pošto se instalacija napaja iz niskonaponske mreže, dozvoljeni pad napona od tačke napajanja do prijemnika iznosi 3% za strujna kola osvetljenja, odnosno 5% za ostala strujna kola. Taj pad napona se sastoji od zbira pada napona od razvodnog ormana do razvodne table i pada napona od transformatora do svakog od potrošača.

Kako su u pitanju isključivo omska opterećenja i provodnik poprečnog preseka manjeg od 16 mm^2 , pad napona na trofaznom vodu od razvodnog ormara do razvodne table je dat relacijom:

$$\Delta u_{RO-RT}(\%) = 100 \cdot \frac{P \cdot l}{\sigma \cdot S \cdot U_n^2}$$

gde je:

P - aktivna snaga svih potrošača koji se napajaju vodom,

l - dužina voda,

σ - specifična provodnost materijala,

S - površina poprečnog preseka provodnika,

U_n - nominalni linijski napon.

$$\Delta u_{RO-RT}(\%) = 100 \cdot \frac{(P_{jm1} + P_{jm2}) \cdot l}{\sigma \cdot S \cdot U_n^2}$$

Jednovremena maksimalna snaga termičkog uređaja:

$$P_{jm1} = 4000 \text{ W}$$

Jednovremena maksimalna snaga izvora svetlosti:

$$P_{jm2} = 6 \cdot 300 \text{ W} = 1800 \text{ W}$$

Ukupan pad napona od razvodne table do razvodnog ormara:

$$\Delta u_{RO-RT} = 100 \cdot \frac{(4000 \text{ W} + 1800 \text{ W}) \cdot 60 \text{ m}}{56 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2} \cdot 4 \text{ mm}^2 \cdot (400 \text{ V})^2} = 0,97 \%$$

Pad napona na monofaznim kolima od razvodne table do potrošača je dat relacijom:

$$\Delta u(\%) = 200 \cdot \frac{P \cdot l}{\sigma \cdot S \cdot U_n^2}$$

gde je:

P - aktivna snaga svih potrošača koji se napajaju vodom,

l - dužina voda,

σ - specifična provodnost materijala,

S - površina poprečnog preseka provodnika,

U_n - nominalni linijski napon.

Pad napona od razvodne table do termičkog uređaja je:

$$\Delta u_1(\%) = \Delta u_{RO-RT} + 200 \cdot \frac{P_{jm1} \cdot l_1}{\sigma \cdot S_1 \cdot U_n^2}$$

$$\Delta u_1 = 0,97\% + 200 \cdot \frac{4000 \text{ W} \cdot 30 \text{ m}}{56 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2} \cdot 2,5 \text{ mm}^2 \cdot (230 \text{ V})^2} = 4,21 \%$$

Pad napona od razvodne table do grupe sijalica je:

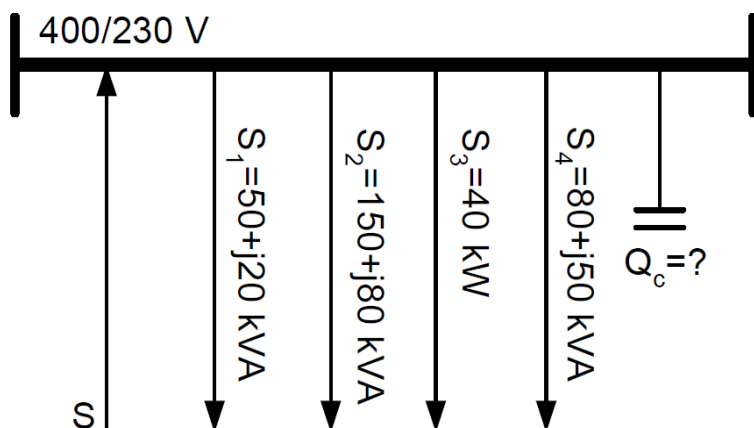
$$\Delta u_2(\%) = \Delta u_{RO-RT} + 200 \cdot \frac{P_{jm2} \cdot l_2}{\sigma \cdot S_2 \cdot U_n^2}$$

$$\Delta u_2 = 0,97\% + 200 \cdot \frac{1800 \text{ W} \cdot 28 \text{ m}}{56 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2} \cdot 1,5 \text{ mm}^2 \cdot (230 \text{ V})^2} = 3,24 \%$$

Na osnovu izračunatih vrednosti se može zaključiti:

- $\Delta u_1 < 5 \%$ $\Rightarrow$ provodnik PP-Y 3x2,5 mm² je dobro izabran,
- $\Delta u_2 > 3 \%$ $\Rightarrow$ provodnik PP-Y 3x1,5 mm² nije dobro izabran.

5.8 Odrediti snagu kondenzatorske baterije potrebne za kompenzaciju grupe potrošača na sabirnici S (slika 5-6). Faktor snage postrojenja nakon kompenzacije treba da bude veći ili jednak od 0,95.



Slika 5-6 Sabirnica sa grupom potrošača

Rešenje:

Da bismo izvršili grupnu kompenzaciju grupe potrošača, potrebno je da najpre saberemo njihove prividne snage:

$$S_{uk} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S_{uk} = (50 + j20) + (150 + j80) + 40 + (80 + j50)$$

$$S_{uk} = 320 + j150 \text{ kVA}$$

Faktor snage izračunavamo kao:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{320}{\sqrt{320^2 + 150^2}} = 0,905$$

Odakle dobijamo vrednost ugla φ pre ugradnje kondenzatorske baterije:

$$\varphi = \arccos(0,905) = 25,18^\circ$$

Prema uslovu zadatka, tražena vrednost kompenzacije je $\cos \varphi_k \geq 0,95$.

Potrebna snaga kondenzatorske baterije, u funkciji sadašnjeg i željenog faktora snage računa se po formuli:

$$Q_c = P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_K)$$

gde su:

Q_c - snaga kondenzatorske baterije,

P - ukupna aktivna snaga,

$\operatorname{tg} \varphi$ - tangens argumenta prividne snage pre kompenzacije,

$\operatorname{tg} \varphi_K$ - tangens argumenta prividne snage nakon kompenzacije.

Dalje imamo:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(25,18) = 0,4701$$

$$\operatorname{tg} \varphi_K = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_K}}{\cos \varphi_K} = \frac{\sqrt{1 - 0,95^2}}{0,95} = 0,3286$$

Konačno, imamo sve podatke potrebne za izračunavanje snage tražene kondenzatorske baterije:

$$Q_c = P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_K) = 320 \cdot (0,4701 - 0,3286) = 45,28 \text{ kVAr}.$$

5.9 U jednoj računarskoj laboratoriji se nalazi 10 fluo svetiljki, svaka sa po dve cevi snage 36 W. Faktor snage ovog osvetljenja je 0,55, a snaga balasta $P_b=10$ W. Nominalni fazni napon iznosi 230 V. Odrediti vrednost kapaciteta kondenzatorske baterije potrebne da se:

a) faktor snage popravi na vrednost $\cos \varphi \geq 0,95$,

b) izvrši potpuna popravka faktora snage.

Rešenje:

a) Ukupna aktivna snaga jednaka je zbiru aktivnih snaga svetiljki i balasta:

$$P_u = \sum P_{\text{svetiljki}} + \sum P_{\text{balasta}} = 10 \cdot 2 \cdot 36 + 10 \cdot 2 \cdot 12 = 960 \text{ W}$$

Kako faktor snage potrošača treba popraviti sa $\cos \varphi = 0,55$ na $\cos \varphi \geq 0,95$, potrebna snaga kondenzatorske baterije iznosi:

$$Q_u \geq P_u (tg\varphi - tg\varphi_z) = P_u \left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_z} - 1} \right)$$

$$Q_u \geq P_u \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1}$$

$$Q_u \geq 960 \left(\sqrt{\frac{1}{0,55^2} - 1} - \sqrt{\frac{1}{0,95^2} - 1} \right) = 1142,4 \text{ VAr}$$

Pošto se radi o monofaznom prijemniku, vrednost kapaciteta kondenzatorske baterije iznosi:

$$C_k = \frac{Q_k}{\omega \cdot U^2} = \frac{1142,4}{314 \cdot 230^2} = 68,8 \text{ } \mu\text{F}$$

b) Za potpunu popravku faktora snage potrebna je kondenzatorska baterija snage:

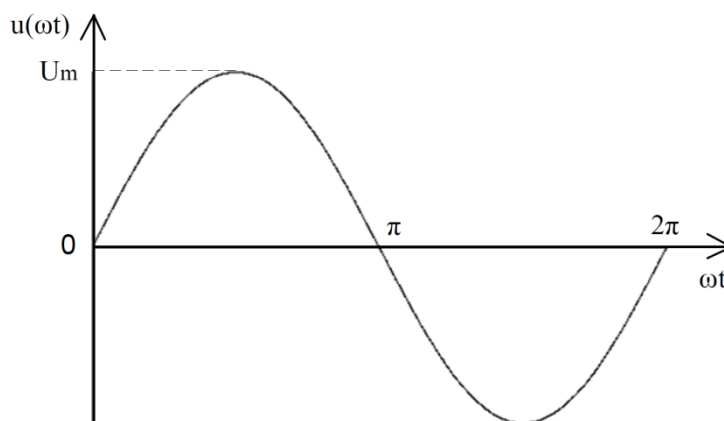
$$Q_u \geq P_u \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = 960 \sqrt{\frac{1}{0,55^2} - 1} = 1457,75 \text{ VAr}$$

Vrednost kapaciteta kondenzatorske baterije potrebne za potpunu popravku faktora snage iznosi:

$$C_u = \frac{Q_u}{\omega \cdot U^2} = \frac{1457,75}{314 \cdot 230^2} = 87,7 \text{ } \mu\text{F}$$

6 ELEKTRIČNI PRETVARAČI

6.1 Izračunati srednju i efektivnu vrednost idealnog sinusnog napona amplitude U_m . Analitički oblik idealnog sinusnog napona je $u(t)=U_m\sin(\omega t)$, gde je U_m amplituda napona, a ω kružna učestanost napona. Talasni oblik idealnog sinusnog napona je prikazan na slici 6-1.



Slika 6-1 Talasni oblik idealnog sinusnog napona

Rešenje:

Srednja vrednost napona U_{AVG} (eng. *Average*) se definiše na sledeći način:

$$U_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt$$

odnosno:

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} [\cos \cos(2\pi) - \cos \cos(0)] = 0$$

Efektivna vrednost napona U_{RMS} (eng. *Root Mean Square*) se definiše na sledeći način:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_m \cdot \sin(\omega t)]^2 \cdot dt}$$

odnosno:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_m \cdot \sin(\omega t)]^2 \cdot d(\omega t)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2\pi} \int_0^\pi \sin^2(\omega t) \cdot d(\omega t)}$$

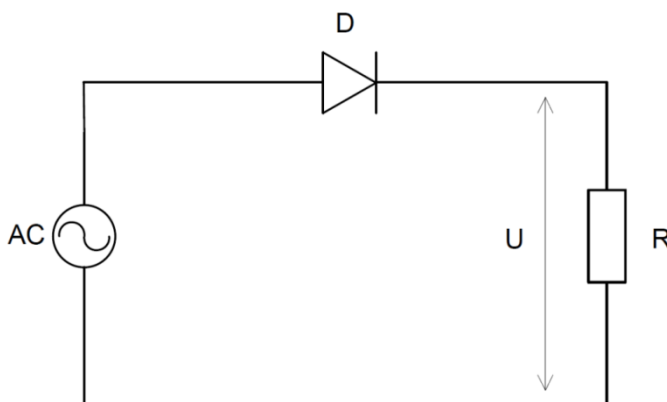
$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cdot d(\omega t)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} d(\omega t) - \int_0^{2\pi} \cos(2\omega t) \cdot d(\omega t) \right]}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4\pi} [(2\pi - 0) - (\sin(4\pi) - \sin(0))]} = U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

6.2 Termički potrošač otpornosti $R=10 \, \Omega$ je preko idealne diode (polutalasnog diodnog ispravljača) povezan na izvor sinusnog naizmeničnog napona amplitude $U_m=325 \, V$, kao što je prikazano na slici 6-2.

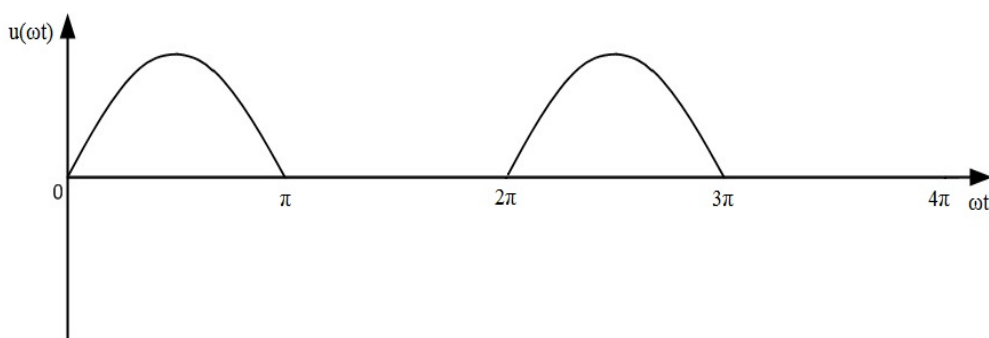
- Nacrtati talasne oblike napona na potrošaču i struje kroz potrošač.
- Izračunati srednju vrednost napona na potrošaču i struje kroz potrošač.
- Izračunati efektivnu vrednost napona na potrošaču i struje kroz potrošač.
- Izračunati snagu koja se razvija na potrošaču.



Slika 6-2 Polutalasni diodni ispravljač sa otpornim opterećenjem

Rešenje:

- Tokom pozitivne poluperiode napona izvora dioda je direktno polarisana i nalazi se u provodnom stanju, pa je opterećenje direktno priključeno na izvor napajanja. Tokom negativne poluperiode napona izvora dioda je negativno polarisana i nalazi se u neprovodnom stanju, pa opterećenje nije povezano na napajanje. Talasni oblik napona je prikazan na slici 6-3.



Slika 6-3 Talasni oblik napona na opterećenju

- Srednja vrednost napona je definisana izrazom:

$$U_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt$$

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) \right)$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi))$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} \cdot 2 = \frac{U_m}{\pi} = \frac{325V}{\pi} = 103,45 \text{ V}$$

Srednja vrednost struje je:

$$I_{AVG} = \frac{U_{AVG}}{R} = \frac{103,45V}{10\Omega} = 10,34 \text{ A}$$

c) Efektivna vrednost napona je definisana izrazom:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [U_m \cdot \sin(\omega t)]^2 \cdot d(\omega t)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cdot d(\omega t)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4\pi} \left[\int_0^{\pi} d(\omega t) - \int_0^{\pi} \cos(2\omega t) \cdot d(\omega t) \right]}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4\pi} \left[(\pi - 0) - (\sin(2\pi) - \sin(0)) \right]}$$

$$U_{RMS} = \frac{U_m}{2} = \frac{325V}{2} = 162,5 \text{ V}$$

Efektivna vrednost struje je:

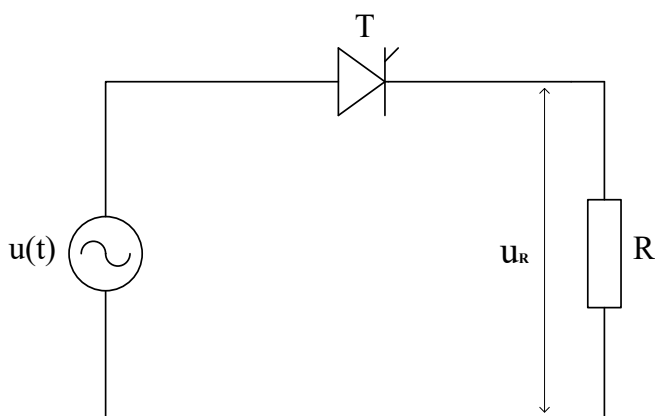
$$I_{RMS} = \frac{U_{RMS}}{R} = \frac{162,5V}{10\Omega} = 16,25 \text{ A}$$

d) Snaga koja se oslobodi na potrošaču je:

$$P = \frac{U_{RMS}^2}{R} = \frac{(162,5V)^2}{10\Omega} = 2640 \text{ W}$$

6.3 Na slici 6-4 je prikazan polutalasni tiristorski ispravljač sa omskim opterećenjem. Tiristor je idealan, a ispravljač se napaja naponom $u(t) = 230\sqrt{2}\sin(\omega t)$. Potrošač je otpornosti $R = 200 \Omega$.

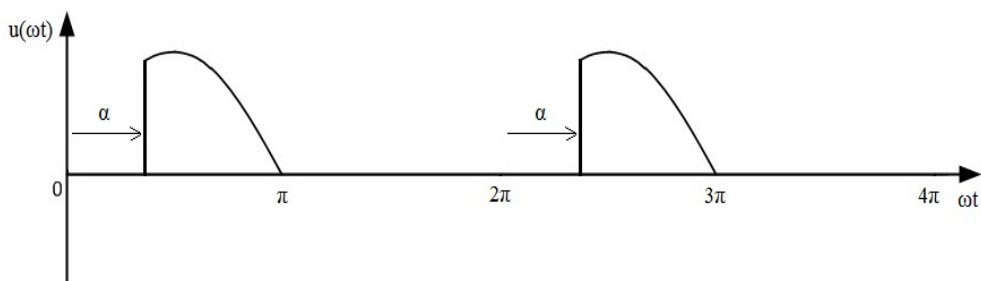
- Za uglove upravljanja od 60° i 120° izračunati srednju i efektivnu vrednost napona na opterećenju i struje kroz opterećenje.
- Nacrtati talasni oblik napona na tiristoru.
- Da li vrednost maksimalnog inverznog napona na tiristoru zavisi od ugla upravljanja?



