RAČUNARSKA GRAFIKA

Oznaka predmeta: RAG
Predavanje broj: 05

Nastavna jedinica: Geometrijske transformacije , 2D

Nastavne teme:

Matrična predstava, homogene koordinate, 2D transformacije: translacija, rotacija, skaliranje, refleksija, smicanje, složene transformacije, primena.

Predavač: prof. dr Perica S. Štrbac, dipl. ing.

Literatura:

James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John F. Hughes: "Computer Graphics: Principles and Practice", 2nd ed. in C, Addison-Wesley, 1996.

Geometrijske transformacije

- Geometrijske transformacije preslikavaju originalnu tačku u njenu sliku
- Postoje dve konvencije za geometrijske transformacije kretanja (translacije i rotacije):
  - konvencija pokretnog koordinatnog sistema (pokretne virtuelne kamere, odnosno posmatrača)
  - konvencija pokretnog objekta
- Konvencije se mogu kombinovati (kreće se i objekat i posmatrač)
- Ovde se podrazumeva
  - da se tačka nalazi u desnom pravouglom koordinatnom sistemu
  - da se primenjuje konvencija pokretne virtuelne kamere

2D transformacije

- 2D desni pravougli koordinatni sistem je definisan na sledeći način:
  - koordinatna osa prve koordinate (X) se prevodi u osu druge koordinate (Y) rotacijom oko koordinatnog početka za 90° u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku

- U slučaju afinih transformacija, ako su koordinate originalne tačke (x,y), koordinate neke tačke nakon transformacije su (x',y',1):

```
x' = A1·x + B1·y + C1·1

y' = A2·x + B2·y + C2·1

1  =  0·x +  0·y +  1·1
```

Matrična predstava transformacija

- Poslednjim identitetom se proširuje sistem jednačina, da bi se predstavio u matričnom obliku:

Q=P ·M

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A1 & A2 & 0 \\ B1 & B2 & 0 \\ C1 & C2 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je:

Q –slika tačke,

P –original tačke,

M –matrica transformacija

- Drugi oblik matrične jednačine: $Q^T = M^T \cdot P^T$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogene koordinate

- Predstava tačke u vektorskom obliku [x y] se proširuje trećom koordinatom jednakom 1: [x y 1]
- Koordinatni sistem za ovakvo predstavljanje tačke se naziva sistemom sa *homogenim koordinatama*
- Homogene koordinate čine matematički aparat uniformnim za sve transformacije
- Transformacija se predstavlja adekvatnom matricom transformacije M
- Treća kolona matrice M je konstantna za sve 2D transformacije
- Jednom izračunata matrica transformacije se koristi
  - da bi se sve relevantne tačke neke 2D slike transformisale na jedinstven način
- U petlji se množe vektori originalnih tačaka matricom transformacije:
  for (i=0; i<n; i++) transform(p[i],&q[i],M);
- Elementarnim transformacijama u 2D se smatraju
  - translacija,
  - rotacija,
  - skaliranje
  - smicanje

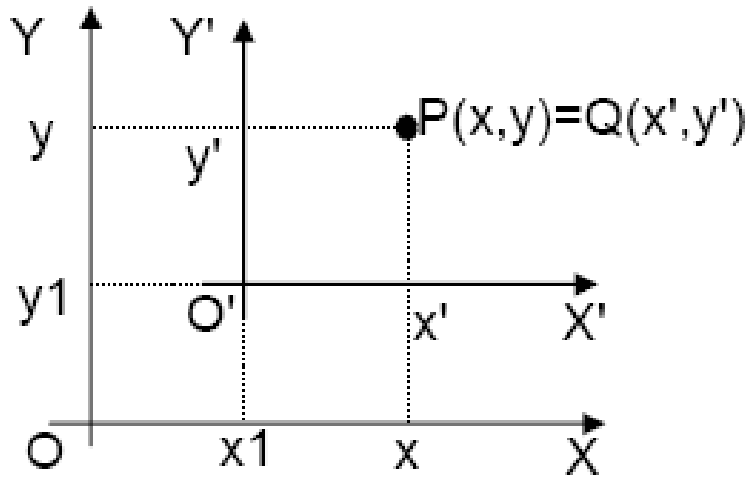
Translacija

- Koordinatni početak O(0,0) se translatorno pomera u tačku O'(x1,y1):

