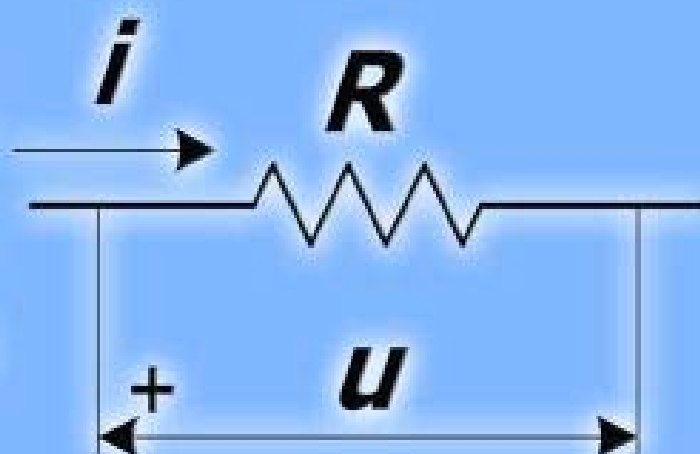
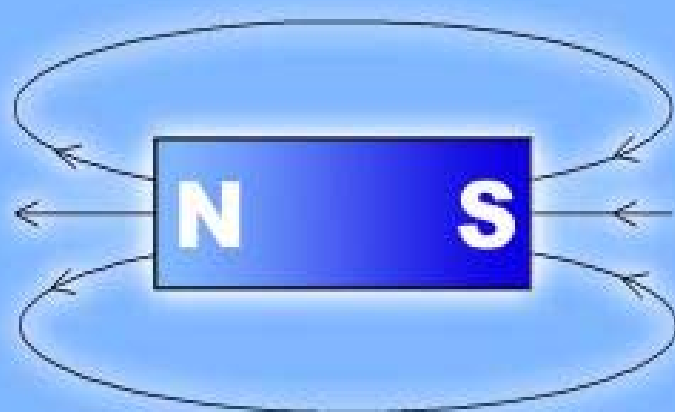




Sonja Krstić

Iva Đukić

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE**ELEKTROMAGNETIZAM****VREMENSKI PROMENLJIVE
ELEKTRIČNE STRUJE****BEOGRAD 2017****VISOKA ŠKOLA ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA**

Sonja Krstić

Iva Đukić

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE

Elektromagnetizam

Vremenski promenljive prostoperiodične električne struje



Visoia škola elektrotehnike i računarstva

Beograd, 2017.

Autori
dr Sonja Krstić, dr Iva Đukić

Recenzenti
dr Petar Bošnjaković, profesor Visoke škole elektrotehnike i računarstva u Beogradu
mr Aleksandra Gavrilović, profesor Visoke škole elektrotehnike i računarstva u Beogradu

Izdavač
Visoka škola elektrotehnike i računarstva,
Beograd, Vojvode Stepe 283

Za izdavača
dr Vera Petrović, direktor

Lektor
Anđelka Kovačević

Obrada i priprema teksta
Iva Đukić

Korice
Nenad Tolić

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд

621.3.025(075.8)(076)
537.8(075.8)(076)

КРСТИЋ, Соња, 1963-

Zbirka zadataka iz elektrotehnike : elektromagnetizam, vremenski promenljive prostoperiodične električne struje / Sonja Krstić, Iva Đukić. - 3. izd. - Beograd : Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, 2017 (Beograd : Razvojno-istraživački centar grafičkog inženjerstva TMF). - 182, XVI str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200. - Bibliografija: str. [XVII].

ISBN 978-86-7982-018-1

1. Ђукић, Ива, 1977- [аутор]

а) Електротехника - Задачи б) Електрична струја, наизменична - Задачи
с) Електромагнетизам - Задачи

COBISS.SR-ID 248837132

Tiraž
200 primeraka

Izdanje
3.

The European Commission support for the production of this publication does not constitute endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Štampa
Razvojno-istraživački centar grafičkog inženjerstva TMF, Beograd

PREDGOVOR

Ova knjiga je nastala kao rezultat višegodišnjeg držanja nastave na predmetima Osnovi elektrotehnike i Elektrotehnika u Višoj elektrotehničkoj školi. Knjiga je pre svega namenjena studentima smerova *Nove računarske tehnologije*, *Audio i video tehnologije* i *Menadžment u elektrotehnici* na predmetu Elektrotehnika, a može koristiti i studentima drugih smerova u Višoj elektrotehničkoj školi, kao i studentima drugih viših elektrotehničkih škola.

S obzirom da iz predmeta Elektrotehnika nije postojao adekvatan udžbenik ili zbirka, studenti su gradivo učili iz beležaka sa predavanja i vežbi. Autori su želeli da studentima maksimalno olakšaju savladavanje gradiva, i to tako što su u ovoj knjizi objedinili teorijske osnove, zadatke, koji su tokom godina rađeni na časovima računskih vežbi, kao i test pitanja, koja se nalaze na kraju svake oblasti. Na kraju knjige nalazi se matematički podsetnik koji sadrži određene oblasti iz matematike neophodne za praćenje gradiva predviđenog ovim predmetom. Teorijske osnove na početku svakog poglavlja izložene su u formi pitanja i odgovora, i služe samo kao podsetnik studentima koji su gradivo naučili na času ili iz udžbenika.

Ovo je druga od dve knjige i u njoj su obrađene dve oblasti: magnetizam i vremenski promenljive prostoperiodične električne struje.

Teorijske osnove i test pitanja pripremila je profesor mr Sonja Krstić. Zadatke je pripremila Iva Đukić.

Autori se zahvaljuju recenzentima, mr Aleksandri Gavrilović i dr Petru Bošnjakoviću, koji su detaljno pročitali tekst i ukazali na neke nedostatke.

Iako je knjiga pisana pažljivo i više puta proveravana, moguće je da se može naći poneka greška. Autori će biti zahvalni svima koji im na greške ukažu.

U Beogradu,
4.10.2010.

Autori

SADRŽAJ

III ELEKTROMAGNETIZAM	1
III.1 STALNA ELEKTROMAGNETNA POLJA	1
III.1.1 MAGNETNA INDUKCIJA	1
III.1.2 OSNOVNI POJMOVI O MAGNETNIM MATERIJALIMA	5
III.1.3 AMPEROV ZAKON	7
III.1.4 FLUKS VEKTORA MAGNETNE INDUKCIJE	19
III.1.5 KALEM	22
III.1.6 SPREGNUTI NAMOTAJI SA STALNIM STRUJAMA	45
III.2 PROMENLJIVA ELEKTROMAGNETNA POLJA	54
III.2.1 FARADEJEV ZAKON	54
III.2.2 SPREGNUTI NAMOTAJI SA VREMENSKI PROMENLJIVOM STRUJOM	62
III.2.3 ENERGIJA U MAGNETNOM POLJU	65
TEST	66
IV VREMENSKI PROMENLJIVE PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE	75
IV.1 PROSTOPERIODIČNE STRUJE	75
IV.1.1 OTPORNIK U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE	84
IV.1.2 KALEM U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE	88
IV.1.3 KONDENZATOR U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE	93
IV.1.4 REDNA RLC VEZA	98
IV.1.5 PARALELNA RLC VEZA	104
IV.1.6 PRETVARANJE PARAMETARA REDNE VEZE U PARAMETRE PARALELNE VEZE I OBRNUTO	110
IV.1.7 REDNA VEZA DVA PRIJEMNIKA	115
IV.1.8 PARALELNA VEZA DVA PRIJEMNIKA	116
IV.1.9 SNAGE U PROSTOPERIODIČNOM REŽIMU	117
IV.2 REŠAVANJE SLOŽENIH ELEKTRIČNIH KOLA PRIMENOM KOMPLEKSNOG RAČUNA ..	134
IV.2.1 PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM IZRAZIMA	134
IV.2.2 METODE ZA PRORAČUN SLOŽENIH ELEKTRIČNIH MREŽA	141
IV.2.2.1 OMOV ZAKON I KIRHOFOVI ZAKONI	142
IV.2.2.2 METOD KONTURNIH STRUJA	145
IV.2.2.3 TRANSFIGURACIJE KOLA	153
IV.2.2.3.1 TRANSFIGURACIJE IMPEDANSI	153
IV.2.2.3.2 TRANSFIGURACIJE GENERATORA	161
IV.2.2.4 TEVENENOVA TEOREMA	164
IV.2.2.4.1 PRILAGOĐENJE PRIJEMNIKA PO AKTIVNOJ SNAZI	167
TEST	171

MATEMATIČKI PODSETNIK

	I
EKSPONENTI	II
GEOMETRIJA	III
FUNKCIJE	IV
SKALARI I VEKTORI	VI
SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA	X
KOMPLEKSNI BROJEVI	XI
INTEGRALI	XIV

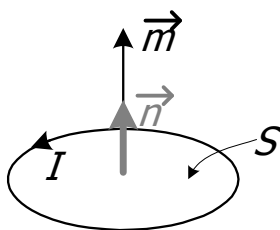
III ELEKTROMAGNETIZAM

III.1 STALNA ELEKTROMAGNETNA POLJA

III.1.1 MAGNETNA INDUKCIJA

TEORIJSKA OSNOVA

- U prirodi su magnetne pojave prvi put uočene u okolini rude gvožđa magnetita, koja se ponaša kao stalni magnet.
- Magnetne pojave postoje i u okolini svakog naelektrisanja koje se kreće. Zato je za objašnjavanje osnovnih magnetnih pojava uzeta mala zamišljena strujna kontura nekog naelektrisanja u kretanju (slično kao probno naelektrisanje u elektrostatici).
- Šta je glavni parametar strujne konture?
 - Glavni parametar strujne konture (svake, pa i probne) je njen **magnetni moment**:



$$\vec{m} = I \cdot \vec{S}$$

Njega čine proizvod struje te električne strujne konture i orijentisane površine te strujne konture. Površina je orijentisana jediničnim vektorom normale:

$$\vec{S} = S \cdot \vec{n}$$

- Šta se dogodi ako probnu konturu unesemo u magnetno polje?
 - Kontura će se postaviti tako da će pravac i smer normale na konturi definisati pravac i smer polja. Ako postavimo konturu u neki drugi položaj javiće se mehanički moment sila koji teži da vrati strujnu konturu u prvobitni položaj:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$

- Brojni eksperimenti pokazuju da maksimalni mehanički moment ne zavisi od oblika konture (potrebno je da je ravna i dovoljno malih dimenzija), već je:

$$|\vec{M}_{\max}| = I \cdot |\vec{S}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{n}, \vec{B}) = |\vec{m}| \cdot |\vec{B}|$$

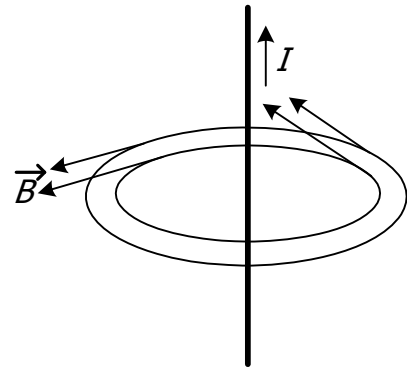
- Šta je magnetna indukcija?
 - Količnik maksimalnog mehaničkog momenta i magnetnog momenta konture:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{M}_{\max}|}{|\vec{m}|}$$

je uvek konstantan i jednak za sve probne konture. Zato je taj odnos proizveden u novu fizičku veličinu **magnetnu indukciju**.

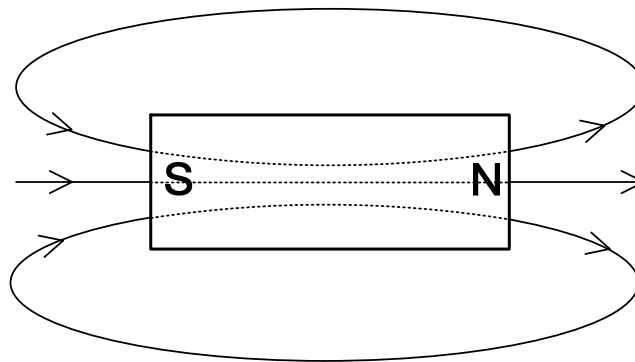
– Magnetna indukcija $\vec{B}$ je vektorska veličina (deluje različito u različitim pravcima i smerovima oko naelektrisanja koja se kreću).

- Linije magnetne indukcije u okolini provodnika sa strujom su koncentrične kružnice. Pretpostavlja se da je struja ravnomerno raspoređena po poprečnom preseku provodnika.



- Šta su to linije magnetne indukcije?
 - Linije na koje je vektor magnetne indukcije uvek tangentan.

- Linije magnetne indukcije izviru iz severnog (N), a uviru u južni (S) pol.



- Koja je jedinica za magnetnu indukciju?
 - Tesla [T].
- Na pravolinijski provodnik dužine l kroz koji protiče električna struja I , koji se nalazi u spoljašnjem magnetnom polju indukcije $\vec{B}$, deluje magnetna sila:

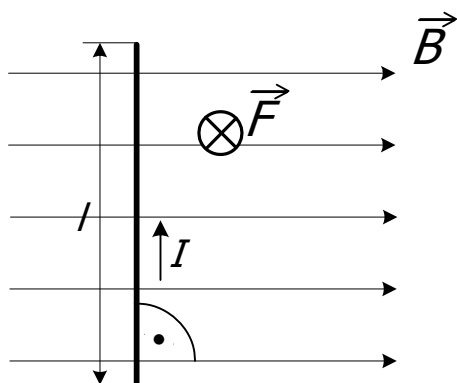
$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}.$$

- Ako se električna struja posmatra na nivou naelektrisanja koja se kreću, magnetna sila može se izračunati kao:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}.$$

Ova sila se zove Lorencova sila.

Primer: pravolinijski provodnik dužine l , kroz koji protiče stalna električna struja jačine I , nalazi se u spoljašnjem homogenom magnetnom polju indukcije $\vec{B}$. Na njega deluje magnetna sila $\vec{F}$, smera kao na slici. (Orijentacija provodnika $\vec{l}$ uzima se prema smeru struje koja kroz njega prolazi.)



$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

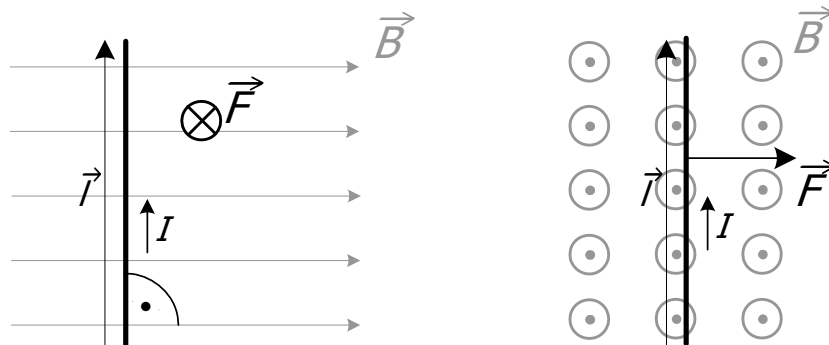
$$|\vec{F}| = I |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{l}, \vec{B}) = I |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin \frac{\pi}{2}$$

$$F = IlB$$

ZADACI

III.1.1.1 Pravolinijski provodnik, dužine $l = 2 \text{ m}$, sa strujom jačine $I = 0,5 \text{ A}$, nalazi se u homogenom magnetnom polju, indukcije $B = 1 \text{ T}$, i postavljen je normalno na linije polja. Odrediti silu koja deluje na provodnik (njen intenzitet, pravac i smer).

Rešenje:



Slika III.1.1.1.1

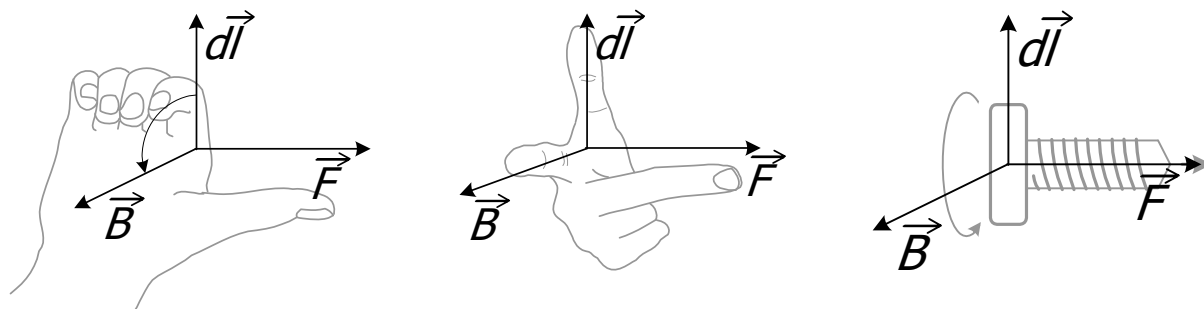
Na slici III.1.1.1.1 prikazan je pravolinijski provodnik u homogenom magnetnom polju, gledano iz dva ugla. Na slici je prikazan vektor $\vec{l}$, koji ima intenzitet jednak dužini provodnika, pravac koji se poklapa sa pravolinijskim provodnikom i smer koji se poklapa sa smerom prostiranja struje kroz provodnik. Sila koja deluje na provodnik je:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

$$|\vec{F}| = I |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{l}, \vec{B}) = I |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin \frac{\pi}{2}$$

$$F = IB = 0,5 \text{ A} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ T} = 1 \text{ N}$$

Pravac sile, kao rezultat vektorskog proizvoda vektora $\vec{l}$ i $\vec{B}$, normalan je na ravan koju obrazuju ova dva vektora. Smer sile određujemo primenom nekog od pravila: **pravila desne ruke**, **pravila tri prsta** ili **pravila desne zavojnice** (tj. **zavrtnja**). Prema pravilu desne ruke ispruženi palac će pokazivati smer vektora (u našem slučaju vektora $\vec{F}$) dobijenog vektorskim množenjem dva vektora ($\vec{l}$ i $\vec{B}$), ako savijeni prsti pokazuju smer okretanja prvog vektora ($\vec{l}$) kojim bi se on najkraćim putem poklopio sa drugim vektorom ($\vec{B}$). Prema pravilu tri prsta ako palac usmerimo kao prvi vektor ($\vec{l}$), kažiprst kao drugi ($\vec{B}$), srednji prst će pokazivati rezultat vektorskog proizvoda ova dva vektora ($\vec{F}$). Po pravilu desne zavojnice smer rezultata vektorskog proizvoda ($\vec{F}$) poklapa se sa smerom kretanja zavojnice, ako bi se ona okretala zajedno sa prvim vektorom ($\vec{l}$), tako da se najkraćim putem poklopi sa drugim vektorom ($\vec{B}$).



Slika III.1.1.1.2

III.1.2 OSNOVNI POJMOVI O MAGNETNIM MATERIJALIMA

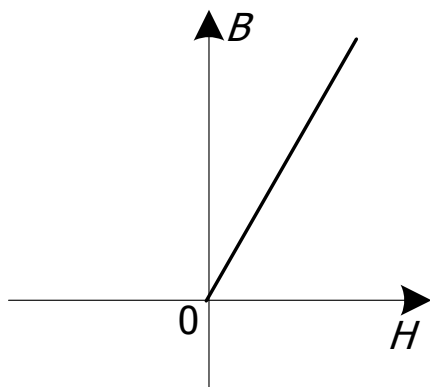
TEORIJSKA OSNOVA

• Svi magnetni materijali, i prirodni i sintetički, mogu se podeliti prema svom magnetnom uređenju na:

- materijale sa slabim magnetnim uređenjem,
- materijale sa jakim magnetnim uređenjem.

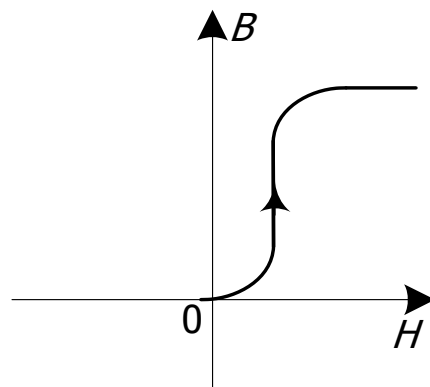
MATERIJALI SA SLABIM MAGNETNIM UREĐENJEM

- To su :
 - dijamagnetici (relativna magnetna permeabilnost μ_r im je neznatno manja od 1),
 - paramagnetici (relativna magnetna permeabilnost μ_r im je neznatno veća od 1).
- Kod ovih materijala je zavisnost između magnetne indukcije i jačine magnetnog polja linearna.



MATERIJALI SA JAKIM MAGNETNIM UREĐENJEM

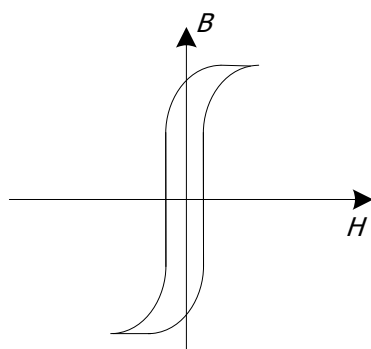
- To su:
 - feromagnetici (relativna magnetna permeabilnost μ_r im je mnogo veća od 1),
 - ferimagnetici (relativna magnetna permeabilnost μ_r im je mnogo veća od 1),
 - antiferomagnetici (kod njih se međusobni uticaj domena poništava).
- Kod ovih materijala je zavisnost između magnetne indukcije i jačine magnetnog polja nelinearna.



- Za primenu u elektrotehnici su najznačajniji fero i ferimagnatici. Oni se mogu podeliti i prema svojoj prvobitnoj krivoj magnećenja (vidi na strani 8), na:
 - magnetno meke,
 - magnetno tvrde.

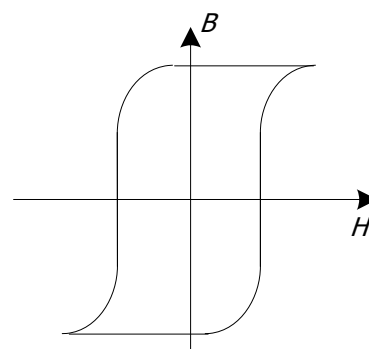
MAGNETNO MEKI MATERIJALI

- Ovi materijali imaju uspravnu krivu prvobitnog magnećenja (jako veliku relativnu magnetnu permeabilnost μ_r).
- Histerezisna petlja im je uska i uspravna, pa su i histerezisni gubici veoma mali.
- Primjenjuju se u naizmjeničnim promjenljivim magnetnim poljima, za izradu limova za transformatore i električne mašine.



MAGNETNO TVRDI MATERIJALI

- Ovi materijali imaju položenu krivu prvobitnog magnećenja (relativna magnetna permeabilnost μ_r im je velika, ali ne kao kod magnetno mekih materijala).
- Histerezisna petlja im je položena i ima veću površinu, pa su i histerezisni gubici veliki.
- Primjenjuju se za izradu stalnih magneta (jer bi primena u naizmjeničnom polju bila preskupa zbog velikih histerezisnih gubitaka).



III.1.3 AMPEROV ZAKON

TEORIJSKA OSNOVA

- Kako glasi Amperov zakon?
 - Cirkulacija vektora magnetne indukcije duž zatvorene konture jednaka je proizvodu magnetne permeabilnosti vakuumu μ_0 i sume svih struja koje ta kontura obuhvata:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

- μ_0 je magnetna permeabilnost vakuumu i vazduha (i još nekih materijala sa slabim magnetnim uređenjem):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \text{ ili } \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$$

- Šta se izračunava Amperovim zakonom?
 - Vektor magnetne indukcije $\vec{B}$. Drugim rečima, Amperovim zakonom se posmatra doprinos vektora $\vec{B}$ duž željene konture (putanje).
- U kojoj materijalnoj sredini važi Amperov zakon?
 - U vakuumu, vazduhu i materijalnim sredinama sa slabim magnetnim uređenjem (na primer, paramagneticima).
- A u drugim materijalnim sredinama?
 - U drugim sredinama važi uopšteni Amperov zakon.
- U čemu je razlika između Amperovog i uopštenog Amperovog zakona? Zašto uopšte postoje dva zakona?
 - Uopšteni važi za sve materijalne sredine. Uključuje i magnetizaciju magnetika.
- A kako glasi?
 - Cirkulacija vektora jačine magnetnog polja duž zatvorene konture jednaka je sumi svih struja koje ta kontura obuhvata:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k$$

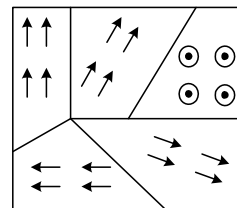
Pri tome je vektor jačine magnetnog polja

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

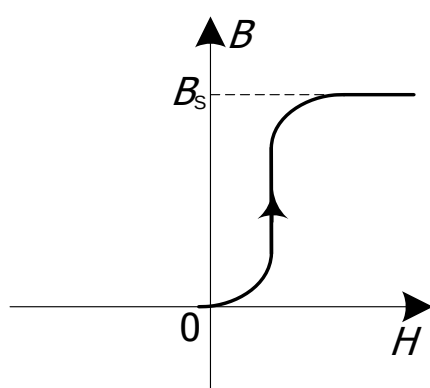
gde je $\vec{M}$ vektor magnetizacije (vektor gustine magnetnog momenta).

- Koja je jedinica za jačinu magnetnog polja?
 - $\frac{\text{A}}{\text{m}}$.
- Koja je jedinica za vektor magnetizacije?
 - $\frac{\text{A}}{\text{m}}$.

- A šta je to magnetizacija materijala?
 - Kada se neki fero ili ferimagnetni materijal unese u spoljašnje magnetno polje dolazi do magnetizacije tog materijala. To se objašnjava postojanjem domena u materijalu. U okviru jednog domena su svi magnetni momenti strujnih kontura orijentisani u istom smeru, ali su ti smerovi različiti za različite domene.
 - Kada se ovakav materijal unese u polje, postepeno dolazi do namagnetisavanja domena, odnosno do preusmeravanja vektora magnetnog momenta u smeru spoljašnjeg magnetnog polja. To je okarakterisano prvobitnom krivom magnećenja i histerezisnom krivom:

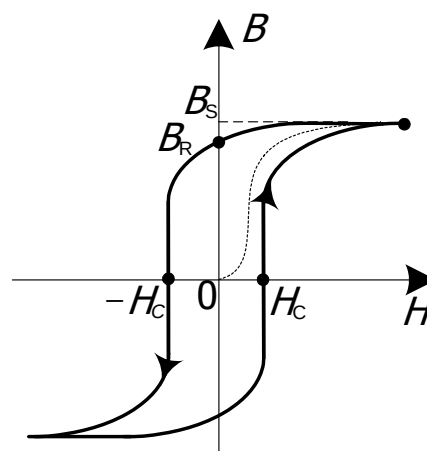


PRVOBITNA KRIVA MAGNEĆENJA



- Ako materijal prethodno nije bio namagnetisan kriva kreće iz koordinatnog početka.
- **B_s – zasićenje**, kada su svi momenti svih domena orijentisani u smeru polja.
- Daljim povećanjem spoljašnjeg polja ne može se ništa postići u smislu povećanja indukcije

HISTEREZISNA KRIVA



- Histerezisna petlja karakteriše ponašanje nelinearnih magnetnih materijala u naizmeničnom spoljašnjem magnetnom polju.
- Kad je postignuto zasićenje ne može se više povećavati indukcija.
- Kad se smanjuje intenzitet polja istog smera indukcija opada, ali sporije nego po prvobitnoj krivoj magnećenja.
- Kad polje padne na nulu postoji **zaostala (remanentna) indukcija B_R** .
- Kad polje promeni smer i počne da raste u suprotnom smeru, indukcija u jednom trenutku padne na nulu. Vrednost polja kad je indukcija nula je **koercitivno polje – H_c** .
- Kad polje dalje raste u suprotnom smeru, opet magnetna indukcija ulazi u zasićenje.
- Ovaj proces se ponavlja za svaki naizmenični ciklus.

- Histerezisna kriva predstavlja nelinearnu zavisnost vektora magnetne indukcije od vektora jačine magnetnog polja, što je slučaj kod nelinearnih materijala (fero i ferimagnetici).
- Ako je materijal linearan (na primer, paramagnetici), onda je zbog linearne zavisnosti vektora indukcije od vektora jačine polja proračun mnogo jednostavniji:

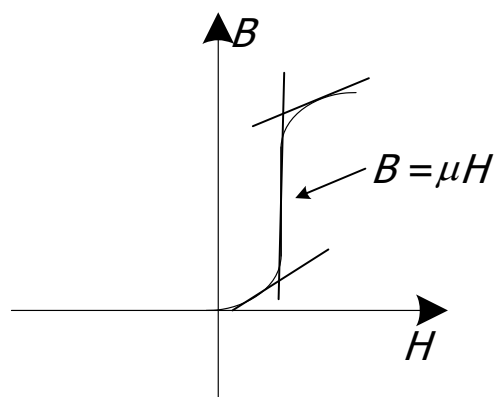
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

gde su μ_0 - magnetna permeabilnost vakuuma

μ_r - relativna magnetna permeabilnost

μ - apsolutna magnetna permeabilnost

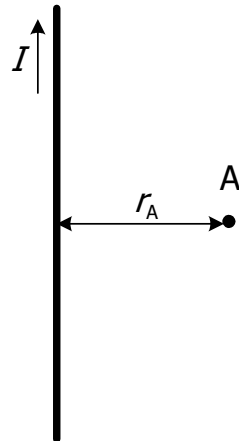
- Često se i grafik nelinearnog materijala može linearizovati u određenom segmentu. Tako se pojednostavljuje proračun.