Slika 6-4 Polutalasni tiristorski ispravljač sa omskim opterećenjem

Rešenje:

a) Da bi tiristor T vodio, on mora biti direktno polarisan (pozitivna poluperioda ulaznog napona) i pobudni signal za uključenje na gejt mora biti takav da ga dovede u provodno stanje. Ugao upravljanja α se računa od trenutka kada su se stekli uslovi da tiristor provede, odnosno od trenutka prolaska mrežnog napona kroz nulu i to sa pozitivnim nagibom. Tiristor se isključuje sam od sebe (bez pobudnog impulsa na gejt), kada mu struja postane jednaka nuli. Talasni oblik napona na potrošaču i struje kroz potrošač za ugao upravljanja α je prikazan na slici 6-5.



Slika 6-5 Talasni oblik napona na opterećenju

Srednja vrednost napona na opterećenju je:

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} \cdot (\cos(\alpha) - \cos(\pi))$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} \cdot (1 + \cos(\alpha))$$

Srednja vrednost struje kroz opterećenje je:

$$I_{AVG} = \frac{U_{AVG}}{R}$$

Efektivna vrednost napona na opterećenju je:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} [U_m \cdot \sin(\omega t)]^2 \cdot d(\omega t)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cdot d(\omega t)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4\pi} \left[\int_{\alpha}^{\pi} d(\omega t) - \int_{\alpha}^{\pi} \cos(2\omega t) \cdot d(\omega t) \right]}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4\pi} \left[(\pi - \alpha) - \frac{1}{2}(\sin(2\pi) - \sin(\alpha)) \right]}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{U_m^2}{4} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right]}$$

$$U_{RMS} = \frac{U_m}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right]}$$

Efektivna vrednost struje kroz opterećenje je:

$$I_{RMS} = \frac{U_{RMS}}{R}$$

Za ugao upravljanja od 60° srednja vrednost napona iznosi:

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} \cdot (1 + \cos(\alpha))$$

$$U_{AVG} = \frac{230\sqrt{2}}{2\pi} \cdot (1 + \cos 60^\circ) = \frac{230\sqrt{2}}{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 77,65 \text{ V}$$

Srednja vrednost struje iznosi:

$$I_{AVG} = \frac{U_{AVG}}{R}$$

$$I_{AVG} = \frac{77,65 \text{ V}}{200 \Omega} = 388 \text{ mA}$$

Efektivna vrednost napona iznosi:

$$U_{RMS} = \frac{U_m}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}\right]}$$

$$U_{RMS} = \frac{230\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{2\pi/3}{\pi} + \frac{\sin 4\pi/3}{2\pi}\right]}$$

$$U_{RMS} = \frac{230\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right]} = 145,87 \text{ V}$$

Efektivna vrednost struje iznosi:

$$I_{RMS} = \frac{U_{RMS}}{R}$$

$$I_{RMS} = \frac{145,87 \text{ V}}{200 \Omega} = 729 \text{ mA}$$

Za ugao upravljanja od 120° srednja vrednost napona iznosi:

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{2\pi} \cdot (1 + \cos(\alpha))$$

$$U_{AVG} = \frac{230\sqrt{2}}{2\pi} \cdot (1 + \cos 120^\circ) = \frac{230\sqrt{2}}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25,88 \text{ V}$$

Srednja vrednost struje iznosi:

$$I_{AVG} = \frac{U_{AVG}}{R}$$

$$I_{AVG} = \frac{25,88 \text{ V}}{200 \Omega} = 129 \text{ mA}$$

Efektivna vrednost napona iznosi:

$$U_{RMS} = \frac{U_m}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}\right]}$$

$$U_{RMS} = \frac{230\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{2\pi/3}{\pi} + \frac{\sin 4\pi/3}{2\pi}\right]}$$

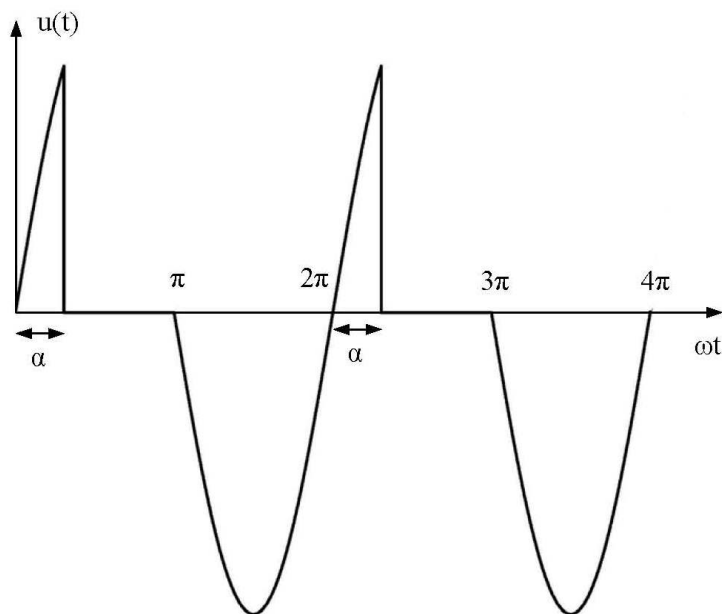
$$U_{RMS} = \frac{230\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right]} = 71,91 \text{ V}$$

Efektivna vrednost struje iznosi:

$$I_{RMS} = \frac{U_{RMS}}{R}$$

$$I_{RMS} = \frac{71,91 \text{ V}}{200 \Omega} = 360 \text{ mA}$$

b) Odgovarajući talasni oblik je prikazan na slici 6-6.



Slika 6-6 Talasni oblik napona na tiristoru

Kako je u pitanju idealan tiristor, napon na njegovim krajevima (između anode i katode) je jednak nuli kada se on nalazi u provodnom stanju. Kada je tiristor direktno polarisan, a još nije dobio nalog za uključenje, napon između anode i katode je pozitivan i jednak trenutnoj vrednosti mrežnog napona. Tokom negativne poluperiode, napon na tiristoru je negativan (inverzni napon) i jednak je trenutnoj vrednosti mrežnog napona.

c) Sa slike 6-6 se vidi da napon na tiristoru tokom negativne poluperiode (inverzan napon) ne zavisi od vrednosti ugla upravljanja i da je njegova maksimalna vrednost uvek jednaka maksimalnoj vrednosti mrežnog napona U_m tokom direktno polarisanog tiristora za ugao upravljanja $\alpha=\pi/2$.

6.4 Akumulatorska baterija sa kapacitetom od $Q_{Ah}=120$ Ah napaja potrošač koji ima stalnu komponentu potrošnje od $I_{stac}=0,5$ A i pored toga troši struju od $I_{imp}=6$ A u impulsima trajanja $t_{imp}=2$ s, svakih $t_{pon}=2$ minuta. Koliko vremena se ovaj potrošač može napajati iz akumulatorske baterije?

Rešenje:

Srednja vrednost struje potrošača je određena izrazom:

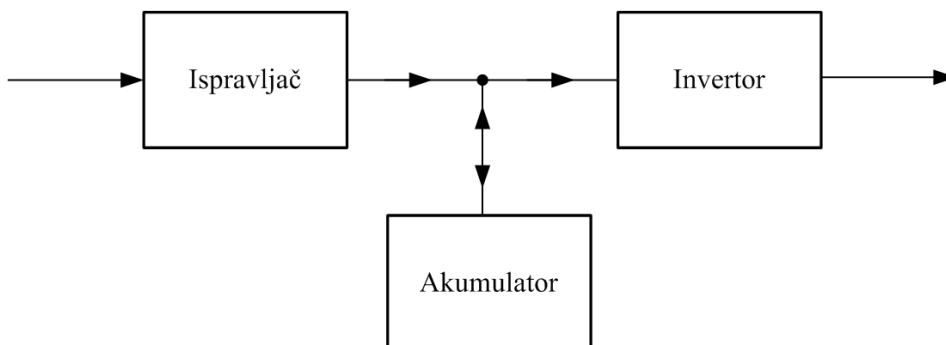
$$I_{sr} = I_{stac} + \frac{1}{t_{pon}} \cdot I_{imp} \cdot t_{imp}$$

$$I_{sr} = 0,5 \text{ A} + \frac{1}{2 \cdot 60 \text{ s}} \cdot 6 \text{ A} \cdot 2 \text{ s} = 0,6 \text{ A}$$

Vreme tokom koga baterija može da napaja ovaj potrošač je:

$$t_{rad} = \frac{Q_{Ah}}{I_{sr}} = \frac{120 \text{ Ah}}{0,6 \text{ A}} = 200 \text{ h}$$

6.5 Računar se napaja preko besprekidnog izvora prema slici 6-7. Nakon dužeg ispada akumulator nazivnog napona $U_{ak}=48$ V, kapaciteta $Q_{Ah}=50$ Ah se potpuno ispraznio. Invertor radi sa ulaznom snagom od $P_{inv}=200$ W. Dimenzionisati ispravljač po struji i snazi, tako da se akumulator napuni za 5 sati nakon uspostavljanja mrežnog napona.



Slika 6-7 Sistem besprekidnog napajanja

Rešenje:

Da bi se akumulator napunio za 5 časova, ispravljač mora da obezbedi, struju i snagu određenu relacijama:

$$I_{punj} = \frac{Q_{Ah}}{t_{punj}} = \frac{50 \text{ Ah}}{5 \text{ h}} = 10 \text{ A}$$

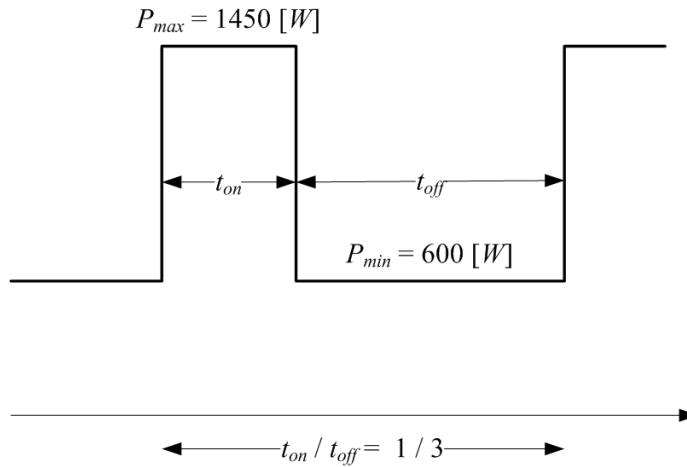
$$P_{punj} = U_{ak} \cdot I_{punj} = 48 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 480 \text{ W}$$

Pošto ispravljač mora da obezbedi i napajanje invertora, njegov izbor treba izvršiti tako da pokriva ukupnu snagu punjenja i potrošnju:

$$P_{ispr} = P_{punj} + P_{inv} = 480 \text{ W} + 200 \text{ W} = 680 \text{ W}$$

$$I_{ispr} = \frac{P_{ispr}}{U_{ak}} = \frac{680 \text{ W}}{48 \text{ V}} = 14,17 \text{ A}$$

6.6 Za napajanje računarske opreme se koristi invertor, a energija se uzima iz akumulatorske baterije nazivnog napona $U_{bat}=60 \text{ V}$. U opremi se nalazi laserski štampač kod kojeg se intermitentno uključuje grejač veće snage. Odnos vremena uključenosti i isključenosti je $t_{on}/t_{off}=1/3$. Usled uključanja grejača dodatna potrošnja uređaja se promeni sa $P_{min}=600 \text{ W}$, na $P_{max}=1450 \text{ W}$. Ovaj režim rada je ilustrovan na slici 6-8. Ostali deo opreme ima konstantnu snagu. Stepen iskorišćenja invertora je $\eta=80\%$. Proračunati potreban kapacitet akumulatora Q_{Ah} , tako da se postiže vreme rada od $t=8 \text{ h}$.



Slika 6-8 Režim rada potrošača

Rešenje:

Radni režim se sastoji iz dva stanja koja karakterišu snage:

$$P_{\text{on}} = P_{\max} \text{ i } P_{\text{off}} = P_{\min}$$

Srednja snaga potrošača je:

$$P_{\text{sr}} = \frac{1}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} \cdot (P_{\text{on}} \cdot t_{\text{on}} + P_{\text{off}} \cdot t_{\text{off}})$$

$$P_{\text{sr}} = \frac{1}{t_{\text{on}} + 3t_{\text{on}}} \cdot (P_{\text{on}} \cdot t_{\text{on}} + P_{\text{on}} \cdot 3t_{\text{on}})$$

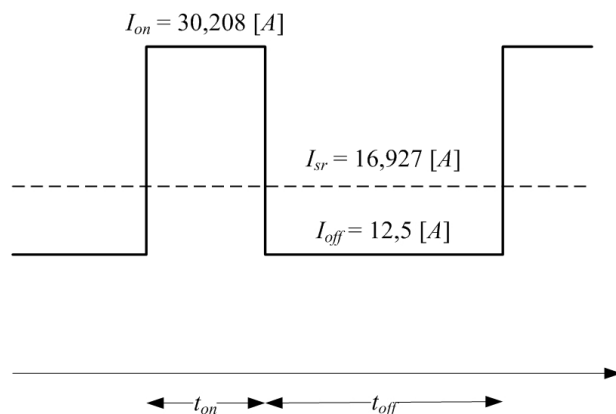
$$P_{\text{sr}} = \frac{1}{4} \cdot (P_{\text{on}} + 3P_{\text{off}}) = \frac{1}{4} \cdot (P_{\max} + 3P_{\min}) = \frac{1}{4} \cdot (1450 \text{ W} + 3 \cdot 600 \text{ W})$$

$$P_{\text{sr}} = 812,5 \text{ W}$$

Srednja struja potrošača je:

$$I_{\text{sr}} = \frac{P_{\text{sr}}}{\eta \cdot U_{\text{bat}}} = \frac{812,5 \text{ W}}{0,8 \cdot 60 \text{ V}} = 16,927 \text{ A}$$

Ekvivalentno strujno opterećenje je prikazano na slici 6-9.



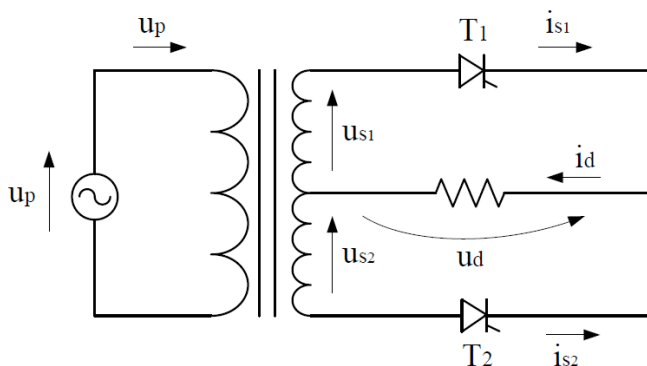
Slika 6-9 Ekvivalentno strujno opterećenje

Potreban kapacitet baterije je:

$$Q_{Ah} = I_{sr} \cdot t = 16,927 \text{ A} \cdot 8 \text{ h} = 135,42 \text{ Ah}$$

6.7 Na slici 6-10 je prikazan punotalasni ispravljač realizovan pomoću transformatora sa srednjom tačkom. Transformator je idealan i ima prenosni odnos $N_1:N_2:N_2=2:1:1$. Napon primara transformatora je 220 V, 50 Hz. Opterećenje je omskog karaktera otpornosti $R=20 \Omega$. Za ugao upravljanja tiristora od 60° i idealne tiristore:

- nacrtati talasne oblike napona na opterećenju i izračunati njegovu srednju vrednost,
- nacrtati talasne oblike napona primara, struja oba sekundara, struje primara i struje opterećenja.

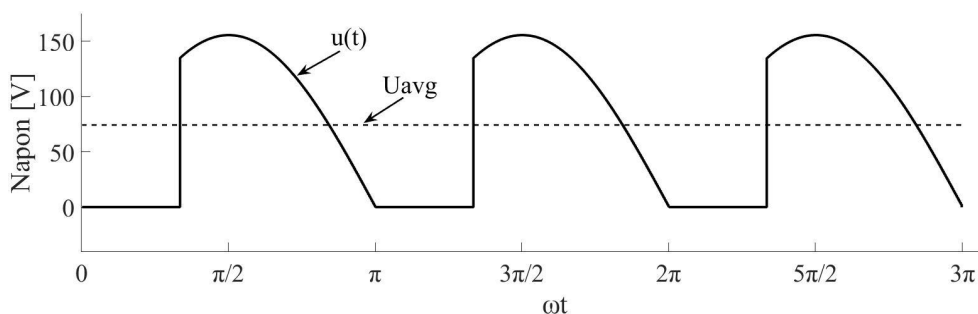


Slika 6-10 Punotalasni ispravljač sa transformatorom sa srednjom tačkom

Rešenje:

Tokom pozitivne poluperiode napona napajanja anoda tiristora T_1 je na potencijalu koji odgovara maksimalnom intenzitetu fazora napona u_p , a anoda tiristora T_2 na potencijalu minimalnog intenziteta fazora napona u_p . Katode oba tiristora su na istom potencijalu koji je jednak srednjoj vrednosti potencijala na kojima su anode tiristora (jer je prenosni odnos 2:1:1). To znači da će tokom pozitivne poluperiode voditi tiristor T_1 i opterećenje će biti na naponu u_{s1} dok će tiristor T_2 biti zakočen. Tokom negativne poluperiode, polaritet napona sekundara će biti suprotan od onoga koji je naznačen na slici 6-10 što će tiristorima zameniti uloge, odnosno T_2 će voditi, a T_1 će biti zakočen. Dakle, tiristor T_2 će na opterećenje dovesti napon u_{s2} koji je tokom negativne poluperiode, sa stanovišta opterećenja, identičan naponu u_{s1} tokom pozitivne poluperiode.

a) Talasni oblik napona na opterećenju je prikazan na slici 6-11.