  $x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y - x1 \cdot 1$

  $y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y - y1 \cdot 1$

  $1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x1 & -y1 & 1 \end{bmatrix}$$

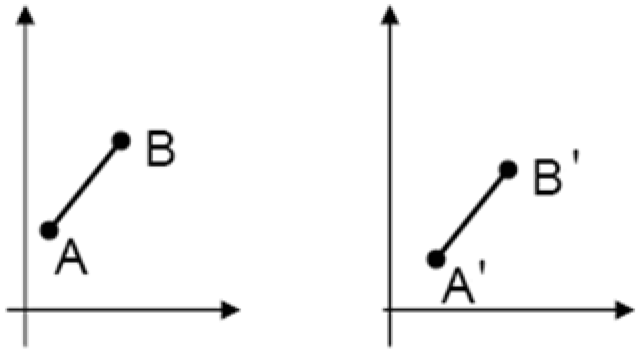
- Elementi C1 i C2 u opštoj matrici M
  - nazivaju se translatornim elementima

Translacija -primer

- Zadat je linijski segment krajnjim tačkama A(1,3) i B(4,6)
  - izvršiti translaciju koordinatnog sistema tako da se koordinatni početak premesti u tačku O'(-1,1)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotacija

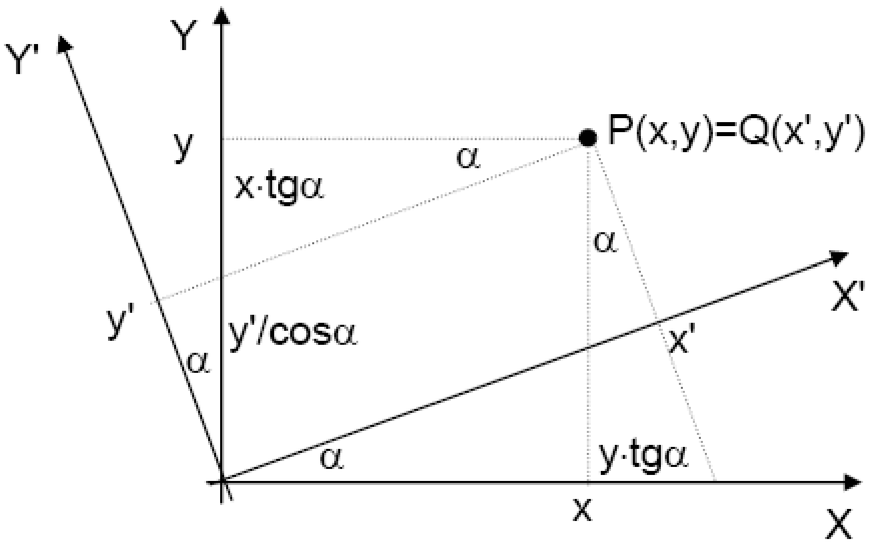
- Koordinatni sistem rotira oko centra u koordinatnom početku za ugao α u smeru nasuprot kretanja kazaljke na časovniku

$x'=(x+y\cdot tg\ \alpha)\cdot\cos\alpha$

$y= x\cdot tg\ \alpha +y'/\cos\alpha$

$x'=x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha$

$y'=-x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha$



$x' = \cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y + 0\cdot 1$

$y' = -\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y + 0\cdot 1$

$1 = 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot 1$

- Elementi A1, A2, B1 i B2 u opštoj matrici M
  - nazivaju se rotacionim elementima