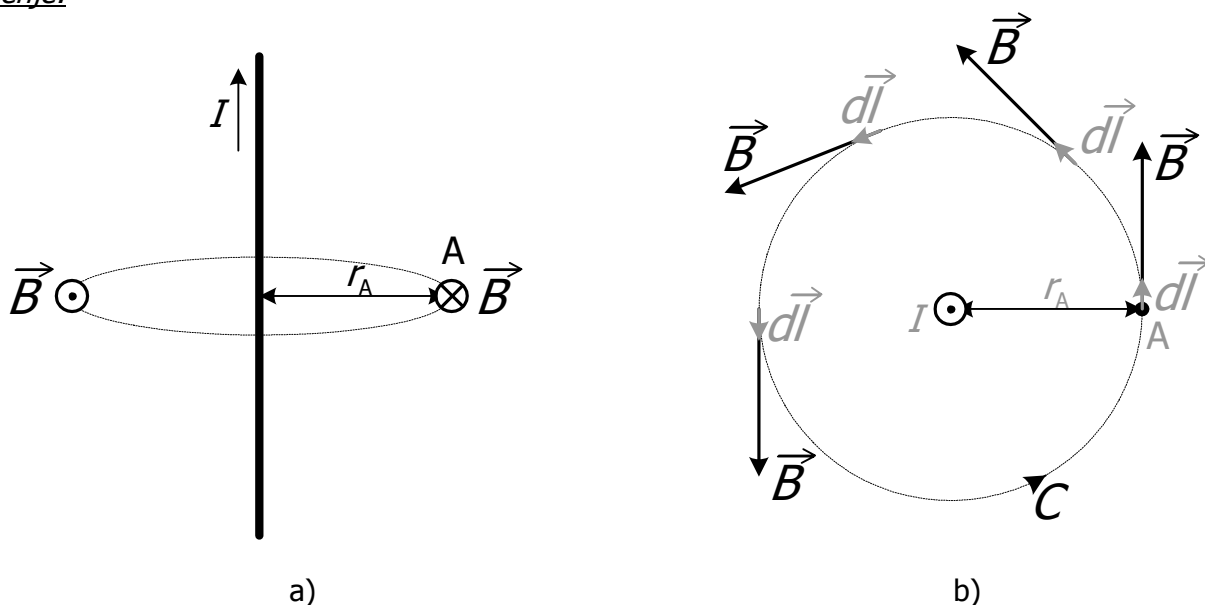
ZADACI

III.1.3.1 a) Kolika je magnetna indukcija u tački A, koja se nalazi na rastojanju $r_A = 2$ cm od beskonačnog pravolinijskog provodnika sa strujom jačine $I = 2$ A?

b) Ako bi se na rastojanju $r_A = 2$ cm od provodnika, paralelno sa njim, postavio drugi pravolinijski provodnik dužine $l = 1$ m, sa strujom jačine $I' = 1$ A, istog smera kao struja I , kolika bi sila delovala na taj provodnik? Da li je ova sila privlačna ili odbojna?

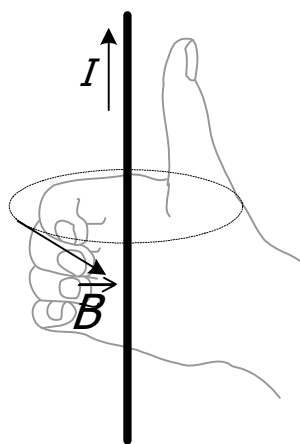


Rešenje:

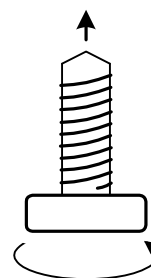


Slika III.1.3.1.1

Smatraćemo da je struja ravnomerno raspoređena po poprečnom preseku provodnika pa su zbog simetrije linije vektora magnetne indukcije kružnice sa centrom na osi provodnika, kao što je prikazano na slici III.1.3.1.1. Vektor magnetne indukcije $\vec{B}$ je u svakoj tački tangentan na ove linije. Smer vektora $\vec{B}$ određujemo na osnovu **pravila desne ruke**, odnosno **pravila desne zavojnice** u odnosu na smer struje kroz provodnik. **Po pravilu desne ruke ako se palac postavi paralelno sa provodnikom i ispruži u smeru struje, onda smer savijenih prstiju pokazuje smer vektora magnetne indukcije** (slika III.1.3.1.2a). **Po pravilu desne zavojnice, zavojnica postavljena paralelno sa provodnikom, kretaće se u smeru struje koja teče kroz provodnik, ako se zavrće u smeru koji se poklapa sa vektorom magnetne indukcije** (slika III.1.3.1.2b). Pravilo desne ruke, odnosno zavojnice, koristi se i za određivanje smera vektora, koji je rezultat vektorskog proizvoda dva vektora, sa kojim smo se sreli kod određivanja sile na provodnik sa strujom koji se nalazi u magnetnom polju (zadatak III.1.1.1).



a) pravilo desne ruke



b) pravilo desne zavojnice

Slika III.1.3.1.2

Radi boljeg razumevanja, na slici III.1.3.1.1b prikazan je presek u ravni normalnoj na provodnik (provodnik je normalan na papir, pa su linije vektora magnetne indukcije paralelne sa ravni papira). Na istoj slici pod a) prikazan je pogled sa strane (provodnik je u ravni papira, a linije vektora magnetne indukcije su normalne na papir).

Primenimo Amperov zakon na konturu C koja se poklapa sa linijom magnetnog polja, tj. sa kružnicom prikazanom na slici III.1.3.1.1b. (Konturu C na koju primenjujemo Amperov zakon možemo proizvoljno odrediti, ali je za račun najlakše usvojiti konturu koja se poklapa sa linijom magnetnog polja.) Kružnicu možemo usmeriti proizvoljno. Usvojimo smer kružnice koji se poklapa sa smerom vektora $\vec{B}$ (slika III.1.3.1.1b). Pošto se provodnik nalazi u vazduhu možemo primeniti Amperov zakon u obliku:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k.$$

$d\vec{l}$ je beskonačno mali deo konture C , a vektor $d\vec{l}$ je usmeren kao kontura C i prikazan je na slici III.1.3.1.1b. $\sum_k I_k$ predstavlja algebarski zbir struja koje su obuhvaćene konturom C , i to struje

čiji je smer vezan sa smerom konture C pravilom desne ruke uzimaju se sa pozitivnim predznakom, i obrnuto. U našem slučaju konturom C je obuhvaćen samo provodnik sa strujom I , čiji je smer vezan sa smerom konture pravilom desne ruke, pa je predznak ove struje pozitivan.

Sa slike III.1.3.1.1b vidi se da su vektori $\vec{B}$ i $d\vec{l}$ u svakoj tački konture istog pravca i smera, pa je ugao između njih uvek jednak nuli ($\cos 0 = 1$). Primenimo ovu činjenicu na skalarni proizvod ova dva vektora:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B \cdot dl \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_C B \cdot dl = \mu_0 I.$$

U svim tačkama na konturi C vektor $\vec{B}$ ima isti intenzitet, pa se intenzitet ovog vektora može izvući kao konstanta ispred integrala:

$$B \oint_C dl = \mu_0 I.$$

Integral $\oint_C d\vec{l}$ predstavlja zbir elementarnih delova $d\vec{l}$ po konturi C , pa je integral upravo jednak obimu konture C . Kontura C je kružnica poluprečnika r_A , pa je obim jednak $2\pi r_A$. Konačno je:

$$B \cdot 2\pi r_A = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r_A}.$$

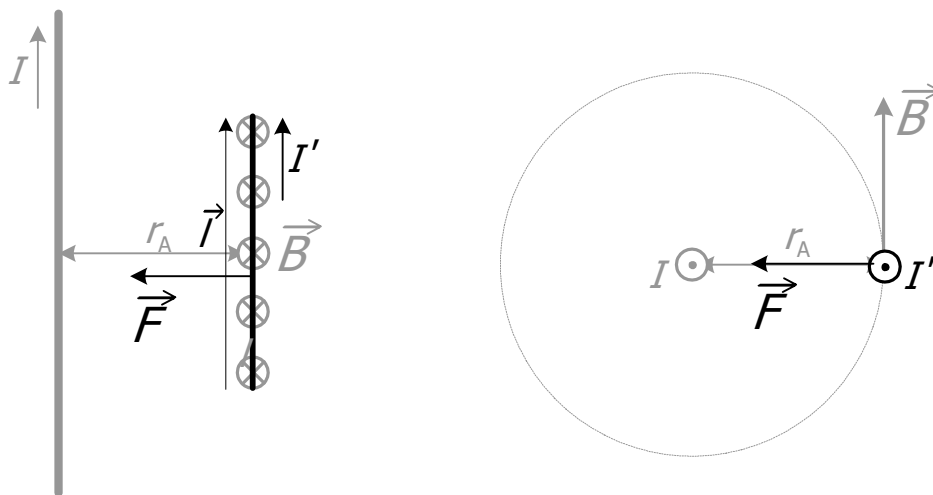
Zamenimo brojne vrednosti iz zadatka:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_A} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 2 \text{ A}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-7+2} \text{ T} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

b) Na slici III.1.3.3 prikazan je sistem ova dva provodnika. U svim tačkama provodnika sa strujom I' , provodnik sa strujom I stvara magnetno polje, indukcije koju smo izračunali u zadatku pod a). Kao što se vidi sa slike, vektor magnetne indukcije je normalan na provodnik sa strujom I' . Pravilom desne ruke ili desne zavoynice određujemo smer sile. Prema zadatku III.1.1.1 je:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I' \cdot \vec{l} \times \vec{B} \\ |\vec{F}| &= I' |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{l}, \vec{B}) = I' |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin \frac{\pi}{2} \\ F &= I' \cdot l \cdot B = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

Vidimo da je u ovom slučaju sila privlačna. Da je smer struje I' suprotan, i sila bi bila suprotnog smera, tj. sila bi bila odbojna. Na osnovu ovoga možemo zaključiti: ako su struje kroz dva paralelna provodnika istog smera, sila između njih je privlačna, i obrnuto, ako su struje kroz dva paralelna provodnika suprotnog smera, sila između njih je odbojna.



Slika III.1.3.1.3

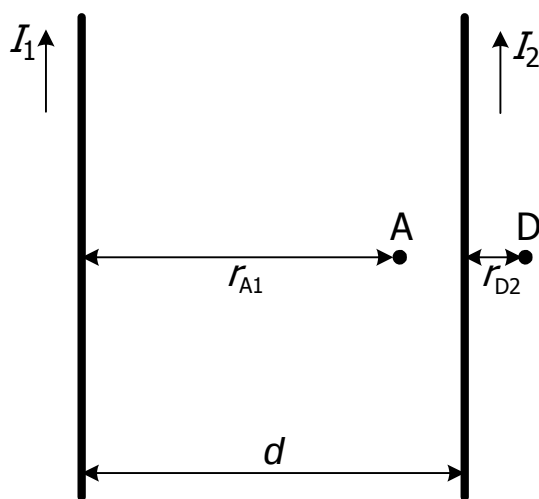
Napomena: Ova osobina da se provodnici sa strujom međusobno privlače ili odbijaju iskorišćena je za definiciju SI jedinice *amper*: jačina struje u dva paralelna beskonačno duga provodnika zanemarljive debljine, koji se nalaze u vakuumu na rastojanju od 1 m, jednaka je 1 A ako je podužna sila kojom provodnici deluju jedan na drugi $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

III.1.3.2 Dva beskonačna pravolinijska provodnika postavljena su paralelno jedan drugom na rastojanju $d = 5 \text{ cm}$, u vazduhu. Kroz prvi provodnik protiče stalna struja jačine $I_1 = 1 \text{ A}$, a kroz drugi provodnik protiče stalna struja jačine $I_2 = 0,5 \text{ A}$, prema smerovima prikazanim na slici (struje kroz provodnike su istih smerova).

a) Odrediti vektor magnetne indukcije (izračunati intenzitet, a ucrtati pravac i smer) u tački A, koja se nalazi između ova dva provodnika, u ravni koju oni određuju, a udaljena je od provodnika sa strujom I_1 za $r_{A1} = 4 \text{ cm}$.

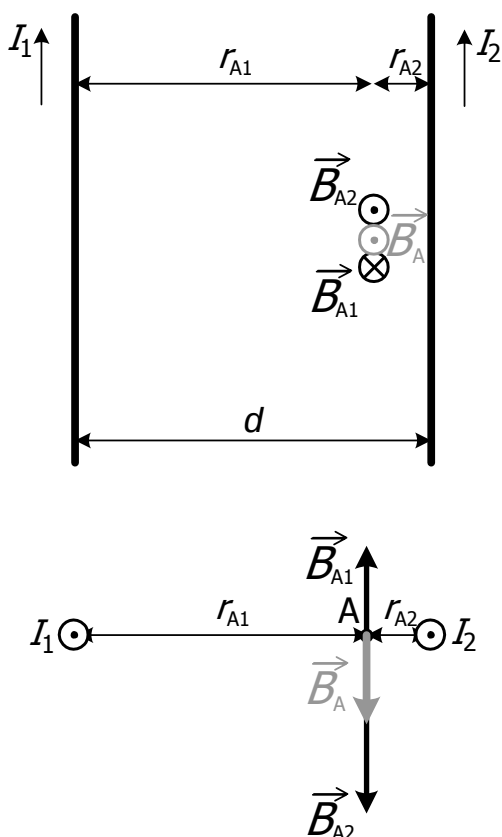
b) Odrediti vektor magnetne indukcije (izračunati intenzitet, a ucrtati pravac i smer) u tački D, koja se nalazi u ravni koju određuju ova dva provodnika, sa strane provodnika sa strujom I_2 , a udaljena je od njega za $r_{D2} = 1 \text{ cm}$.

c) Da li je sila kojom provodnici deluju jedan na drugi privlačna ili odbojna?



Rešenje:

a)



Slika III.1.3.2.1

Primenimo princip superpozicije na vektor magnetne indukcije: ukupnu magnetnu indukciju u tački A dobićemo kada vektorski saberemo vektor magnetne indukcije $\vec{B}_{A1}$ koju u tački A stvara provodnik sa strujom I_1 i vektor magnetne indukcije $\vec{B}_{A2}$ koju u tački A stvara provodnik sa strujom I_2 . Na slici III.1.3.2.1 prikazani su ovi vektori, kao i rezultujući vektor $\vec{B}_A$ (donja slika predstavlja poprečni presek provodnika). Vektore $\vec{B}_{A1}$ i $\vec{B}_{A2}$ određujemo kao u prethodnom zadatku: linije vektora su kružnice sa centrom na osi provodnika, vektori magnetne indukcije su tangente na njih, a smer je određen pravilom desne ruke, ili desne zavojnice, u odnosu na smer struje kroz provodnik. Intenziteti vektora magnetne indukcije su:

$$B_{A1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{A1}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,5 \cdot 10^{-7+2} \text{ T} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_{A2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{A2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 0,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10^{-7+2} \text{ T} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

gde je

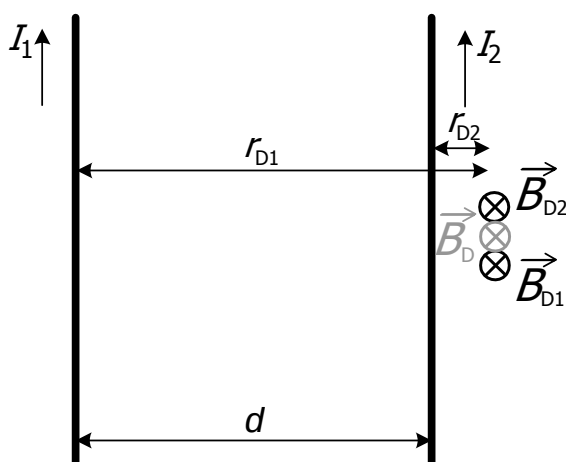
$$r_{A2} = d - r_{A1} = 5 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 1 \text{ cm}.$$

Sa slike III.1.3.2.1 vidi se da su oba vektora magnetne indukcije normalna na ravan koju obrazuju provodnici. Dakle, vektori $\vec{B}_{A1}$ i $\vec{B}_{A2}$ su istog pravca, ali su suprotnog smera. Slično kao u zadatku I.1.3a, vektorski sabiramo dva vektora istog pravca, a suprotnog smera, pa rezultujući vektor $\vec{B}_A$ ima intenzitet koji je jednak razlici intenziteta ova dva vektora, pravac mu se poklapa sa pravcem vektora koje sabiramo, a smer se poklapa sa smerom vektora većeg intenziteta (u ovom slučaju je to vektor $\vec{B}_{A2}$).

$$\vec{B}_A = \vec{B}_{A1} + \vec{B}_{A2}$$

$$B_A = B_{A2} - B_{A1} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T} - 5 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

b)

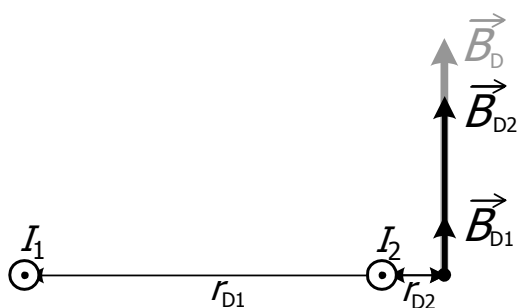


U tački D vektor magnetne indukcije koju stvara provodnik sa strujom I_1 je

$$B_{D1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{D1}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

dok je vektor magnetne indukcije koju stvara provodnik sa strujom I_2 :

$$B_{D2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{D2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 0,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$



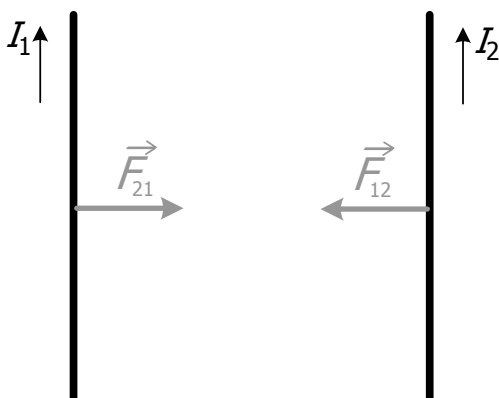
Slika III.1.3.2.2

Primenom principa superpozicije sabiramo ova dva vektora koja su (kao i u delu zadatka pod a) normalna na ravan koju obrazuju dva provodnika, pa su istog pravca. Sada su oba vektora istog smera (slika III.1.3.2.2) pa je rezultujući vektor $\vec{B}_D$, kao u zadatku I.1.3.b, istog pravca i smera kao vektori koje sabiramo, a intenzitet mu je jednak zbiru intenziteta vektora $\vec{B}_{D1}$ i $\vec{B}_{D2}$:

$$\vec{B}_D = \vec{B}_{D1} + \vec{B}_{D2}$$

$$B_D = B_{D1} + B_{D2} =$$

$$= 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ T} + 10 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 13,33 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



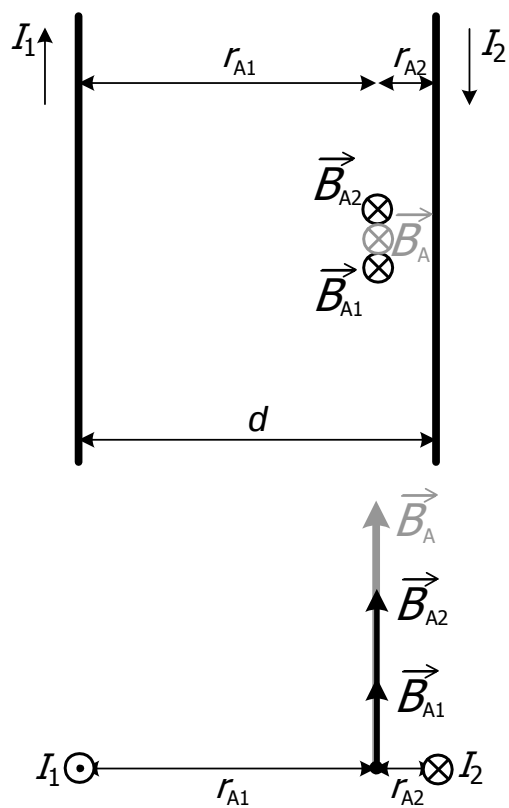
Slika III.1.3.2.3

c) Kao što je pokazano u zadatku III.1.3.1b, kada su struje kroz paralelne provodnike istog smera, sila kojom deluju jedan na drugi je privlačna.

III.1.3.3 Uraditi prethodni zadatak ako su struje kroz provodnike suprotnih smerova.

Rešenje:

a)



Slika III.1.3.3.1

Na slici III.1.3.3.1 prikazane su komponente vektora magnetne indukcije koje potiču od pojedinih provodnika, $\vec{B}_{A1}$ i $\vec{B}_{A2}$, kao i rezultujući vektor $\vec{B}_A$.

$$B_{A1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{A1}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_{A2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{A2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 0,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

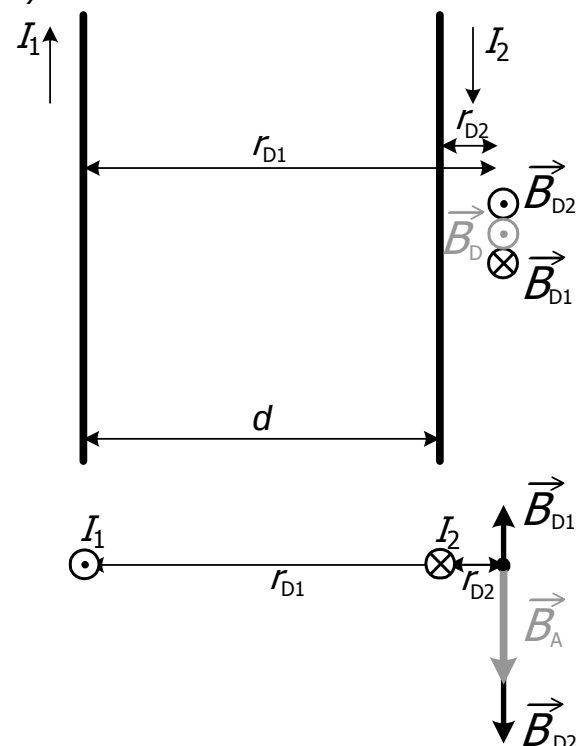
Prema principu superpozicije, vektor $\vec{B}_A$ dobijamo kao vektorski zbir vektora $\vec{B}_{A1}$ i $\vec{B}_{A2}$:

$$\vec{B}_A = \vec{B}_{A1} + \vec{B}_{A2}.$$

Vektori $\vec{B}_{A1}$ i $\vec{B}_{A2}$ su istog pravca i smera, pa je intenzitet rezultujućeg vektora $\vec{B}_A$ jednak zbiru intenziteta pojedinih komponenti:

$$B_A = B_{A1} + B_{A2} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T} + 5 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

b)



Slika III.1.3.3.2

Na slici III.1.3.3.2 prikazane su komponente vektora magnetne indukcije koje potiču od pojedinih provodnika, $\vec{B}_{D1}$ i $\vec{B}_{D2}$, kao i rezultujući vektor $\vec{B}_D$.

$$B_{D1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{D1}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

$$B_{D2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{D2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 0,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

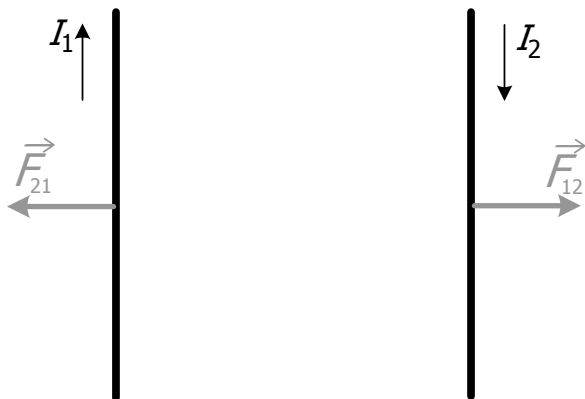
Vektor $\vec{B}_D$ jednak je vektorskom zbiru vektora $\vec{B}_{D1}$ i $\vec{B}_{D2}$:

$$\vec{B}_D = \vec{B}_{D1} + \vec{B}_{D2}$$

Kako su vektori $\vec{B}_{D1}$ i $\vec{B}_{D2}$ istog pravca, a suprotnog smera, intenzitet rezultujućeg vektora $\vec{B}_D$ jednak je

razlici intenziteta vektora $\vec{B}_{D1}$ i $\vec{B}_{D2}$, a smer se poklapa sa smerom vektora većeg intenziteta ($\vec{B}_{D2}$):

$$B_D = B_{D2} - B_{D1} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ T} - 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 6,67 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



Slika III.1.3.3.3

c) Kao što je pokazano u zadatku III.1.3.1b, kada su struje kroz paralelne provodnike suprotnog smera, sila kojom deluju jedan na drugi je odbojna.

III.1.3.4 Dva beskonačna pravolinijska provodnika postavljena su paralelno jedan drugom na rastojanju $d = 10 \text{ cm}$, u vazduhu. Kroz prvi provodnik protiče stalna struja jačine $I_1 = 3 \text{ A}$, a kroz drugi provodnik protiče stalna struja jačine $I_2 = 4 \text{ A}$. Odrediti tačke u prostoru u kojima je vektor magnetne indukcije jednak nuli, i to u slučaju:

- da su struje u provodnicima istog smera,
- da su struje u provodnicima suprotnog smera.