Slika 6-11 Napon na opterećenju

Srednja vrednost napona na opterećenju je:

$$U_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt$$

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

gde je U_m maksimalna vrednost napona sekundara koja zbog prenosnog odnosa 2:1:1 iznosi $\sqrt{2} \cdot 110$ V.

Kako je talasni oblik napona na opterećenju identičan u pozitivnoj i u negativnoj poluperiodi, prethodnu relaciju možemo napisati kao:

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

Prethodni integral se može predstaviti kao zbir dva integrala od kojih je prvi računat na intervalu od 0 do α na kome je $u(t) = 0$, dok je drugi integral računat na intervalu od α do π na kome je vrednost napona na opterećenju $u(t) = U_m \sin(\omega t)$:

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \left[\int_0^{\alpha} 0 \cdot d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) \right]$$

$$U_{AVG} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_{\alpha}^{\pi} U_m \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{\pi} (-\cos(\omega t)) \Big|_{\alpha}^{\pi}$$

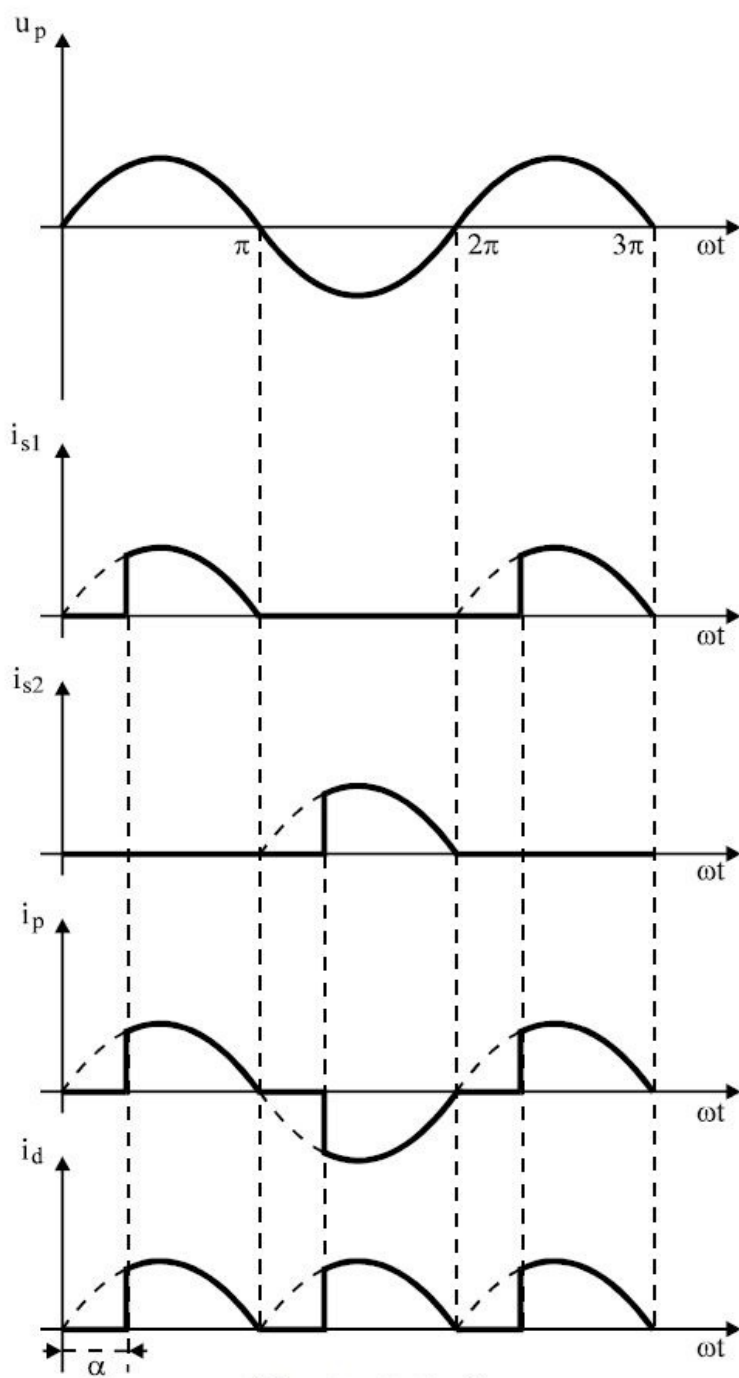
$$U_{AVG} = \frac{U_m}{\pi} \cos(\omega t) \Big|_{\pi}^{\alpha}$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{\pi} (\cos \alpha - (-1))$$

$$U_{AVG} = \frac{U_m}{\pi} (\cos \alpha + 1)$$

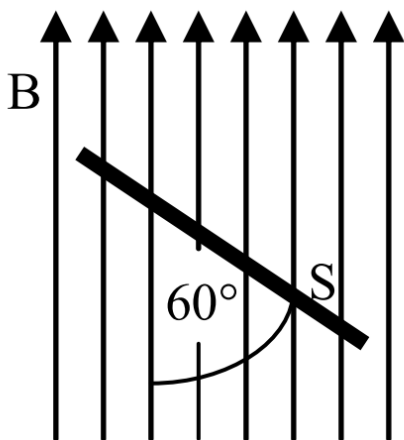
$$U_{AVG} = \frac{\sqrt{2} \cdot 110}{\pi} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 74,28 \text{ V}$$

b) Traženi talasni oblici su prikazani na slici 6-12.



Slika 6-12 Traženi talasni oblici napona i struja

6.8 Magnetni fluks kroz neku površinu S iznosi $\Phi = 2\sqrt{3}$ Wb, kada je ugao između njene ravnini i vektora magnetne indukcije $\beta_1 = 60^\circ$ (slika 6-13). Odrediti fluks kroz istu površinu ako se taj ugao smanji za 30° . Magnetno polje je homogeno.



Slika 6-13 Kontura površine S u magnetnom polju

Rešenje:

Fluks vektora magnetne indukcije B kroz površinu S iznosi:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Obzirom da je površina S konstantna, a magnetno polje homogeno, dobijamo da je vrednost fluksa u prvom slučaju:

$$\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos \alpha_1$$

Intenzitet vektora magnetne indukcije odavde iznosi:

$$B = \frac{\Phi_1}{S \cdot \cos \alpha_1} = \frac{\Phi_1}{S \cdot \cos(90^\circ - \beta_1)}$$

$$B = \frac{\Phi_1}{S \cdot \cos(90^\circ - 60^\circ)} = \frac{\Phi_1}{S \cdot \cos(30^\circ)} = \frac{2\sqrt{3}}{S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{S}$$

Kada je ravan površine S pod uglom od 30° u odnosu na vektor B , tada će normala na tu površinu biti pod uglom α_2 u odnosu na vektor B :

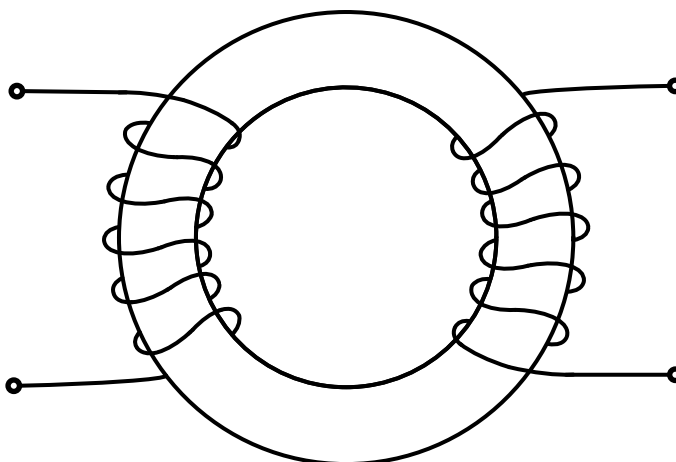
$$\alpha_2 = 90^\circ - \beta_2 = 60^\circ$$

Magnetni fluks u ovom slučaju iznosi:

$$\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos \alpha_2$$

$$\Phi_2 = \frac{4}{S} \cdot S \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ Wb}$$

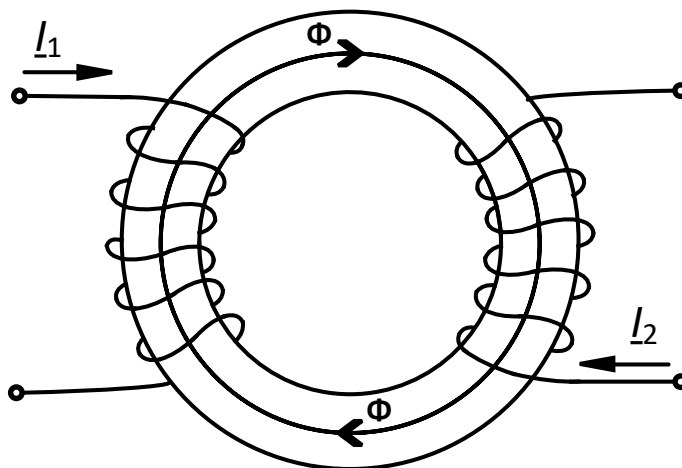
6.9 Odrediti saglasne krajeve struja za dve induktivno spregnute zavojnice (slika 6-14).



Slika 6-14 Dve spregnute zavojnice

Rešenje:

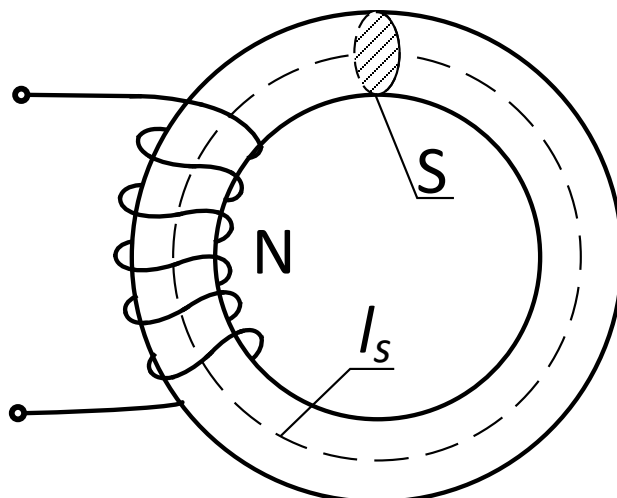
Postupak za određivanje saglasnih krajeva moguće je opisati na sledeći način: za jednu zavojnicu se odabere proizvoljno saglasan kraj u koji struja ulazi svojim pozitivnim smerom. Prema pravilu desnog zavrtnja odredi se pozitivan smer indukovano g fluksa kroz prvu zavojnicu, koji se sa istim smerom zatvara i kroz drugu zavojnicu. Korištenjem pravila desnog zavrtnja odredi se takav pozitivan smer struje kroz drugu zavojnicu, da indukovani fluks ima isti pozitivan smer kao i indukovani fluks prve struje. Kraj druge zavojnice u koji ulazi struja svojim pozitivnim smerom je saglasan kraj (slika 6-15).



Slika 6-15 Dve spregnute zavojnice sa saglasnim krajevima struja

6.10 Gvozdeni prsten poprečnog preseka $S=5 \text{ cm}^2$ ima srednji obim $l_s=16\pi \text{ cm}$ (slika 6-16). Oko prstena ja namotano $N=400$ navojaka, kroz koje teče struja jačine $I=2 \text{ A}$. Relativna magnetna permeabilnost gvožđa iznosi $\mu_r=500$. Izračunati:

- intenzitet vektora jačine magnetnog polja $\vec{H}$,
- magnetnu indukciju u prstenu $\vec{B}$ i
- magnetni fluks kroz jedan navojak i ukupan magnetni fluks.



Slika 6-16 Gvozdeni prsten sa namotajima

Rešenje:

a) Cirkulaciju vektora jačine magnetnog polja $\vec{H}$ po zatvorenoj konturi C izračunavamo po formuli:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

Uzimajući u obzir geometriju problema, izraz se može svesti na:

$$H \cdot l_s = N \cdot I$$

Odakle je:

$$H = \frac{N \cdot I}{l_s} = \frac{400 \cdot 2}{16\pi} = 1592 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

b) U slučaju kada je materijal linearan, vektor magnetne indukcije $\vec{B}$ izračunavamo prema izrazu:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

gde su:

μ_0 - magnetna permeabilnost vakuumu ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$)

μ_r - relativna magnetna permeabilnost materijala

μ - apsolutna magnetna permeabilnost

Intenzitet vektora magnetne indukcije $\vec{B}$ iznosi:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1592 = 1 \text{ T}$$

c) Fluks vektora magnetne indukcije B kroz površinu S iznosi:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

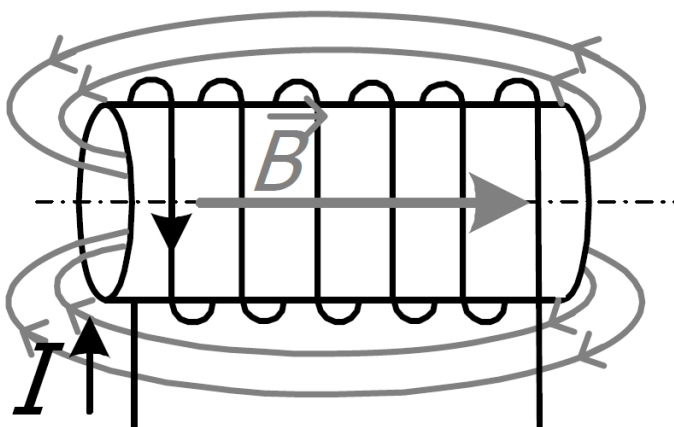
Uzimajući u obzir geometriju problema, izraz za fluks po navojku se može svesti na:

$$\Phi = B \cdot S = 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Dok je ukupan fluks:

$$\Phi_u = N \cdot B \cdot S = 400 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0,2 \text{ Wb}$$

6.11 Magnetna indukcija u kalemu sa $N=100$ navojaka, površine navojka $S=12 \text{ cm}^2$ (slika 6-17), povećala se sa $0,2 \text{ T}$ na $0,5 \text{ T}$. Kolika promena magnetnog fluksa je pritom nastala?



Slika 6-17 Kalem sa navojcima

Rešenje:

Fluks vektora magnetne indukcije B kroz površinu S iznosi:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Kada se svede na kalem navedene geometrije, izraz za ukupan fluks glasi:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S$$

Vrednosti fluksa u prvom i drugom slučaju iznose:

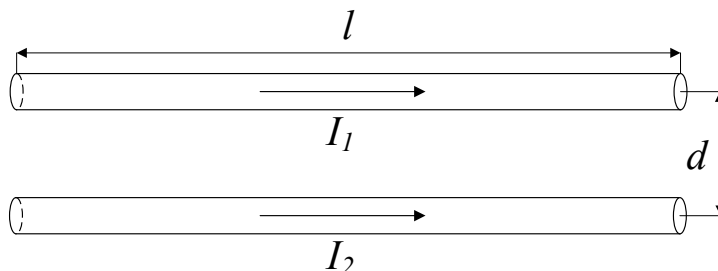
$$\Phi_1 = N \cdot B \cdot S = 100 \cdot 0,2 \cdot 0,0012 = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = N \cdot B_2 \cdot S = 100 \cdot 0,5 \cdot 0,0012 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

Ukupna promena fluksa iznosi:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

6.12 Izračunati silu uzajamnog delovanja između dva pravolinijska strujna provodnika dužine $l=5,5$ m, koji su paralelni i nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju $d=4\text{cm}$ (slika 6-18). Kroz provodnike protiču struje intenziteta $I_1=6,2$ A, odnosno $I_2=8$ A.