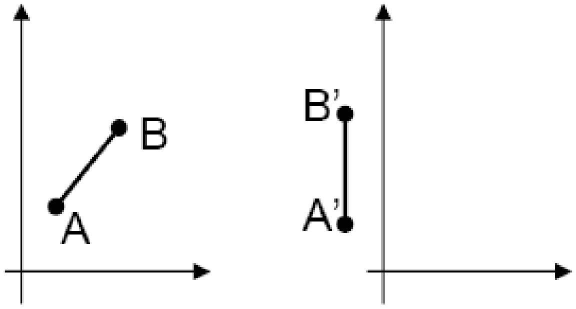
$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija -primer

- Zadat je linijski segment krajnjim tačkama A(1,3) i B(4,6)
  - rotirati koordinatni sistem za ugao α=45° u smeru kazaljke na časovniku

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$



Skaliranje

- Faktori skaliranja po X i Y osi: S_x i S_y
- Efekat:

  S<1 => smanjivanje objekta (udaljavanje posmatrača),

  S>1 => povećanje objekta (približavanje posmatrača)
- Preslikavanje:

  $x' = S_x \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1$

  $y' = 0 \cdot x + S_y \cdot y + 0 \cdot 1$

  $1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$

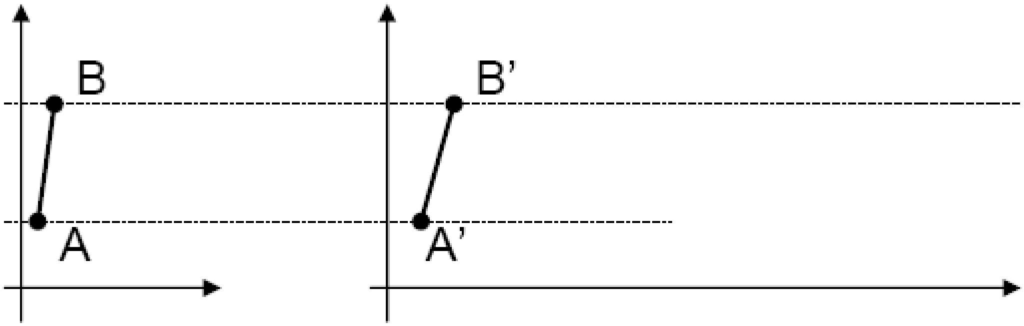
$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje -primer

- Primer:
  - segment linije određen je krajnjim tačkama A(1,3) i B(2,7).
  - izvršiti skaliranje, ako su dati skala faktori S_x=2 i S_y=1

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$



Refleksija

- Refleksija prema Y-osi:

  $S_x=-1$,

  $S_y=1$

- Refleksija prema X-osi:

  $S_x=1$,

  $S_y=-1$

- Refleksija prema proizvoljnoj osi:
  - translacijom se dovede koordinatni početak na datu osu
  - rotacijom se X-osa poklopi sa datom osom
  - primeni se refleksija prema X-osi
  - inverzna rotacija
  - inverzna translacija

Smicanje (Iskošenje/*Shear*)

- Faktori smicanja po X i Y-osi: H_x i H_y, respektivno
- Preslikavanje:

$$x' = 1 \cdot x + H_x \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$y' = H_y \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & H_y & 0 \\ H_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

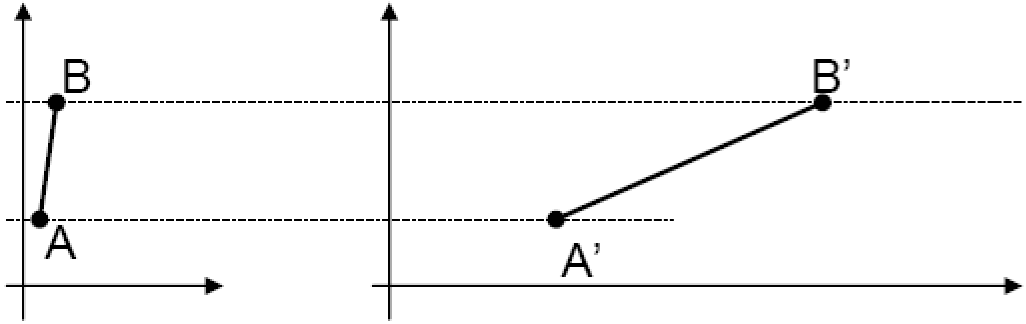
- Smicanje samo u pravcu X-ose: $H_y=0$;
- Smicanje samo u pravcu Y-ose: $H_x=0$