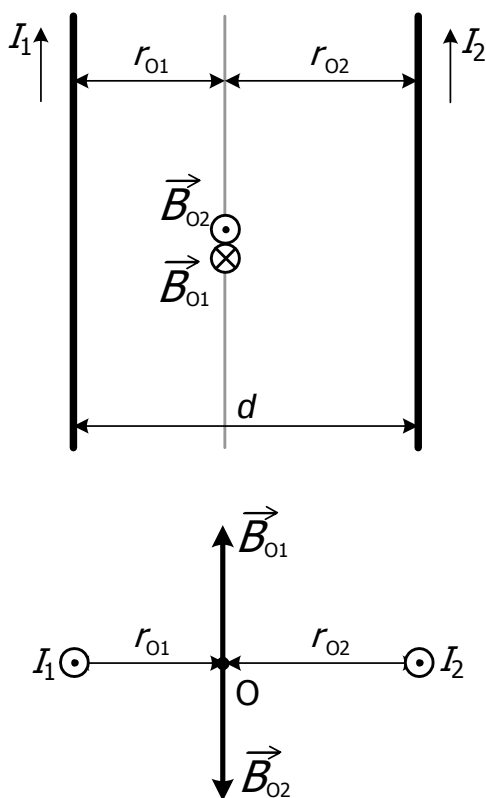
Rešenje:

Na osnovu prethodna dva zadatka možemo zaključiti da je vektor magnetne indukcije u svakoj tački ravni, koju čine dva paralelna provodnika sa strujom, normalan na tu ravan. I vektori magnetne indukcije koju stvaraju pojedini provodnici sa strujom, normalni su na tu ravan, tj. istog su pravca. S obzirom da je rezultujući vektor magnetne indukcije jednak vektorskom zbiru vektora magnetne indukcije koju stvaraju pojedini provodnici, taj vektor će moći da bude jednak nuli samo ukoliko su dva vektora koja sabiramo istog pravca (što je zadovoljeno samo za tačke koje se nalaze u ravni koju obrazuju dva provodnika), suprotnog smera i istog intenziteta, da bi se njihovo dejstvo poništilo.

a) Ako su struje u provodnicima istog smera, vektori magnetne indukcije koju stvaraju pojedini provodnici su suprotnog smera u tačkama ravni, koje se nalaze između provodnika (kao što se vidi u zadatku III.1.3.2a). Za neku takvu tačku važi:

$$B_{O1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{O1}}, \quad B_{O2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{O2}}, \quad r_{O1} + r_{O2} = d,$$

gde su r_{O1} i r_{O2} rastojanja posmatrane tačke O od provodnika sa strujom I_1 i provodnika sa strujom I_2 . U zadatku se traži da vektor magnetne indukcije bude jednak nuli:



Slika III.1.3.4.1

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_{01} + \vec{B}_{02} = 0 \Rightarrow B_{01} = B_{02} \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{01}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{02}} \Rightarrow r_{02} I_1 = (d - r_{01}) I_1 = r_{01} I_2$$

$$\Rightarrow r_{01} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} d$$

Ako zamenimo brojne vrednosti zadate u zadatku, dobijamo rastojanje tražene tačke od prvog provodnika:

$$r_{01} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} d = \frac{3 \text{ A}}{7 \text{ A}} \cdot 10 \text{ cm} = 4,3 \text{ cm},$$

$$r_{02} = d - r_{01} = 10 \text{ cm} - 4,3 \text{ cm} = 5,7 \text{ cm}.$$

Magnetno polje jednako je nuli u svim tačkama koje pripadaju pravoj, koja se nalazi u ravni koja je određena provodnicima, a koja je udaljena od prvog provodnika za r_{01} , a od drugog provodnika za r_{02} . Ova prava prikazana je na slici III.1.3.4.1a sivom bojom.

b) Ako su struje u provodnicima suprotnog smera, vektori magnetne indukcije koju stvaraju pojedini provodnici su suprotnog smera u tačkama ravni, koje se ne nalaze između provodnika (kao što se vidi u zadatku III.1.3.3a). Za neku takvu tačku važi:

$$B_{p1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{p1}}, \quad B_{p2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{p2}},$$

Prema uslovu zadatka je:

$$\vec{B}_p = \vec{B}_{p1} + \vec{B}_{p2} = 0 \Rightarrow B_{p1} = B_{p2} \Rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{p1}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{p2}} \Rightarrow \frac{I_1}{r_{p1}} = \frac{I_2}{r_{p2}} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_{p1}}{r_{p2}}.$$

Iz poslednje relacije možemo zaključiti da, s obzirom da je $I_1 < I_2$, mora biti i $r_{p1} < r_{p2}$, odnosno tačka P mora biti bliža prvom provodniku. Dakle to je tačka koja se nalazi u ravni, koju obrazuju ova dva provodnika, sa strane provodnika sa strujom I_1 . Sa slike III.1.3.4.2 vidi se da je:

$$r_{p1} + d = r_{p2}.$$

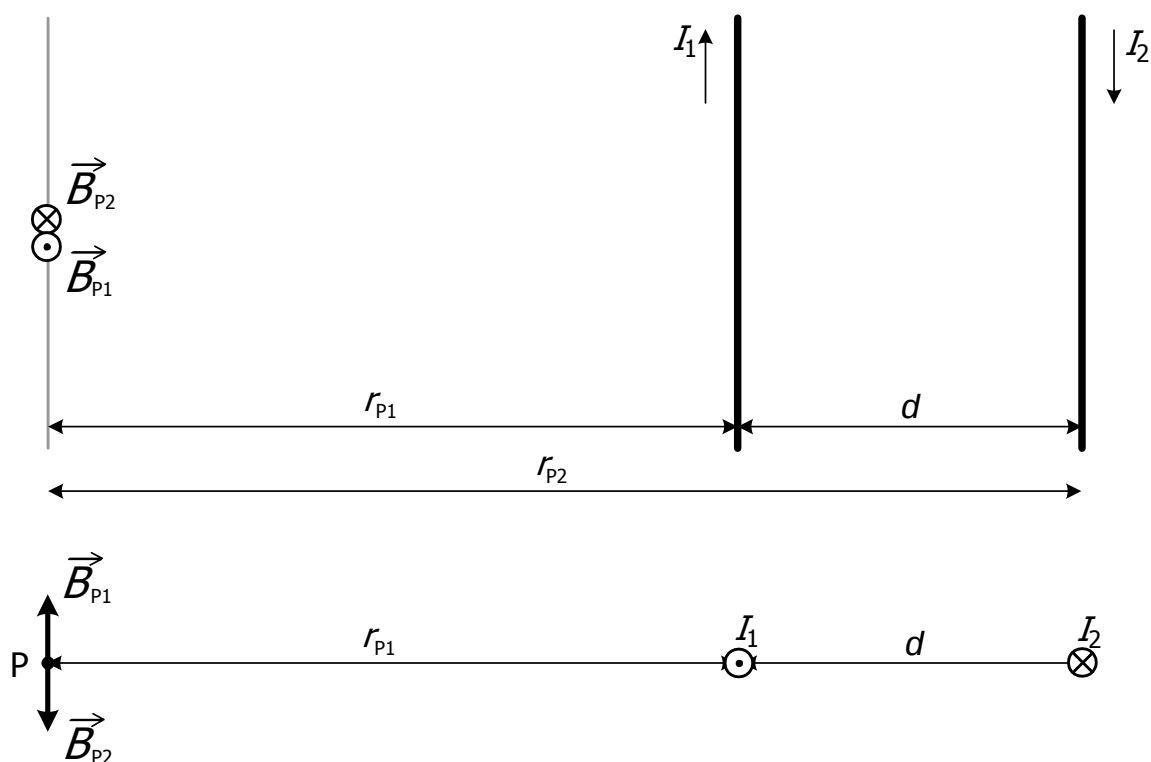
Zamenom ovog izraza u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_{p1}}{r_{p1} + d} \Rightarrow (r_{p1} + d) I_1 = r_{p1} I_2 \Rightarrow d \cdot I_1 = r_{p1} (I_2 - I_1) \Rightarrow r_{p1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1} d.$$

Ako zamenimo brojne vrednosti zadate u zadatku, dobijamo rastojanje tražene tačke od prvog provodnika:

$$r_{p1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1} d = \frac{3 \text{ A}}{1 \text{ A}} \cdot 10 \text{ cm} = 30 \text{ cm},$$

$$r_{p2} = r_{p1} + d = 30 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 40 \text{ cm}.$$



Slika III.1.3.4.2

Magnetno polje jednako je nuli u svim tačkama koje pripadaju pravoj, koja se nalazi u ravni koja je određena provodnicima, a koja je udaljena od prvog provodnika za r_{P1} , a od drugog provodnika za r_{P2} . Ova prava prikazana je na slici III.1.3.4.2a sivom bojom.

III.1.4 FLUKS VEKTORA MAGNETNE INDUKCIJE

TEORIJSKA OSNOVA

- Kao što smo u elektrostatici proračunavali fluks vektora elektrostatickog polja, tako ćemo i u elektromagnetizmu proračunavati fluks vektora magnetne indukcije.
- Fluks se uvek isto proračunava: posmatra se koliko linija neke vektorske veličine prolazi kroz zadanu površinu kroz koju tražimo fluks.

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Kod magnetnog polja važi i zakon o konzervaciji fluksa:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Prema ovom zakonu fluks vektora magnetne indukcije kroz zatvorenu površinu uvek je jednak 0.

- Koja je jedinica za magnetni fluks?
 - Veber [Wb].

ZADACI

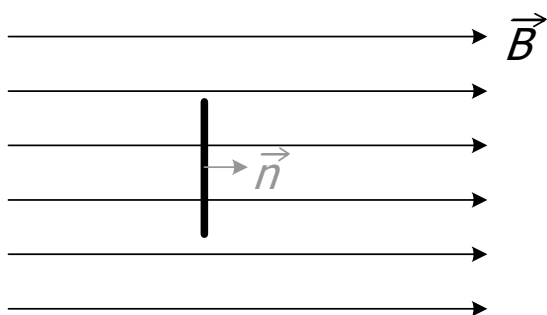
III.1.4.1 Pravougaona kontura stranica $a = 2 \text{ cm}$ i $b = 5 \text{ cm}$, nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 0,5 \text{ T}$ i postavljena je:

- normalno na linije polja,
- pod uglom od $\alpha = \frac{\pi}{6}$ u odnosu na linije polja.

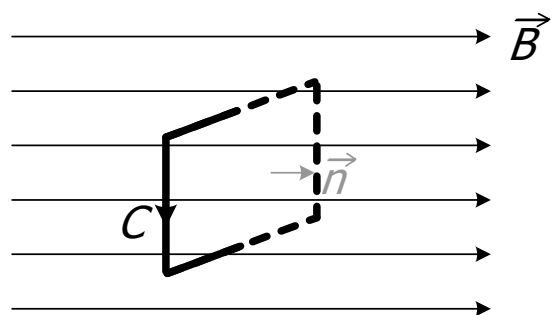
Odrediti magnetni fluks kroz konturu.

Rešenje:

a)



a)



b)

Slika III.1.4.1.1

Na slici III.1.4.1.1 prikazana je kontura u homogenom magnetnom polju, koja je normalna na linije magnetnog polja. Magnetni fluks kroz površinu S , ograničenu pravougaonom konturom je:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

dS je elementarni deo površine S . Pravac vektora $d\vec{S}$ poklapa se sa pravcem normale na površinu dS . Pošto je u pitanju otvorena površina, smer normale nije jednoznačno određen (setimo se da smo, kada smo obrađivali Gausov zakon u elektrostatici, pomenuli da je usvojeno da je normala uvek usmerena iz zatvorene površine (zadatak I.4.1)). Kod otvorenih površina smer normale određujemo na osnovu smera konture koja ograničava zadatu površnu. U ovom slučaju kontura je kvadrat stranica a i b . Kada je u pitanju provodna kontura sa strujom, smer konture se uvek poklapa sa smerom struje. Pošto to ovde nije slučaj, proizvoljno usmerimo konturu C , kao na slici III.1.4.1.1 (na ovoj slici pod b isprekidanom linijom predstavljen je udaljeniji deo konture). Smer vektora normale $\vec{n}$ određen je na osnovu usvojenog smera konture C prema pravilu desne ruke (zavojnice). Vektor normale $\vec{n}$ je vektor čiji je intenzitet jednak 1, pa je:

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$

Vidimo da je ugao između vektora $\vec{n}$ i $\vec{B}$ jednak nuli. Izračunajmo skalarni proizvod:

$$\Phi = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B \cdot dS$$

S obzirom da je magnetno polje homogeno, intenzitet vektora $\vec{B}$ je konstantan, pa ga možemo izvući ispred integrala:

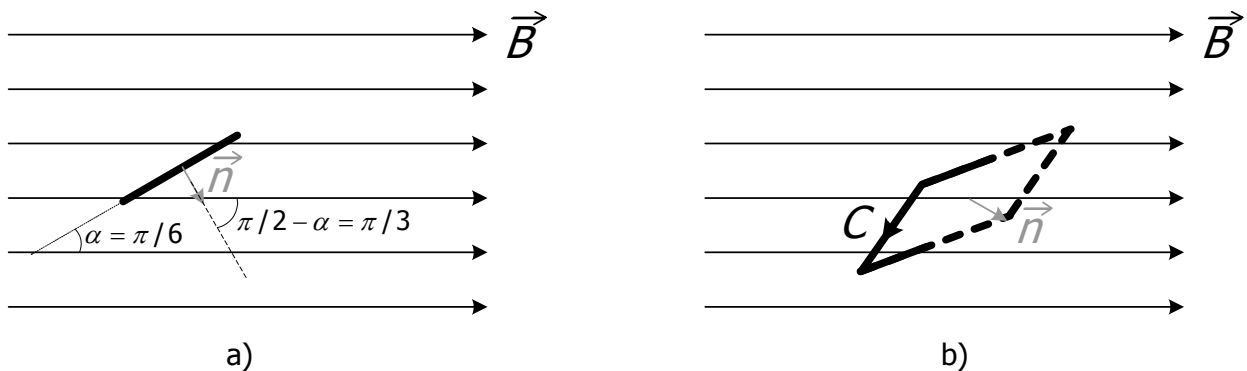
$$\Phi = B \int_S dS .$$

Integral $\int_S dS$ predstavlja sumu svih elementarnih površina dS koje čine površinu S , pa je integral jednak površini S :

$$\Phi = B \cdot S = B \cdot a \cdot b = 0,5 \text{ T} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} .$$

Napomena: Da smo usvojili suprotan smer konture dobili bismo negativan fluks.

b)



Slika III.1.4.1.2

Kao u prvom delu zadatka usmerimo proizvoljno konturu C . Prema ovom smeru je odeđen smer normale na površinu. Sa slike III.1.4.1.2 vidi se da je ugao između vektora $\vec{n}$ i $\vec{B}$ jednak $\pi/2 - \pi/6 = \pi/3$.

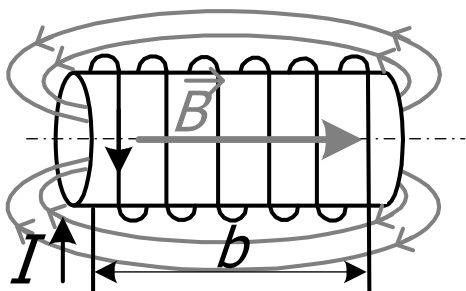
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B \cdot dS \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \int_S \frac{1}{2} B \cdot dS = \frac{1}{2} B \int_S dS = \frac{1}{2} BS = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} .$$

III.1.5 KALEM

TEORIJSKA OSNOVA

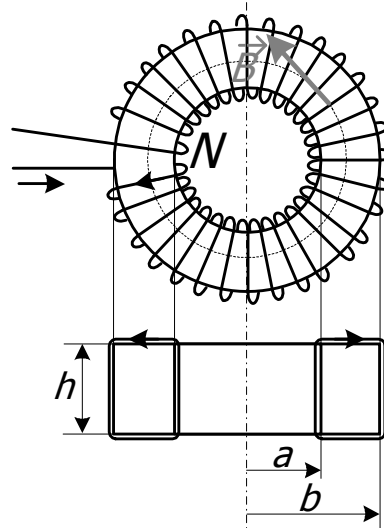
- Šta je kalem?
 - To je električna komponenta koja se sastoji od namotaja izolovane, provodne žice i deluje kao mnogo elementarnih strujnih kontura zajedno namotanih jedna do druge (to su zavojci namotaja).
- Postoje različiti kalemovi po obliku (solenoid, torus), a i zavojci mogu biti motani bez razmaka (jedan do drugog) i sa razmakom.
- Svi kalemovi imaju kalemsko telo (koje se pravi od dielektričnog materijala) na koje se mota namotaj (od bakarne žice). Neki kalemovi imaju i jezgro, koje se postavlja kroz kalemsko telo (telo je šuplje) i izrađeno je od papira, kartona, feromagnetika...

SOLENOID



- Solenoid je kalem štapićastog oblika koji ima velike gubitke, jer se put magnetne indukcije zatvara kroz vazduh. Zato se oklopljava u kućište.

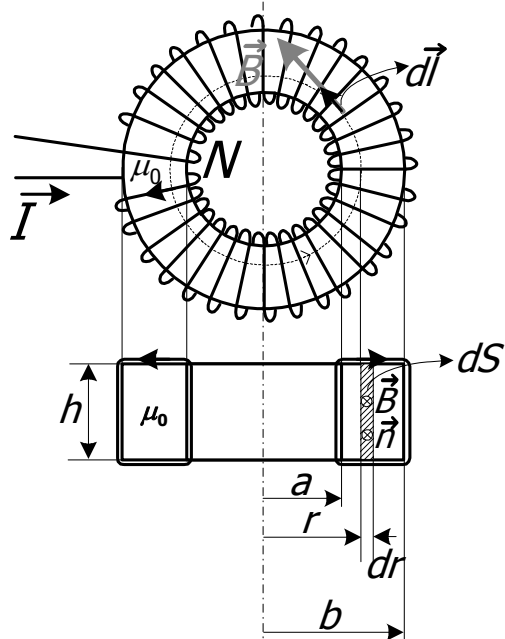
TORUS



- Torus je takoreći idealan kalem, jer se može smatrati da je kompletna magnetna indukcija zadržana u njemu (ukoliko je namotaj motan zavojak do zavojka). To znači da nema rasipanja magnetne indukcije.

- Za svaki kalem može se izračunati magnetna indukcija, jačina magnetnog polja, fluks kroz jezgro i induktivnost.
- Šta je induktivnost?
 - Glavna karakteristika kalema. Ona je različita za razne vrste kalemova.
- Od čega zavisi induktivnost?
 - Od oblika i dimenzija kalema, broja zavojaka i vrste materijala od kog je jezgro napravljeno.

TORUS SA VAZDUŠNIM JEZGROM



- Kako možemo izračunati induktivnost kalema sa jezgrom od vazduha ili kartona?

– prvo Amperovim zakonom izračunamo magnetnu indukciju kalema:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 NI$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

– izračunamo fluks koji ta magnetna indukcija pravi kroz površinu namotaja:

$\Phi = N \cdot \Phi_0$, gde je Φ_0 fluks kroz jedan

zavojak

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) =$$

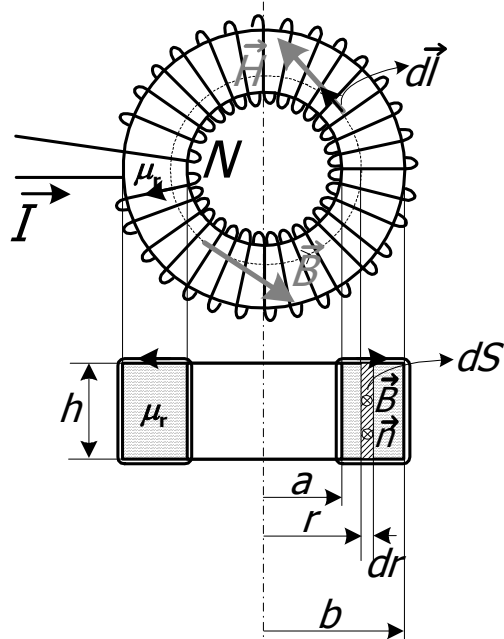
$$= \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot h \cdot dr = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

$$\Phi = N \cdot \Phi_0 = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

– induktivnost kalema jednaka je količniku izračunatog fluksa i električne struje od koje taj fluks potiče:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

TORUS SA JEZGROM OD FEROMAGNETIKA



- Kako možemo izračunati induktivnost kalema sa jezgrom od nekog feromagnetika?

– prvo uopštenim Amperovim zakonom izračunamo vektor jačine magnetnog polja u kalemu:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} \cdot \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = NI$$

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

– linearnom vezom izračunavamo magnetnu indukciju u jezgru:

$$B = \mu \cdot H = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

izračunamo fluks koji ta magnetna indukcija pravi kroz površinu namotaja:

$\Phi = N \cdot \Phi_0$, gde je Φ_0 fluks kroz jedan

zavojak

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) =$$

$$= \int_a^b \frac{\mu NI}{2\pi r} \cdot h \cdot dr = \frac{\mu NI}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

$$\Phi = N \cdot \Phi_0 = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

– induktivnost kalema jednaka je količniku izračunatog fluksa i struje od

- Ako torus ima mali poprečni presek on se može smatrati tankim, i da je magnetna indukcija u njemu homogena (konstantna je po celom poprečnom preseku). Tada se u proračunu vrši aproksimacija:

$l = 2\pi r$, gde je l dužina srednje linije torusa

$$H = \frac{NI}{l}$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

$$\Phi = N \cdot \Phi_0 = N \cdot B \cdot S = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S$$

koje taj fluks potiče:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

- Ako torus ima mali poprečni presek on se može smatrati tankim, i da je magnetna indukcija u njemu homogena (konstantna je po celom poprečnom preseku). Tada se u proračunu vrši aproksimacija:

$l = 2\pi r$, gde je l dužina srednje linije torusa

$$H = \frac{NI}{l}$$

$$B = \frac{\mu NI}{l}$$

$$\Phi = N \cdot \Phi_0 = N \cdot B \cdot S = \frac{\mu N^2 I}{l} S$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 I}{l} S$$

- Kod torusnog namotaja sva magnetna indukcija je koncentrisana u jezgru. To nije slučaj sa drugim kalemovima.
- Fluks kroz namotaj torusa je fluks vektora magnetne indukcije kroz površinu koja se naslanja na svih N zavoja torusnog namotaja.
- Smer magnetne indukcije $\vec{B}$ određuje se pravilom desne zavojnice u odnosu na smer struje u namotaju.**
- Smer jediničnog vektora normale $\vec{n}$ određuje se pravilom desne zavojnice u odnosu na smer orijentacije konture.**
- Kada je u pitanju jedan kalem uvek su ta dva smera ista:
 - smer orijentacije konture uvek je isti kao smer struje koja protiče kroz konturu (ako struja u konturi postoji). Proističe da se i vektor $\vec{B}$ i vektor $\vec{n}$ određuju pravilom desne zavojnice prema istom referentnom smeru (smeru struje tj. smeru orijentacije konture ako nema struje).
 - zato je fluks kroz kalem uvek pozitivan i naziva se **sopstveni fluks**.
 - induktivnost kalema takođe je uvek pozitivna i naziva se **sopstvena induktivnost**.
- Koja je jedinica za induktivnost kalema?
 - Henri [H].

ZADACI

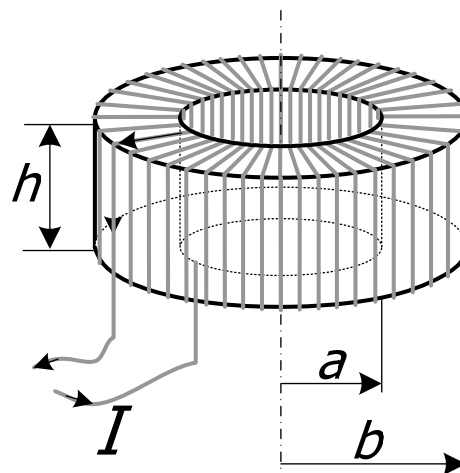
KALEM SA VAZDUŠNIM JEZGROM

III.1.5.1 Torusni namotaj sa slike se sastoji od $N = 1000$ gusto i ravnomerno motanih zavojaka, kroz koje protiče struja jačine $I = 2,5$ A. Unutrašnji poluprečnik torusa je $a = 2$ cm, spoljašnji poluprečnik je $b = 5$ cm, a visina je $h = 5$ cm.

a) Odrediti kako se menja magnetna indukcija unutar torusnog namotaja.

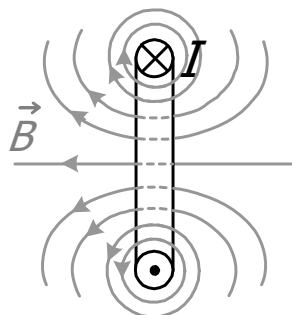
b) Izračunati intenzitet vektora magnetne indukcije u sledećim tačkama: tački koja se nalazi na unutrašnjoj strani torusa, tački koja se nalazi na srednjoj liniji torus i tački koja se nalazi na spoljašnjoj strani torusa.

c) Odrediti induktivnost torusnog namotaja, prema tačnoj formuli i u slučaju da ga možemo smatrati tankim.

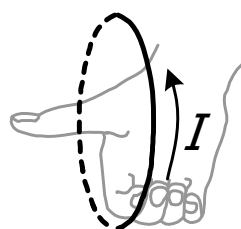


Rešenje:

a) Jedan način da intuitivno razumemo izgled linija magnetnog polja u torusu je sledeći: posmatrajmo jedan provodni prsten sa stalnom strujom jačine I , koji je prikazan na slici III.1.5.1.1. Svaki elementarni deo provodnog prstena sa strujom stvara oko sebe magnetno polje. Superpozicijom magnetnih polja svih elementarnih delova provodnog prstena u bilo kojoj tački prostora dobijamo ukupno magnetno polje, a linije vektora magnetne indukcije prikazane su na slici III.1.5.1.1a. Vektor magnetne indukcije je u svakoj tački tangentan na ove linije, a smer je određen pravilom desne ruke (zavojnice) u odnosu na struju kroz prsten, kao što je prikazano na slici III.1.5.1.1b.



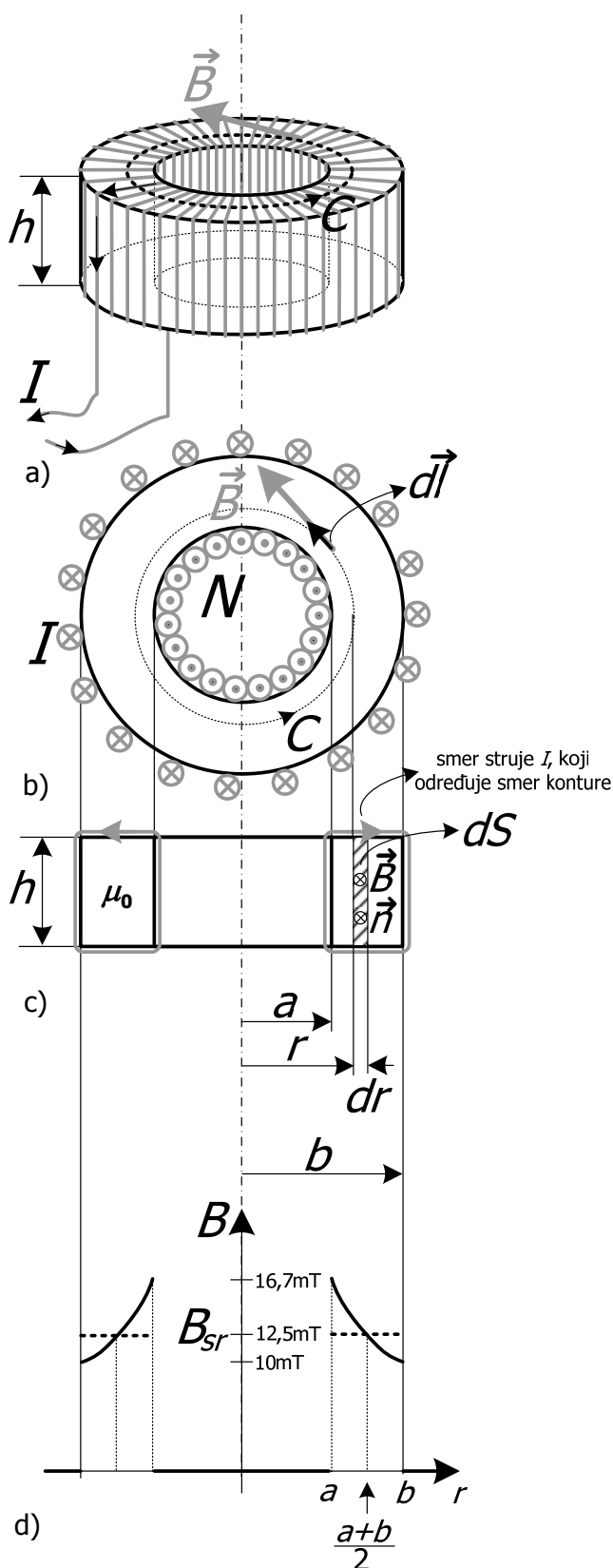
a)



b)

Slika III.1.5.1.1

Zavojke na torusu možemo aproksimirati prstenovima, poređanim jedan do drugog. Magnetno polje u torusu kanalisano je ovim prstenovima, tako da možemo smatrati da magnetno polje postoji samo unutar jezgra torusa, a da izvan torusa nema magnetnog polja. Pošto su zavojci ravnomerno i gusto motani, možemo zaključiti da su zbog simetrije, linije vektora magnetnog polja $\vec{B}$ kružnice sa centrom na osi torusa, kao što je prikazano na slici III.1.5.1.2. Smer vektora $\vec{B}$ je određen na osnovu magnetnog polja koje stvaraju prstenovi, kao što je pokazano na slici III.1.5.1.b.



Slika III.1.5.1.2

Izaberimo jednu kružnicu (kontura C) koja se poklapa sa jednom linijom vektora $\vec{B}$, poluprečnika r , orijentišimo je proizvoljno (na primer, prema smeru vektora $\vec{B}$) i primenimo na nju Amperov zakon (u pitanju je torus sa vazдушnim jezgrom):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k.$$

Sa desne strane Amperovog zakona se pojavljuje suma struja koje su obuhvaćene konturom C . Ako pogledamo sliku III.1.5.1.2b vidimo da je konturom C obuhvaćeno N struja jačine I i da je smer ovih struja povezan sa smerom konture C pravilom desne ruke (zavojnice), pa su sve struje sa pozitivnim predznakom:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI.$$

$d\vec{l}$ je elementarni deo konture C , a vektor $d\vec{l}$ je usmeren kao kontura C . Vektori $\vec{B}$ i $d\vec{l}$ su u svakoj tački konture istog pravca i smera, pa je ugao između njih uvek jednak nuli ($\cos 0 = 1$):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B \cdot dl \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_C B \cdot dl = \mu_0 NI.$$

Zbog simetrije, u svakoj tački konture C vektor $\vec{B}$ ima isti intenzitet, pa ga možemo izvući kao konstantu ispred integrala. kao što smo već uradili u zadatku III.1.3.1, integral $\oint_C dl$ predstavlja sumu elementarnih delova kružnice C . Ova suma je jednaka obimu kružnice.

$$B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Napomena: Da smo usvojili suprotan smer konture, ugao između vektora $\vec{B}$ i $d\vec{l}$ bi bio jednak π ($\cos \pi = -1$):

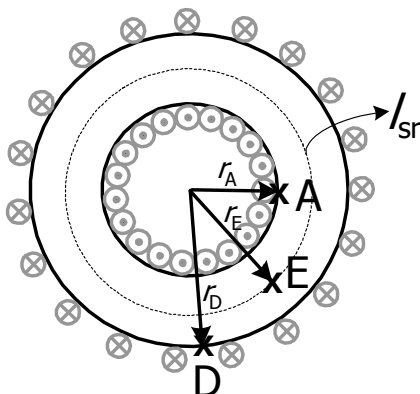
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B \cdot dl \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = - \oint_C B \cdot dl = -B \oint_C dl = -B \cdot 2\pi r.$$

Sa desne strane, smer struja u ovom slučaju nije povezan sa smerom konture pravilom desne ruke (zavojnice) pa su sve struje sa negativnim predznakom. Konačno je:

$$-B \cdot 2\pi r = -\mu_0 NI$$

Obe strane jednačine možemo podeliti sa -1 i naravno dobijamo isti rezultat.

b)



Slika III.1.5.1.3

Tačka koja se nalazi na unutrašnjoj strani torusa (označimo je sa A) nalazi se na kružnici poluprečnika $r_A = a = 2,5$ cm. U toj tački je, prema izvedenoj formuli za magnetnu indukciju u torusu:

$$B_A = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_A} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000 \cdot 2,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,0167 \text{ T} = 16,7 \text{ mT}.$$

Označimo tačku koja se nalazi na spoljašnjoj strani torusa sa D. Ova tačka se nalazi na kružnici poluprečnika $r_D = b = 5$ cm, pa je magnetna indukcija u toj tački:

$$B_D = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_D} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000 \cdot 2,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,01 \text{ T} = 10 \text{ mT}.$$

Srednja linija torusa nalazi se u sredini između unutrašnje i spoljašnje strane torusa, pa je poluprečnik srednje linije torusa jednak aritmetičkoj sredini unutrašnjeg i spoljašnjeg poluprečnika torusa. Označimo tačku koja se nalazi na srednjoj liniji torusa sa E. Tada je:

$$r_E = \frac{a + b}{2} = \frac{3 \text{ cm} + 5 \text{ cm}}{2} = 4 \text{ cm}.$$

$$B_E = B_{sr} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_E} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi \cdot \frac{a + b}{2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000 \cdot 2,5 \text{ A}}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,0125 \text{ T} = 12,5 \text{ mT}$$

Dužina srednje linije torusa je dakle:

$$l_{sr} = 2\pi \cdot \frac{a + b}{2}$$

Na slici III.1.5.1.2d prikazan je grafk promene magnetne indukcije unutar torusa.