Slika 6-18 Dva paralelna provodnika

Rešenje:

Intenzitet Amperove sile između ovih provodnika izračunava se po formuli:

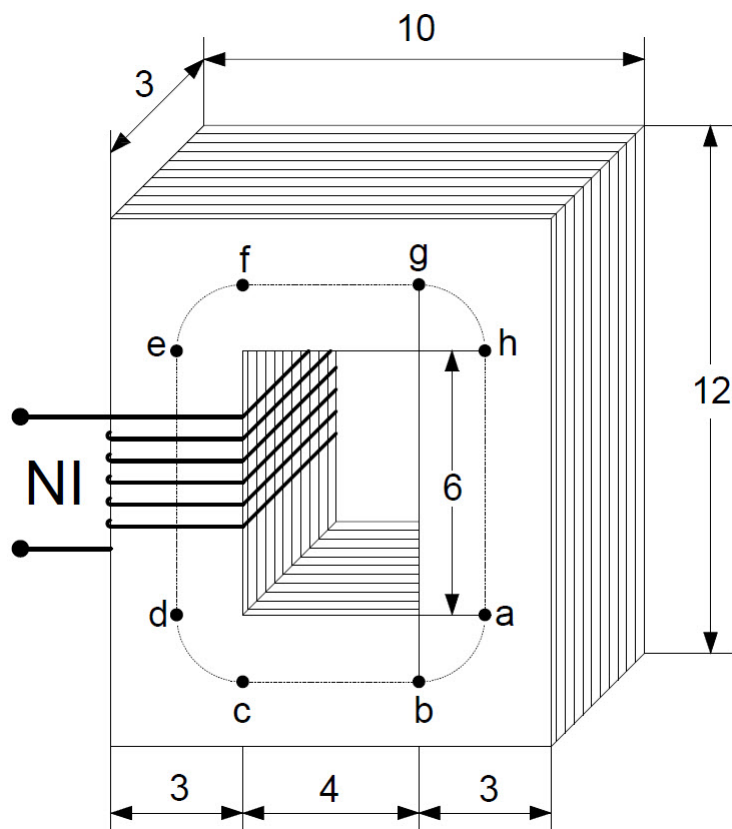
$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l$$

Ako uzmemo u obzir da je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$, dobijamo:

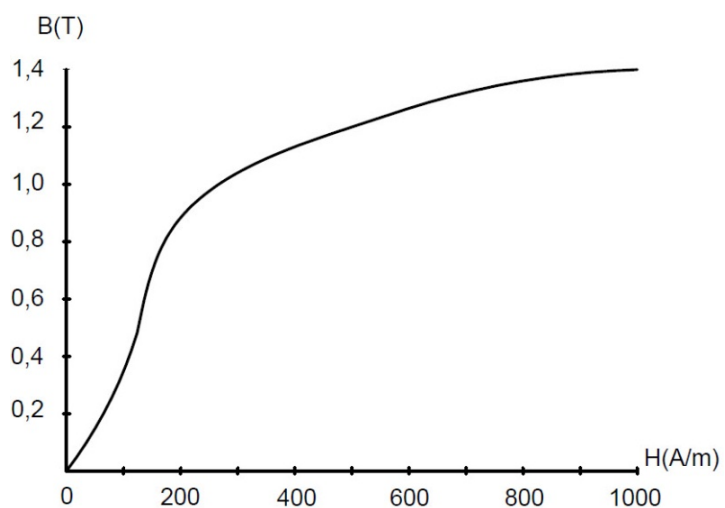
$$F = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{6,2 \cdot 8}{2\pi \cdot 0,04} \cdot 5,5 = 1,364 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Napomena: Ukoliko su struje koje protiču kroz provodnike sa slike istog smera, izračunata sila je privlačna. U suprotnom, sila između njih je odbojna.

6.13 Odrediti broj zavoja koje treba namotati na jezgro od dinamo limova oblika i dimenzija prikazanih na slici 6-19, da bi fluks kroz presek jezgra bio $\Phi=8 \cdot 10^{-4}$ Wb. Dimenzije magnetnog kola su date u centimetrima. Struja koja protiče kroz zavojke iznosi 0,48 A. Sloj izolacije preko limova je debljine koja iznosi 5% debljine limova, pa je tzv. koeficijent ispunjenosti jezgra 0,95. Kriva magnećenja materijala data je na slici 6-20.



Slika 6-19 Magnetno kolo od dinamo limova



Slika 6-20 Kriva magnećenja dinamo limova magnetnog kola

Rešenje:

Površina poprečnog preseka jezgra:

$$S = 3 \cdot 3 \cdot 0,95 = 8,55 \text{ cm}^2 = 8,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Magnetna indukcija u jezgru iznosi:

$$B = \frac{\Phi}{S} = 0,936 \text{ T}$$

Sa krive magnećenja dobijamo da ovoj vrednosti indukcije odgovara jačina magnetnog polja $H=260 \text{ A/m}$. Prilikom proračuna srednje dužine feromagnetnog dela kola, prirodno je uzeti da se srednja linija ne prelama, već da lučnim delovima u obliku četvrtine kruga prelazi iz jednog pravca u drugi, kao što je naznačeno na slici 6-20.

$$l = (ab + cd + ef + gh) + (ah + de) + (fg + bc) = 29,42 \text{ cm} = 0,2942 \text{ m}$$

Dužina prelomljene srednje linije magnetnog kola, sa prelazima iz jednog pravca u drugi u obliku dela kruga, se računa prema prethodno navedenoj aproksimativnoj formuli. Na osnovu dobijene dužine srednje linije magnetnog kola, dobijamo da je:

$$H \cdot l = 260 \cdot 0,2942 = 76,5 \text{ A}$$

Amperov zakon ukupne struje, koja protiče kroz poprečni presek jezgra od dinamo limova S glasi:

$$\oint_c H \cdot dl = \sum I$$

Imajući u vidu da se kalem sastoji od N zavoja:

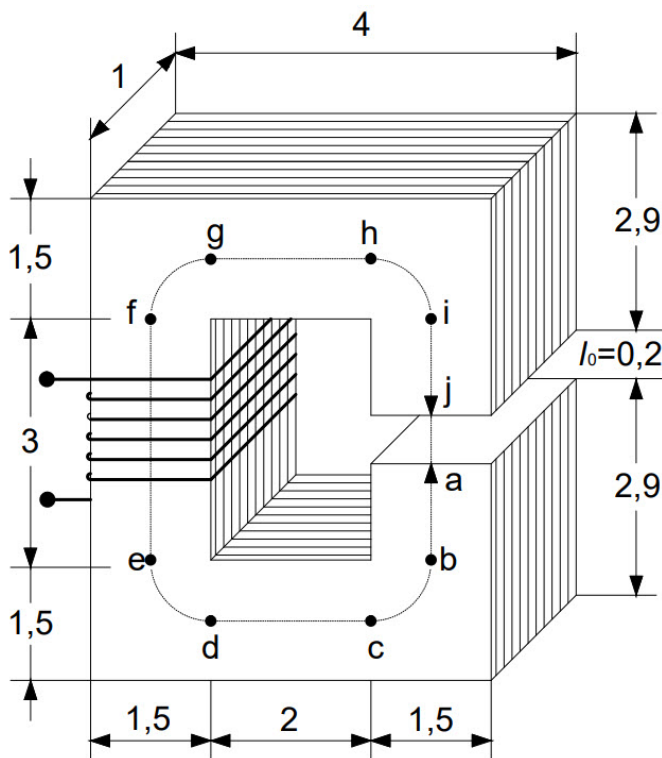
$$H \cdot l = N \cdot I = 76,5 \text{ amper-zavoja}$$

Traženi broj zavoja iznosi:

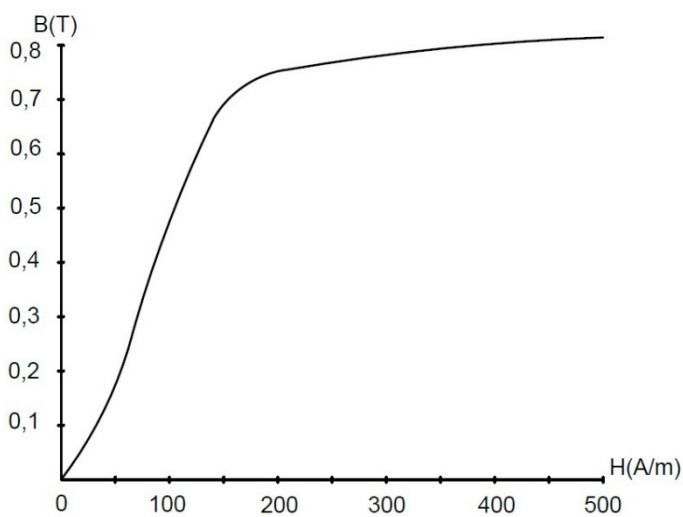
$$N = \frac{76,5}{0,48} = 160 \text{ zavoja}$$

6.14 Odrediti magnetopobudnu silu magnetnog kola sačinjenog od permaloja sa vazdušnim procepom, prikazanog na slici 6-21. Dimenzije magnetnog kola su date u centimetrima. Indukcija u vazdušnom procepu

iznosi $B_0=0,2$ T. Magnetna permeabilnost vakuma iznosi $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ N/A². Kriva magnećenja magnetnog materijala prikazana je na slici 6-22.



Slika 6-21 Magnetno kolo sa vazдушnim procepom



Slika 6-22 Kriva magnećenja dinamo limova magnetnog kola

Rešenje:

Dužina srednje linije fermagnetnog dela jezgra iznosi:

$$l = (bc + de + fg + hi) + (ib + fe) + (gh + dc) - aj = 14,51 \text{ cm} = 0,1451 \text{ m}$$

Površina poprečnog preseka fermagnetnog dela jezgra:

$$S = 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Efektivna površina vazdušnog procepa se definiše izrazom:

$$S_o = (a + l_o) \cdot (b + l_o)$$

gde je:

a – dužina pravougaonog poprečnog preseka jezgra

b – širina pravougaonog poprečnog preseka jezgra

l_o – širina vazdušnog procepa

Efektivna površina vazdušnog procepa prema prethodnoj jednačini iznosi:

$$S_o = (1 + 0,2) \cdot (1,5 + 0,2) \cdot 10^{-4} = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Magnetni fluks kroz kolo iznosi:

$$\Phi = B_o \cdot S_o = 0,2 \cdot 2,04 \cdot 10^{-4} = 0,41 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

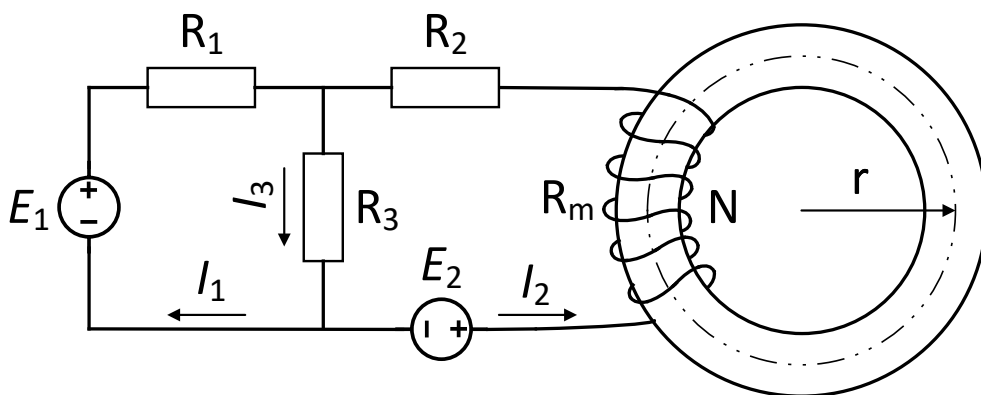
Magnetna indukcija u jezgru od feromagnetnog materijala:

$$B = \frac{\Phi}{S} = 0,27 \text{ T}$$

Sa krive magnećenja dobijamo da ovoj vrednosti indukcije približno odgovara jačina magnetnog polja $H=60 \text{ A/m}$. Magnetopobudnu silu koja prouzrokuje u kolu takav fluks da magnetna indukcija u procepu bude $B_o=0,5 \text{ T}$, sada dobijamo pomoću uopštenog Amperovog zakona:

$$N \cdot I = \sum H_k \cdot l_k = H \cdot l + H_o \cdot l_o = H \cdot l + \frac{B_o}{\mu_o} \cdot l_o = 8,7 + 318,3 = 327 \text{ amper-zavoja}$$

6.14 Oko torusnog jezgra poluprečnika $r=5$ cm gusto je namotano 50 navojaka lakom izolovane žice, kao na slici 6-23. Jezgro je izrađeno od materijala čija je relativna magnetna permeabilnost $\mu_r=1000$. Poznate vrednosti elemenata kola iz koga se torus napaja su: $E_1=140\text{V}$, $E_2=100\text{V}$, $R_1=20\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=10\ \Omega$, $R_m=10\ \Omega$. Odrediti:



Slika 6-23 Magnetno jezgro sa pobudnim strujnim kolom

- intenzitet vektora magnetne indukcije u prstenu $\vec{B}$,
- intenzitet vektora jačine magnetnog polja $\vec{H}$.

Rešenje:

Magnetni fluks koji se zatvara kroz torusno jezgro nastaje kao posledica proticanja struje I_2 , koju izračunavamo postavljanjem jednačina po prvom i drugom Kirhofovom zakonu:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0 \\ E_2 - (R_m + R_2) I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Kada se uvrste brojne vrednosti, dobija se:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ 140 - 20I_1 - 10I_3 &= 0 \\ 100 - 20I_2 - 10I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ukoliko od prve jednačine oduzmemo drugu, dobijamo:

$$20I_1 + 20I_2 = 40$$

Odnosno:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2A$$

Vraćanjem ove vrednosti u drugu jednačinu dobijamo da je $I_2=4A$.

a) Kada imamo vrednost struje I_2 , možemo pomoću Amperovog zakona izračunati intenzitet vektora magnetne indukcije:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

Svođenjem na datu geometriju:

$$B \cdot l_s = \mu_0 \cdot N \cdot I_2$$

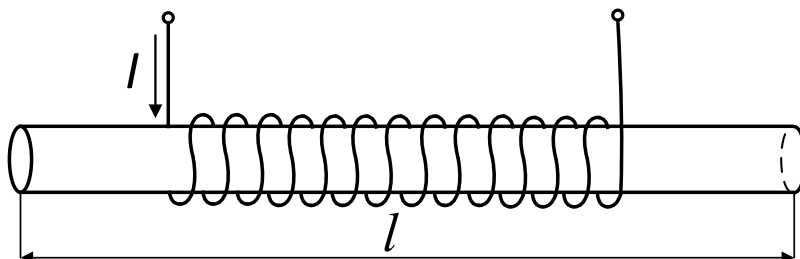
Obzirom da je $l_s=2r\pi$, dobijamo:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N \cdot I_2}{2r\pi} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \frac{50 \cdot 4}{2 \cdot 0,05\pi} = 0,8 T$$

b) Intenzitet vektora jačine magnetnog polja izračunavamo:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000} = 636,62 \frac{A}{m}$$

6.15 Oko metalnog štapa dužine $l=1,2m$ namotano je 200 navojaka lakom izolovane žice, kao na slici 6-24. Kroz navojke protiče struja intenziteta $I=2A$. Ako relativna magnetna permeabilnost materijala iznosi $\mu_r=500$, proceniti vrednost magnetne indukcije unutar štapa.



Slika 6-24 Štap sa namotajima

Rešenje:

Pretpostavimo da je štap presečeni i ispravljeni torus. U tom slučaju, dužina štapa bi zapravo bila dužina srednje linije torusa. Procenjenu vrednost magnetne indukcije u štapu dobijamo primenom Amperovog zakona:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

Odnosno:

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I$$

Odakle sledi da je:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N \cdot I}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \frac{200 \cdot 2}{1.2} = 0,21 \text{ T}$$

7 TRANSFORMATORI

7.1 Transformator prenosnog odnosa $U_1/U_2=110/10$ kV, prividne snage $S_n=30$ MVA i frekvencije $f=50$ Hz, ima gubitke u gvožđu koji iznose $P_{Fe}=150$ kW. Koliki bi bili gubici u gvožđu ako se isti transformator priključi na mrežu napona 110 kV, učestanosti 60 Hz? Poznat je odnos gubitaka $P_{vs}/P_h=1,5$.

Rešenje:

Ako se zanemari omska otpornost namotaja, može se smatrati da je indukovani napon u namotaju transformatora jednak sa naponom mreže na koju je priključen dati transformator:

$$U = E = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_m = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot S \cdot B_m$$

Na osnovu prethodne jednačine, može se zaključiti da vrednost magnetne indukcije u istom transformatoru raste sa porastom napona, pri istoj učestanosti, a opada sa porastom učestanosti pri istom naponu. Gubici u gvožđu, kroz koje protiče naizmenični magnetni fluks, sastoje se od gubitaka usled histerezisa i gubitaka usled vrtložnih struja:

$$P_{Fe} = P_h + P_v = (k_h \cdot f \cdot B_m^2 + k_v \cdot f^2 \cdot B_m^2) \cdot m_{Fe}$$

Ako se dati odnos gubitaka ($P_{vs}/P_h=1,5$) uvrsti u prethodnu jednačinu, dobijamo:

$$P_{Fe} = \frac{5}{2} P_h = \frac{5}{2} k_h \cdot f \cdot B_m^2 \cdot m_{Fe}$$

Za slučaj kada je transformator priključen na napon $U_1=110$ kV i učestanost $f_1=60$ Hz, snaga gubitaka u gvožđu je:

$$P_{Fe1} = \frac{5}{2} k_h \cdot f_1 \cdot B_{1m}^2 \cdot m_{Fe}$$

Odnos gubitaka u gvožđu je:

$$\frac{P_{Fel}}{P_{Fe}} = \frac{\frac{5}{2} k_h \cdot f_1 \cdot B_{1m}^2 \cdot m_{Fe}}{\frac{5}{2} k_h \cdot f \cdot B_m^2 \cdot m_{Fe}} = \frac{f_1 \cdot B_{1m}^2}{f \cdot B_m^2}$$

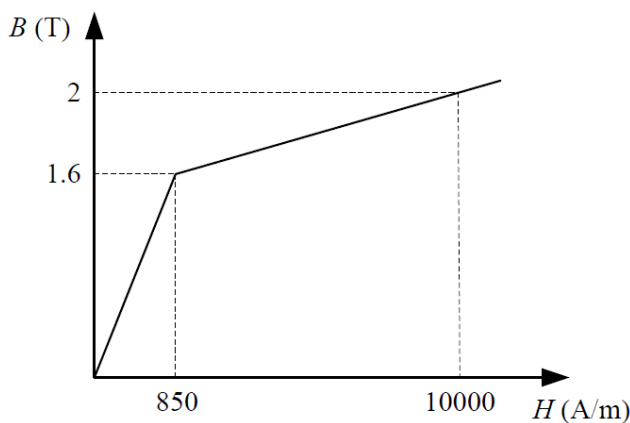
Ako se vrednost magnetne indukcije izrazi preko napona indukovanog u namotaju, dobija se:

$$\frac{P_{Fel}}{P_{Fe}} = \frac{f_1 \cdot B_{1m}^2}{f \cdot B_m^2} = \frac{f_1 \cdot \left(\frac{U_1}{4,44 \cdot f_1 \cdot N \cdot S} \right)^2}{f \cdot \left(\frac{U}{4,44 \cdot f \cdot N \cdot S} \right)^2} = \frac{f \cdot U_1^2}{f_1 \cdot U^2} = 1,0083$$

Dakle, gubici u gvožđu pri naponu od 110 kV i učestanosti od 60 Hz iznose:

$$P_{Fel} = 1,0083 P_{Fe} = 151,245 \text{ kW}$$

7.2 Na monofaznom transformatoru sledećih karakteristika: $S_n=10 \text{ kVA}$, $U_1/U_2=220/110 \text{ V}$ i $f=50 \text{ Hz}$, izvršen je ogled praznog hoda, pri čemu je napon menjan u rasponu od $0,8U_n \div 1,1U_n$. Pri nominalnom naponu, struja praznog hoda iznosi 3% nominalne struje. Gubici u praznom hodu iznose $P_0=70 \text{ W}$, pri čemu gubici usled histerezisa čine 40% gubitaka praznog hoda. Ako je aktivna komponenta struje praznog hoda zanemarljiva, kolika će biti struja praznog hoda pri naponu $1,1U_n$? Kriva magnećenja gvožđa prikazana je na slici 7-1. Primarni namotaj ovog transformatora ima 500 navojaka, a poprečni presek jezgra je $S=13 \text{ cm}^2$.