Smicanje -primer

- Primer:
  - segment linije određen je krajnjim tačkama A(1,3) i B(2,7)
  - izvršiti smicanje, ako su dati faktori smicanja H_x=2 i H_y=0

$$A' = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix}2 & 7 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 7 & 1\end{bmatrix}$$



Složene transformacije

- Neka je *q* slika tačke *p* definisane sa: `q=t3(t2(t1(p)))`
  - *tx* su elementarne transformacije koje se primenjuju redom: x=1, 2, 3

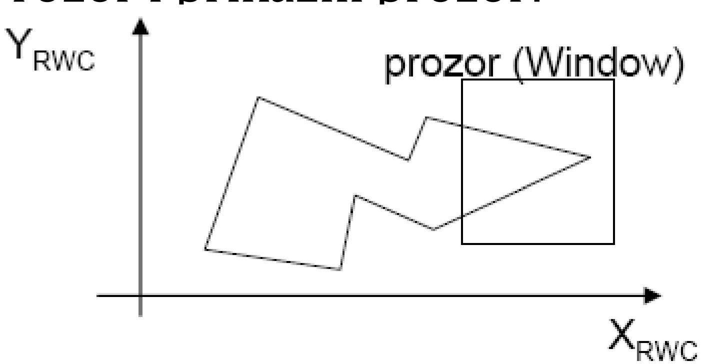
- Sledi (pošto je množenje matrica asocijativno):

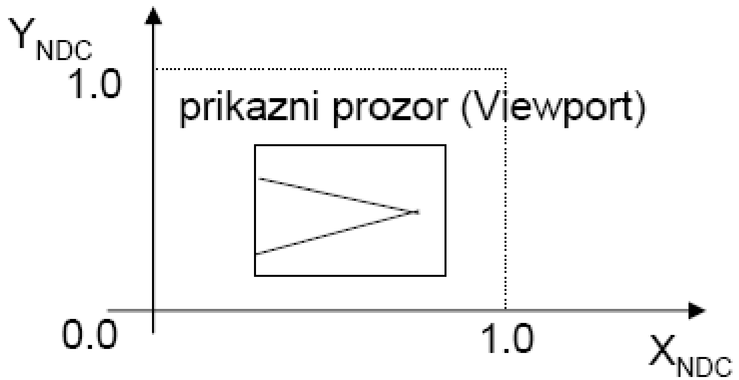
  Q=(((P*T1)*T2)*T3) = P*(T1*T2*T3) = P*T
  - T je kompozitna matrica složene transformacije,
  - T1, T2 i T3 su matrice elementarnih transformacija koje učestvuju u složenoj transformaciji