Napomena: Prilikom izbora oznaka za tačke izbegli smo slova B i C, koja se koriste za označavanje fizičkih veličina u magnetizmu, kako ne bi došlo do zabune. Magnetnu indukciju na srednjoj liniji torusa označili smo i sa B_{sr} , jer ćemo je kasnije još koristiti.

c) Kada kroz namotaj torusa teče struja, ona stvara magnetno polje unutar torusa, kao što smo pokazali u prethodnom delu zadatka. (Da preciziramo, jedan namotaj se sastoji od više zavojaka.) Magnetni fluks kroz jedan zavojak torusa je:

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

gde je S površina poprečnog preseka torusa, kao što se vidi sa slike III.1.5.1.2c, odnosno površina obuhvaćena jednim zavojkom. Vektor magnetne indukcije menja se u zavisnosti od udaljenosti od ose torusa. Usvojimo da je dS površina visine h , a beskonačno male debljine dr , tako da u svim tačkama te površine možemo smatrati da vektor $\vec{B}$ ima isti intenzitet.

$$dS = h \cdot dr$$

Vektor $\vec{B}$ je normalan na površinu S , a smer je vezan sa strujom kroz zavojke pravilom desne ruke (zavojnice) i prikazan je na slici III.1.5.1.2c. Vektor $d\vec{S}$ ima, kao i do sada, pravac normale, a smer je određen prema smeru konture koja ograničava površinu S na osnovu pravila desne ruke (zavojnice). Smer ove konture nije proizvoljan već je određen smerom struje kroz zavojak, kao što je prikazano na slici III.1.5.1.2c. Vidimo da su vektori $\vec{B}$ i $d\vec{S}$ istog pravca i smera, pa je ugao između njih jednak nuli. Primenimo ovu činjenicu na skalarni proizvod:

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B \cdot dS.$$

Zbog činjenice da su vektori $\vec{B}$ i $d\vec{S}$ uvek istog pravca i smera (jer je smer vektora $d\vec{S}$ vezan sa smerom konture pravilom desne ruke, smer vektora $\vec{B}$ je vezan sa smerom struje kroz zavojak pravilom desne ruke, a smer konture usvaja prema smeru struje), sopstveni fluks je uvek pozitivan, pa je i **sopstvena iduktivnost uvek pozitivna**.

Primitimo da vektor $\vec{B}$ nije konstantnog intenziteta, kao što je to bio slučaj u primerima do sada, već se menja u zavisnosti od r (slika III.1.5.1.2d). Zamenimo u izrazu za magnetni fluks izraze za magnetnu indukciju i površinu dS , pri čemu nam promenljiva u integralu postaje rastojanje od ose torusa, r , pa će granice integrala biti a i b :

$$\Phi_0 = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot h \cdot dr$$

Izvučimo konstante ispred integrala. Tako dobijamo tablični integral $\int \frac{dr}{r}$, čije je rešenje $\ln r$, u granicama od a do b . Na kraju primenimo osobinu logaritama da je razlika logaritama jednaka logaritmu količnika.

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \cdot \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} (\ln b - \ln a) = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Fluks Φ_0 je fluks koji struja kroz namotaj torusa stvara kroz jedan zavojak. Torus ima N zavoja, pa je ukupan sopstveni fluks torusa:

$$\Phi = N\Phi_0 = N \cdot \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Induktivnost torusa jednaka je količniku sopstvenog fluksa kroz zavojak i struje kroz namotaj:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Dakle, tačan izraz za induktivnost torusa sa vazдушnim jezgrom, sa N namotaja, pravougaonog poprečnog preseka, unutrašnjeg i spoljašnjeg poluprečnika a i b i visine h je:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Zamenimo brojne vrednosti zadate u zadatku:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{m}}{2\pi} \ln \frac{5 \cdot 10^{-2} \text{m}}{3 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 8 \ln \frac{5}{3} \cdot 10^{-3} \text{H} = 4,1 \text{ mH}.$$

Torus možemo smatrati tankim ako su dimenzije poprečnog preseka mnogo manje od dužine srednje linije, odnosno da je za torus pravougaonog poprečnog preseka $b - a \ll 2\pi \frac{a+b}{2}$. Ako

usvojimo da je torus tanak onda možemo smatrati da je vektor magnetne indukcije istog intenziteta po celom poprečnom preseku torusa, koji je jednak tačnom intenzitetu vektora magnetne indukcije na srednjoj liniji torusa B_{sr} , kao što je prikazano isprekidanom linijom na slici III.1.5.1.2d. Fluks po jednom zavojku je tada:

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B_{\text{sr}} \cdot dS = B_{\text{sr}} \int_S dS = B_{\text{sr}} \cdot S,$$

gde smo sada intenzitet vektora magnetne indukcije – B_{sr} mogli da izvučemo ispred integrala, jer smatramo da je konstantan. Integral $\int_S dS$ jednak je površini poprečnog preseka S .

Na dalje je postupak isti:

$$\Phi = N\Phi_0 = N \cdot B_{\text{sr}} \cdot S = N \cdot \frac{\mu_0 NI}{l_{\text{sr}}} \cdot S = \frac{\mu_0 N^2 I}{l_{\text{sr}}} \cdot S$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 N^2 I}{l_{\text{sr}}} \cdot S}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{l_{\text{sr}}} \cdot S$$

Dakle, aproksimativni izraz za induktivnost tankog torusa sa vazдушnim jezgrom, sa N namotaja, površine poprečnog preseka S , bilo kakvog oblika poprečnog preseka, čija je srednja linija dužine l_{sr} je:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{l_{\text{sr}}} \cdot S.$$

Poprečni presek je pravougaonog oblika, pa je površina poprečnog preseka:

$$S = h \cdot (b - a),$$

a dužina srednje linije je:

$$l_{\text{sr}} = 2\pi \cdot \frac{a+b}{2},$$

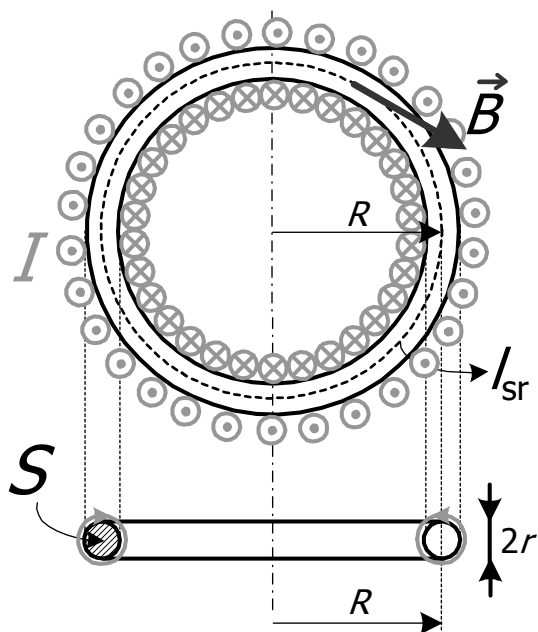
pa je induktivnost:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi \cdot \frac{a+b}{2}} \cdot h \cdot (b-a) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000^2}{2\pi \cdot \frac{3+5}{2} \cdot 10^{-2} \text{m}} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{m} \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{m} - 3 \cdot 10^{-2} \text{m}) = 4 \cdot 10^{-3} \text{H} = 4 \text{ mH}$$

Ako uporedimo brojne vrednosti dobijene iz tačnog i aproksimativnog izraza vidimo da su odstupanja jako mala, a što je torus tanji, odstupanja su manja.

III.1.5.2 Odrediti induktivnost tankog torusnog namotaja kružnog poprečnog preseka, poluprečnika $r = 5$ mm. Poluprečnik srednje linije torusa je $R = 10$ cm. Torus ima $N = 100$ zavoja. Koliki je sopstveni fluks kroz jedan zavojak torusa, ako je struja kroz namotaj $I = 1$ A?

Rešenje:



Slika III.1.5.2.1

Na slici III.1.5.2.1 prikazan je torus posmatran odozgo, i njegov poprečni presek. Primenimo aproksimativnu formulu za induktivnost tankog torusa proizvoljnog poprečnog preseka, izvedenu u prethodnom zadatku:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{l_{sr}} \cdot S.$$

Kako je dat poluprečnik srednje linije torusa, dužina srednje linije je:

$$l_{sr} = 2\pi R.$$

Pošto je poprečni presek kružnog oblika, površina poprečnog preseka je:

$$S = r^2 \pi = (5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \pi = 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Zamenom izraza za dužinu srednje linije i površinu poprečnog preseka, dobijamo:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi R} \cdot r^2 \pi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 100^2}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot (5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \pi = 1,57 \mu\text{H}.$$

Na osnovu prethodnog zadatka, pošto smatramo da je magnetno polje homogeno po poprečnom preseku torusa, sopstveni fluks kroz jedan zavojak torusa je:

$$\Phi_0 = B_{sr} \cdot S,$$

gde je B_{sr} magnetna indukcija na srednjoj liniji torusa, koja je određena iz Amperovog zakona:

$$B_{sr} = \frac{\mu_0 N I}{l_{sr}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 100 \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

Smer vektora $\vec{B}_{sr}$ određen je prema smeru struje kroz namotaj na osnovu pravila desne ruke (zavojnice).

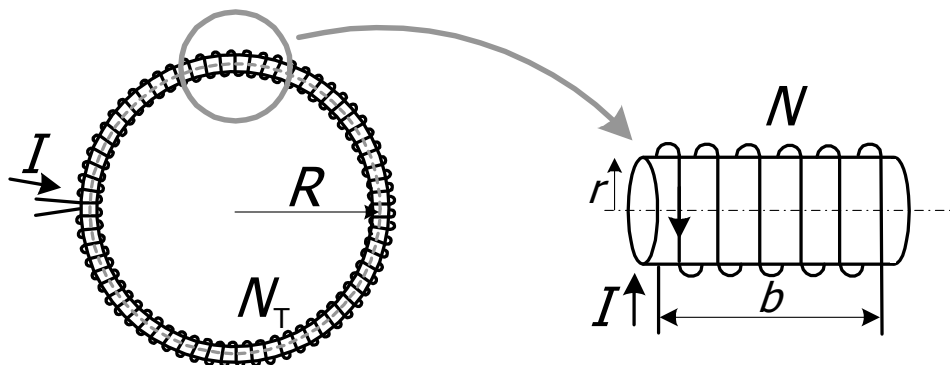
$$\Phi_0 = B_{sr} \cdot S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 157 \cdot 10^{-10} \text{ Wb}$$

III.1.5.3 a) Odrediti magnetnu indukciju u solenoidu sa kartonskim jezgrom, dužine $b = 5$ cm. Solenoid ima $N = 20$ gusto i ravnomerno namotanih zavoja žice, kroz koje protiče stalna struja jačine $I = 2$ A. Poluprečnik kartonskog jezgra na koje je namotan kalem je $r = 1$ cm.

b) Izračunati induktivnost ovog solenoida.

Rešenje:

a)



Slika III.1.5.3.1

I solenoid možemo posmatrati kao N prstenova, poredanih jedan do drugog. Tačan izraz za magnetnu indukciju unutar solenoida dobija se vektorskim sabiranjem vektora magnetne indukcije, koji u posmatranoj tački stvara svaki od prstenova. Međutim, to je vrlo komplikovan postupak i zato u slučaju solenoida koristimo aproksimaciju, koja daje dovoljno tačan rezultat za većinu primena. Naime, solenoid ćemo posmatrati kao deo jako velikog, tankog torusa, kao što je prikazano na slici III.1.5.3.1. Magnetnu indukciju tankog torusa odredili smo u zadatku III.1.5.1:

$$B = \frac{\mu_0 N_T I}{l_{sr}} = \frac{\mu_0 N_T I}{2\pi R},$$

gde je N_T broj zavoja torusa. Odnos $\frac{N_T}{l_{sr}}$ predstavlja broj zavoja po jedinici dužine (srednje linije) torusa. S obzirom da su zavojci ravnomerno motani, ovaj odnos predstavlja broj zavoja po jedinici dužine bilo kog dela torusa, pa to važi i za deo torusa dužine b koji smatramo solenoidom:

$$\frac{N_T}{l_{sr}} = \frac{N}{b},$$

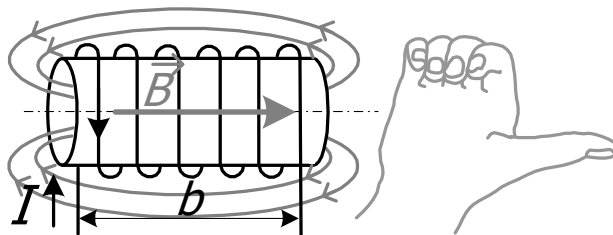
gde je N broj zavoja solenoida. Naravno, kroz namotaj solenoida teče ista struja I , pa je magnetna indukcija solenoida:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{b}.$$

Zamenimo brojne vrednosti iz zadatka:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 20 \cdot 2 \text{ A}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

Dakle, smatramo da je magnetno polje homogeno unutar solenoida. Na slici III.1.5.3.2 prikazane su linije polja unutar solenoida, a smer vektora $\vec{B}$ je određen pravilom desne ruke (zavojnice) u odnosu na smer struje kroz namotaj.

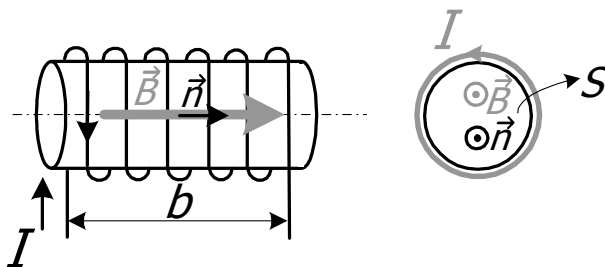


Slika III.1.5.3.2

b) Odredimo sopstveni fluks kroz jedan zavojak solenoida.

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B \cdot dS = B \int_S dS = B \cdot S,$$

Na slici III.1.5.3.3 prikazan je i poprečni presek solenoida i površina S , koja se oslanja na jedan zavojak, kroz koju računamo fluks. Vektor $d\vec{S}$ ima pravac normale na površinu dS , a smer je određen prema smeru konture koja ograničava površinu S na osnovu pravila desne ruke (zavojnice). Smer ove konture određen je smerom struje kroz zavojak. Vektori $\vec{B}$ i $d\vec{S}$ su istog pravca i smera, pa je ugao između njih jednak nuli. U rešavanju smo koristili činjenicu da magnetno polje u solenoidu smatramo homogenim, pa smo intenzitet vektora magnetne indukcije izvukli ispred integrala.



Slika III.1.5.3.3

Solenoid ima N zavoja pa je ukupni sopstveni fluks:

$$\Phi = N\Phi_0 = N \cdot B \cdot S = N \cdot \frac{\mu_0 N I}{b} \cdot S = \frac{\mu_0 N^2 I}{b} \cdot S,$$

a induktivnost je:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 N^2 I}{b} \cdot S}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{b} \cdot S.$$

Dakle, induktivnost solenoida dužine b , sa vazдушnim jezgrom, sa N zavoja i površine poprečnog preseka S je:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{b} \cdot S.$$

Površina poprečnog preseka je:

$$S = r^2 \pi.$$

Zamenimo brojne vrednosti iz zadatka:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{b} \cdot S = \frac{\mu_0 N^2}{b} \cdot r^2 \pi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 20^2}{5 \cdot 10^{-2} \text{m}} \cdot (1 \cdot 10^{-2} \text{m})^2 \pi = 3,2 \mu\text{H}$$

III.1.5.4 Kolika je dužina solenoida namotanog na kartonsko jezgro, poluprečnika $r = 0,5 \text{ cm}$, ako kalem ima $N = 100$ zavoja, a induktivnost mu je $L = 5 \mu\text{H}$.

Rešenje:

Na osnovu izraza za induktivnost kalema dobija se da je dužina solenoida:

$$b = \frac{\mu_0 N^2}{L} \cdot S = \frac{\mu_0 N^2}{L} \cdot r^2 \pi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 100^2}{5 \cdot 10^{-6} \text{H}} \cdot (0,5 \cdot 10^{-2} \text{m})^2 \pi = 6,3 \text{ cm}.$$

KALEM SA JEZGROM OD FEROMAGNETIKA

III.1.5.5 Na torus pravougaonog poprečnog preseka je gusto i ravnomerno namotano $N = 700$ zavoja, kroz koje protiče stalna struja jačine I i stvara magnetno polje indukcije $B = 0,8 \text{ T}$. Jezgro je napravljeno od feromagnetskog materijala, za koji se, za date uslove, kriva magnećenja može linearizovati i smatrati da ima relativnu magnetnu permeabilnost $\mu_r = 100$. Pre uspostavljanja struje jezgro torusa je bilo nenamagnetisano. Odrediti ukupan sopstveni fluks, fluks po jednom zavojku, induktivnost torusa i struju kroz namotaj, ako smatramo da je torus tanak. Unutrašnji poluprečnik torusa je $a = 20 \text{ cm}$, spoljašnji poluprečnik je $b = 24 \text{ cm}$, a visina je $h = 5 \text{ cm}$.

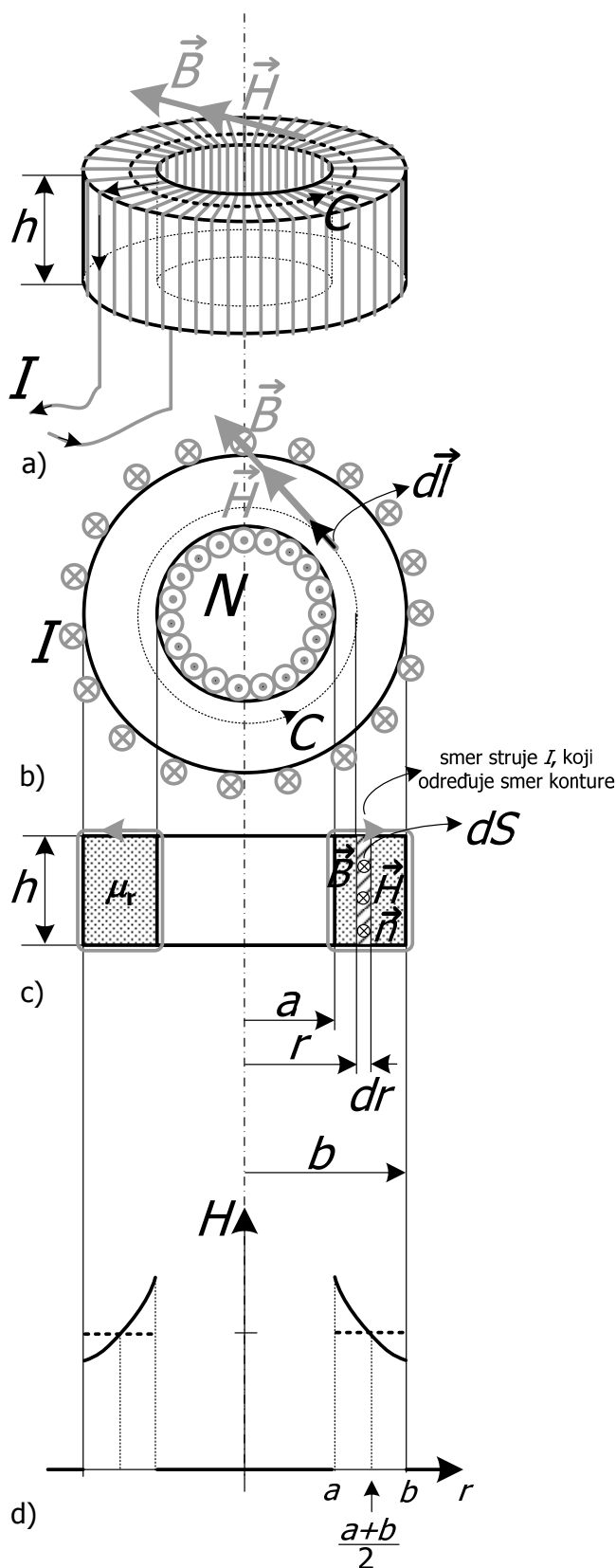
Rešenje:

Posmatrani torus ima jezgro od feromagnetika pa moramo da primenimo uopšteni Amperov zakon u obliku:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k,$$

koji važi u svim sredinama (za razliku od oblika Amperovog zakona koji smo do sada primenjivali i koji važi isključivo u vakuumu (i vazduhu)). Vektor $\vec{H}$ se naziva vektor jačine magnetnog polja i u feromagnetskim materijalima, koji nisu bili namagnetisani pre uspostavljanja struje (kao što će biti slučaj u svim zadacima koje ćemo raditi), vektor $\vec{H}$ je istog pravca i smera kao i vektor magnetne indukcije $\vec{B}$. Dakle, vektor $\vec{H}$ je u svakoj tački tangentan na linije magnetnog polja, a kao što smo pokazali u prethodnim zadacima, linije magnetnog polja su kružnice sa centrom na osi torusa. Smer vektora $\vec{H}$ je određen prema smeru struje kroz namotaj na osnovu pravila desne ruke (zavojnice). Na slici III.1.5.5.1 prikazan je torus i vektori $\vec{B}$ i $\vec{H}$.

Kao i do sada, za konturu C po kojoj računamo cirkulaciju vektora $\vec{H}$ uzimamo jednu kružnicu koja se poklapa sa linijom magnetnog polja. Sa desne strane uopštenog Amperovog zakona je



Slika III.1.5.5.1

suma struja koje su obuhvaćene konturom C . Ako pogledamo sliku III.1.5.5.2b vidimo da je konturom C obuhvaćeno N struja jačine I i da je smer ovih struja povezan sa smerom konture C pravilom desne ruke (zavojnice), pa su sve struje sa pozitivnim predznakom:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI.$$

$d\vec{l}$ je elementarni deo konture C , a vektor $d\vec{l}$ je usmeren kao kontura C . Vektori $\vec{H}$ i $d\vec{l}$ su u svakoj tački konture istog pravca i smera, pa je ugao između njih uvek jednak nuli ($\cos 0 = 1$):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H \cdot dl \cdot \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_C H \cdot dl = NI.$$

Zbog simetrije, u svakoj tački konture C vektor $\vec{H}$ ima isti intenzitet, pa ga možemo izvući kao konstantu ispred integrala. Integral $\oint_C dl$ predstavlja sumu

elementarnih delova kružnice C , koja je jednaka obimu kružnice.

$$H \oint_C dl = H \cdot 2\pi r = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r}.$$

Napomena: Da smo usvojili suprotan smer konture, ugao između vektora $\vec{H}$ i $d\vec{l}$ bio bi jednak π ($\cos \pi = -1$):

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \oint_C H \cdot dl \cdot \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = \\ &= -\oint_C H \cdot dl = -H \oint_C dl = -H \cdot 2\pi r. \end{aligned}$$

Sa desne strane, smer struja u ovom slučaju nije povezan sa smerom konture pravilom desne ruke (zavojnice), pa su sve struje sa negativnim predznakom. Konačno je:

$$-H \cdot 2\pi r = -NI$$

Obe strane jednačine možemo podeliti sa -1 i naravno dobijamo isti rezultat.

S obzirom da je, prema uslovu zadatka, jezgro torusa bilo nenamagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa, kada struja počne da teče magnetna indukcija B i jačina magnetnog

polja H se povećavaju, a veza između ove dve veličine data je **prvobitnom krivom magnećenja**. Kod feromagnetnih materijala ova veza je nelinearna, ali da bi se pojednostavio proračun, za datu jačinu struje (opseg struja) grafik prvobitne krive magnećenja nekad se linearizuje, kao što je to slučaj u ovom zadatku, i tada je:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r},$$

gde je $\mu_r = 100$.

Kada je određena magnetna indukcija torusnog namotaja, tačan i aproksimativan izraz za induktivnost ovog torusa određuju se na isti način kao u zadatku III.1.5.1 pod c. Magnetni fluks kroz jedan zavojak torusa je:

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

gde je S površina poprečnog preseka torusa, kao što se vidi sa slike III.1.5.5.2c, odnosno površina obuhvaćena jednim zavojkom. Vektor magnetne indukcije menja se u zavisnosti od udaljenosti od ose torusa. Usvajmo da je dS površina visine h , a beskonačno male širine dr , tako da u svim tačkama te površine možemo smatrati da vektor $\vec{B}$ ima isti intenzitet.

$$dS = h \cdot dr$$

Vektor $\vec{B}$ je normalan na površinu S , a smer je vezan sa strujom kroz zavojke pravilom desne ruke (zavojnice) i prikazan je na slici III.1.5.5.2c. Vektor $d\vec{S}$ ima pravac normale, a smer je određen prema smeru konture koja ograničava površinu S na osnovu pravila desne ruke (zavojnice), a koji je određen smerom struje kroz zavojak, slika III.1.5.5.2c. Vektori $\vec{B}$ i $d\vec{S}$ su istog pravca i smera, pa je ugao između njih jednak nuli. Primenom ove činjenice na skalarni proizvod, kao i zamenom izraza za magnetnu indukciju u izraz za fluks i rešavanjem integrala dobijamo:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B \cdot dS = \int_a^b \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r} \cdot h \cdot dr = \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} \cdot \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} (\ln b - \ln a) = \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Torus ima N zavoja, pa je ukupan sopstveni fluks torusa:

$$\Phi = N\Phi_0 = N \cdot \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 Ih}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Induktivnost torusa jednaka je količniku sopstvenog fluksa kroz zavojak i struje kroz namotaj:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_r N^2 Ih}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Dakle, tačan izraz za induktivnost torusa sa jezgrom od feromagnetika, linearizovane prvobitne krive magnećenja, sa N namotaja, kvadratnog poprečnog preseka, unutrašnjeg i spoljašnjeg poluprečnika a i b i visine h je:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Prema tekstu zadatka torus smatramo tankim i tada je vektor magnetne indukcije istog intenziteta po celom poprečnom preseku torusa, koji je jednak tačnom intenzitetu vektora magnetne indukcije na srednjoj liniji torusa B_{sr} :

$$B_{sr} = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l_{sr}} = 0.8 \text{ T}.$$

Dužina srednje linije je:

$$l_{sr} = 2\pi \cdot \frac{a+b}{2} = 2\pi \cdot \frac{(24+20) \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} = 44\pi \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Nepoznata jačina struje je:

$$I = \frac{B_{sr} l_{sr}}{\mu_0 \mu_r N} = \frac{0.8 \text{ T} \cdot 44\pi \cdot 10^{-2} \text{ m}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 100 \cdot 700} = 12,57 \text{ A}.$$

Fluks po jednom zavojku je tada:

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B_{sr} \cdot dS = B_{sr} \int_S dS = B_{sr} \cdot S = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l_{sr}} S,$$

gde smo sada intenzitet vektora magnetne indukcije – B_{sr} mogli da izvučemo ispred integrala, jer smatramo da je konstantan. Integral $\int_S dS$ je jednak površini poprečnog preseka S . Poprečni

presek je pravougaonog oblika, pa je površina poprečnog preseka:

$$S = h \cdot (b - a) = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot (24 - 20) \cdot 10^{-2} \text{ m} = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Zamenom brojnih vrednosti u izrazu dobijamo:

$$\Phi_0 = B_{sr} \cdot S = 0,8 \text{ T} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Ukupan sopstveni fluks torusa je:

$$\Phi = N\Phi_0 = N \cdot B_{sr} \cdot S = N \cdot \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l_{sr}} \cdot S = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 I}{l_{sr}} \cdot S.$$

Zamenom vrednosti za fluks kroz jedan zavojak dobijamo:

$$\Phi = N\Phi_0 = 700 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} = 1,12 \text{ Wb}.$$

Induktivnost torusa jednaka je količniku sopstvenog fluksa kroz zavojak i struje kroz namotaj:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1,12 \text{ Wb}}{12,57 \text{ A}} = 89,1 \text{ mH}.$$

Dobili smo brojnu vrednost za induktivnost ovog torusnog namotaja, ali da bismo odredili izraz za induktivnost zamenimo izraz za ukupan sopstveni fluks torusa:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_r N^2 I}{l_{sr}} \cdot S}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{l_{sr}} \cdot S$$

Dakle, aproksimativni izraz za induktivnost tankog torusa sa jezgrom od feromagnetika, linearizovane prvobitne krive magnećenja, sa N namotaja, površine poprečnog preseka S , bilo kakvog oblika poprečnog preseka, čija je srednja linija dužine l_{sr} je:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{l_{sr}} \cdot S.$$

III.1.5.6 Na tanak torus kružnog poprečnog preseka, poluprečnika r , ravnomerno i gusto je namotan provodnik dužine l_p . Može se smatrati da materijal od kog je načinjen torus ima relativnu magnetnu permeabilnost $\mu_r = 1200$. Dužina srednje linije torusa je $l_{sr} = 80$ cm, a induktivnost je $L = 2$ H. Odrediti dužinu namotanog provodnika.