Slika 7-1 Kriva magnećenja gvožđa

Rešenje:

Pošto je transformator monofazni, nominalna struja iznosi:

$$I_n = \frac{S_n}{U_n} = \frac{10^4}{220} = 45,45 \text{ A}$$

Odakle je struja praznog hoda:

$$I_0 = 0,03 \cdot I_n = 1,364 \text{ A}$$

Magnetna indukcija pri nominalnom naponu iznosi:

$$B_n = \frac{U_n}{4,44 \cdot f \cdot N \cdot S} = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 500 \cdot 13 \cdot 10^{-4}} = 1,525 \text{ T}$$

Dok pri naponu $1,1U_n$ iznosi:

$$B'_n = \frac{1,1 \cdot U_n}{4,44 \cdot f \cdot N \cdot S} = \frac{1,1 \cdot 220}{4,44 \cdot 50 \cdot 500 \cdot 13 \cdot 10^{-4}} = 1,677 \text{ T}$$

U prvom slučaju, magnetna indukcija ima vrednost koja je pokrivena prvim (linearnim) delom krive magnećenja ($B_n < 1,6\text{T}$), pa μ_1 iznosi:

$$\mu_1 = \frac{B}{H} = \frac{1,6}{850} = 1,88235 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

U drugom slučaju, potrebno je da upotrebimo linearnu interpolaciju u cilju nalaženja veze između B i H :

$$B - 1,6 = \frac{2 - 1,6}{10000 - 850} (H - 850)$$

$$B = 4,3716 \cdot 10^5 H + 1,5628$$

Kada u ovu jednakost uvrstimo vrednost B'_n dobijamo vrednost jačine magnetnog polja H' i magnetne permeabilnosti μ_2 :

$$H' = 2612,3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\mu_2 = \frac{B'}{H'} = \frac{1,667}{2612,3} = 6,4196 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Obzirom da je aktivna komponenta struje praznog hoda zanemarljiva, a reaktansa grane magnećenja je obrnuto srazmerna sa μ , imamo:

$$\frac{I'_0}{I_0} = \frac{1,1 \cdot \frac{U_0}{X'_0}}{\frac{U_0}{X_0}} = 1,1 \frac{\mu}{\mu_0} \Rightarrow$$

$$I'_0 = 1,1 I_0 \frac{\mu}{\mu_0} = 1,1 \cdot 1,364 \cdot \frac{1,88235}{0,64196} = 4,4 \text{ A}$$

7.3 U jednom trofaznom transformatoru sa $N_1=170$ primarnih navojaka i $N_2=2300$ sekundarnih navojaka, efektivnim presekom feromagnetnog jezgra sastavljenog od transformatorskih limova $S_{Fe}=50 \text{ cm}^2$, čiji je primarni namotaj priključen na mrežu 220 V, 50 Hz, odrediti maksimalnu vrednost magnetne indukcije u jezgru.

Rešenje:

Indukovana elektromotorna sila:

$$E = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_m = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B_m \cdot S_{Fe} \cong U$$

Magnetna indukcija:

$$B_m \cong \frac{U_1}{4,44 \cdot f \cdot N_1 \cdot S_{Fe}} = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 170 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 1,17 \text{ T}$$

7.4 Odredite efektivnu vrednost ustaljene struje kratkog spoja na primarnoj strani transformatora sledećih podataka: $S_n=1000 \text{ kVA}$, $U_{1n}/U_{2n}=10000/400 \text{ V}$, $u_k=4\%$, sprege Yd5.

Rešenje:

Naznačena (nominalna) struja:

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_n} = \frac{1000 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 10000} = 57,74 \text{ A}$$

Efektivna vrednost ustaljene struje kratkog spoja:

$$I_k = \frac{100}{u_k [\%]} \cdot I_n = \frac{100}{4} \cdot 57,74 = 1443,5 \text{ A}$$

7.5 Pri ogledu kratkog spoja trofaznog transformatora sa nazivnom prividnom snagom od 750 kVA, prenosnim odnosom 10/0,4 kV, frekvencijom 50 Hz, sprege Yd5, struja je iznosila 35 A pri naponu od 500 V. Koliko iznosi nazivni napon kratkog spoja izražen u procentima?

Rešenje:

Nazivna struja transformatora:

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_n} = \frac{750 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 10000} = 43,3 \text{ A}$$

Struja kratkog spoja I_k izmerena je u ogledu kratkog spoja pri naponu U_k . Ako se ogled kratkog spoja izvodi na uobičajeni način, pri postizanju vrednosti struje kratkog spoja I_n , mereni napon će iznositi U_{kn} . Imajući u vidu da se naponi kratkog spoja nalaze nisko na krivi magnetćenja, odnos napona i struja će biti linearan.

$$\frac{I_k}{I_n} = \frac{U_k}{U_{kn}} \Rightarrow U_{kn} = U_k \cdot \frac{I_k}{I_n} = 500 \cdot \frac{35}{10000} = 1,75 \text{ V}$$

Nazivni napon kratkog spoja izražen u procentima iznosi:

$$u_{kn} [\%] = \frac{U_{kn}}{U_n} \cdot 100 = \frac{1,75}{10000} \cdot 100 = 0,0175\%$$

7.6 Energetski transformator snage $S_n=1600$ kVA, napona $U_1/U_2=10/0,4$ kV, sprege Yd, relativnog napona kratkog spoja $u_k=6\%$, ima naznačene gubitke praznog hoda $P_{0n}=3$ kW i naznačene gubitke usled opterećenja $P_{Tn}=17,9$ kW. Odrediti stepen iskorišćenja snage transformatora pri polovini naznačenog opterećenja uz faktor snage $\cos\varphi=0,8$.

Rešenje:

Odnos efektivne vrednosti struje transformatora pri opterećenju i nazivne struje transformatora:

$$\beta = \frac{I}{I_n} = 0,5$$

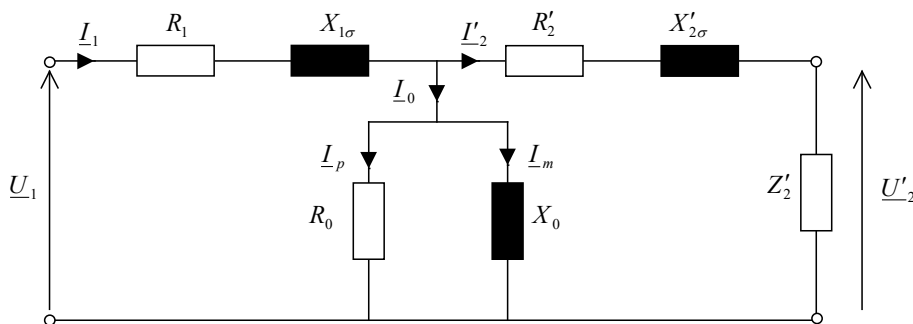
Stepen iskorišćenja snage transformatora pri polovini naznačenog opterećenja uz faktor snage $\cos\varphi=0,8$:

$$\eta(\beta) = \frac{\beta S_n \cos\varphi}{\beta S_n \cos\varphi + P_{0n} + \beta^2 P_{Tn}} = \frac{0,5 \cdot 1600 \cdot 0,8}{0,5 \cdot 1600 \cdot 0,8 + 3 + 0,5^2 \cdot 17,9} = 98,845\%$$

7.7 Na jednofaznom transformatoru, prikazanom ekvivalentnom šemom na slici 7-2, izvršeni su ogled praznog hoda i kratkog spoja u kojima je dobijeno:

- iz ogleda praznog hoda: $U_1=400$ V; $I_1=0,4$ A; $P_0=20$ W,
- iz ogleda kratkog spoja: $U_1=32$ V; $I_1=5$ A; $P_k=80$ W.

Transformator ima odnos transformacije $m=N_1/N_2=1/15$. Uzevši da su aktivni i reaktivni otpori primara jednaki odgovarajućim otporima sekundara ($R_1=R_2'$, $X_{1\sigma}=X_{2\sigma}'$) odredite parametre ekvivalentne šeme transformatora.



Slika 7-2 Ekvivalentna šema transformatora

Rešenje:

1) Razmatranje ogleda praznog hoda

Prilikom određivanja parametara ekvivalentne šeme obično se zanemaruje uzdužna (redna) grana šeme, budući da se pad napona na rednoj impedansi može zanemariti. U prvom koraku određujemo parametre poprečne grane ekvivalentne šeme (R_0 i X_0). Impedansa praznog hoda iznosi:

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{400 \text{ V}}{0,4 \text{ A}} = 1000 \Omega$$

Faktor snage u praznom hodu:

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_0 I_0} = \frac{20}{400 \cdot 0,4} = 0,125$$

$$\sin \varphi_0 = \sin(\arccos \varphi_0) = 0,992$$

Fiktivna aktivna otpornost kojom uzimamo u obzir gubitke praznog hoda:

$$R_0 = \frac{U_0^2}{P_0} = \frac{Z_0}{\cos \varphi_0} = \frac{1000}{0,125} = 8000 \Omega$$

Reaktansa magnećenja:

$$X_0 = \frac{Z_0}{\sin \varphi_0} = \frac{1000}{0,992} = 1008 \Omega$$

2) Razmatranje oglada kratkog spoja

U ogledu kratkog spoja određuju se parametri uzdužne (redne) grane ekvivalentne šeme jednofaznog transformatora (R_k i X_k). Prilikom određivanja parametara ekvivalentne šeme obično se zanemaruje poprečna grana šeme (grana magnećenja), budući da je struja praznog hoda značajno manja od naznačene struje.

Impedansa kratkog spoja:

$$Z_k = \frac{U_k}{I_k} = \frac{32 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 6,4 \Omega$$

Aktivna otpornost kratkog spoja:

$$R_k = R_1 + R_2' = \frac{P_k}{I_k^2} = \frac{80}{5^2} = 3,2 \, \Omega$$

$$R_1 = R_2' = \frac{R_k}{2} = 1,6 \, \Omega$$

$$R_2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \cdot R_2' = 15^2 \cdot 1,6 = 360 \, \Omega$$

Reaktansa kratkog spoja:

$$X_k = X_{1\sigma} + X_{2\sigma}' = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2} = \sqrt{6,4^2 - 3,2^2} = 5,54 \, \Omega$$

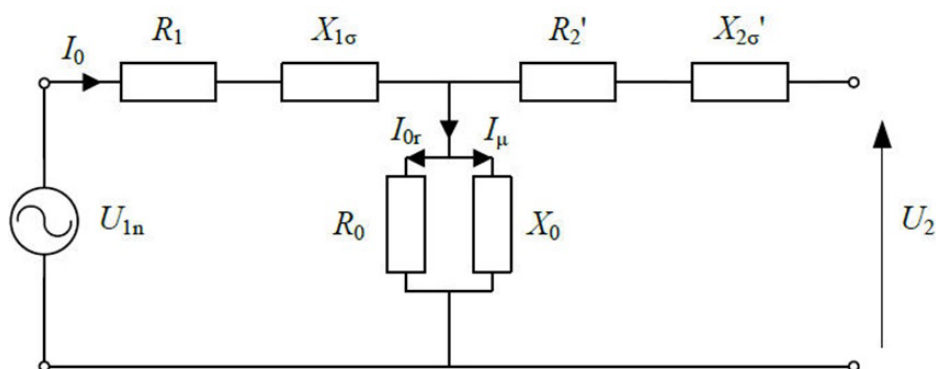
$$X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = \frac{X_k}{2} = 2,77 \, \Omega$$

$$X_{2\sigma} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \cdot X_{2\sigma}' = 15^2 \cdot 2,77 = 623,25 \, \Omega$$

7.8 Iz oglada praznog hoda jednofaznog transformatora, prikazanog ekvivalentnom šemom na slici 7-3, dobijeni su sledeći rezultati: $P_0=200 \, \text{W}$, $I_0=1,2 \, \text{A}$, $U_{1n}=400 \, \text{V}$, $U_2=36 \, \text{V}$, a iz oglada kratkog spoja: $P_k=80 \, \text{W}$, $U_k=20 \, \text{V}$, $I_{1n}=10 \, \text{A}$. Odrediti parametre zamenske šeme R_0 , X_0 , X_k , R_k .

Rešenje:

Ekvivalentna šema u praznom hodu:



Slika 7-3 Ekvivalentna šema transformatora za prazan hod

Odnos transformacije iznosi:

$$m = U_{1n}/U_2 = 11,11$$

Otpor u paralelnoj grani koji predstavlja gubitke u jezgru:

$$R_0 = \frac{U_{1n}^2}{P_0} = \frac{400^2}{200} = 800 \, \Omega$$

Komponenta struje praznog hoda koja pokriva gubitke u jezgru:

$$I_{0r} = \frac{U_{1n}}{R_0} = \frac{400}{800} = 0,5 \, \text{A}$$

$$I_{0r\%} = \frac{I_{0r}}{I_{1n}} \cdot 100 = \frac{0,5}{10} \cdot 100 = 5\%$$

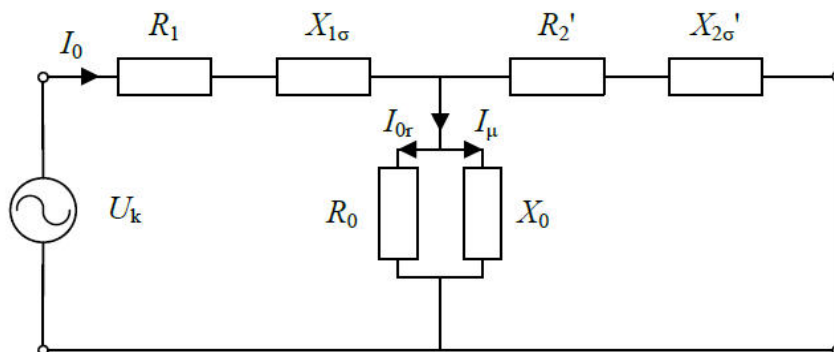
Reaktivna komponenta struje praznog hoda, odnosno struja magnećenja:

$$I_\mu = \sqrt{I_0^2 - I_{0r}^2} = \sqrt{1,2^2 - 0,5^2} = 1,09 \, \text{A}$$

$$I_{\mu\%} = \frac{I_\mu}{I_{1n}} \cdot 100 = \frac{1,09}{10} \cdot 100 = 10,9\%$$

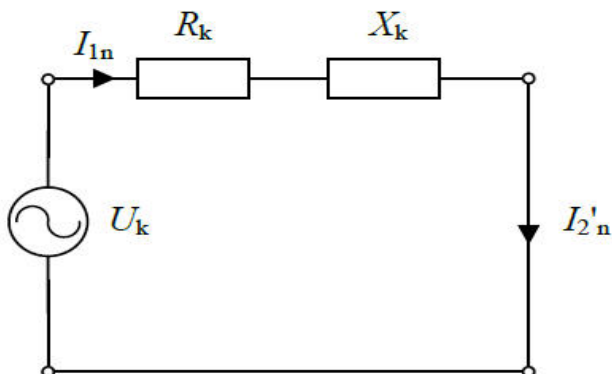
Reaktansa prikazana u paralelnoj grani ekvivalentne šeme transformatora:

$$X_0 = \frac{U_{1n}}{I_\mu} = \frac{400}{1,09} = 367 \, \Omega$$



Slika 7-4 Ekvivalentna šema transformatora za kratak spoj

Imajući u vidu da je $U_k=(3-15)\%U_n$, radna tačka transformatora se nalazi nisko na linearnom delu krive magnećenja, a struja magnećenja ima jako malu vrednost, pa se paralelna grana može zanemariti:



Slika 7-5 Ekvivalentna šema transformatora za kratak spoj

Impedansa kratkog spoja:

$$Z_k = \frac{U_k}{I_k} = \frac{20 \text{ V}}{10 \text{ A}} = 2 \Omega,$$

Aktivan otpor pri kratkom spoju:

$$R_k = R_1 + R_2' = \frac{P_k}{I_k^2} = \frac{80}{10^2} = 0,8 \Omega$$

Reaktivan otpor pri kratkom spoju:

$$X_k = X_{1\sigma} + X_{2\sigma}' = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2} = \sqrt{2^2 - 0,8^2} = 1,833 \Omega$$

7.9 Trofazni transformator ima presek jezgra 270 cm^2 , a indukcija u jezgru iznosi $B_m=1,5 \text{ T}$. Frekvencija mreže iznosi 50 Hz . Prenosni odnos transformatora je $10000/400 \text{ V}$. Izračunati broj navojaka transformatora na strani visokog i niskog napona za slučajeve da je spoj namotaja transformatora:

- zvezda – izlomljena zvezda Yz,
- zvezda – zvezda Yy,
- zvezda – trougao Yd,
- trougao – zvezda Dy.