- Redosled transformacija je veoma važan
  - množenje matrica nije komutativno

Primena2D transformacija

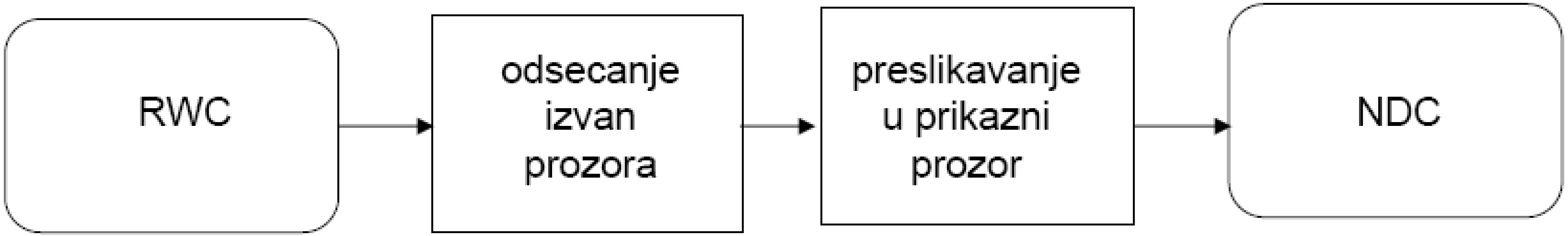
- Jedna primena 2D transformacija je transformacija slike
  - iz koordinatnog sistema realnog sveta u normalizovane koordinate uređaja
- Koordinate sveta (*Real World Coordinates*, RWC)
  - obično u jedinicama dužine, npr. u [cm,m,Km]
- Normalizovane koordinate uređaja (*Normalized Device Coordinates*, NDC)
  - [0.0, ... , 1.0]
- Koordinate uređaja
  - obično u jedinicama dužine ili u pikselima
- Prozor i prikazni prozor:





Generisanje prikaza

- Proces generisanja prikaza:



- Preslikavanje (mapiranje) u prikazni prozor:

  1. translacija (u RWC) tako da se koordinatni početak premesti u donji levi ugao prozora
  2. skaliranje tako da se prozor preslika u prikazni prozor;
     pošto se koordinate prikaznog prozora daju u NDC obliku, ovim se obezbeđuje prelaz iz RWC u NDC
  3. translacija (u NDC) tako da se prikazni prozor locira na željeno mesto unutar prikazne površine normalizovanog prikazivača

Primer

- Prozor je definisan pomoću sledećih relacija:
  $10 < x < 20, 8 < y < 13,$
- Prikazni prozor je u gornjem levom uglu virtuelnog ekrana, uoblasti:
  $0.0 < xd < 0.25, 0.75 < yd < 1.0$
- Rešenje:
  - translacija T1 koordinatnog sistema RW u donji levi ugao prozora: O'(10,8)
  - skaliranje S da bi se prozor preslikao u prikazni prozor:
    S_x =(0.25-0.0)/(20-10)=0.025 S_y =(1.0-0.75)/(13-8)=0.05
  - translacija T2 koordinatnog početka iz donjeg levog ugla prikaznog prozora u donji levi ugao virtuelnog ekrana: O''(0.0,-0.75)
- Kombinovanjem elementarnih transformacija dobija se kompozitna matrica totalne transformacije:

$$T1 \cdot S \cdot T2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -0.25 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 1/4

```
#pragma comment( lib, "opengl32.lib" )
#pragma comment( lib, "glu32.lib"    )
#pragma comment( lib, "glut32.lib   ")
#pragma comment( linker, "/subsystem:windows /entry:mainCRTStartup")
#include <GL/glut.h> //POSLEDNJI INCLUDE

int font=(int)GLUT_STROKE_ROMAN;
int deltax=0;
int deltay=0;
const int col=3;
//neka je ovo matrica transformacije T, Q=P*T
double T[3][3]={
  {  0.866,  0.500,  0.0},
  { -0.500,  0.866,  0.0},
  {  0.000,  0.000,  1.0}
};

//neka nam je ovo opis tacaka trougla u Afinim koordinatama
double trougao[3][3]={
  { 100.0, 100.0, 1.0},//A
  { 100.0, 200.0, 1.0},//B
  { 300.0, 100.0, 1.0} //C
};
```