Rešenje:

Na slici III.1.5.6.1 prikazan je torus posmatran odozgo, i njegov poprečni presek. Pošto je jezgro od feromagnetnog materijala primenićemo uopšteni Amperov zakon na kružnicu C sa centrom na osi torusa, koja se poklapa sa linijom magnetnog polja, i uzeti u obzir činjenicu da su vektori $\vec{H}$ i $d\vec{l}$ u svakoj tački kružnice C istog pravca i smera:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H \cdot dl \cdot \cos(\vec{H}, d\vec{l}) \stackrel{1}{=} \oint_C H \cdot dl = H \oint_C dl = H \cdot 2\pi r = NI,$$

iz čega se dobija jačina magnetnog polja unutar torusa:

$$H = \frac{NI}{2\pi r}.$$

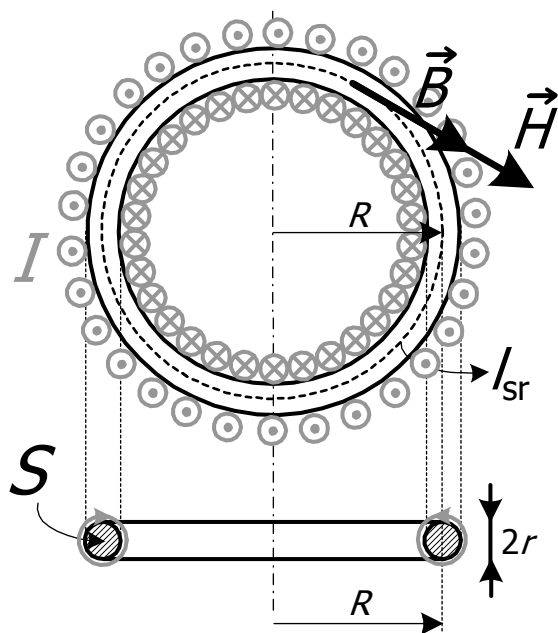
Jezgro torusa je bilo nenamagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa, pa je, prilikom uspostavljanja struje kroz namotaj torusa, veza između magnetne indukcije B i jačine magnetnog polja H data prvobitnom krivom magnećenja, koja se za date uslove može linearizovati:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r},$$

gde je $\mu_r = 1200$.

Pošto je torus tanak smatramo da je magnetno polje homogeno raspoređeno po poprečnom preseku torusa, odnosno da je magnetna indukcija istog intenziteta po celom poprečnom preseku:

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) \stackrel{1}{=} \int_S B_{sr} \cdot dS = B_{sr} \int_S dS = B_{sr} \cdot S,$$



Slika III.1.5.6.1

gde je S površina kružnog poprečnog preseka:

$$S = r^2 \pi$$

a B_{sr} je magnetna indukcija na srednjoj liniji torusa:

$$B_{sr} = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l_{sr}}.$$

Pošto torus ima N namotaja ukupan fluks je:

$$\Phi = N \Phi_0 = N \cdot B_{sr} \cdot S = N \cdot \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l_{sr}} \cdot S = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 I}{l_{sr}} \cdot S$$

Induktivnost ovog torusa je:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{l_{sr}} \cdot S.$$

Provodnik koji je namotan na torus je dužine l_p i možemo smatrati da se sastoji od N prstenova, poluprečnika r , pa je obim pojedinačnog prstena $2\pi r$, a ukupna dužina provodnika je:

$$l_p = N \cdot 2\pi r,$$

odakle je:

$$N = \frac{l_p}{2\pi r}.$$

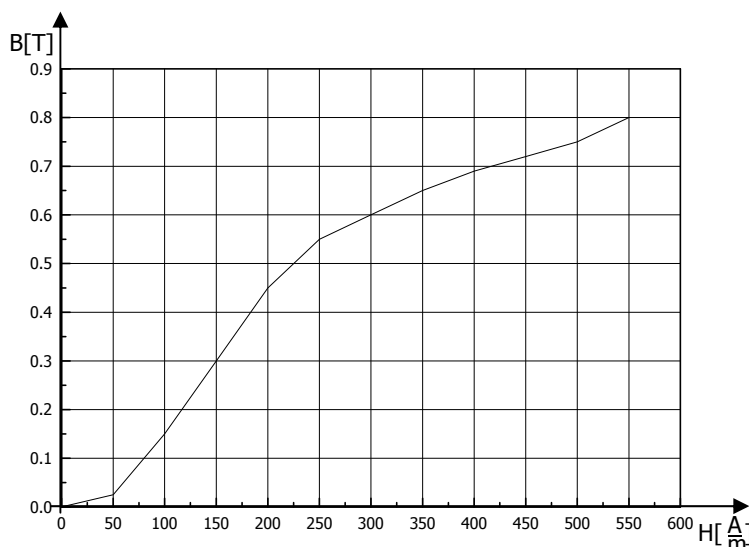
Zamenom izraza za broj zavoja i izraza za površinu poprečnog preseka u izraz za induktivnost dobijamo:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{l_{sr}} \cdot S = \frac{\mu_0 \mu_r \left(\frac{l_p}{2\pi r} \right)^2}{l_{sr}} \cdot r^2 \pi = \frac{\mu_0 \mu_r l_p^2}{l_{sr} \cdot 4\pi},$$

odakle je tražena dužina provodnika:

$$l_p = \sqrt{\frac{L \cdot l_{sr} \cdot 4\pi}{\mu_0 \mu_r}} = \sqrt{\frac{2 \text{ H} \cdot 80 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 4\pi}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1200}} = 115,5 \text{ m}$$

III.1.5.7 Na tankom torusnom jezgri od feromagnetnog materijala, namotano je ravnomerno i gusto po celoj dužini torusa $N = 140$ zavoja. Dužina srednje linije torusa je $l = 20$ cm. U namotaju je uspostavljena stalna struja jačine $I = 0,5$ A. Odrediti vektor magnetne indukcije i magnetizacije ako je data kriva magnećenja na slici. Pre uspostavljanja struje jezgro je bilo nenamagnetisano.



Rešenje:

Pošto je jezgro torusa od feromagnetnog materijala, primenom uopštenog Amperovog zakona kao u prethodnim zadacima dobijamo izraz za jačinu magnetnog polja unutar torusa:

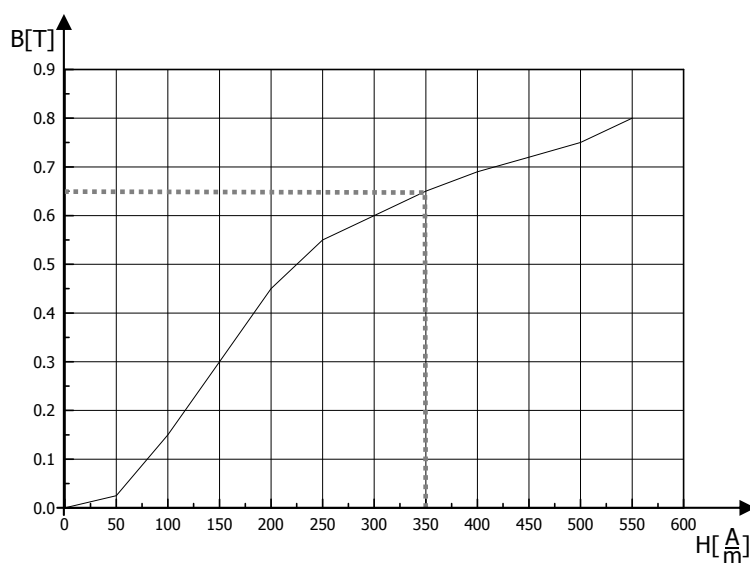
$$H = \frac{NI}{2\pi r},$$

pri čemu smatramo da je torus tanak pa je magnetno polje homogeno raspoređeno po poprečnom preseku, a jačina magnetnog polja je aproksimirana tačnom vrednošću na srednjoj liniji torusa:

$$H = \frac{NI}{l_{sr}}.$$

Zamenom brojnih vrednosti u ovom izrazu dobijamo vrednost jačine magnetnog polja u torusu:

$$H = \frac{NI}{l_{sr}} = \frac{140 \cdot 0,5 \text{ A}}{20 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 350 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$



Slika III.1.5.7.1

Jezgro torusa je bilo nenamagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa pa je, prilikom uspostavljanja struje kroz namotaj torusa, veza između magnetne indukcije B i jačine magnetnog polja H data prvobitnom krivom magnećenja, koja je data u zadatku i prikazana na slici III.1.5.7.1. Izračunajte vrednosti jačine magnetnog polja od $H = 350 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ na grafiku prvobitne krive magnećenja odgovara vrednost magnetne indukcije od $B = 0,65 \text{ T}$.

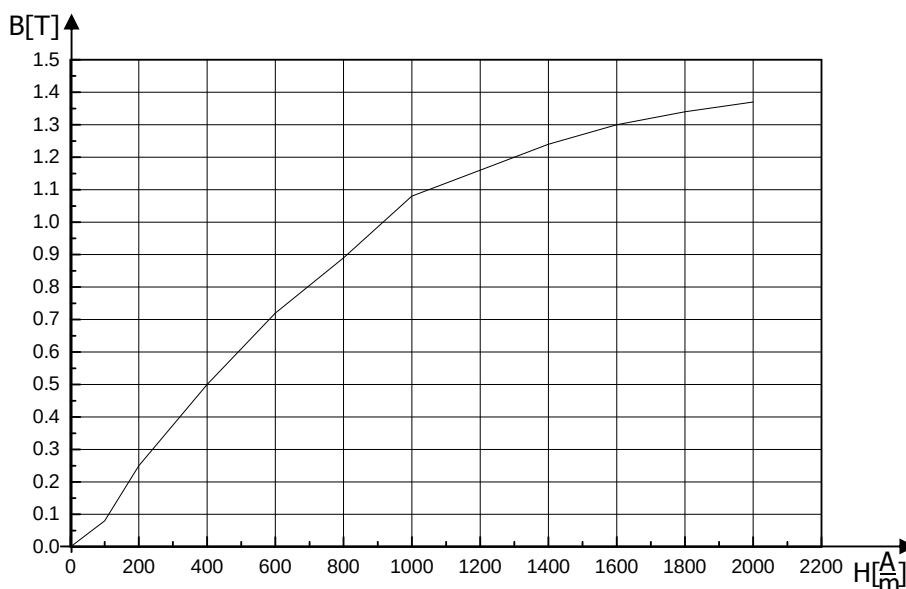
Veza između vektora magnetne indukcije, vektora jačine magnetnog polja i vektora magnetizacije je:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}.$$

Pošto jezgro torusa nije bilo namagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa, sva tri vektora u jednačini su istog pravca i smera pa ih možemo algebarski oduzeti:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0,65 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}} - 350 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 5,17 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

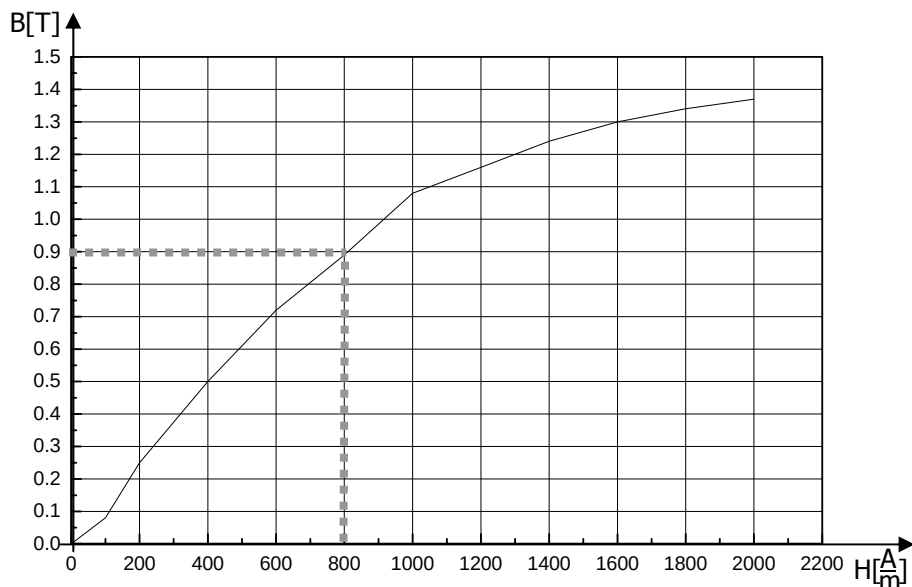
III.1.5.8 Tanak torus ima srednju liniju dužine $l_{\text{sr}} = 10 \text{ cm}$. Struja u namotaju je $I = 0,5 \text{ A}$. Jezgro torusa je od feromagnetnog materijala čija je kriva prvobitnog magnećenja data na slici. Odrediti broj zavoja N u namotaju torusa ako je magnetna indukcija u jezgru $B = 0,9 \text{ T}$. Pre uspostavljanja struje jezgro je bilo nenamagnetisano.



Rešenje:

Jezgro torusa je bilo nenamagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa pa je, prilikom uspostavljanja struje kroz namotaj torusa, veza između magnetne indukcije B i jačine magnetnog polja H data prvobitnom krivom magnećenja, koja je data u zadatku i prikazana na slici III.1.5.8.1. Sa krive prvobitnog magnećenja, koja je data u zadatku, može se pročitati da

vrednosti magnetne indukcije od $B = 0,9 \text{ T}$ odgovara vrednost jačine magnetnog polja od oko $H = 800 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.



Slika III.1.5.8.1

U prethodnim zadacima smo odredili izraz za jačinu magnetnog polja unutar torusnog namotaja sa N zavoja, srednje linije l_{sr} :

$$H = \frac{NI}{l_{\text{sr}}},$$

odakle određujemo nepoznati broj zavoja:

$$N = \frac{H \cdot l_{\text{sr}}}{I} = \frac{800 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,5 \text{ A}} = 160.$$

III.1.5.9 Solenoid dužine $b = 10 \text{ cm}$ ima $N = 150$ zavoja žice na feromagnetnom materijalu, čija se magnetna permeabilnost u datim uslovima može smatrati konstantnom i iznosi $\mu_r = 100$. Poprečni presek solenoida je kružnog oblika, poluprečnika $r = 2 \text{ mm}$. U namotaju je uspostavljena struja jačine $I = 1 \text{ A}$. Odrediti magnetnu indukciju u jezgru solenoida, kao i induktivnost solenoida, ako je pre uspostavljanja struje jezgro bilo nenamagnetisano.

Rešenje:

Kao što smo pokazali u zadatku III.1.5.3 solenoid možemo posmatrati kao deo jako velikog, tankog torusa (slika III.1.5.3.1). U prethodnim zadacima smo izveli izraz za jačinu magnetnog polja tankog torusa primenom uopštenog Amperovog zakona:

$$H = \frac{N_{\text{T}} I}{l_{\text{sr}}} = \frac{N_{\text{T}} I}{2\pi R}$$

gde je N_T broj zavoja torusa. Odnos $\frac{N_T}{l_{sr}}$ predstavlja broj zavoja po jedinici dužine (srednje linije) torusa. S obzirom da su zavojci ravnomerno motani ovaj odnos predstavlja broj zavoja po jedinici dužine bilo kog dela torusa, pa to važi i za deo torusa dužine b koji smatramo solenoidom:

$$\frac{N_T}{l_{sr}} = \frac{N}{b},$$

gde je N broj zavoja solenoida. Naravno, kroz namotaj solenoida teče ista struja I pa je jačina magnetnog polja u solenoidu:

$$H = \frac{NI}{b}.$$

Pošto se može smatrati da je u datim uslovima relativna permeabilnost $\mu_r = 100$, magnetna indukcija u solenoidu je:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{b}.$$

Zamenom brojnih vrednosti u izrazu dobijamo:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{b} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 100 \cdot \frac{150 \cdot 1 A}{10 \cdot 10^{-2} m} = 0,19 T.$$

Sopstveni fluks kroz jedan zavojak solenoida je (slike III.1.5.3.2 i III.1.5.3.3):

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = \int_S B \cdot dS = B \int_S dS = B \cdot S,$$

gde je S površina kružnog poprečnog preseka:

$$S = r^2 \pi = (2 \cdot 10^{-3} m)^2 \pi = 4\pi \cdot 10^{-6} m^2.$$

Solenoid ima N zavoja pa je ukupni sopstveni fluks:

$$\Phi = N\Phi_0 = N \cdot B \cdot S = N \cdot \frac{\mu_0 \mu_r NI}{b} \cdot S = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 I}{b} \cdot S,$$

a induktivnost je:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_r N^2 I}{b} \cdot S}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{b} \cdot S.$$

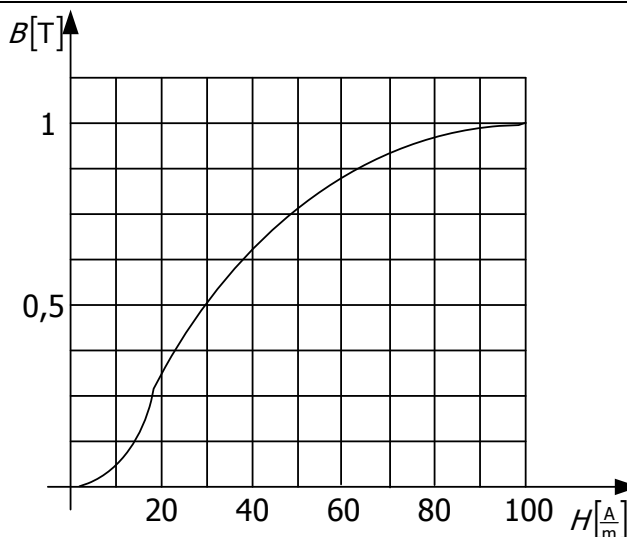
Dakle, induktivnost solenoida dužine b , sa vazдушnim jezgrom, sa N zavoja i površine poprečnog preseka S je:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{b} \cdot S.$$

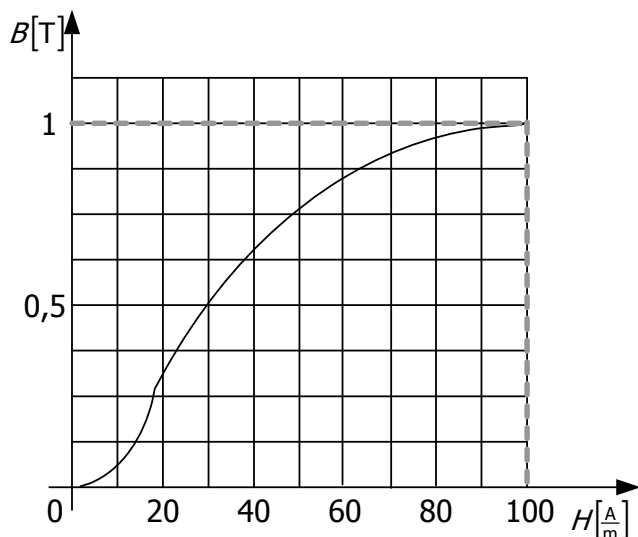
Zamenom brojnih vrednosti u izrazu dobijamo:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2}{b} \cdot S = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 100 \cdot 150^2}{10 \cdot 10^{-2} m} \cdot 4\pi \cdot 10^{-6} m^2 = 355,3 \mu H.$$

III.1.5.10 Solenoid ima dužinu $b = 1$ m i $N = 100$ zavoja. Jezgro solenoida je od feromagnetnog materijala čija je kriva prvobitnog magnećenja data na slici. Odrediti struju I u namotaju solenoida ako je magnetna indukcija u jezgru $B = 1$ T. (Pre uspostavljanja struje jezgro je bilo nenamagnetisano.)



Rešenje:



Slika III.1.5.10.1

Jezgro torusa je bilo nenamagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa pa je veza između magnetne indukcije B i jačine magnetnog polja H data prvobitnom krivom magnećenja, sa koje se može pročitati da vrednosti magnetne indukcije od $B = 1$ T za dati feromagnetni materijal odgovara vrednost jačine magnetnog polja od $H = 100 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, kao što je prikazano na slici III.1.5.10.1.

U prethodnom zadatku smo izveli izraz za jačinu magnetnog polja u solenoidu:

$$H = \frac{NI}{b},$$

iz koga se dobija tražena struja u namotaju solenoida:

$$I = \frac{Hb}{N} = \frac{100 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m}}{100} = 1 \text{ A}.$$

III.1.5.11 Solenoid ima dužinu $b = 25$ cm. Kroz $N = 200$ zavoja solenoida teče stalna struja jačine $I = 0,5$ A. Jezgro solenoida je od feromagnetnog materijala čija je kriva prvobitnog magnećenja data tabelom. Odrediti magnetnu indukciju B u jezgru solenoida. (Pre uspostavljanja struje jezgro je bilo nenamagnetisano.)

$H \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
$B [\text{T}]$	0,25	0,50	0,72	0,89	1,08	1,16	1,24	1,30	1,34	1,37

Rešenje:

U zadatku III.1.5.9 izveli smo izraz za jačinu magnetnog polja u solenoidu:

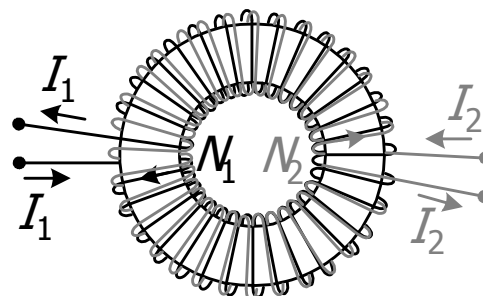
$$H = \frac{NI}{b} = \frac{200 \cdot 0,5 \text{ A}}{25 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 400 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Jezgro torusa je bilo nenamagnetisano pre uspostavljanja struje kroz namotaj torusa pa su vrednosti magnetne indukcije B i jačine magnetnog polja H vezane prvobitnom krivom magnećenja, koja je data tabelom. Iz tabele se može pročitati da vrednosti jačine magnetnog polja u solenoidu od $H = 400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ odgovara vrednost magnetne indukcije od $B = 0,5 \text{ T}$ za dati feromagnetni materijal od koga je načinjeno jezgro solenoida.

III.1.6 SPREGNUTI NAMOTAJI SA STALNIM STRUJAMA TEORIJSKA OSNOVA

- Šta su spregnuti namotaji?

– Kada na isto jezgro namotamo dva namotaja kroz koje propuštamo električne struje, onda će indukcija koju proizvodi struja u jednom namotaju praviti fluks i kroz površinu drugog namotaja. I obrnuto. Takvi namotaji koji utiču jedan na drugi zbog zajedničkog jezgra zovu se **spregnuti namotaji**.



- Šta je međusobni fluks?

– Magnetni fluks koji indukcija koja potiče od električne struje u jednom namotaju pravi kroz površinu drugog:

$$\Phi_{12} = N_2 \cdot \Phi_{120}$$

$$\Phi_{120} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} B_1 \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}_1, \vec{n}_2) = \int_a^b \frac{\mu N_1 I_1}{2\pi r} \cdot h \cdot dr = \frac{\mu N_1 I_1}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

$$\Phi_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 I_1}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

- U zavisnosti od ugla između $\vec{B}_1$ i $\vec{n}_2$, ovaj fluks može biti pozitivan ili negativan.

- Šta je međusobna induktivnost?

– Količnik međusobnog fluksa i struje od koje taj fluks potiče:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

- Međusobna induktivnost, kao i međusobni fluks (jer direktno zavisi od njega) takođe može biti pozitivna ili negativna.
- Može se izračunati i fluks Φ_{21} koji indukcija $\vec{B}_2$ od električne struje u drugom namotaju, I_2 , pravi kroz površinu S_1 prvog namotaja:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu N_1 N_2 I_2}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

– međusobna induktivnost L_{21} je onda:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu N_1 N_2}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

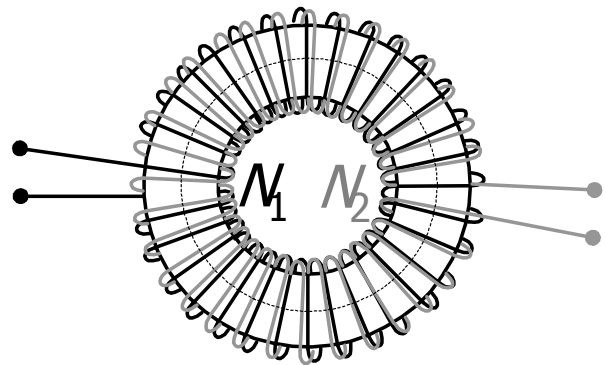
- **Važno je uočiti da su međusobni fluksevi za spregnute namotaje različiti (jer ih čine različite struje), a da su međusobne induktivnosti iste (jer induktivnosti ne zavise od električne struje!!!).**
- Način motanja spregnutih kalemova definisan je **koeficijentom sprege k** , gde je $k \in [0,1]$
- Tako se međusobne induktivnosti mogu izračunati i kao:

$$L_{12} = \pm k \sqrt{L_1 \cdot L_2} .$$

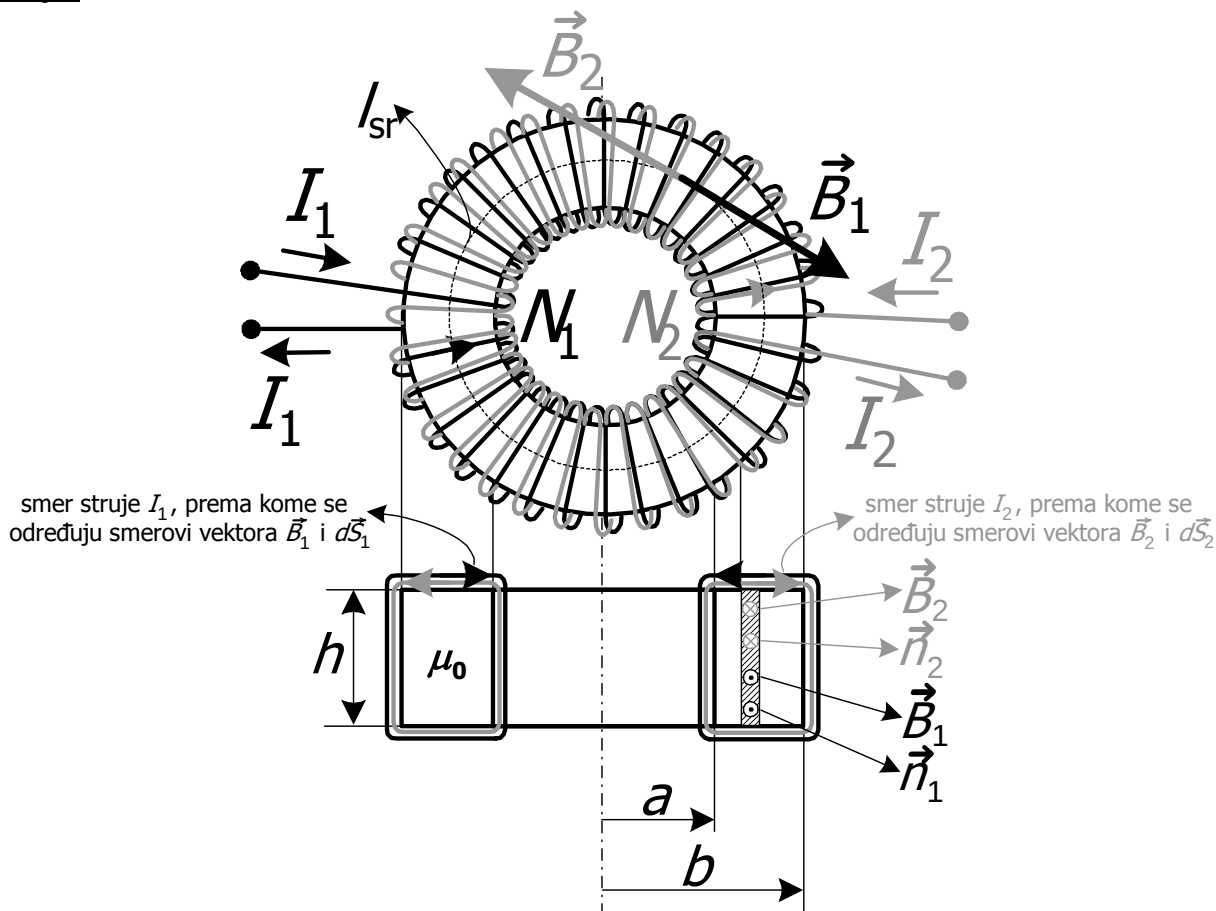
ZADACI

III.1.6.1 Dva namotaja su ravnomerno i gusto, jedan preko drugog, namotani na tankom kartonskom torusnom jezgru, kao što je prikazano na slici. Prvi namotaj ima N_1 , a drugi N_2 zavoja. Odrediti sopstvene induktivnosti ovih namotaja, međusobne induktivnosti i koeficijent sprege.

Kartonsko jezgro je pravougaonog poprečnog preseka. Unutrašnji poluprečnik jezgra je a , spoljašnji poluprečnik je b , a visina je h .



Rešenje:



Slika III.1.6.1.1

Pretpostavimo da kroz namotaje teku struje I_1 i I_2 , prema proizvoljno usvojenim smerovima prikazanim na slici III.1.6.1.1. Kasnije ćemo videti da od smerova struja i načina motanja namotaja zavisi znak međusobne induktivnosti.

Kao što je pokazano u zadatku III.1.5.1 prema Amperovom zakonu svaki od namotaja stvara magnetno polje unutar torusa, a magnetne indukcije od pojedinih namotaja su:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi r}.$$

Smerovi vektora magnetnih indukcija prikazani su na slici III.1.6.1.1, a određeni su pravilom desne ruke (zavojnice) u odnosu na smer struje kroz odgovarajući namotaj.