Rešenje:

Napon transformatora:

$$U = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_m = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B_m \cdot S$$

Izraz za proračun broja navojaka namotaja transformatora:

$$N = \frac{U}{4,44 \cdot f \cdot B_m \cdot S}$$

Za slučaj sprege namotaja transformatora u trougao (D, d), fazni napon je jednak linijskom, odnosno iznosi U_n .

Za slučaj sprege namotaja transformatora u zvezdu (Y, y), fazni napon je $\sqrt{3}$ puta manji od linijskog, odnosno iznosi $U_n/\sqrt{3}$.

U sprezi izlomljena zvezda z (sprega niskonaponskog namotaja je u izlomljenu zvezdu), ključna je polovina namotaja na kojoj je napon $U_n/\sqrt{3}$.

a) Sprega namotaja Yz

Broj navojaka namotaja primara:

$$N_1 = \frac{U_n/\sqrt{3}}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{10000/\sqrt{3}}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 642$$

Broj navojaka namotaja sekundara:

$$N_2 = 2 \cdot \frac{U_n/\sqrt{3}}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{400/\sqrt{3}}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 51$$

b) Sprega namotaja Yy

Broj navojaka namotaja primara:

$$N_1 = \frac{U_n / \sqrt{3}}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{10000 / \sqrt{3}}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 642$$

Broj navojaka namotaja sekundara:

$$N_2 = \frac{U_n / \sqrt{3}}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{400 / \sqrt{3}}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 26$$

c) Sprega namotaja Yd

Broj navojaka namotaja primara:

$$N_1 = \frac{U_n / \sqrt{3}}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{10000 / \sqrt{3}}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 642$$

Broj navojaka namotaja sekundara:

$$N_2 = \frac{U_n}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{400}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 45$$

d) Sprega namotaja Dy

Broj navojaka namotaja primara:

$$N_1 = \frac{U_n}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{10000}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 1112$$

Broj navojaka namotaja sekundara:

$$N_2 = \frac{U_n / \sqrt{3}}{4,44 \cdot f \cdot S \cdot B_m} = \frac{400 / \sqrt{3}}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,027 \cdot 1,5} = 26$$

7.10 Broj navojaka po fazi visokonaponskog namota jednog trofaznog transformatora je $N_1=2080$, a niskonaponskog $N_2=80$. Linijski napon mreže na koji je priključen ovaj transformator je $U_1=3300$ V. Odrediti linijski napon na niskonaponskoj strani transformatora i odnose faznih i linijskih napona pri sprezi namotaja Yd (zvezda - trougao).

Rešenje:

Za transformator važi:

$$\frac{E_{1f}}{E_{2f}} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow e_n = \frac{E_{1f}}{N_1} = \frac{E_{2f}}{N_2}, \quad e_n \cong \frac{U_{1f}}{N_1} \cong \frac{U_{2f}}{N_2}$$

gde je e_n napon po navojku.

Linijski napon na niskonaponskoj strani:

$$U_2 = U_{2f} = e_n \cdot N_2 = \frac{U_{1f}}{N_1} \cdot N_2 = \frac{U_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{N_2}{N_1} = \frac{3300}{\sqrt{3}} \cdot \frac{80}{2080} = 73,3 \text{ V}$$

Odnos linijskih i faznih napona:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sqrt{3} \cdot U_{1f}}{U_{2f}} = \frac{\sqrt{3} \cdot e_n \cdot N_1}{e_n \cdot N_2} = \sqrt{3} \cdot \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{3} \cdot \frac{2080}{80} = 45$$

$$\frac{U_{1f}}{U_{2f}} = \frac{e_n \cdot N_1}{e_n \cdot N_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{2080}{80} = 26$$

8 ASINHRONE MAŠINE

8.1 Trofazni asinhroni motor snage 10 kW priključen je na fazni napon $U=220$ V. Stepen iskorišćenja pri naznačenom opterećenju je $\eta=0,8$, a faktor snage motora je $\cos\varphi=0,82$. Odrediti gubitke pri praznom hodu P_o , ako struja praznog hoda I_o iznosi 30% naznačene struje, a faktor snage motora pri praznom hodu je $\cos\varphi_o=0,2$.

Rešenje:

Naznačena struja motora:

$$I_n = \frac{P_2}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos\varphi \cdot \eta} = \frac{10000}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,82 \cdot 0,8} = 40 \text{ A}$$

Struja praznog hoda iznosi:

$$I_o = 0,3 \cdot I_n = 0,3 \cdot 40 = 12 \text{ A}$$

Gubici u praznom hodu su:

$$P_o = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_o \cdot \cos\varphi_o = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 12 \cdot 0,2 = 914,5 \text{ W}$$

8.2 Centrifugalna pumpa radi sa stepenom iskorišćenja 0,78, i izbacuje za 4 minuta 3000 litara vode na visinu od 190 m. Za pogon ove pumpe upotrebljen je trofazni asinhroni motor, koji iz mreže napona 3000 V uzima snagu 34 kW pri linijskoj struji motora od 7,5 A. Odrediti stepen iskorišćenja i faktor snage motora.

Rešenje:

Korisna snaga pumpe je:

$$P_{pumpe} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{\rho \cdot V \cdot g \cdot h}{t} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3 \text{ m}^3 \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 190 \text{ m}}{4 \cdot 60 \text{ s}} = 23298,75 \text{ W}$$

Mehanička (korisna) snaga motora iznosi:

$$P_{meh} = \frac{P_{pumpe}}{\eta_{pumpe}} = \frac{23298,75 \text{ W}}{0,78} = 29870,2 \text{ W}$$

Snaga koju motor uzima iz mreže (električna snaga) je data u tekstu zadatka, i iznosi $P_{el}=34 \text{ kW}$, pa je stepen iskorišćenja motora:

$$\eta = \frac{P_{meh}}{P_{el}} = \frac{29870,2 \text{ W}}{34000 \text{ W}} = 0,879$$

Faktor snage motora:

$$\cos \varphi = \frac{P_{el}}{\sqrt{3} \cdot U \cdot I} = \frac{34000 \text{ W}}{\sqrt{3} \cdot 3000 \text{ V} \cdot 7,5 \text{ A}} = 0,872$$

8.3 Trofazni asinhroni motor snage 18 kW, stepena iskorišćenja 0,88, ima nominalno klizanje 0,05. Rotorski namotaj je izveden na klizne prstenove, spojen u zvezdu i ima otpor po fazi 0,018 Ω . Odredite struju u namotaju rotora pri nominalnom opterećenju, ako su gubici u bakru statora 1100 W, a gubici u gvožđu statora 420 W.

Rešenje:

Elektromagnetna (obrtna) snaga iznosi:

$$P_{em} = P_1 - P_{Fe} - P_{Cu1} = \frac{P_2}{\eta} - P_{Fe} - P_{Cu1} = \frac{18000}{0,88} - 420 - 1100 = 18935 \text{ W}$$

Gubici u bakru rotora i struja namotaja rotora iznose:

$$P_{Cu2} = 3 \cdot R_2 \cdot I_2^2 = s \cdot P_{em} = s \cdot (P_1 - P_{Fe} - P_{Cu1})$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{s \cdot P_{em}}{3 R_2}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 18935}{3 \cdot 0,018}} = 132,4 \text{ A}$$

8.4 Šestopolni asinhroni motor pri naznačenom opterećenju i frekvenciji 50 Hz razvija korisni momenat 167 Nm, a ukupni (obrtni) momenat iznosi 182 Nm. Elektromotorna sila ima frekvenciju 4 Hz. Treba odrediti gubitke u bakru rotora i stepen iskorišćenja motora ako su gubici u statoru 650 W.

Rešenje:

Klizanje asinhronog motora:

$$s = \frac{f_2}{f_1} = \frac{4}{50} = 0,08$$

Brzina obrtanja asinhronog motora:

$$n = n_s (1 - s) = \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s) = \frac{60 \cdot 50}{3} (1 - 0,08) = 920 \text{ ob/min}$$

Snaga obrtnog polja iznosi:

$$P_{em} = M_{em} \cdot \omega_{sm} = M_{em} \cdot \frac{\omega_{se}}{p} = 182 \cdot \frac{2\pi \cdot 50}{3} = 19059 \text{ W}$$

Gubici u bakru rotora:

$$P_{cu2} = s \cdot P_{em} = 0,08 \cdot 19059 = 1525 \text{ W}$$

Korisna (mehanička) snaga iznosi:

$$P_2 = \frac{2\pi}{60} M_2 n = \frac{2\pi}{60} \cdot 167 \cdot 920 = 16089 \text{ W}$$

Uložena snaga je:

$$P_1 = P_{em} + P_{gs} = 19059 + 650 = 19709 \text{ W}$$

Stepen iskorišćenja elektromotora iznosi:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_{em} + P_{gs}} = \frac{16089}{19709} = 0,816$$

8.5 Trofazni šestopolni asinhroni motor 380 V, 50 Hz, daje na osovini snagu 30 kW pri brzini obrtanja od 980 ob/min. Gubici u statoru iznose 0,9 kW, a momenat trenja i ventilacije 10 Nm. Odrediti:

- a) snagu koju motor uzima iz mreže,
b) stepen iskorišćenja motora.

Rešenje:

- a) Klizanje asinhronog motora:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{1000 - 980}{1000} = 0,02$$

Mehanička snaga asinhronog motora:

$$P_{meh} = P_2 + P_f = P_2 + \frac{M_f \cdot n}{9,55} = 30000 + \frac{10 \cdot 980}{9,55} = 31026 \text{ W}$$

Snaga koju motor uzima iz mreže:

$$P_1 = P_{em} + P_{gs} = \frac{P_{meh}}{1 - s} + P_{gs} = \frac{31026}{1 - 0,02} + 900 = 32,56 \text{ kW}$$

- b) Stepen iskorišćenja motora:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{30}{32,56} = 92,1\%$$

8.6 Maksimalni momenat četvoropolnog asinhronog motora je 60% veći od naznačenog. Odrediti maksimalni momenat motora ako se napon smanji za 15%. Naznačena snaga motora iznosi 8 kW, napona 380 V, frekvencije 50 Hz, brzine obrtanja 1440 ob/min, sprege namotaja u "zvezdu".

Rešenje:

Naznačeni momenat asinhronog motora:

$$M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{P_n}{2\pi \cdot n_n / 60} = 9,55 \cdot \frac{P_n}{n_n} = 9,55 \cdot \frac{10000}{1440} = 53,05 \text{ Nm}$$

Maksimalni momenat asinhronog motora:

$$M_{1MAX} = 1,6 \cdot M_n = 84,88 \text{ Nm}$$

Razvijeni momenat motora je proporcionalan sa kvadratom vrednosti napona napajanja:

$$M_{MAX} \approx c \cdot (U)^2$$

$$M_{2MAX} \approx c \cdot (0,85 \cdot U)^2 = (0,85)^2 \cdot M_{1MAX} = 61,32 \text{ Nm}$$

8.7 Da li će se pokrenuti asinhroni motor naznačene snage motora 315 kW, napona 380 V, frekvencije 50 Hz, naznačene brzine obrtanja 1485 ob/min, faktora snage 0,91, stepena iskorišćenja motora 0,945, polaznog momenta u odnosu na naznačeni momenat od $1,6M_n$, ako je motor opterećen konstantnim momentom od 2000 Nm?

Rešenje:

Da bi motor mogao da se pokrene, korisni momenat motora prilikom pokretanja mora da bude veći od momenta opterećenja (kočionog momenta). Polazni momenat ovog elektromotora iznosi:

$$M_{pol} = 1,6 \cdot M_n = 1,6 \cdot 9,55 \cdot \frac{P_n}{n_n} = 1,6 \cdot 9,55 \cdot \frac{315 \cdot 10^3}{1485} = 3240,72 \text{ Nm}$$

Budući da je polazni momenat veći od momenta opterećenja, ovaj elektromotor će se pokrenuti.

8.8 Trofazni asinhroni motor radi opterećen nominalnim momentom. Motor ima tri para polova, frekvencije 50 Hz, klizanja 3%. Odrediti:

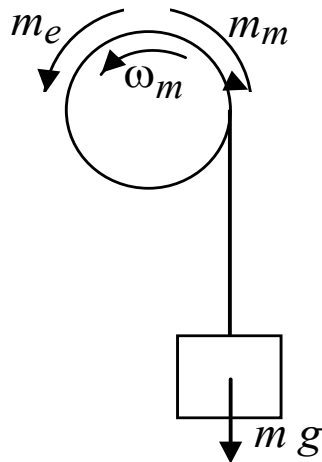
- a) brzinu obrtanja pri podizanju tereta,
- b) pri spuštanju tereta u dizaličnom pogonu.

Rešenje:

a) Asinhroni motor koji podiže teret ima 3 para polova, tako da je njegova sinhrona brzina:

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ ob/min}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{3} \cdot 50 = 104,72 \text{ rad/s}$$



Slika 8-1 Momenti na vratilu motora pri dizanju tereta

Za poznatu sinhronu brzinu i poznato nominalno klizanje, iz jednačine koja daje vrednost klizanja izraženu u relativnim jedinicama:

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = \frac{n_s - n}{n_s}$$

dolazi se do izraza kojim se izračunava brzina obrtanja u ovom režimu rada, tj. pri podizanju tereta:

$$n = (1 - s) \cdot n_s$$

$$\omega = (1 - s) \cdot \omega_s$$

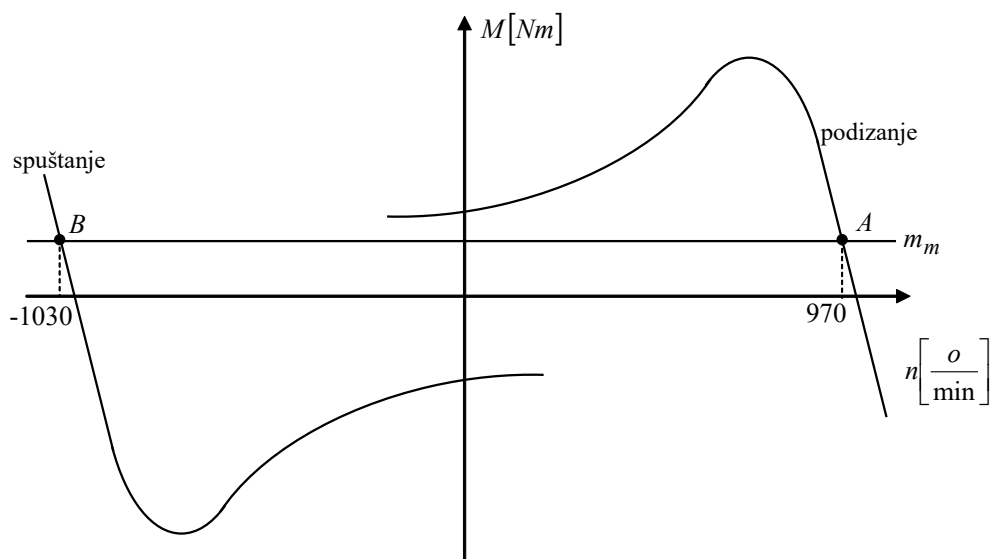
U postavci zadatka je navedeno da je motor opterećen nominalnim momentom, što prouzrokuje da je klizanje u takvom režimu nominalno, odnosno mašina se obrće nominalnom brzinom od:

$$n_n = (1 - s_n) \cdot n_s$$

$$n_n = (1 - 0,03) \cdot 1000 = 970 \text{ ob/min}$$

Radna tačka ovog režima rada je u tački A , i nalazi se na karakteristici datoj na slici 8-2. Ugaona brzina obrtanja rotora se može izračunati i kao:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{60} \cdot n_n = \frac{2\pi}{60} \cdot 970 = 101,578 \text{ rad/s}$$



Slika 8-2 Radne tačke pogona dizalice na mehaničkoj karakteristici motora

b) Da bi se ostvarilo spuštanje tereta, prvo se mora promeniti smer obrtnog polja statora asinhronne mašine, čime se omogućuje obrtanje bubnja na suprotnu stranu. Momenat opterećenja ne menja smer jer masa tereta uvek vuče sajlu na dole, bez obzira na smer kretanja (dizanje/spuštanje). Prilikom uključivanja motora za rad u suprotnom smeru (spuštanje), teret povećava brzinu rotora iznad sinhronne brzine, motor prelazi u generatorski režim rada i na taj način ograničava brzinu spuštanja tereta. U odnosu na sliku 8-1, promenjen je smer kretanja $\omega < 0$ a momenti motora i opterećenja su zadržali smerove. Pošto su brzina obrtanja i obrtni moment konverzije asinhronne mašine suprotnih smerova, režim rada je generatorski. U ovom režimu rada klizanje je nominalno i iznosi:

$$s_n = -0,03$$

Brzina obrtanja je veća od sinhronne brzine, i iznosi:

$$n_n = -(1 - s_n) \cdot n_s = -(1 - (-0,03)) \cdot 1000 = -1030 \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ob/min}$$

Na slici 8-2 prikazana je mehanička karakteristika motora i karakteristika opterećenja m_m . Karakteristika opterećenja je konstantna, i ne zavisi od brzine ni po iznosu ni po smeru - uvek se podiže i spušta isti teret. Radna tačka podizanja tereta označena je sa A , a radna tačka spuštanja tereta označena je sa B . Ovde je potrebno obratiti pažnju na izgled izlazne mehaničke karakteristike motora pri promenjenom smeru obrtnog magnetnog polja.