Primer 2/4

```
//hajde da postavimo: Transformisi(m, m1, m2) gde je m=m1*m2 (moze i m*=m2)
void Transformisi(double* m, double* m1, double* m2){
  double mtemp[col][col];        int i,j,k;
  for(i=0;i<col;i++)
    for(j=0;j<col;j++){
      mtemp[i][j]=0;
      for(k=0;k<col;k++) mtemp[i][j] += m1[i*col+k] * m2[k*col+j];
    }
  for(i=0;i<col;i++) for(j=0;j<col;j++) m[i*col+j]=mtemp[i][j];
}
void SkenirajTastaturu(unsigned char c, int x, int y){
  //kolege, podesite T da se demonstrira samo ortogonalna translacija
  deltax=deltay=0.0;
  switch(c){
    case 'd':deltax= 1.0;break;
    case 'a':deltax=-1.0;break;
    case 'w':deltay= 1.0;break;
    case 's':deltay=-1.0;break;
    default: exit(0);
  }
  //mala igra i za translaciju
  T[2][0] = deltax; T[2][1] = deltay;
  Transformisi((double*)trougao, (double*)trougao, (double*)T);
  glutPostRedisplay(); }
```

Primer 3/4

```
void renderStrokeCharacter(float x, float y, float z, void *font,char *string)
{
  char *c;
  glPushMatrix();
  glTranslatef(x, y, z);
  for (c=string; *c != '\0'; c++) glutStrokeCharacter(font, *c);
  glPopMatrix();
}
void Prikazuj(){
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
  glBegin(GL_TRIANGLES);
    //original P
    glColor3d(255,0,0);
    glVertex2i(100,100);
    glVertex2i(100,200);
    glVertex2i(300,100);
    //slika Q
    glColor3d(0,0,255);
    glVertex2f(trougao[0][0],trougao[0][1]);
    glVertex2f(trougao[1][0],trougao[1][1]);
    glVertex2f(trougao[2][0],trougao[2][1]);
  glEnd();
  renderStrokeCharacter(0,250,0,(void *)font,"Primer");
  glFlush(); }
```