Sopstvene induktivnosti pojedinih namotaja izvide se kao u zadatku III.1.5.1, pod pretpostavkom da je torus tanak (tj. da je magnetno polje homogeno raspoređeno po poprečnom preseku torusa). Odredimo najpre sopstveni fluks kroz jedan zavojak prvog namotaja:

$$\Phi_{01} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \int_S B_1 \cdot dS_1 \cdot \cos(\vec{B}_1, \vec{n}_1) = \int_S B_1 \cdot dS_1 = B_1 \int_S dS_1 = B_1 \cdot S,$$

gde je B_1 magnetna indukcija na srednjoj liniji torusa:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_{sr}},$$

a dS_1 je elementarni deo površine S (površine poprečnog preseka torusa), pri čemu se pravac vektora $d\vec{S}_1$ poklapa sa normalom na površinu dS_1 :

$$d\vec{S}_1 = \vec{n}_1 \cdot dS_1$$

a smer vektora $d\vec{S}_1$ je određen prema pravilu desne ruke (zavojnice) na osnovu smera konture koja ograničava površinu S , a koji se poklapa sa smerom struje I_1 .

Prvi namotaj ima N_1 zavoja pa je ukupan sopstveni fluks kroz prvi namotaj:

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_{01} = N_1 \cdot B_1 \cdot S = N_1 \cdot \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_{sr}} \cdot S = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1}{l_{sr}} \cdot S,$$

a induktivnost je:

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{\frac{\mu_0 N_1^2 I_1}{l_{sr}} \cdot S}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1^2}{l_{sr}} \cdot S,$$

gde je $S = h \cdot (b - a)$. Analogno se određuje induktivnost drugog namotaja, pri čemu je smer vektora $d\vec{S}_2$ određen prema pravilu desne ruke (zavojnice) na osnovu smera konture koja ograničava površinu S , a koji se poklapa sa smerom struje I_2 , kao što je prikazano na slici III.1.6.1.1b:

$$d\vec{S}_2 = \vec{n}_2 \cdot dS_2$$

$$\Phi_{02} = \int_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \int_S B_2 \cdot dS_2 \cdot \cos(\vec{B}_2, \vec{n}_2) = \int_S B_2 \cdot dS_2 = B_2 \int_S dS_2 = B_2 \cdot S$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l_{sr}}$$

$$\Phi_2 = N_2 \Phi_{02} = N_2 \cdot B_2 \cdot S = N_2 \cdot \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l_{sr}} \cdot S = \frac{\mu_0 N_2^2 I_2}{l_{sr}} \cdot S$$

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{\frac{\mu_0 N_2^2 I_2}{l_{sr}} \cdot S}{I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2}{l_{sr}} \cdot S.$$

Međusobna induktivnost prvog i drugog namotaja, L_{12} , određuje se kao odnos ukupnog fluksa Φ_{12} koji struja u prvom namotaju, I_1 , stvara kroz drugi namotaj i jačine struje u prvom namotaju. Odredimo najpre fluks Φ_{012} koji stvara struja u prvom namotaju kroz jedan zavojak drugog namotaja. Na slici III.1.6.1b prikazan je smer vektora $\vec{B}_1$, koji je određen pravilom desne ruke (zavojnice) u odnosu na smer struje I_1 . Od ugla između vektora $\vec{B}_1$ i $d\vec{S}_2$ zavisi znak fluksa Φ_{012} , odnosno znak međusobne induktivnosti. U našem slučaju je ugao između ova dva vektora jednak π pa je skalarni proizvod manji od nule ($\cos \pi = -1$):

$$\Phi_{012} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_S B_1 \cdot dS_2 \cdot \cos(\vec{B}_1, \vec{n}_2) = - \int_S B_1 \cdot dS_2 = -B_1 \int_S dS_2 = -B_1 \cdot S$$

Drugi namotaj ima N_2 zavoja pa je ukupan fluks Φ_{12} koji struja u prvom namotaju, I_1 , stvara kroz drugi namotaj:

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi_{012} = -N_2 \cdot B_1 \cdot S = -N_2 \cdot \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_{sr}} \cdot S = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{l_{sr}} \cdot S.$$

Međusobna induktivnost prvog i drugog namotaja je:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{-\frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{l_{sr}} \cdot S}{I_1} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_{sr}} \cdot S.$$

Primetimo da, za razliku od sopstvene induktivnosti, međusobna induktivnost može biti i pozitivna i negativna. Pojednostavljeno se može shvatiti da je međusobna induktivnost pozitivna ako su vektori magnetnih indukcija $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$, koje stvaraju pojedini namotaji, istog smera kroz svaki od namotaja (odnosno, preciznije rečeno, da je ugao između ovih vektora između $-\pi/2$ i $\pi/2$). Onda je međusobna induktivnost negativna ako su vektori magnetnih indukcija $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ suprotnog smera kroz svaki od namotaja (odnosno, preciznije rečeno, da je ugao između ovih vektora između $\pi/2$ i $3\pi/2$). U našem slučaju ova dva vektora su suprotnog smera (ugao između njih je π) pa je međusobna induktivnost negativna. Da je struja nekog od namotaja suprotnog smera od usvojenog, ili da je neki od namotaja drugačije motan na jezgro, međusobna induktivnost bila bi pozitivna. Na slici III.1.6.1.2 pod a i b prikazani su načini motanja namotaja i smerovi struja kada je međusobna induktivnost pozitivna, na istoj slici pod c i d prikazani su načini motanja namotaja i smerovi struja kada je međusobna induktivnost negativna.

Međusobna induktivnost drugog i prvog namotaja, L_{21} , određuje se kao odnos ukupnog fluksa Φ_{21} koji struja u drugom namotaju, I_2 , stvara kroz prvi namotaj i jačine struje u drugom namotaju. Odredimo međusobnu induktivnost L_{21} na analogan način kao međusobnu induktivnost L_{12} . Odredimo najpre fluks Φ_{021} koji stvara struja u drugom namotaju kroz jedan zavojak prvog namotaja, pri čemu vodimo računa o smerovima vektora $\vec{B}_2$ i $d\vec{S}_1$:

$$\Phi_{021} = \int_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_S B_2 \cdot dS_1 \cdot \cos(\vec{B}_2, \vec{n}_1) = - \int_S B_2 \cdot dS_1 = -B_2 \int_S dS_1 = -B_2 \cdot S$$

Prvi namotaj ima N_1 zavoja pa je ukupan fluks Φ_{21} koji struja u drugom namotaju, I_2 , stvara kroz prvi namotaj:

$$\Phi_{21} = N_1 \Phi_{021} = -N_1 \cdot B_2 \cdot S = -N_1 \cdot \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l_{sr}} \cdot S = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2}{l_{sr}} \cdot S.$$

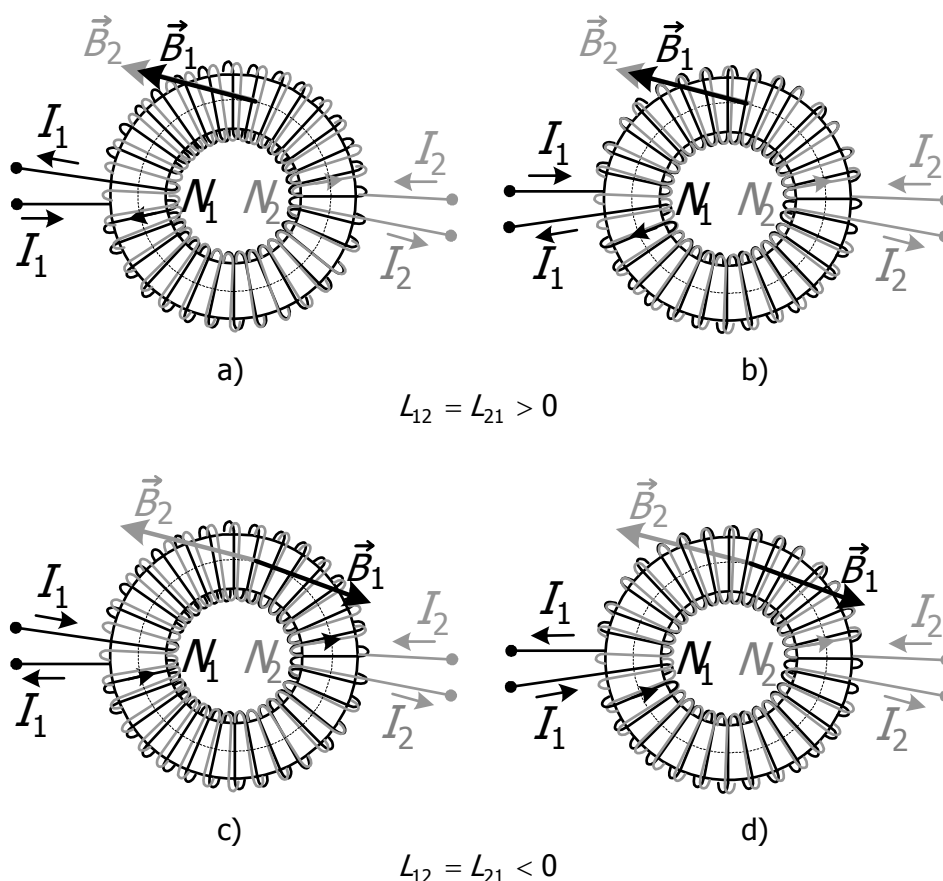
Međusobna induktivnost drugog i prvog namotaja je:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{-\frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2}{l_{sr}} \cdot S}{I_2} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_{sr}} \cdot S.$$

Vidimo da su međusobne induktivnosti L_{12} i L_{21} jednake. Generalno, u linearnim sredinama u magnetnom pogledu (kakva je vazduh) u kojima magnetna permeabilnost ne zavisi od struja u konturama važi:

$$L_{12} = L_{21}.$$

a to će biti slučaj u svim našim zadacima.



Slika III.1.6.1.2

Veza između sopstvenih induktivnosti, L_1 i L_2 , i međusobne induktivnosti L_{12} može se predstaviti pomoću **koefficienta sprege** k :

$$L_{12} = \pm k \sqrt{L_1 \cdot L_2}.$$

Koefficient sprege je uvek pozitivan i važi:

$$0 \leq k \leq 1.$$

Koefficient sprege definiše jačinu sprege između posmatranih namotaja. Ako je fluks koji jedan namotaj stvara kroz drugi jednak nuli tada su međusobna induktivnost i koefficient sprege jednaki nuli. To je slučaj kada su namotaji veoma udaljeni jedan od drugog, ili kada je jedan namotaj izolovan Faradejevim kavezom od drugog. Ako sav fluks koji stvara jedan namotaj prolazi kroz drugi namotaj (nema rasipanja) tada je koefficient sprege jednak 1.

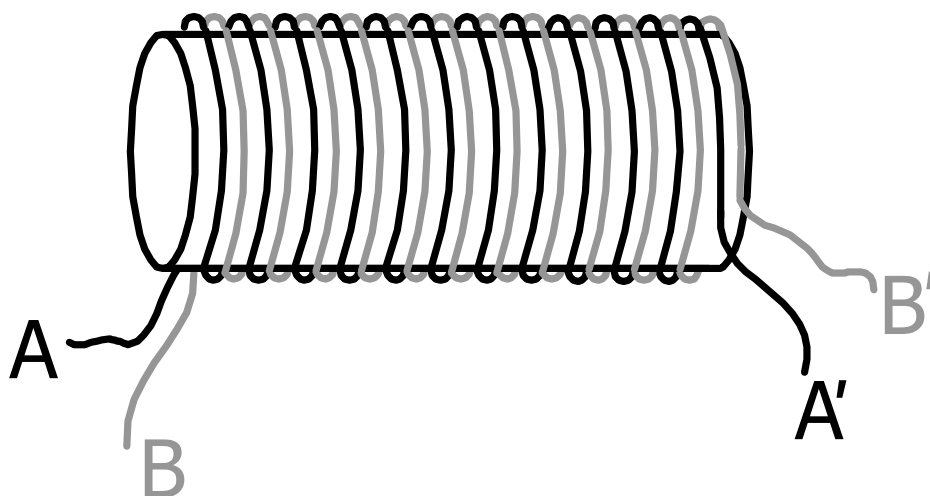
Odredimo koeficijent sprege posmatrana dva namotaja:

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{\frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_{sr}} \cdot S}{\sqrt{\frac{\mu_0 N_1^2}{l_{sr}} \cdot S \cdot \frac{\mu_0 N_2^2}{l_{sr}} \cdot S}} = 1,$$

što je očekivani rezultat, jer sav fluks koji stvara jedan namotaj prolazi kroz drugi namotaj (smatramo da nema rasipanja).

III.1.6.2 Na kartonskom jezgru namotana su dva namotaja, zavojak do zavojka, kao na slici. Dužina jezgra je $b = 3,95$ cm, poluprečnik poprečnog preseka je $r = 1$ mm, a broj zavoja svakog od namotaja je $N = 100$.

- Odrediti induktivnost svakog namotaja.
- Odrediti koeficijent sprege.
- Nacrtati ekvivalentnu šemu veze ako su spojeni krajevi A' i B' i odrediti međusobnu induktivnost.
- Nacrtati ekvivalentnu šemu veze ako su spojeni krajevi A' i B i odrediti međusobnu induktivnost.
- Nacrtati ekvivalentnu šemu veze ako su istovremeno spojeni krajevi A' i B' i krajevi A i B, i odrediti međusobnu induktivnost.



Rešenje:

- Ova dva namotaja su identična, a izraz za induktivnost namotaja vazdušnog solenoida je izveden u zadatku III.1.5.3:

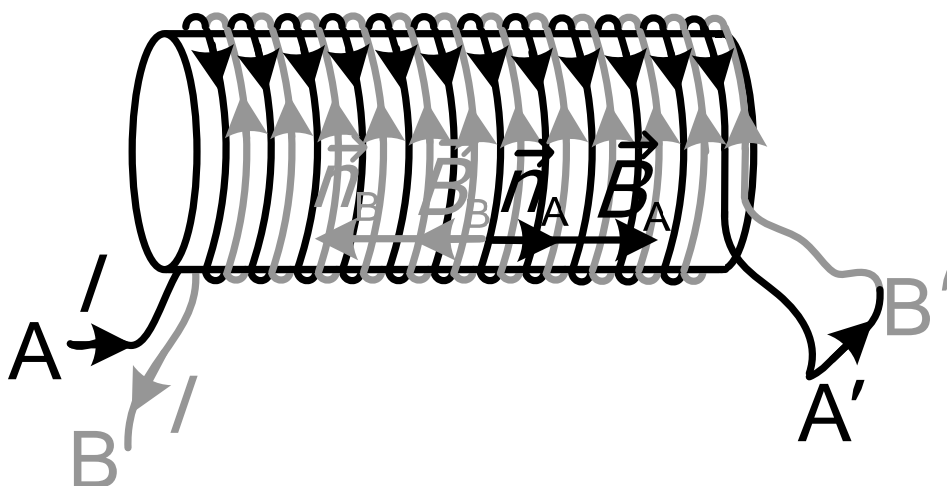
$$L_1 = L_2 = L = \frac{\mu_0 N^2 S}{b} = \frac{\mu_0 N^2 r^2 \pi}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 100^2 \cdot (1 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \pi}{3,95 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 1 \mu\text{H}.$$

- Pošto su namotaji motani zavojak do zavojka sav fluks koji stvara jedan namotaj prolazi kroz drugi namotaj pa je koeficijent sprege jednak $k = 1$.

c) Krajevi A' i B' su spojeni, kao što je prikazano na slici III.1.6.2.1. Ako pustimo struju jačine I kroz ulazne krajeve (to su u ovom slučaju krajevi A i B) ova struja protiče kroz oba namotaja i očigledno je da su namotaji vezani redno. Ako pratimo tok struje I vidimo da struja protiče u suprotnom smeru kroz namotaje. Na slici III.1.6.2.1 prikazani su vektori magnetnih indukcija $\vec{B}_A$ i $\vec{B}_B$, koje stvaraju pojedini namotaji, čiji su smerovi određeni na osnovu smera struje kroz namotaje prema pravilu desne ruke (zavojnice). Na osnovu detaljnog dokaza u prethodnom zadatku možemo zaključiti da je međusobna induktivnost negativna. Naime, normala na površinu jednog zavojka namotaja A, $\vec{n}_A$, vezana je sa smerom konture koja ograničava ovu površinu pravilom desne ruke (zavojnice). Smer konture se poklapa sa smerom struje kroz ovaj namotaj. Sa slike III.1.6.2.1 vidi se da su vektori $\vec{B}_B$ i $\vec{n}_A$ suprotnih smerova, pa je magnetni fluks koji stvara struja u jednom namotaju B kroz namotaj A negativan, a samim tim je i međusobna induktivnost negativna. Ovo smo mogli i odmah zaključiti s obzirom da su vektori magnetnih indukcija $\vec{B}_A$ i $\vec{B}_B$, koje stvaraju pojedini namotaji, suprotnih smerova u svakom pojedinom namotaju.

S obzirom da je koeficijent sprege jednak 1 i da je međusobna induktivnost negativna, možemo odrediti međusobnu induktivnost:

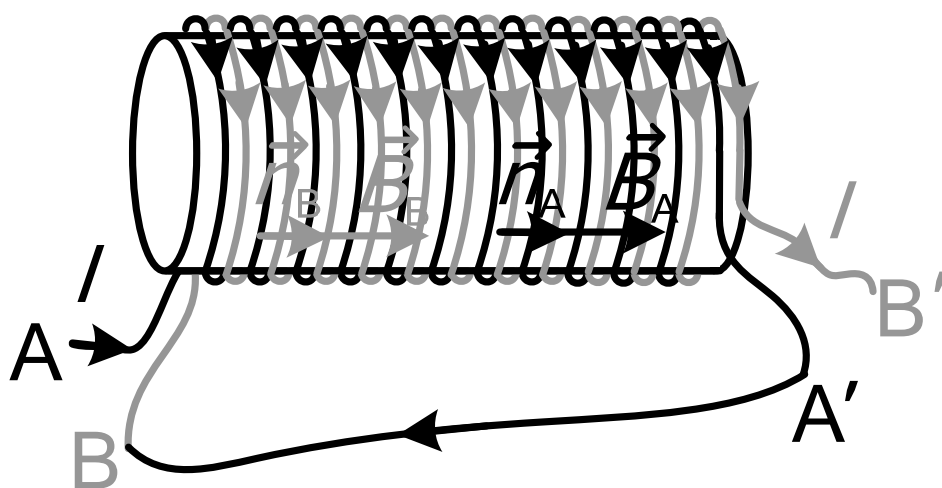
$$L_{12} = L_{21} = -k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = -k\sqrt{L \cdot L} = -k \cdot L = -1 \cdot 1 \mu\text{H} = -1 \mu\text{H}.$$



Slika III.1.6.2.1

d) Krajevi A' i B su spojeni kao što je prikazano na slici III.1.6.2.2. Ako pustimo struju jačine I kroz ulazne krajeve (to su u ovom slučaju krajevi A i B'), ova struja protiče kroz oba namotaja i očigledno je da su namotaji i u ovom slučaju vezani redno. Ako pratimo tok struje I vidimo da struja protiče u istom smeru kroz namotaje. Na slici III.1.6.2.2 prikazani su vektori magnetnih indukcija $\vec{B}_A$ i $\vec{B}_B$, koje stvaraju pojedini namotaji. Njihovi smerovi određeni su na osnovu smera struje kroz namotaje prema pravilu desne ruke (zavojnice). Na slici su prikazane i normale na površine ograničene jednim zavojkom namotaja, $\vec{n}_A$ i $\vec{n}_B$, određene prema smeru struje, kao što je pokazano u ovom zadatku pod a. Pošto su vektori $\vec{B}_A$ i $\vec{n}_B$, odnosno vektori $\vec{B}_B$ i $\vec{n}_A$ istog smera, zaključujemo da je međusobna induktivnost pozitivna. Koeficijent sprege je jednak 1 pa je:

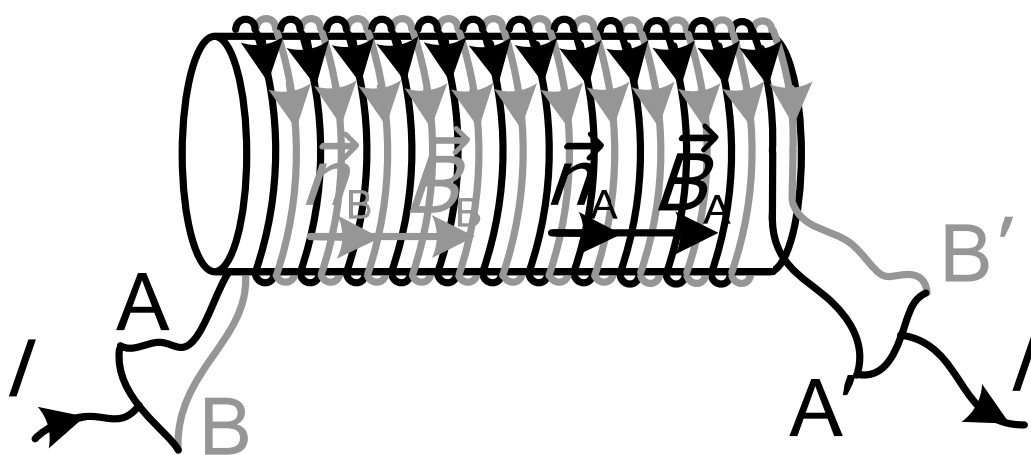
$$L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = k\sqrt{L \cdot L} = k \cdot L = 1 \cdot 1 \mu\text{H} = 1 \mu\text{H}.$$



Slika III.1.6.2.2

e) Istovremeno su spojeni krajevi A' i B' i krajevi A i B, kao što je prikazano na slici III.1.6.2.3. Ako pustimo struju jačine I kroz ulazne krajeve (to su u ovom slučaju spojeni krajevi A i B i spojeni krajevi A' i B') ova struja se deli i protiče kroz oba namotaja pa su namotaji vezani paralelno. Struja protiče u istom smeru kroz namotaje. Na slici III.1.6.2.3 prikazani su vektori magnetnih indukcija $\vec{B}_A$ i $\vec{B}_B$, i normale na površine ograničene jednim zavojkom namotaja, $\vec{n}_A$ i $\vec{n}_B$, određeni prema smeru struje. Pošto su vektori $\vec{B}_A$ i $\vec{n}_B$, odnosno vektori $\vec{B}_B$ i $\vec{n}_A$ istog smera, zaključujemo da je međusobna induktivnost pozitivna. Koeficijent sprege jednak je 1 pa je:

$$L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = k\sqrt{L \cdot L} = k \cdot L = 1 \cdot 1 \mu\text{H} = 1 \mu\text{H}.$$



Slika III.1.6.2.3

III.2 PROMENLJIVA ELEKTROMAGNETNA POLJA

TEORIJSKA OSNOVA

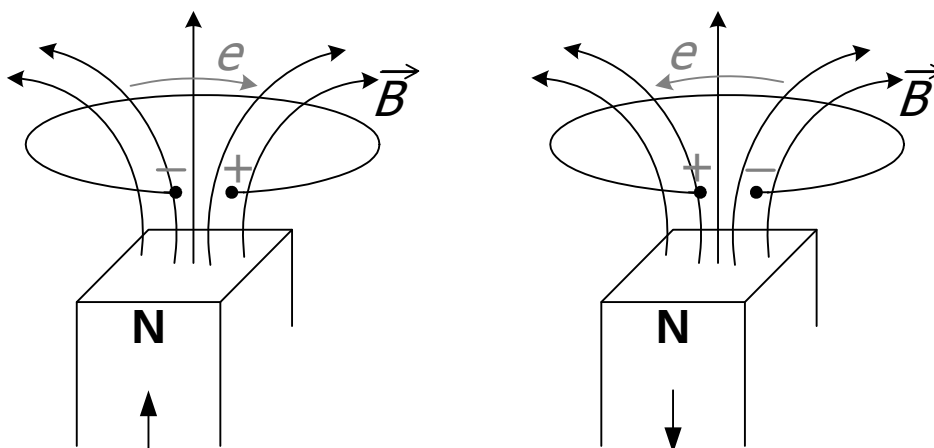
- Magnetna polja koja smo do sada analizirali bila su stalna jer su posledica konstantne električne struje u vremenu i provodnika sa strujom koji miruje u prostoru.

III.2.1 FARADEJEV ZAKON

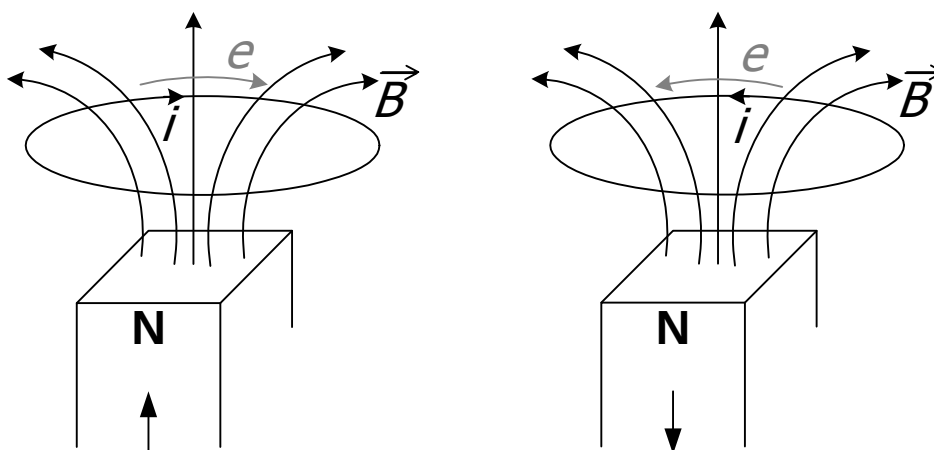
- Šta se dešava ako se strujna kontura kreće u spoljašnjem magnetnom polju?
- Šta se dešava ako kroz provodnik propuštamo vremenski promenljivu električnu struju?
 - Sve te pojave se mogu objasniti **Faradejevim zakonom elektromagnetne indukcije: Indukovana elektromotorna sila, koja se javlja na krajevima provodnika, suprodstavlja se promeni magnetnog fluksa:**

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

- Promena magnetnog fluksa može nastati ako se kontura kreće u spoljašnjem magnetnom polju, ako izvor magnetne indukcije pomeramo u prostoru, ili ako imamo vremenski promenljivu električnu struju u provodniku.
- Kako se određuje smer indukovane elektromotorne sile?
 - **Lencovim pravilom:**
 - Ako se magnet približava provodniku, fluks raste. Indukovaće se elektromotorna sila takvog smera koja će se truditi da smanji tu promenu fluksa i da ga održi na početnom nivou.



- Ako se magnet udaljava, onda fluks kroz konturu opada. Indukovana elektromotorna sila će biti takvog smera da teži da poveća fluks ne bi li ostao kakav je bio na početku
- Ako je kontura zatvorena, onda će se osim elektromotorne sile indukovati i električna struja u konturi. Smer te struje se određuje na isti način kao i smer elektromotorne sile.



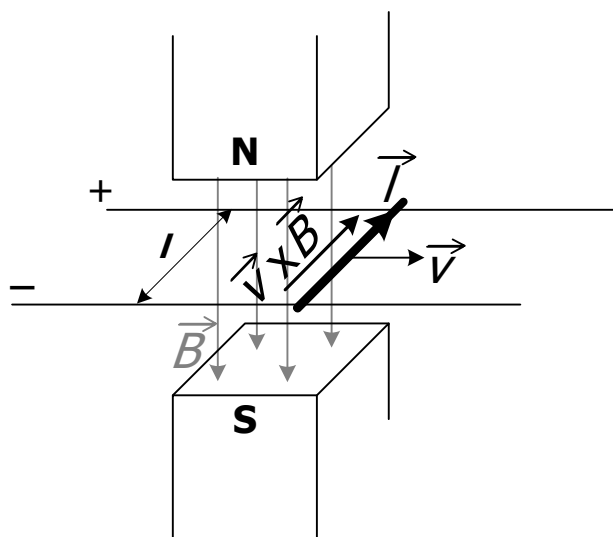
- Šta je dinamička indukcija?
 - To je ona indukcija koja nastaje kada se provodnik kreće u spoljašnjem magnetnom polju.
 - Za ovakav slučaj indukovana elektromotorna sila se može proračunavati u nekim slučajevima preko formule Faradejevog zakona (gore navedenog), a u svim slučajevima preko izraza:

$$e = \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- Šta je statička indukcija?
 - To je onaj tip indukcije kod koje provodnik miruje u spoljašnjem magnetnom polju, a kroz njega propuštamo vremenski promenljivu električnu struju.
- Koja je jedinica za indukovanu elektromotornu silu?
 - Volt [V].
- Postoji nekoliko jako značajnih primena Faradejevog zakona u praksi: generatori jednosmernog i naizmeničnog signala, komutator, fluksmetar...

GENERATOR JEDNOSMERNOG SIGNALA (TEORIJSKI MODEL)

- Teorijski model generatora jednosmernog signala je prototip. Ne koristi se u praksi (nepraktičan je jer je zasnovan na translatornom kretanju).
- Kako radi ovaj generator?
 - Između polova stalnog magneta su postavljene dve paralelne provodne šine. Preko tih šina je položena pravolinijska provodna šipka dužine l .
 - Pod silom tereta šipka se kreće stalnom brzinom $\vec{v}$ (bez trenja) u homogenom spoljašnjem polju magneta.
 - Zbog tog kretanja na šinama se indukuje razlika potencijala (taj napon se može izmeriti voltmetrom na krajevima šina).