8.9 Trofazni kavezni asinhroni motor severnoameričkog proizvođača ima nominalne podatke: $P_n=3 \text{ kW}$, $n_n=1746 \text{ ob/min}$, $U_n=220 \text{ V}$, $f_n=60 \text{ Hz}$, $R_s=1 \Omega$, $R_r=1,2 \Omega$, $X_{ls}=X_{lr}=2 \Omega$, $X_m=80 \Omega$, $P_{gm}=160 \text{ W}$, sprega namotaja u trogao. Za nominalni režim rada odrediti klizanje, faktor snage, struju statora, detaljni bilans snaga, stepen iskorišćenja i izlazni obrtni moment motora.

Rešenje:

Za nominalni režim rada prvo se treba odrediti nominalno klizanje s_n :

$$s_n = \frac{n_s - n_n}{n_s}$$

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p}$$

gde je:

n_n - nominalna brzina,

n_s - sinhrona brzina,

f - frekvencija napona mreže na koju je priključen ovaj motor,

p - broj pari magnetnih polova statorskog namotaja.

Da bi se odredilo klizanje, mora se odrediti sinhrona brzina motora. Kada je motor priključen na standardnu severnoameričku mrežu, frekvencija je $f=60 \text{ Hz}$. Ukoliko pretpostavimo da je mašina dvopolna, tj. da je broj pari polova 1, tada bi sinhrona brzina i klizanje bili:

$$n_s = 60 \cdot f = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ ob/min}$$

$$s_n = \frac{n_s - n_n}{n_s} = \frac{3600 - 1746}{3600} = 0,515 = 51,5\%$$

Ovakvo rešenje ne odgovara stvarnosti. Kod asinhronih motora malih snaga u nominalnom radu klizanje ne prelazi vrednost od 10%. Kod motora većih snaga nominalno klizanje je često i ispod 2%. Pošto je klizanje blisko povezano sa Džulovim gubicima u rotoru, po ovom rešenju, zbog vrlo visokog klizanja motor bi imao vrlo mali stepen iskorišćenja.

Vrednosti sinhronne brzine, za različiti broj pari polova p i frekvencije od 50 Hz i 60 Hz date su u tabeli.

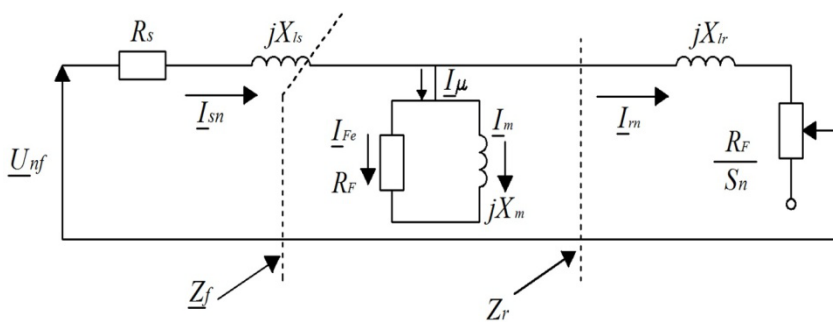
Tabela 8.1 Sinhrona brzina za različit broj pari polova i frekvenciju

	P	1	2	3	4	5
$f=50$ Hz	o/min	3000	1500	1000	750	600
$f=60$ Hz	o/min	3600	1800	1200	900	720

Iz tabele je očigledno da je sinhrona brzina 1800 ob/min, što znači da je ovaj motor četvoropolni. Klizanje u nominalnom režimu iznosi:

$$s_n = \frac{n_s - n_n}{n_s} = \frac{1800 - 1746}{1800} = 0,03 = 3\%$$

Ekvivalentna šema jedne faze asinhronog motora (sa vrednostima u nominalnom režimu) data je na slici 8-3. Naponi, struje i impedanse su prikazane kao kompleksni vektori. Rotorske veličine su „svedene“ na statorsko kolo prema odnosu broja navojaka.



Slika 8-3 Ekvivalentna šema asinhronog motora (po jednoj fazi)

Parametri prikazani na ekvivalentnoj šemi predstavljaju:

U_{nf} - nominalni fazni napon na koji je priključen motor,

R_s - otpor jedne faze namotaja statora,

R_r - otpor jedne faze namotaja rotora (sveden na stator),

X_{ls} - reaktansa rasipanja koja opisuje rasipni fluks statora tj. onaj deo fluksa statora koji ne prodire u magnetno kolo rotora,

X_{lr} - reaktansa rasipnog fluksa rotora svedena na stator,

R_{Fe} - omski otpor kojim se predstavljaju gubici aktivne snage u gvožđu,

X_m - reaktansa magnećenja magnetnog kola,

I_{sn} - nominalna fazna struja statora,

I_m - reaktivna komponenta struje magnećenja magnetnog kola,

I_μ - ukupna struja magnećenja,

I_{Fe} - aktivna komponenta struje magnećenja. Imajući u vidu da je R_{Fe} ova struja se zanemaruje, pa je $I_m = I_\mu$,

I_{rn} - nominalna struja rotora, svedena na stator.

Ekvivalentna impedansa, faktor snage, struja

Za izračunavanje struje statora i faktora snage potrebno je prvo sračunati vrednost impedanse ekvivalentne šeme. Vrednost ove impedanse menja se sa opterećenjem, odnosno sa promenom klizanja. U ovom slučaju traži se vrednost za nominalnu radnu tačku. Postupak računanja ekvivalentne impedanse simbolički je prikazan na slici 8-3. Impedanse statorskog i rotorskog namotaja, grane magnećenja i cele ekvivalentne šeme date su, respektivno, kao:

$$\underline{Z}_s = R_s + jX_{ls} = (1 + j2)\Omega$$

$$\underline{Z}_r = \frac{R_r}{s_n} + jX_{lr} = \frac{1,2}{0,03} + j2 = (40 + j2)\Omega$$

$$\underline{Z}_m = jX_m = j80\Omega$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_s + \underline{Z}_f = \underline{Z}_s + \frac{\underline{Z}_r \cdot \underline{Z}_m}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_m}$$

$$\underline{Z}_f = \frac{\underline{Z}_r \cdot \underline{Z}_m}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_m} = \frac{(40 + j2) \cdot j80}{40 + j2 + j80} = \frac{40,05 \cdot e^{j2,86^\circ} \cdot 80 \cdot e^{j90^\circ}}{40 + j82} = \frac{3204 \cdot e^{j92,862^\circ}}{91,6788 \cdot e^{j63,435^\circ}}$$

$$\underline{Z}_f = 34,948 \cdot e^{j29,4274^\circ} = (30,439 + j17,17)\Omega$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_s + \underline{Z}_f = 1 + j2 + 30,439 + j17,17 = (31,439 + j19,17)\Omega$$

$$|\underline{Z}_e| = Z_e = \sqrt{31,439^2 + 19,17^2} = 36,823 \Omega$$

Na osnovu poznate impedanse ekvivalentne šeme dobija se faktor snage:

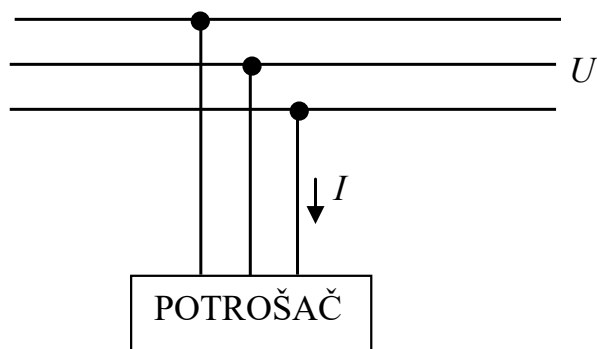
$$\cos \varphi_n = \frac{\operatorname{Re}\{\underline{Z}_e\}}{|\underline{Z}_e|} = \frac{31,439}{36,823} = 0,854$$

Struja statora se izračunava na osnovu Omovog zakona. Kako je trofazni namotaj statora spregnut je u trougao, fazni napon napajanja na namotaju je isti kao i napon mreže, pa je fazna struja kroz namotaj:

$$I_{fsn} = |\underline{I}_{fsn}| = \frac{U_{nf}}{Z_e} = \frac{220}{36,823} = 5,975 \text{ A}$$

Pošto je trofazni namotaj statora spregnut u trougao, nominalna struja koja se uzima iz mreže (linijska) je veća od fazne za $\sqrt{3}$, odnosno:

$$I_n = \sqrt{3} I_{fsn} = \sqrt{3} \cdot 5,975 = 10,348 \text{ A}$$



Slika 8-4 Prikaz vezivanja trofaznog potrošača na trofazni sistem napona

Bilans snaga i obrtni moment na vratilu

Za bilo koji trofazni potrošač priključen na trofaznu mrežu napona U , (slika 8-4) električna snaga uzeta iz mreže izračunava se na osnovu izraza:

$$P_e = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

U ovom slučaju traže se podaci za nominalni režim rada, pa je:

$$P_{en} = \sqrt{3} \cdot U_n \cdot I_n \cdot \cos \phi_n = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 10,348 \cdot 0,854 = 3366,7 \text{ W}$$

Ulazna snaga je veća od izlazne za ukupne gubitke koji se razvijaju u mašini, ΣP_g koju čine:

P_{Cus} - gubici u bakru statora, tj. gubici usled proticanja struje namotaj statora,

P_{Fe} - gubici u gvožđu, odnosno u magnetnom delu,

P_{Cur} - gubici u bakru rotora, tj. gubici usled proticanja struje namotaj rotora,

P_{gm} - mehanički gubici na trenje i ventilaciju.

$$\Sigma P_g = P_{ul} - P_{iz} = P_{Cus} + P_{Fe} + P_{Cur} + P_{gm}$$

Gubici usled proticanja struje kroz namotaj statora u nominalnom režimu:

$$P_{Cusn} = 3 \cdot R_s \cdot I_{sn}^2 = 3 \cdot 1,975^2 = 107,1 \text{ W}$$

U magnetnom kolu ove mašine su po uslovu zadatka ovi gubici zanemareni, jer je $R_m = \infty$. Kako je frekvencija struje u rotoru proporcionalna klizanju, tj. u

normalnim radnim režimima iznosi do nekoliko herca, gubici u gvožđu su koncentrisani samo u statorskom delu magnetnog kola:

$$P_{Fe} = P_{Fes} + P_{Fer} \approx P_{Fes}$$

Ukupni gubici u asinhronoj mašini za nominalni režim rada će biti:

$$\sum P_{gn} = 3 \cdot R_s \cdot I_{sn}^2 + 3 \cdot R'_r \cdot I_{rn}^2 + P_{gm}$$

Da bi se odredili gubici u rotorskom namotaju, potrebno je iz ekvivalentne šeme izračunati iznos struje I_r u nominalnom režimu. Gubici u namotaju rotora se mogu izračunati i iz stvarnih i iz svedenih podataka rotorskog namotaja:

$$P_{Cur} = 3 \cdot R_r \cdot I_r^2 = 3 \cdot R'_r \cdot I_r'^2$$

Kod kaveznih asinhronih motora ne može se direktno izmeriti ni rotorski otpor ni rotorska struja. Takođe, sračunavanje svedene struje rotora je komplikovano. Zbog toga se gubici u namotaju rotora izračunavaju iz elektromagnetne snage obrtnog polja P_{ob} i klizanja s :

$$P_{Cur} = s \cdot P_{ob}$$

gde se snaga obrtnog polja dobija tako što se od ulazne snage oduzmu ukupni gubici u satoru:

$$P_{ob} = P_e - P_{Cus} - P_{Fe}$$

Za nominalni režim ovog motora dobija se da snaga obrtnog polja iznosi:

$$P_{obn} = 3366,7 - 107,1 = 3259,6 \text{ W}$$

pa su gubici u rotoru:

$$P_{Cur n} = s_n \cdot P_{ob n} = 0,03 \cdot 3259,6 = 97,8 \text{ W}$$

Po uslovu zadatka, vrednost mehaničkih gubitaka na trenje i ventilaciju P_{gm} iznosi 160 W. Dakle, ukupni gubici ovog motora u nominalnom režimu, na osnovu prethodnih jednačina, imaju vrednost:

$$\sum P_{gn} = P_{Cusn} + P_{Cur n} + P_{gm} = 107,1 + 97,8 + 160 = 364,9 \text{ W}$$

Izlazna mehanička snaga na vratilu ovog motora u nominalnom režimu rada $P_{iz n}$ će biti:

$$P_{iz n} = P_n = P_{ul n} - \sum P_{gn} = 3366,7 - 364,9 = 3001,8 \text{ W}$$

Ova snaga odgovara nominalnoj snazi od 3 kW, sa natpisne pločice motora. Step en iskorišćenja svake mašine η , definiše se kao odnos izlazne i ulazne snage i u nominalnom režimu je:

$$\eta_n = \frac{P_{iz n}}{P_{ul n}} = \frac{P_n}{P_{en}} = \frac{3001,8}{3366,7} = 0,892 = 89,2 \%$$

Mehanički moment na vratilu mašine po definiciji je količnik mehaničke snage i ugaone brzine:

$$M = \frac{P_{iz}}{\omega}$$

odnosno u traženoj nominalnoj radnoj tački iznosi:

$$M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{3001,8}{1746 \frac{2\pi}{60}} = 16,42 \text{ Nm}$$

9 SINHRONE MAŠINE

9.1 Na natpisnoj pločici sinhronne mašine dati su sledeći nominalni podaci: $P=3$ MW, $U_n=6$ kV, $I_n=334$ A, $\cos\varphi=0,9$. Namotaji statora spregnuti su u “zvezdu”.

- a) Da li je mašina pri nominalnim uslovima predviđena za motorni ili generatorski režim rada?
- b) Odrediti stepen iskorišćenja mašine.
- c) Odrediti gubitke u mašini pri nominalnom radnom režimu.

Rešenje:

- a) Ukupna snaga sinhronne mašine iznosi:

$$P_u = \sqrt{3} \cdot U_n \cdot I_n \cdot \cos \varphi_n = \sqrt{3} \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 334 \cdot 0,9 = 3,124 \text{ MW}$$

Imajući u vidu da je snaga na vratilu mašine pri nominalnom radnom režimu manja od ukupne snage, zaključujemo da je u pitanju sinhroni motor.

- b) Step en iskorišćenja motora iznosi:

$$\eta = \frac{P}{P_u} = \frac{3}{3,124} = 0,9603$$

- c) Gubici u nominalnom režimu iznose:

$$P_\gamma = P_u - P = 3,124 - 3 = 0,124 \text{ kW}$$

9.2 Turbogenerator ima snagu od 20 MVA, linijski napon 10 kV i napon kratkog spoja 12%. Treba odrediti efektivnu vrednost simetrične struje kratkog spoja i udarnu struju kratkog spoja.

Rešenje:

Naznačena (nominalna) struja generatora je:

$$I_n = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U_n} = \frac{20 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 10^3} = 1155 \text{ A}$$

Struja kratkog spoja iznosi:

$$I_k = 1,1 \cdot \frac{100}{u_k [\%]} \cdot I_n = 1,1 \cdot \frac{100}{12} \cdot 1155 \text{ A} = 10587 \text{ A}$$

Udarna struja kratkog spoja iznosi:

$$I_{ud} = 1,8 \cdot \sqrt{2} \cdot I_k = 1,8 \cdot \sqrt{2} \cdot 10587 \text{ A} = 26950 \text{ A}$$

9.3 Trofaznom sinhronom generatoru, čiji rotor ima 24 pola, poznati su sledeći podaci: $S_n = 60 \text{ MVA}$, $U_n = 10 \text{ kV}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $\cos \varphi = 0,85$, sprege namotaja Y. Ukupni gubici u naznačenom režimu rada iznose $P_g = 1,4 \text{ MW}$. Odrediti struju i pogonski momenat tog generatora pri naznačenom opterećenju.