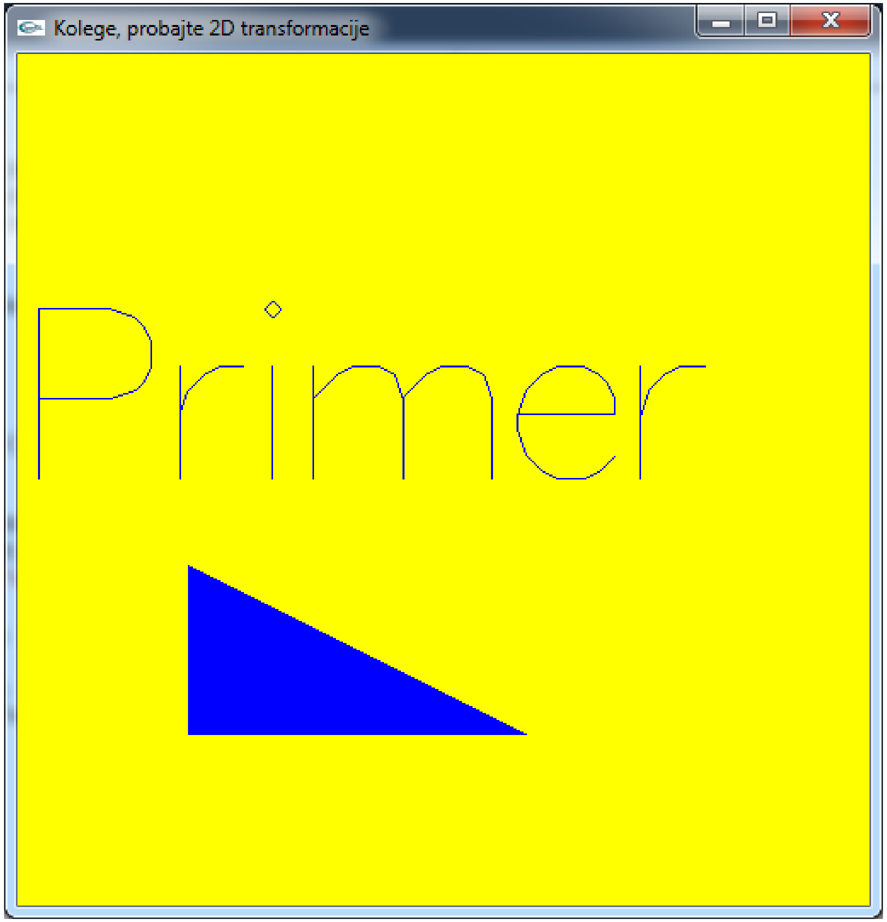
Primer 4/4

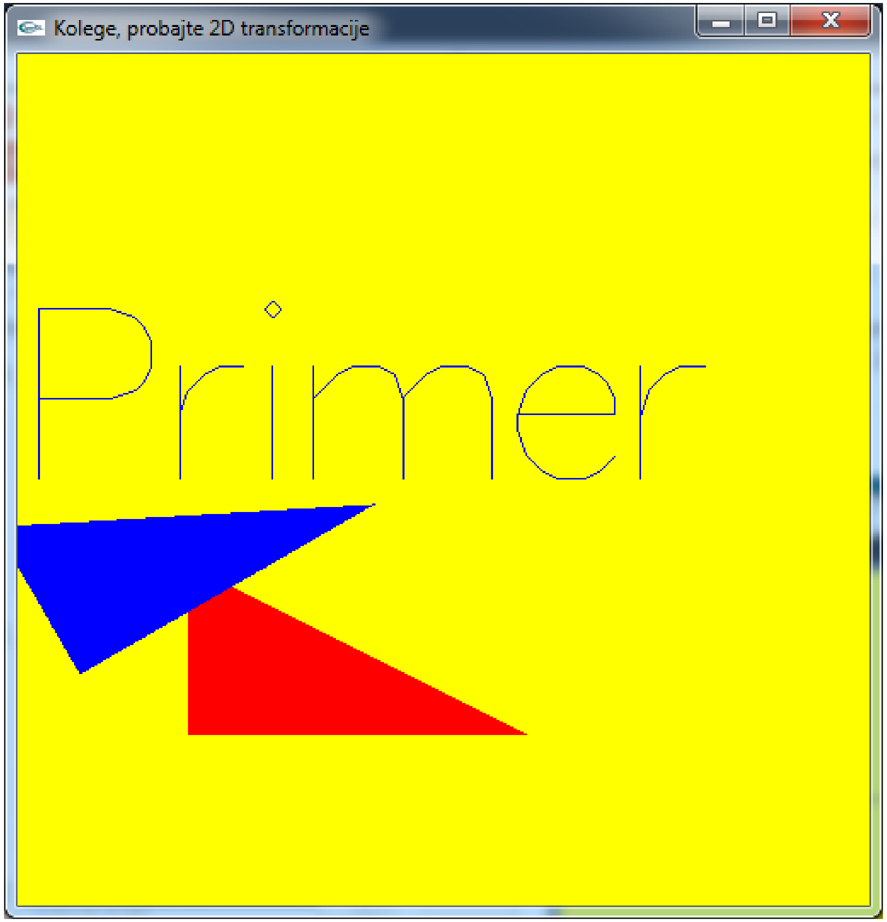
```
void main(int argc, char* argv[])
{
  glutInit(&argc,argv);
  glutInitDisplayMode(GLUT_RGB);
  glutInitWindowSize(500,500);
  int win=glutCreateWindow("Kolege, probajte 2D transformacije");

  glClearColor(0,0,0,0);
  gluOrtho2D(0,500,0,500);
  glutDisplayFunc(Prikazuj);
  glutKeyboardFunc(SkenirajTastaturu);

  //glutFullScreen();
  glutMainLoop();
}
```

Izlaz


Kolege, probajte 2D transformacije
Primer


Kolege, probajte 2D transformacije
Primer