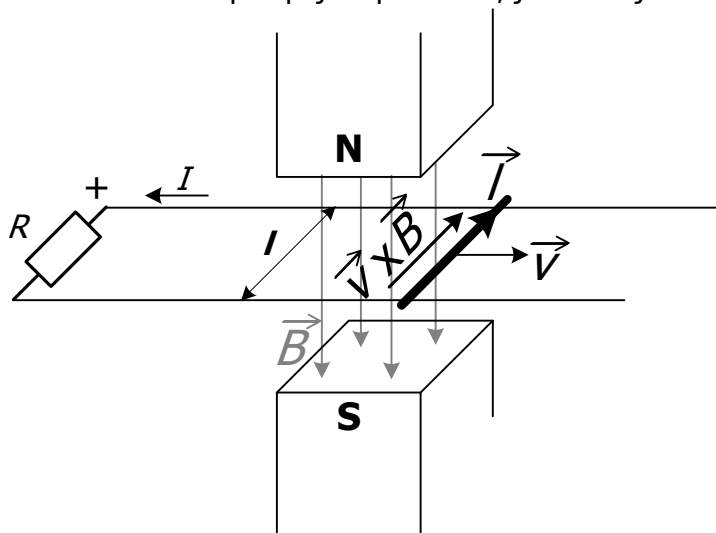


$$\begin{aligned}
 e &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} = \\
 &= (\vec{v} \cdot \vec{B} \cdot \sin(\vec{v}, \vec{B})) \cdot l \cdot \cos(\vec{v} \times \vec{B}, \vec{l}) = \\
 &= \left(v \cdot B \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot l \cdot \cos 0 = \\
 &= vBl
 \end{aligned}$$

- Pošto je indukovana elektromotorna sila konstantna, obeležava se velikim slovom:

$$E = vBl$$

- A ako se šine prespoje otpornikom, javiće se jednosmerna indukovana električna struja.



$$I = \frac{E}{R}$$

- Sa pojavom struje u kolu javlja se i magnetna sila koja deluje na pokretni provodni štap:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

GENERATOR NAIZMENIČNOG (PROSTOPERIODIČNOG) SIGNALA

- Kako radi generator naizmeničnog signala?

– Namotaj od N zavoja provodne žice rotira u spoljašnjem homogenom magnetnom polju indukcije $\vec{B}$.

– Fluks koji se tom prilikom stvara je:

$$\Phi = NBS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = NBS \cdot \cos \alpha$$

– Indukovana elektromotorna sila je onda:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBS \cdot \cos \alpha) =$$

$$= -\left(-NBS \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}\right), \quad \text{gde je } \frac{d\alpha}{dt} = \omega \text{ ugaona brzina (kružna učestanost).}$$

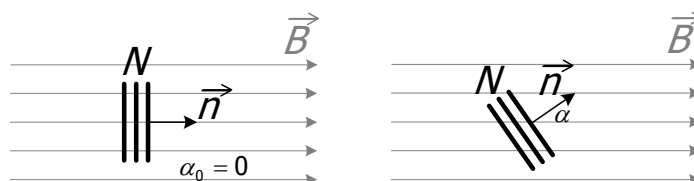
$$d\alpha = \omega \cdot dt$$

$$\alpha = \omega t + \text{const}$$

U početnom trenutku vremena početni ugao je 0:

$$t_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \text{const} = 0$$

$$\alpha = \omega t$$

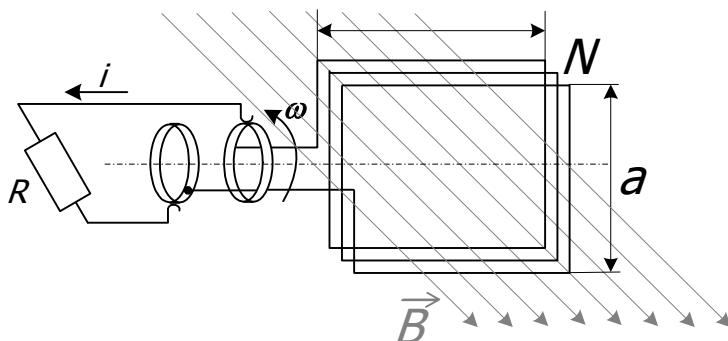


$$e = \omega NBS \cdot \sin \alpha$$

– Konstantni deo $\omega NBS = E_m$ je amplituda ovog sinusnog signala pa je:

$$e = E_m \cdot \sin \omega t$$

- Ako na krajeve generatora priključimo potrošač, kroz njega će proteći indukovana električna struja (koja je sinusnog oblika kao i elektromotorna sila).



$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

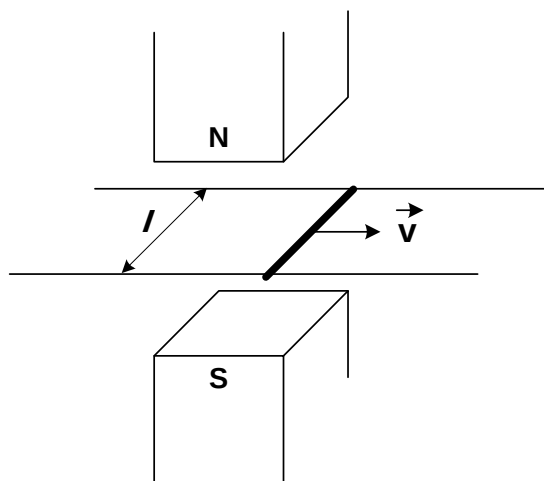
ZADACI

III.2.1.1 Na slici su prikazane dve paralelne nepokretne provodne šine u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 1 \text{ T}$. Duž šina, normalno na njih, klizi provodna šipka brzinom $v = 1 \text{ m/s}$. Rastojanje između šina je $l = 1 \text{ m}$.

a) Izračunati razliku potencijala između nepokretnih šina.

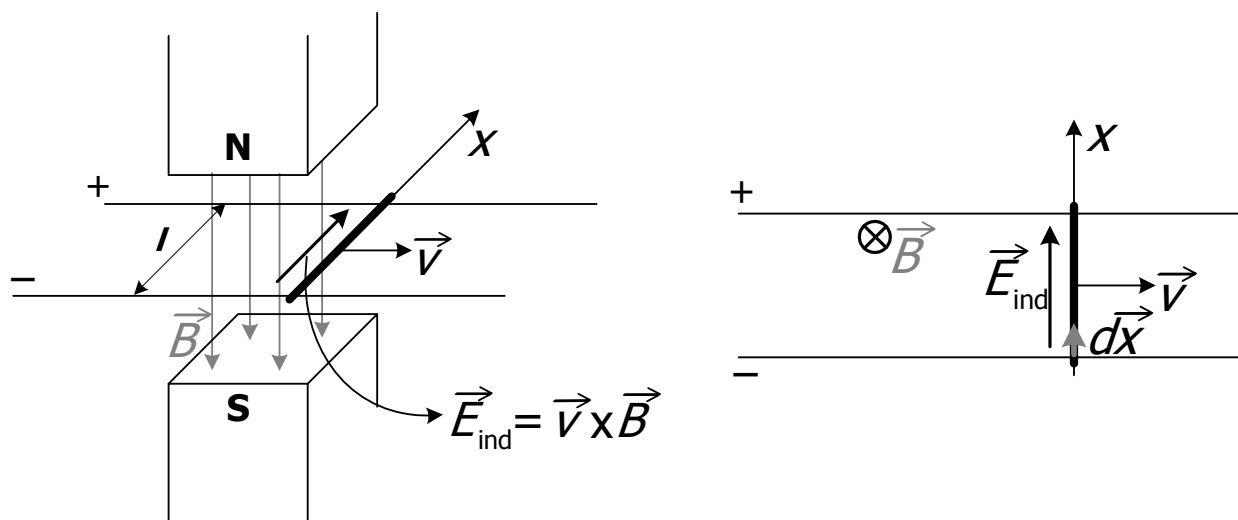
b) Ako se na jednom kraju šine spoje otpornikom otpornosti $R = 100 \Omega$, a otpornost šina i šipke se može zanemariti, odrediti smer i intenzitet indukovane struje.

c) Šta će se desiti ako šipka promeni smer kretanja, a brzina ostane ista?



Rešenje:

a) Kada se provodnik kreće u magnetnom polju u njemu se indukuje električno polje. Ova pojava naziva se **elektromagnetna indukcija** i to dinamička jer se provodnik kreće. U našem slučaju provodna šipka se kreće u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 1 \text{ T}$. Odredimo najpre smer linija magnetnog polja koje uvek izviru iz severnog pola (N), a uviru u južni pol (S) magneta. Na slici III.2.1.1.1 prikazan je analizirani sistem posmatran sa strane i odozgo i prikazane su linije magnetnog polja.



Slika III.2.1.1.1

Jačina električnog polja indukovano pod dejstvom elektromagnetne indukcije je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

U našem slučaju ugao između vektora $\vec{v}$ i $\vec{B}$ je $\pi/2$ pa je intenzitet vektora magnetne indukcije:

$$|\vec{E}_{\text{ind}}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{v}, \vec{B}) = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Pravac ovog vektora je normalan na ravan koju određuju vektori $\vec{v}$ i $\vec{B}$, a smer je određen prema pravilu desne zavojnice (ruke). Vektor $\vec{E}_{\text{ind}}$ prikazan je na slici III.2.1.1.1.

Pod dejstvom indukovano električnog polja u provodniku se indukuje elektromotorna sila. Elementarna elektromotorna sila de indukuje se na elementarno malom delu provodne šine, dužine dx , pri čemu smo zbog lakšeg računa usvojili x -osu tako da se poklapa sa pravcem provodne šine i usmerili je prema smeru vektora indukovano električnog polja $\vec{E}_{\text{ind}}$. (Dakle, smer x -ose se proizvoljno usvaja.)

$$de = \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{x} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{x}.$$

Smer vektora $d\vec{x}$ poklapa se sa smerom x -ose, pa je ugao između vektora $\vec{E}_{\text{ind}}$ i $d\vec{x}$ jednak nuli:

$$de = \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{x} = E_{\text{ind}} \cdot dx \cos(\underbrace{\angle(\vec{E}_{\text{ind}}, d\vec{x})}_1) = E_{\text{ind}} \cdot dx.$$

Pošto smo dobili pozitivan rezultat referentni smer indukovane elektromotorne sile poklapa se sa smerom vektora $d\vec{x}$. (Prisetimo se da je referentni smer elektromotorne sile usmeren od negativnog ka pozitivnom kraju.)

Napomena: Da smo usvojili suprotan smer x -ose ugao između vektora $\vec{E}_{\text{ind}}$ i $d\vec{x}$ bio bi jednak π , pa bi skalarni proizvod ova dva vektora bio negativan i referentni smer indukovane elektromotorne sile bio bi suprotan od smera ovako usvojene x -ose, ali bi bio isti kao i prethodno dobijen smer. Dakle, kao što je očekivano, rezultat ne zavisi od usvojenog smera x -ose.

Ukupna elektromotorna sila koja se indukuje duž cele provodne šipke jednaka je sumi elementarnih indukovanih elektromotornih sila duž provodne šipke:

$$e = \int_I de = \int_I \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{x} = \int_I (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{x}$$

Zamenimo dobijeni izraz za elementarnu elektromotornu silu u izrazu, a zatim izvucimo indukovano električno polje kao konstantu ispred integrala. Linijski integral $\int_I dx$ duž provodne šine jednak je

dužini šine:

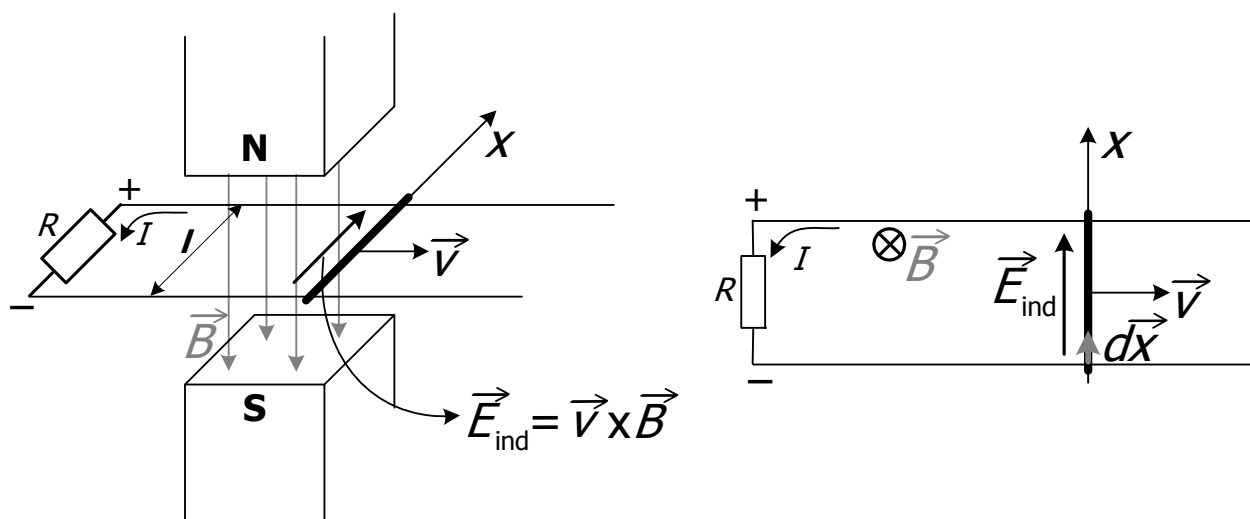
$$e = \int_I E_{\text{ind}} \cdot dx = E_{\text{ind}} \int_I dx = E_{\text{ind}} \cdot l = vBl$$

Zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

$$e = E_{\text{ind}} \cdot l = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ V}.$$

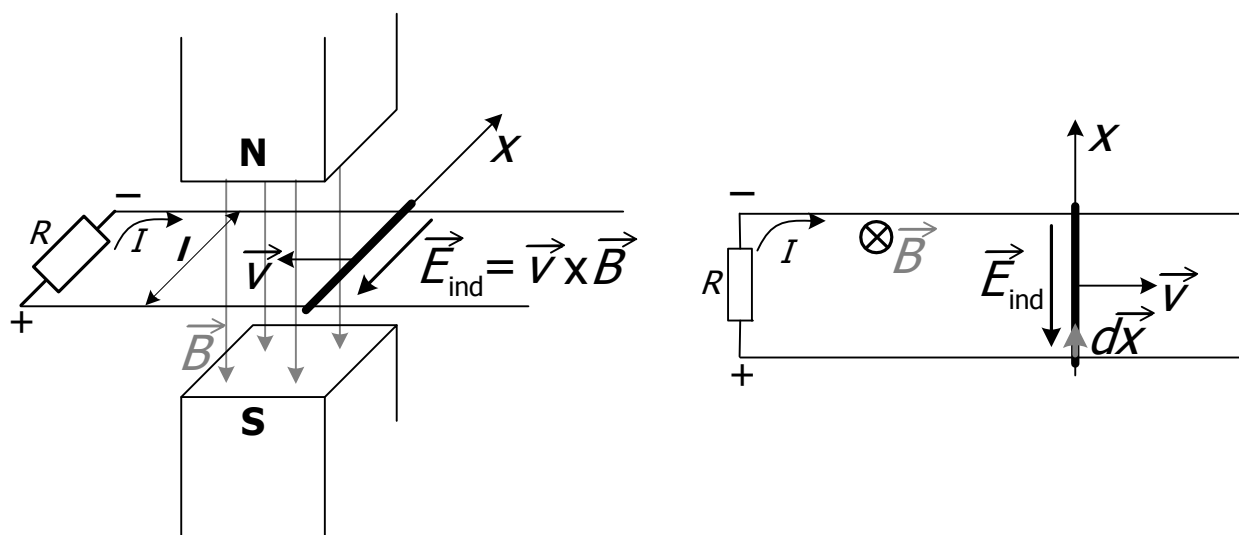
b) Indukovana elektromotorna sila ponaša se kao generator konstantnog napona. Kada zatvorimo kolo otpornikom, pošto na njegovim krajevima postoji razlika potencijala, poteći će struja. Smer struje se poklapa sa referentnim smerom indukovane elektromotorne sile i prikazan je na slici III.1.2.1.2. Intenzitet struje je prema Omovom zakonu za prosto kolo:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{1 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,01 \text{ A} = 10 \text{ mA}.$$



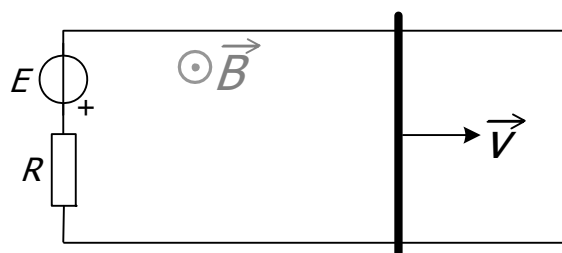
Slika III.2.1.1.2

c) Ako provodna šina promeni smer kretanja (tj. ako vektor $\vec{v}$ promeni smer) promeniće se smer indukovano električnog polja, koje je jednako vektorskom proizvodu vektora $\vec{v}$ i $\vec{B}$. Posledica toga je suprotan smer indukovane elektromotorne sile, a samim tim i suprotan smer struje kroz otpornik, kao što je prikazano na slici III.2.1.1.3.



Slika III.2.1.1.3

III.2.1.2 Na slici su prikazane dve paralelne nepokretne provodne šine u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 0,5 \text{ T}$. Duž šina, normalno na njih, klizi provodna šipka brzinom $v = 3 \text{ m/s}$. Rastojanje između šina je $l = 2 \text{ m}$. Na jednom kraju šine su spojene generatorom elektromotorne sile $E = 2 \text{ V}$ i unutrašnje otpornosti $R = 2 \Omega$. Odrediti smer i intenzitet struje u kolu.



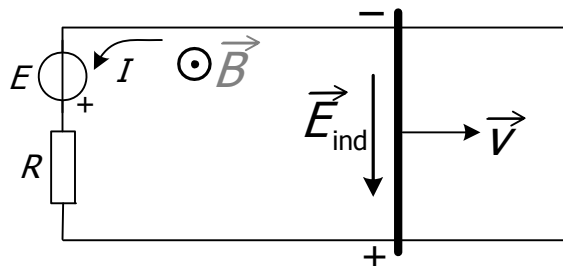
Rešenje:

Zbog kretanja provodne šipke u magnetnom polju u njoj će se indukovati električno polje. Jačina indukovano električnog polja jednaka je vektorskom proizvodu vektora $\vec{v}$ i $\vec{B}$. Kao u prethodnom zadatku vektori $\vec{v}$ i $\vec{B}$ su normalni jedan na drugi pa je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$|\vec{E}_{\text{ind}}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{v}, \vec{B}) = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \frac{\pi}{2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5 \text{ T} = 1,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Smer indukovano električnog polja prikazan je na slici III.2.1.2.



Slika III.2.1.2.1

U prethodnom zadatku pokazali smo da je indukovana elektromotorna sila u pravolinijskom provodniku koji se kreće brzinom $\vec{v}$ normalno na linije magnetnog polja indukcije $\vec{B}$:

$$e = vBl = E_{\text{ind}} \cdot l = 1,5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} = 3 \text{ V}.$$

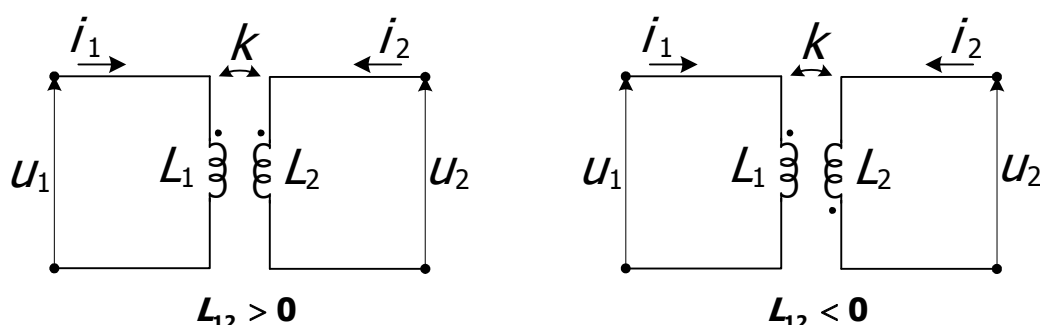
Referentni smer indukovane elektromotorne sile poklapa se sa smerom indukovano električnog polja i prikazan je na slici III.2.1.2.1. Usvojimo referentni smer struje kroz kolo kao što je prikazano na slici III.2.1.2.1. Na osnovu Omovog zakona za prosto kolo jačina struje u kolu je:

$$I = \frac{E - e}{R} = \frac{3 \text{ V} - 1 \text{ V}}{50 \Omega} = 0,04 \text{ A} = 40 \text{ mA}.$$

Predznak elektromotorne sile E je pozitivan jer se njen referentni smer poklapa sa usvojenim referentnim smerom struje. Predznak indukovane elektromotorne sile e je negativan jer je njen referentni smer suprotan od usvojenog referentnog smera struje. Pošto smo dobili pozitivnu vrednost struje znači da se usvojeni smer struje poklapa sa pravim smerom struje.

III.2.2 SPREGNUTI NAMOTAJI SA VREMENSKI PROMENLJIVOM STRUJOM TEORIJSKA OSNOVA

- Promenljiva magnetna polja su bitna i za rad spregnutih namotaja (transformatora). Ako kroz jedan namotaj propuštamo vremenski promenljivu električnu struju, ona će proizvesti vremenski promenljivi magnetni fluks kroz drugi namotaj i indukovaće se elektromotorna sila na krajevima drugog namotaja (**elektromotorna sila međusobne indukcije**).
- Zbog proticanja vremenski promenljive električne struje kroz pojedinačne namotaje stvaraće se vremenski promenljivi fluks, pa će se na njihovim krajevima indukovati **elektromotorna sila samoindukcije**.
- Kako se šematski prikazuju spregnuti namotaji u električnom kolu?



- Tačkama se definiše znak magnetne indukcije:
 - ako je međusobna induktivnost L_{12} pozitivna, obe tačke se stavljaju na ulaz namotaja (ili obe na izlaz);
 - ako je međusobna induktivnost L_{12} negativna, tačke se stavljaju naizmenično, jedna na ulaz, jedna na izlaz;
 - ulaz namotaja je kraj namotaja u koji struja ulazi, a izlaz je onaj kraj namotaja iz koga struja izlazi.
- Važno je ovim tačkama obeležiti predznak međusobne induktivnosti, jer se to na šematskom prikazu inače ne vidi (vidi se samo na realnom spregnutom kolu).
- Prema ekvivalentnoj šemi spregnutih namotaja mogu se pisati jednačine po I i II Kirhofovom zakonu:

$$u_1 + e_1 + e_{21} = 0 \dots (1)$$

$$u_2 + e_{12} + e_2 = 0 \dots (2)$$

- Pošto i kod vremenski promenljivih električnih struja važi da je induktivnost

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

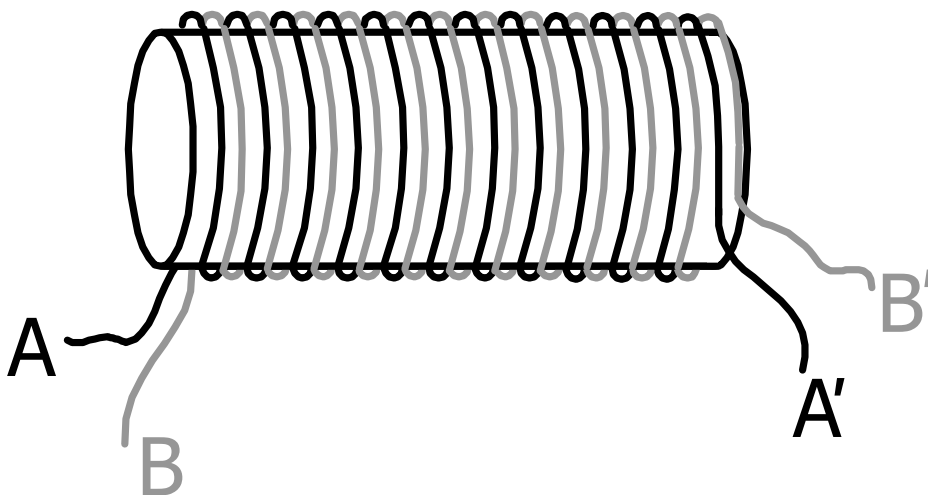
ove jednačine se mogu napisati i kao

$$u_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{21} \frac{di_2}{dt} = 0 \dots (1)$$

$$u_2 - L_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \dots (2)$$

III.2.2.1 Na kartonskom jezgru namotana su dva namotaja, zavojak do zavojka, kao na slici.

- Nacrtati ekvivalentnu šemu veze ako su spojeni krajevi A' i B'.
- Nacrtati ekvivalentnu šemu veze ako su spojeni krajevi A' i B.
- Nacrtati ekvivalentnu šemu veze ako su istovremeno spojeni krajevi A' i B' i krajevi A i B.



Rešenje:

Ovo su namotaji čije smo induktivnosti, kao i koeficijent sprege, odredili u zadatku III.1.6.2. Zaključili smo da su oba namotaja identična i da su im induktivnosti L . Koeficijent sprege je $k = 1$ pošto su namotaji motani zavojak do zavojka i sav fluks koji stvara jedan namotaj prolazi kroz drugi namotaj.

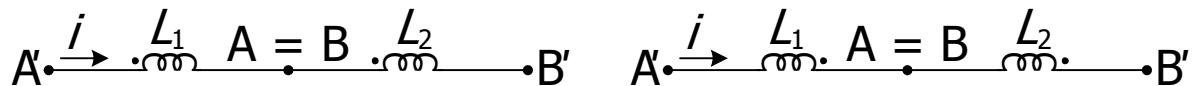
Znak međusobne induktivnosti zavisi od načina motanja namotaja na jezgro i smera struje kroz namotaj. Da bi se pojednostavilo predstavljanje namotaja oni se prikazuju šematski. Međutim, na ovim pojednostavljenim šemama gubi se informacija o načinu motanja namotaja, pa samim tim i informacija o znaku međusobne induktivnosti. Zato je usvojena sledeća konvencija: jedan kraj namotaja svakog namotaja obeležava se tačkom. Ako za oba namotaja struja utiče u tačku ili ističe iz tačke, smatra se da je međusobna induktivnost pozitivna. Ako za jedan namotaj struja utiče u tačku, a za drugi namotaj ističe iz tačke, smatra se da je međusobna induktivnost negativna. Primenimo ovu konvenciju na namotaje iz zadatka.

a) U zadatku III.1.6.2 pod a zaključili smo da je međusobna induktivnost negativna kada su spojeni krajevi A' i B' i da su namotaji vezani redno. Na slici III.2.2.1.1 prikazane su dve moguće ekvivalentne šeme veze. Primetimo da su na prvoj šemi tačke postavljene sa leve strane namotaja A, odnosno desne strane namotaja B, i da, kada se pusti struja kroz namotaje, ona utiče u tačku namotaja A, a ističe iz tačke namotaja B. Na drugoj šemi je obrnuto.



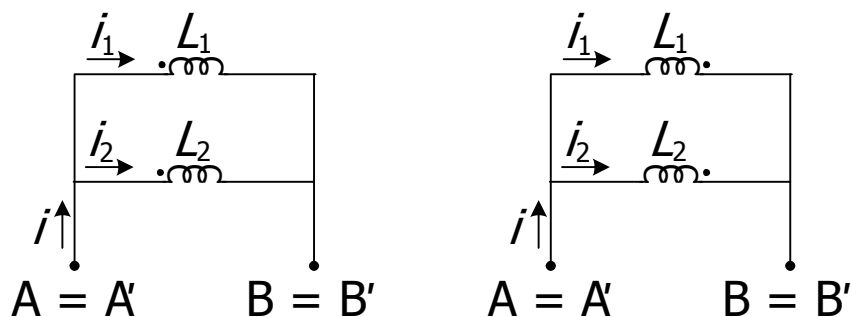
Slika III.2.2.1.1

b) U zadatku III.1.6.2 pod b zaključili smo da je međusobna induktivnost pozitivna kada su spojeni krajevi A' i B i da su namotaji vezani redno. Na slici III.2.2.1.2 prikazane su dve moguće ekvivalentne šeme veze. Primetimo da su tačke postavljene sa leve strane svakog od namotaja i da, kada se pusti struja kroz namotaje, ona utiče u tačke oba namotaja. Na drugoj šemi tačke se nalaze sa desne strane oba namotaja.



Slika III.2.2.1.2

c) U zadatku III.1.6.2 pod c zaključili smo da je međusobna induktivnost pozitivna kada su istovremeno spojeni krajevi A' i B' i krajevi A i B i da su namotaji vezani paralelno. Na slici III.2.2.1.3 prikazane su dve moguće ekvivalentne šeme veze.