Rešenje:

Naznačena struja:

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_n} = \frac{60 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 10^3} = 3464 \text{ A}$$

Pogonski momenat:

$$M_{pog} = M_{ob} + M_g = 9,55 \cdot \left(\frac{P_n}{n_s} + \frac{P_g}{n_s} \right) = 9,55 \cdot \frac{1}{n_s} \cdot (S_n \cdot \cos \varphi + P_g)$$

Sinhrona brzina obrtanja generatora:

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{12} = 250 \text{ ob/min}$$

Pogonski momenat iznosi:

$$M_{pog} = 9,55 \cdot \frac{1}{250} \cdot (60 \cdot 10^6 \cdot 0,85 + 1,4 \cdot 10^6) = 2,0 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

9.4 Odrediti pobudnu struju i promenu napona između punog opterećenja i praznog hoda sinhronog generatora, za koji važe podaci: $U=6000$ V, $I=300$ A, $\cos\varphi=0,8$ (ind), ako je poznata karakteristika praznog hoda $E_0=1000J_p$ i karakteristika kratkog spoja $I_k=52J_p$. Otpornost namotaja statora se zanemaruje.

Rešenje:

Sinhrona reaktansa se može odrediti iz podataka karakteristike praznog hoda i kratkog spoja:

$$X_d = \frac{E_0}{I_k} = \frac{1000 \cdot J_p}{52 \cdot J_p} = \frac{1000}{52} = 19,23 \, \Omega$$

Promena napona između punog opterećenja i praznog hoda se određuje pomoću izraza:

$$\Delta u = \frac{E_0 - U}{U}$$

Potrebno je odrediti elektromotornu silu u praznom hodu:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + j \cdot X_d \cdot \underline{I}$$

Ako napon $\underline{U}$ postavimo u realnu osu i struju $\underline{I}$ razložimo na realnu i imaginarnu komponentu, imamo:

$$\underline{E}_0 = U + j X_d \cdot I \cdot (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi) = (U + X_d \cdot I \cdot \sin \varphi) + j X_d \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$E_0 = \sqrt{(U + X_d \cdot I \cdot \sin \varphi)^2 + (X_d \cdot I \cdot \cos \varphi)^2}$$

$$E_0 = \sqrt{(6000 + 19,23 \cdot 300 \cdot 0,6)^2 + (19,23 \cdot 300 \cdot 0,8)^2}$$

$$E_0 = \sqrt{9461^2 + 4615^2} = 10527 \, \text{V}$$

Promena napona je:

$$\Delta u = \frac{10527 - 6000}{6000} = 0,755 \text{ ili } \Delta u(\%) = 75,5\%.$$

Pobudnu struju određujemo iz karakteristike praznog hoda:

$$E_0 = 1000 \cdot J_p \Rightarrow J_p = \frac{E_0}{1000} = \frac{10527}{1000} = 10,5 \text{ A}$$

9.5 Trofazni dvopolni turbogenerator ima naznačene podatke: $S_n=16 \text{ MVA}$, $U_n=10,5 \text{ kV}$, $f=50 \text{ Hz}$, $\cos\varphi=0,8$ (ind), sprega namotaja je u zvezdu, sinhrona reaktansa po uzdužnoj osi $X_d=13,78 \Omega$. Odrediti indukovanu elektromotornu silu generatora.

Rešenje:

Naznačena struja:

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_n} = \frac{16 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10,5 \cdot 10^3} = 879,77 \text{ A}$$

Elektromotorna sila:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + j \cdot X_d \cdot \underline{I} = \frac{10500}{\sqrt{3}} + j \cdot 13,78 \cdot 879,77 \cdot (0,8 - j \cdot 0,6)$$

$$E_0 = \sqrt{13336,79^2 + 9699,48^2} = 16490,9 \text{ V}$$

9.6 Tri trofazna sinhrona generatora snage $S_{n1}=2 \text{ MVA}$, $S_{n2}=2 \text{ MVA}$ i $S_{n3}=5 \text{ MVA}$ napajaju mrežu čije je opterećenje $P_m=6500 \text{ kW}$, $\cos\varphi_m=0,75$. Kolika je prividna snaga i faktor snage trećeg generatora ako prvi i drugi generator opteretimo samo aktivnim opterećenjem u iznosu $P_1=P_2=1500 \text{ kW}$?

Rešenje:

Prividna snaga mreže:

$$S_m = \frac{P_m}{\cos\varphi_m} = \frac{6500 \text{ kW}}{0,75} = 8667 \text{ kVA}$$

Reaktivna snaga mreže:

$$Q_m = S_m \cdot \sin\varphi_m = 8667 \text{ kVA} \cdot 0,66 = 5720 \text{ kVar}$$

Aktivna snaga trećeg generatora iznosi:

$$P_3 = P_m - 2 \cdot P_1 = 6500 - 2 \cdot 1500 = 3500 \text{ kW}$$

Budući da ovaj generator treba prema uslovima u zadatku da daje ukupnu reaktivnu snagu i ostatak aktivne snage, njegova prividna snaga će biti:

$$S_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_m^2} = \sqrt{3500^2 + 5720^2} = 6706 \text{ kVA}$$

Faktor snage:

$$\cos \varphi_3 = \frac{P_3}{S_3} = \frac{3500}{6706} = 0,52$$

10 MAŠINE JEDNOSMERNE STRUJE

10.1 Dat je motor jednosmerne struje sa rednom pobudom. Motor uzima struju $I=35$ A pri naponu $U=220$ V i obrće se brzinom $n=600$ ob/min, pri čemu je izmeren koristan momenat motora od $M=94$ Nm. Odredite stepen iskorišćenja motora.

Rešenje:

Stepen iskorišćenja motora se izračunava kao odnos izlazne i ulazne snage:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{M n / 9,55}{U I} = \frac{94 \cdot 600 / 9,55}{220 \cdot 35} = 76,7\%$$

10.2 Koliki će biti gubici u bakru indukta (armature) motora jednosmerne struje napona 220 V, stepena iskorišćenja 0,88, dok diže teret mase 10 tona brzinom 0,45 m/s. Otpor namotaja indukta iznosi 0,1 Ω .

Rešenje:

Izlazna snaga motora:

$$P_2 = \frac{m g h}{t} = m g v = 10000 \cdot 9,81 \cdot 0,45 = 44145 \text{ W}$$

Ulazna snaga motora i struja indukta iznose:

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = U I_a \Rightarrow I_a = \frac{P_2}{\eta U} = \frac{44145}{0,88 \cdot 220} = 228,02 \text{ A}$$

Gubici u bakru namotaja indukta iznose:

$$P_{Cu} = R_a I_a^2 = 0,1 \cdot 228,02^2 = 5199 \text{ W}$$

10.3 Dvopolni generator jednosmerne struje sa jednim parom paralelnih grana ($a=1$), napaja potrošače strujom $I_a=50$ A. Otpor njegovog namotaja je $R_a=0,4 \Omega$, dok se rotor obrće brzinom $n=1200$ ob/min. Odredite napon na priključcima generatora ako je magnetni fluks $\Phi=0,02$ Wb, broj provodnika iznosi $N=1000$.

Rešenje:

Indukovana elektromotorna sila:

$$E = \frac{p}{a} N \frac{n}{60} \Phi = \frac{1}{1} \cdot 1000 \frac{1200}{60} \cdot 0,02 = 400 \text{ V}$$

Nominalni napon na priključcima dvopolnog generatora jednosmerne struje sa jednim parom paralelnih grana ($a=1$):

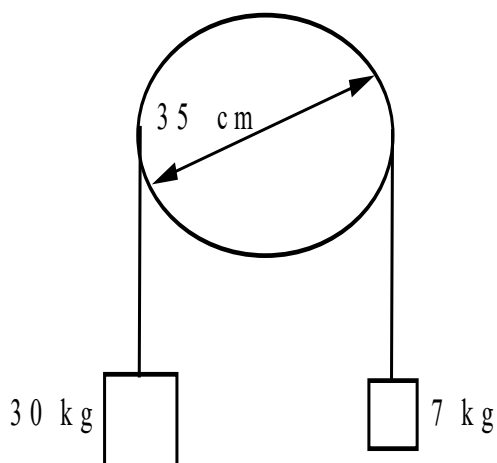
$$U_n = E - R_a I_a = 400 - 0,4 \cdot 50 = 380 \text{ V}$$

10.4 Dat je jednosmerni motor sa rednom pobudom. Ukupan otpor namotaja indukta i namotaja induktora je $1,3 \Omega$. Motor uzima struju od 35 A, pri naponu 220 V, i obrće se brzinom 1200 ob/min, a pri tome je kočen vrpcom sa dva tega prebačena preko remenice. Prečnik remenice je 35 cm, a tegovi su od 30 kg i 7 kg. Odrediti:

- korisni momenat motora,
- korisnu snagu,
- stepen iskorišćenja,
- gubitke u namotajima, gvožđu i usled trenja i ventilacije,
- elektromotornu silu.

Rešenje:

Na slici 10-1 je prikazana mehanička kočnica jednosmernog motora sa rednom pobudom:



Slika 10-1 Mehanička kočnica

a) Korisni momenat motora:

$$M = (m_2 - m_1) g \frac{d}{2} = (30 - 7) \cdot 9,81 \cdot \frac{0,350}{2} = 39,5 \text{ Nm}$$

b) Korisna snaga motora:

$$P_2 = \frac{M n}{9,55} = \frac{39,5 \cdot 1200}{9,55} = 4963 \text{ W}$$

c) Uložena snaga:

$$P_1 = U I = 220 \cdot 35 = 7700 \text{ W}$$

Stepen iskorišćenja motora:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{U I} = \frac{4963}{7700} = 0,645$$

d) Gubici u namotajima:

$$P_{cu} = (R_a + R_p) I_a^2 = 1,3 \cdot 35^2 = 1593 \text{ W}$$

Gubici u gvožđu i usled trenja i ventilacije:

$$P_{Fe} + P_f = P_1 - (P_2 + P_{cu}) = 7700 - (4963 + 1593) = 1144 \text{ W}$$

e) Elektromotorna sila:

$$E = U - (R_a + R_p) I_a = 220 - 1,3 \cdot 35 = 174,5 \text{ V}$$

10.5 Generator jednosmerne struje sa paralelnom pobudom ima sledeće podatke: $P_n = 16,5 \text{ kW}$, $U_n = 115 \text{ V}$, $n = 1460 \text{ ob/min}$, $R_p = 20 \text{ } \Omega$, $R_a = 0,0424 \text{ } \Omega$, broj provodnika $N = 246$, broj polova $2p = 4$, broj pari paralelnih grana je $2a = 2$. Odrediti:

- a) fluks Φ ,
- b) elektromagnetni obrtni moment M ,
- c) otpor jedne paralelne grane indukta.

Rešenje:

a) Struja indukta:

$$I_a = I_n + I_p = \frac{P_n}{U_n} + \frac{U_n}{R_p} = \frac{16,5 \cdot 10^3}{115} + \frac{115}{20} = 149 \text{ A}$$

Indukovana elektromotorna sila generatora:

$$E = U_n + R_a I_a = 115 + 0,0424 \cdot 149 = 121,3 \text{ V}$$

Magnetni fluks:

$$E = \frac{p}{a} N \frac{n}{60} \Phi \Rightarrow \Phi = \frac{60 E a}{p N n} = \frac{60 \cdot 121,31}{2 \cdot 246 \cdot 1460} = 0,0101 \text{ Wb}$$

b) Elektromagnetni obrtni moment:

$$M = \frac{p}{a} \frac{N}{2\pi} \Phi I_a = \frac{2}{1} \cdot \frac{246}{2\pi} \cdot 0,0101 \cdot 149 = 117,8 \text{ Nm}$$

c) Otpor jedne paralelne grane indukta:

$$R_{a1} = 2a R_a = 2 \cdot 1 \cdot 0,0424 = 0,0848 \text{ } \Omega$$

10.6 Šestpolni motor jednosmerne struje ima na rotoru 59 žlebova sa osam provodnika u žlebu, svaki preseka 17 mm^2 , broj pari paralelnih grana je 1. Dužina navoja armature je 1200 mm, a magnetni fluks po polu je 0,02 Wb. Specifična provodnost bakra iznosi $57 \mu\text{S}$. Odrediti:

- a) otpor namotaja (armature) indukta,
- b) elektromotornu silu pri brzini obrtanja 500 ob/min,
- c) korisni momenat na osovini motora pri gustini struje namotaja indukta $3,6 \text{ A/mm}^2$ i momentu trenja i ventilacije 21,7 Nm.

Rešenje:

- a) Otpor namotaja indukta:

$$R_a = \frac{1}{2a} \frac{N}{2a} R_p = N \left(\frac{1}{2a} \right)^2 \rho \frac{l_p}{S_p} = 472 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{57} \cdot \frac{1,2/2}{17 \cdot 10^{-6}} = 0,0731 \Omega$$

Ukupan broj provodnika:

$$N = 59 \cdot 8 = 472$$

- b) Elektromotorna sila:

$$E = \frac{p}{a} N \frac{n}{60} \Phi = \frac{3}{1} \cdot 472 \cdot \frac{500}{60} \cdot 0,02 = 236 \text{ V}$$

Struja indukta:

$$I_a = 2a I_p = 2a J S_p = 2 \cdot 1 \cdot 3,6 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot 10^{-6} = 122,4 \text{ A}$$

- c) Elektromagnetni momenat:

$$M = \frac{p}{a} \frac{N}{2\pi} \Phi I_a = \frac{3}{1} \cdot \frac{472}{2\pi} \cdot 0,02 \cdot 122,4 = 551,7 \text{ Nm}$$

Korisni momenat:

$$M_2 = M - M_f = 551,7 - 21,7 = 530 \text{ Nm}$$

10.7 Motor jednosmerne struje sa paralelnom pobudom napona 220 V, otpora namotaja indukta 0,2 Ω , otpora namotaja induktora 55 Ω , struje koju motor uzima iz mreže 104 A. Odrediti koliki omski otpor treba ugraditi na red sa namotajem indukta da bi se brzina smanjila sa 1000 ob/min na 700 ob/min.

Rešenje:

Struja indukta:

$$I_a = I - \frac{U}{R_p} = 104 - \frac{220}{55} = 100 \text{ A}$$

Elektromotorna sila:

$$E = U - R_a I_a = 220 - 0,2 \cdot 100 = 200 \text{ V}$$

$$E_1 = k_E \Phi n_1 \Rightarrow k_E \Phi = \frac{E_1}{n_1} = \frac{200}{1000} = 0,2$$

$$E_2 = k_E \Phi n_2 = 0,2 \cdot 700 = 140 \text{ V}$$

Dodatni otpor:

$$U = E_2 + (R_a + R_d) I_a \Rightarrow R_d = \frac{U - E_2 - R_a I_a}{I_a}$$

$$R_d = \frac{220 - 140 - 0,2 \cdot 100}{100} = 0,6 \text{ } \Omega$$

10.8 Motor jednosmerne struje sa paralelnom pobudom napona 230 V, u opterećenom stanju, pri brzini 1400 ob/min, ima struju indukta 180 A. Otpor indukta je $R_a = 0,15 \text{ } \Omega$, a otpor pobude je $R_p = 0,15 \text{ } \Omega$. Gubici usled trenja i ventilacije su 540 W. Zanemariti pad napona na četkicama ($\Delta U_c = 0$). Odrediti:

- indukovanu elektromotornu silu,
- korisni momenat motora,
- stepen iskorišćenja motora.

Rešenje:

a) Indukovana elektromotorna sila:

$$E_a = U - \Delta U_{\dot{\epsilon}} - R_a I_a = 230 - 0 - 0,15 \cdot 180 = 203 \text{ V}$$

b) Korisna snaga:

$$P_2 = P_{meh} - P_f = E_a I_a - P_f = 203 \cdot 180 - 540 = 36540 - 540 = 36000 \text{ W}$$

Korisni momenat motora:

$$M_2 = 9,55 \frac{P_2}{n} = 9,55 \cdot \frac{36000}{1400} = 245,6 \text{ Nm}$$

c) Snaga preuzeta iz mreže:

$$U = E + R_a I_a / \cdot I_a \Rightarrow U I_a = E I_a + R_a I_a^2 \Rightarrow P_1 = P_{meh} + P_{Cua}$$

Struja pobude i opterećenja:

$$I_p = \frac{U}{R_p} = \frac{230}{90} = 2,56 \text{ A}, \quad I = I_a + I_p = 180 + 2,56 = 182,56 \text{ A}$$

Uložena snaga:

$$P_1 = U I = 230 \cdot 182,56 = 41990 \text{ W}$$

Stepen iskorišćenja motora:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{36000}{41990} = 85,7 \%$$

LITERATURA

- [1] Miloš Milanković, Dragoslav Perić, Ivana Vlajić Naumovska: *Osnovi elektroenergetike*, VIŠER, Beograd, 2016.
- [2] Ivana Vlajić Naumovska, Milan Ivezić, Borko Čupić: *Osnovi elektroenergetike-priručnik za laboratorijske vežbe*, VIŠER, Beograd, 2018.
- [3] Gojko Dotlić: *Elektroenergetika kroz standarde, zakone, pravilnike i tehničke preporuke*, SMEITS, Beograd, 2013.
- [4] Miloš Petrović: *Ispitivanje električnih mašina*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [5] Nikola Lj. Nikolić: *Električne mašine-Zbirka zadataka za elektrotehničke škole*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [6] Nikola Lj. Nikolić, Mihailo V. Petrović: *Opasnost i zaštita od električne struje*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.
- [7] Nikola Lj. Nikolić, Svetozar Vučković: *Zbirka zadataka iz elektrotehnike*, Naučna knjiga, Beograd, 1968.
- [8] Branko D. Popović: *Osnovi elektrotehnike 2*, Građevinka knjiga, Beograd, 1988.
- [9] F.T. Ulaby, U. Ravaioli: *Fundamentals of Applied Electromagnetics (Seventh edition)*, Pearson, 2014.