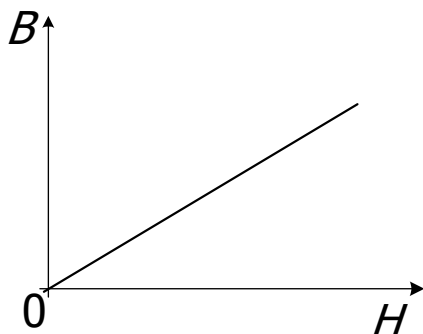


Slika III.2.2.1.3

III.2.3 ENERGIJA U MAGNETNOM POLJU

TEORIJSKA OSNOVA

- Kako se izražava **energija magnetnog polja u linearnim sredinama?**



$$W_m = \frac{1}{2} \Phi \cdot i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

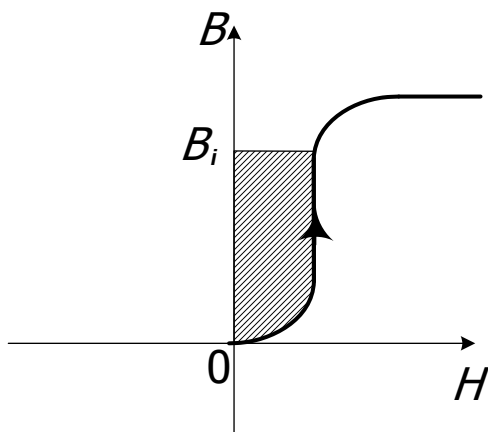
- Energija magnetnog polja može da se izrazi i preko zapreminske gustine energije w_m :

$$W_m = \int_V w_m dV$$

gde je:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

- Kako se izražava **energija magnećenja feromagnetika?**

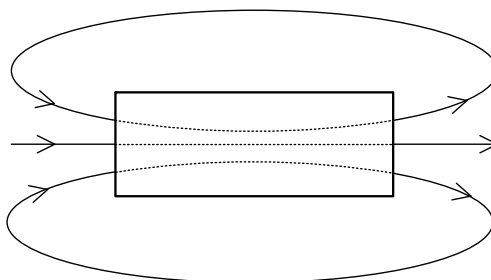


$$W_m = V \int_0^{B_i} H \cdot dB$$

- Integral $\int_0^{B_i} H \cdot dB$ odgovara površini iznad krive magnećenja. To predstavlja energiju koju izvor utroši da bi se u jezgru postigla magnetna indukcija B_i (indukcija za zadanu struju i).

TEST

- III.1. Koja je jedinica za magnetnu silu? _____
- III.2. Koja je jedinica za magnetnu indukciju? _____
- III.3. Koja je jedinica za jačinu magnetnog polja? _____
- III.4. Koja je jedinica za magnetizaciju? _____
- III.5. Koja je jedinica za magnetni fluks? _____
- III.6. Koja je jedinica za induktivnost? _____
- III.7. Koja je jedinica za međusobnu induktivnost? _____
- III.8. Koja je jedinica za indukovanu elektromotornu silu? _____
- III.9. Koja je jedinica za magnetnu energiju? _____
- III.10. Kakva je veličina magnetna indukcija?
a) skalarna
b) vektorska
- III.11. Kakva je veličina jačina magnetnog polja?
a) skalarna
b) vektorska
- III.12. Kakva je veličina fluks?
a) skalarna
b) vektorska
- III.13. Kakva je veličina induktivnost?
a) skalarna
b) vektorska
- III.14. Linije magnetne indukcije su:
a) linije na koje je vektor magnetne indukcije uvek tangentan
b) linije na koje je vektor magnetne indukcije uvek normalan
- III.15. Ucrtati severni i južni pol magneta prema linijama magnetne indukcije na slici.



III.16. Ucrtati linije magnetne indukcije prema zadatim polovima magneta na slici.



III.17. Kako se zove konstanta μ ? _____

III.18. Kako se zove konstanta μ_0 ? _____

III.19. Kako se zove konstanta μ_r ? _____

III.20. Koju jedinicu ima dielektrična konstanta μ_0 ?

a) $\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

b) $\frac{\text{H}}{\text{A}^2}$

c) nema jedinicu

III.21. Koju jedinicu ima dielektrična konstanta μ_r ?

a) $\frac{\text{H}}{\text{A}^2}$

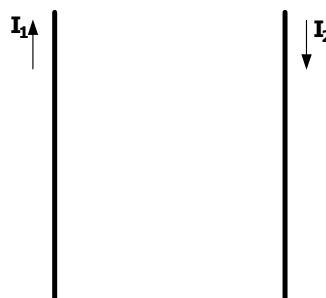
b) $\frac{\text{H}}{\text{m}}$

c) nema jedinicu

III.22. Magnetna sila kojom međusobno deluju dva provodnika sa strujom na slici je:

a) privlačna

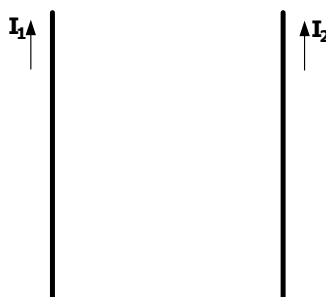
b) odbojna



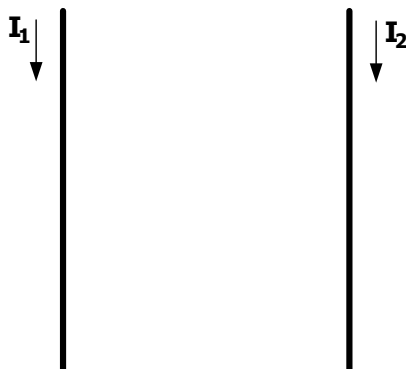
III.23. Magnetna sila kojom međusobno deluju dva provodnika sa strujom na slici je:

a) privlačna

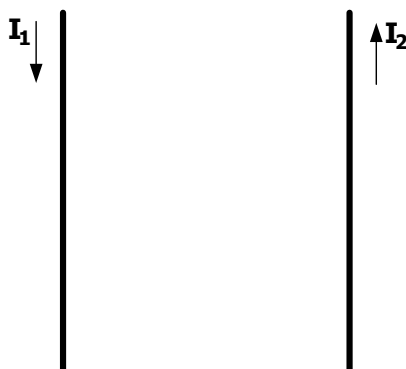
b) odbojna



III.24. Ucrtati magnetnu silu kojom međusobno deluju dva provodnika sa strujom jedan na drugi.



III.25. Ucrtati magnetnu silu kojom međusobno deluju dva provodnika sa strujom jedan na drugi.

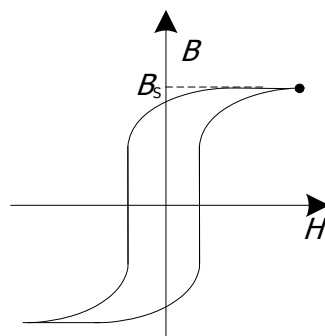


III.26. Koju jedinicu ima dielektrična konstanta μ ?

- a) $\frac{H}{A^2}$
- b) $\frac{H}{m}$
- c) nema jedinicu

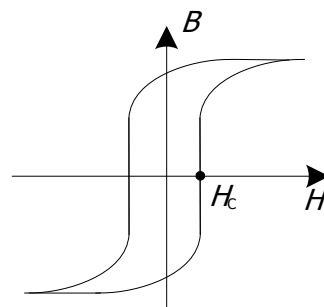
III.27. Označena tačka na slici predstavlja:

- a) magnetnu indukciju u zasićenju
- b) zaostalu (remanentnu) magnetnu indukciju
- c) koercitivno polje



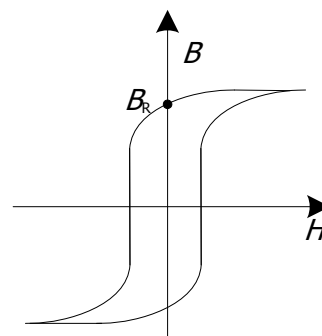
III.28. Označena tačka na slici predstavlja:

- a) magnetnu indukciju u zasićenju
- b) zaostalu (remanentnu) magnetnu indukciju
- c) koercitivno polje



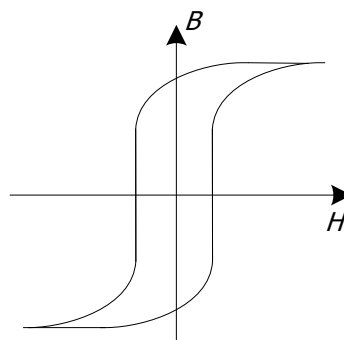
III.29. Označena tačka na slici predstavlja:

- a) magnetnu indukciju u zasićenju
- b) zaostalu (remanentnu) magnetnu indukciju
- c) koercitivno polje



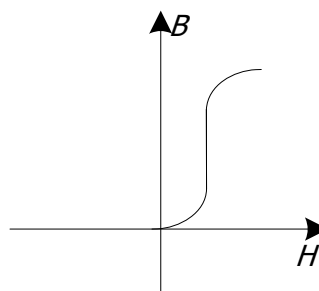
III.30. Na slici je prikazan grafik

- a) prvobitne krive magnećenja
- b) magnetne histerezisne krive



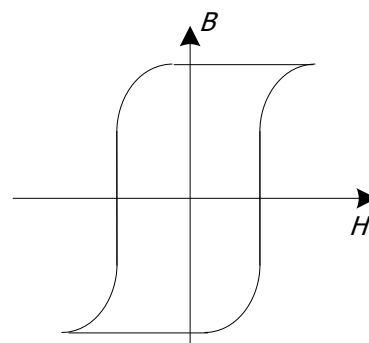
III.31. Na slici je prikazan grafik

- a) prvobitne krive magnećenja
- b) magnetne histerezisne krive



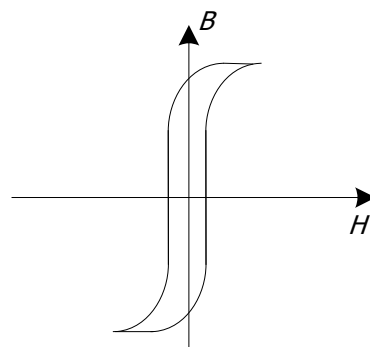
III.32. Na slici je prikazana histerezisna kriva

- a) magnetno tvrdog materijala
- b) magnetno mekog materijala



III.33. Na slici je prikazana histerezisna kriva

- a) magnetno tvrdog materijala
- b) magnetno mekog materijala



III.34. Dijamagnetici imaju

- a) μ_r neznatno manje od 1
- b) μ_r neznatno veće od 1
- c) $\mu_r \gg 1$

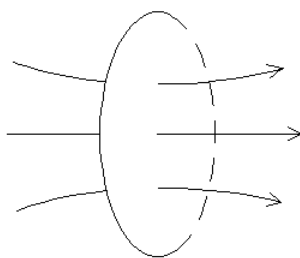
III.35. Paramagnetici imaju

- a) μ_r neznatno manje od 1
- b) μ_r neznatno veće od 1
- c) $\mu_r \gg 1$

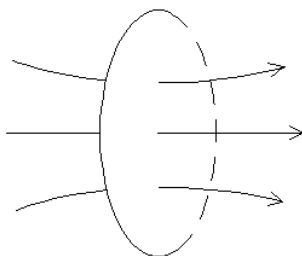
III.36. Feromagnetici imaju

- a) $\mu_r < 1$
- b) $\mu_r \gg 1$
- c) $\mu_r = 1$

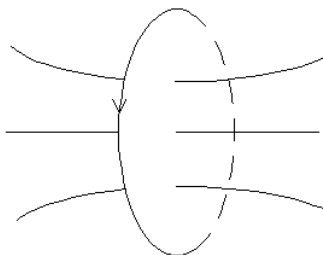
III.37. Ucrtati smer orijentacije konture tako da magnetni fluks kroz konturu na slici bude pozitivan.



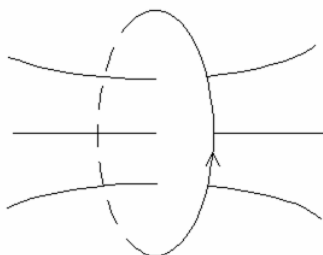
III.38. Ucrtati smer orijentacije konture tako da magnetni fluks kroz konturu na slici bude negativan.



III.39. Ucrtati smer linija magnetne indukcije tako da magnetni fluks kroz konturu na skici bude pozitivan.

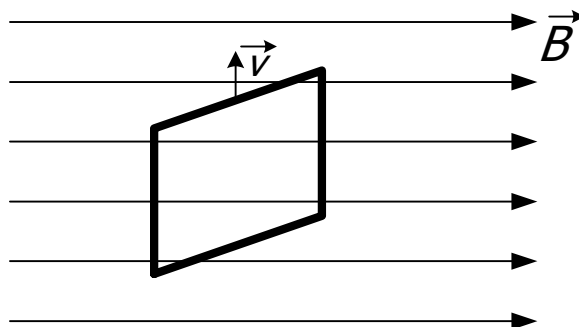


III.40. Ucrtati smer linija magnetne indukcije tako da magnetni fluks kroz konturu na skici bude negativan.



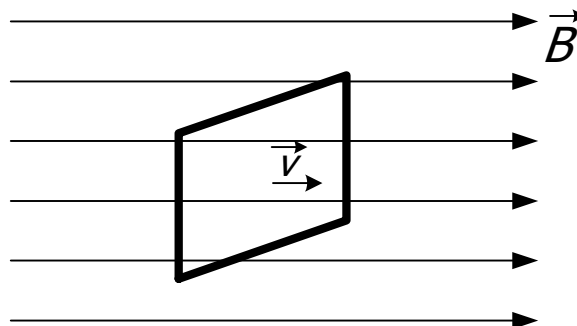
III.41. Pravougaona provodna kontura se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije $\vec{B}$ i kreće se stalnom brzinom $\vec{v}$ normalno na linije polja, kao što je prikazano na slici. Da li će se u konturi indukovati elektromotorna sila?

- a) da
- b) ne

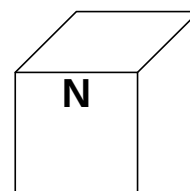


III.42. Pravougaona provodna kontura se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije $\vec{B}$ i kreće se stalnom brzinom $\vec{v}$ paralelno sa linijama polja, kao što je prikazano na slici. Da li će se u konturi indukovati elektromotorna sila?

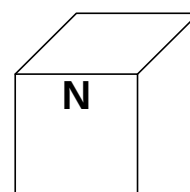
- a) da
- b) ne



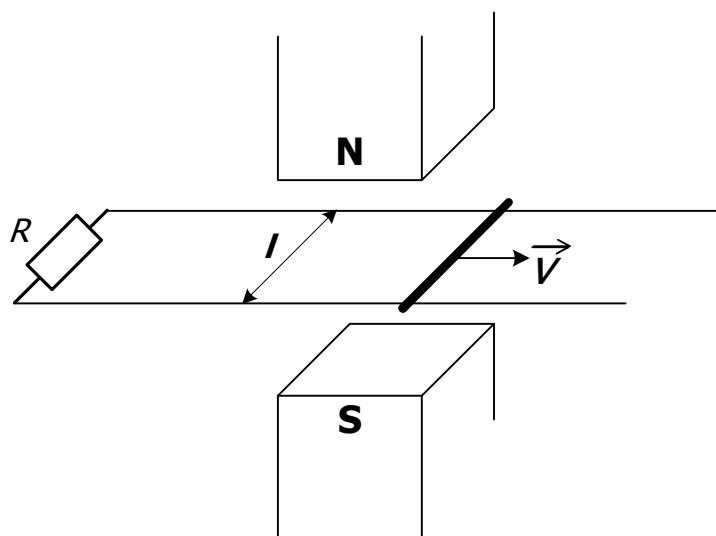
III.43. Ucrtati smer električne struje koja se indukuje u konturi ako se magnet kreće nagore.



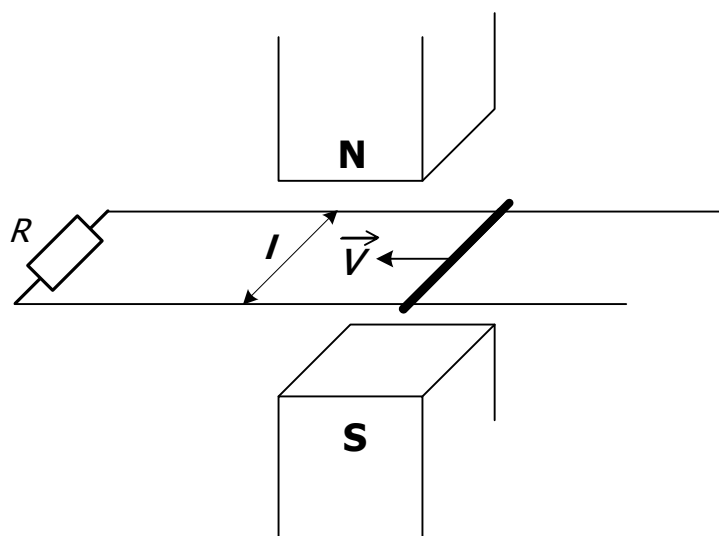
III.44. Ucrtati smer električne struje koja se indukuje u konturi ako se magnet kreće nadole.



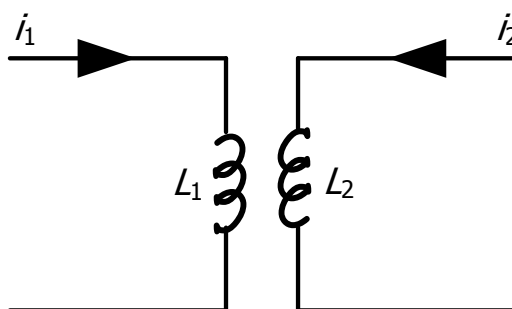
III.45. Ucrtati smer indukovane električne struje kroz otpornik.



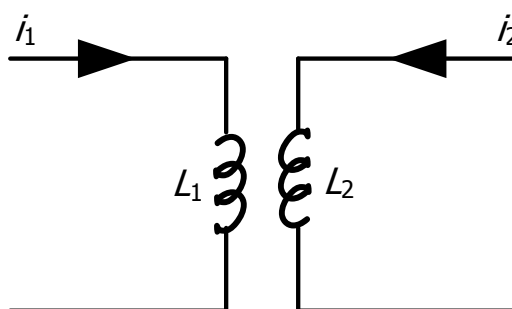
III.46. Ucrtati smer indukovane električne struje kroz otpornik.



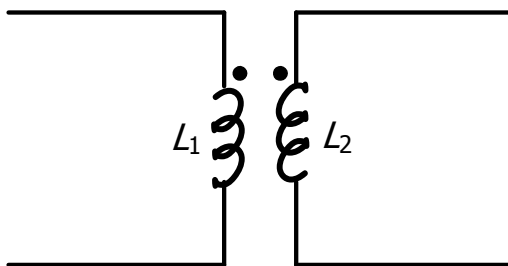
III.47. Ucrtati tačke na sliku tako da međusobna induktivnost bude pozitivna.



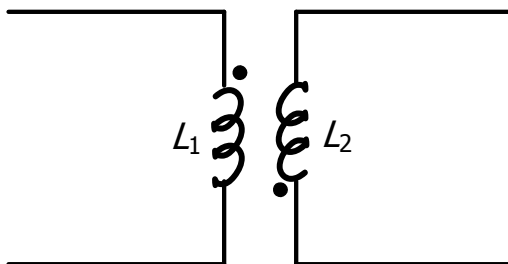
III.48. Ucrtati tačke na sliku tako da međusobna induktivnost bude negativna.



III.49. Ucrtati smerove električnih struja tako da međusobna induktivnost bude negativna.

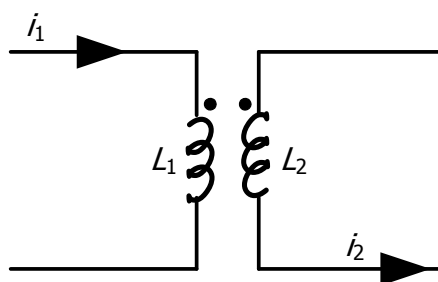


III.50. Ucrtati smerove električnih struja tako da međusobna induktivnost bude pozitivna.



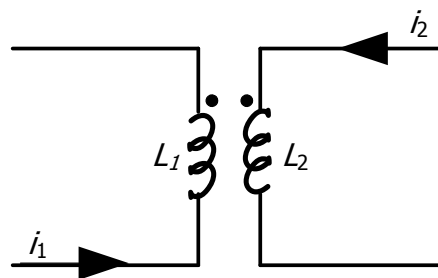
III.51. Međusobna induktivnost kola sa slike je:

- a) pozitivna
- b) negativna



III.52. Međusobna induktivnost kola sa slike je:

- a) pozitivna
- b) negativna



III.53. Koji od obrazaca služi za određivanje energije kalema?

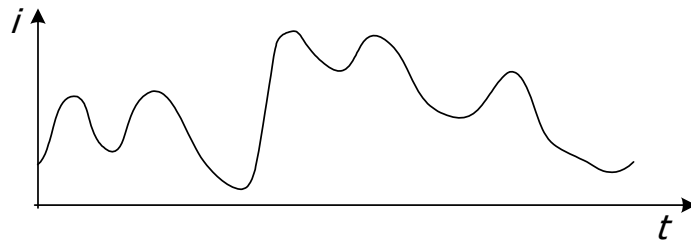
- a) $W_m = \frac{1}{2} LI$
- b) $W_m = \Phi I$
- c) $W_m = \frac{\Phi^2}{2L}$

IV VREMENSKI PROMENLJIVE PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE

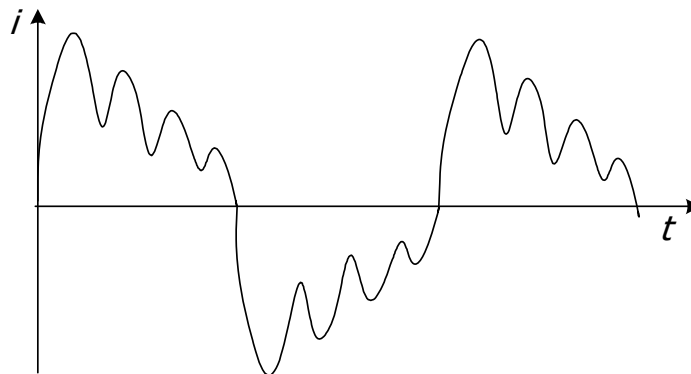
IV.1 PROSTOPERIODIČNE STRUJE

TEORIJSKA OSNOVA

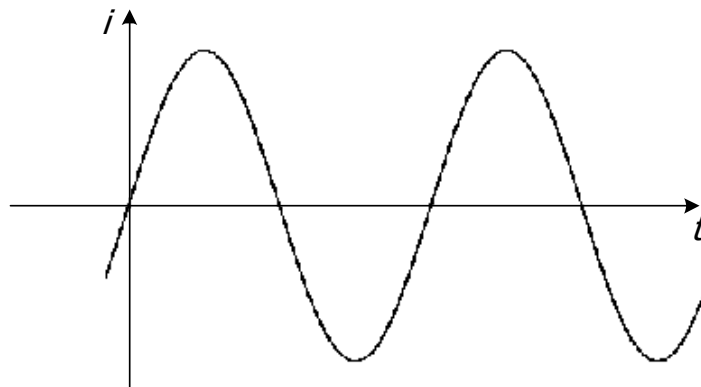
- Vremenski promenljive električne struje u svakom trenutku vremena menjaju intenzitet.



- Naizmenične električne struje su one vremenski promenljive struje koje pored intenziteta povremeno menjaju smer. One mogu biti neperiodične ili periodične, a periodične mogu biti složenoperiodične i prostoperiodične.

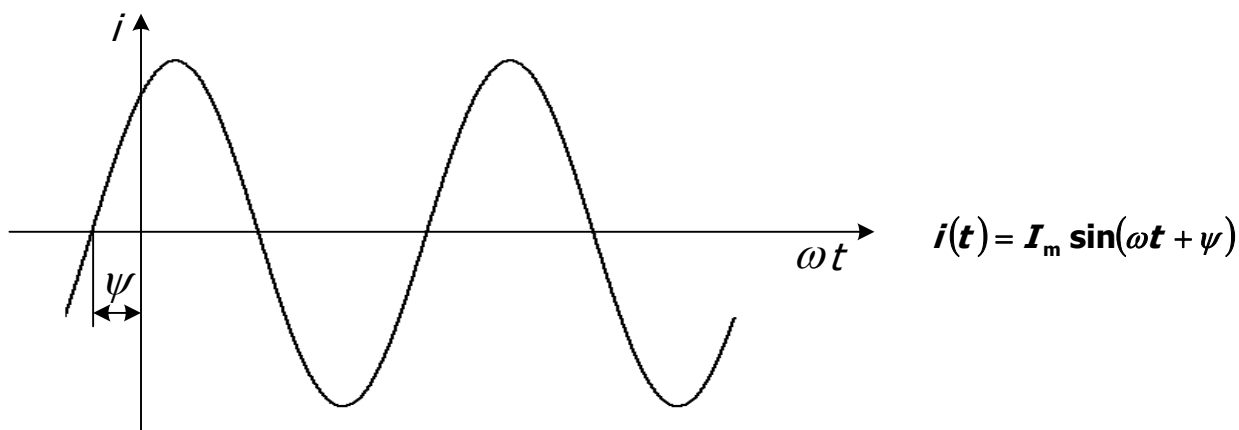


- Mi ćemo proučavati samo prostoperiodične električne struje (struje sinusnog i kosinusnog oblika). Ove struje se koriste u elektrotehnici, jer su samo za njih na svim elementima u kolu (otpornik, kalem, kondenzator), oblici napona i struje isti.



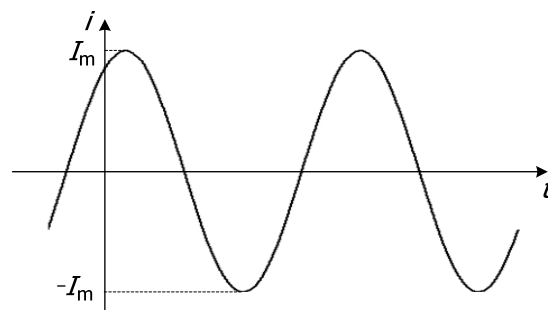
- Grafički prikaz električne struje i napona ima isti oblik u zavisnosti od promene vremena i u zavisnosti od promene faze. Zato se nekad crta grafik $i(t)$, a nekad $i(\omega t)$ ($i(t)$ je u stvari grafik istog oblika kao grafik $i(\omega t)$).

- Šta je trenutna vrednost električne struje i ?
 - Vrednost koju struja ima u nekom trenutku vremena.



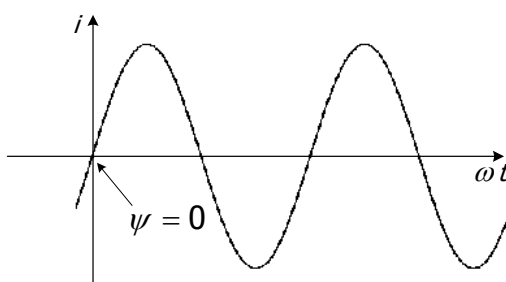
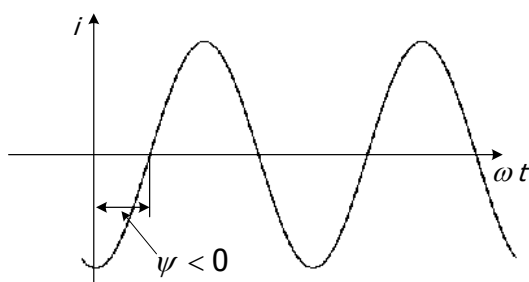
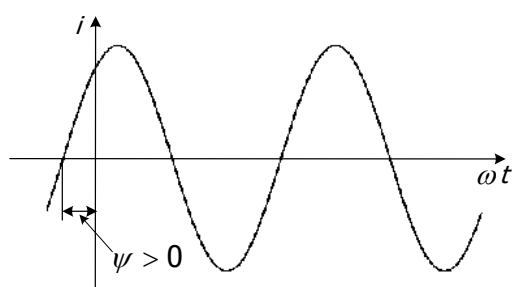
- Šta je amplituda prostoperiodične električne struje I_m ?
 - Maksimalna vrednost koju struja može imati (kada je $\sin(\omega t + \psi) = 1$)

Amplituda je isključivo pozitivna veličina.



- Šta je trenutna faza?
 - Faza koju ima struja u nekom trenutku vremena: $\omega t + \psi$.
- Šta je početna faza ψ ?
 - To je faza (ugao) koju struja ima u početnom trenutku posmatranja.

Početna faza može biti i pozitivna i negativna i jednaka 0.

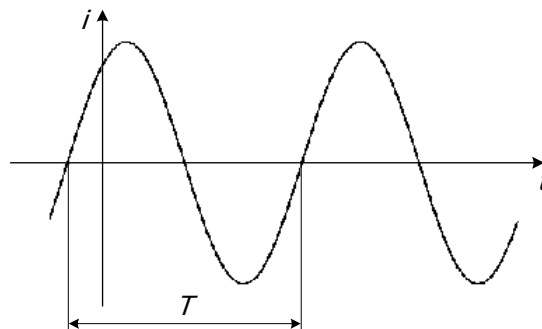


- Šta je kružna učestanost ω ?
 - To je brzina rotacije generatora naizmeničnog (prostoperiodičnog) signala:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \text{ gde je } f - \text{učestanost (frekvencija) - [Hz]} \\ T - \text{period oscilacija [s]}$$

- Koja je jedinica za kružnu učestanost?
 - $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ili s^{-1} .
- Šta je period funkcije T ?
 - Vreme za koje se funkcija počne ponavljati na isti način.
- Šta je učestanost (frekvencija) f ?
 - Broj ponavljanja perioda u jednoj sekundi.
 - Učestanost je obrnuto srazmerna periodu:

$$f = \frac{1}{T}.$$



- Koja je jedinica za učestanost?
 - Herc [Hz].
- Šta je srednja vrednost električne struje?

$$I_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

– Srednja vrednost sinusoide je 0, pa je zato i srednja vrednost takvih struja i napona jednaka 0.

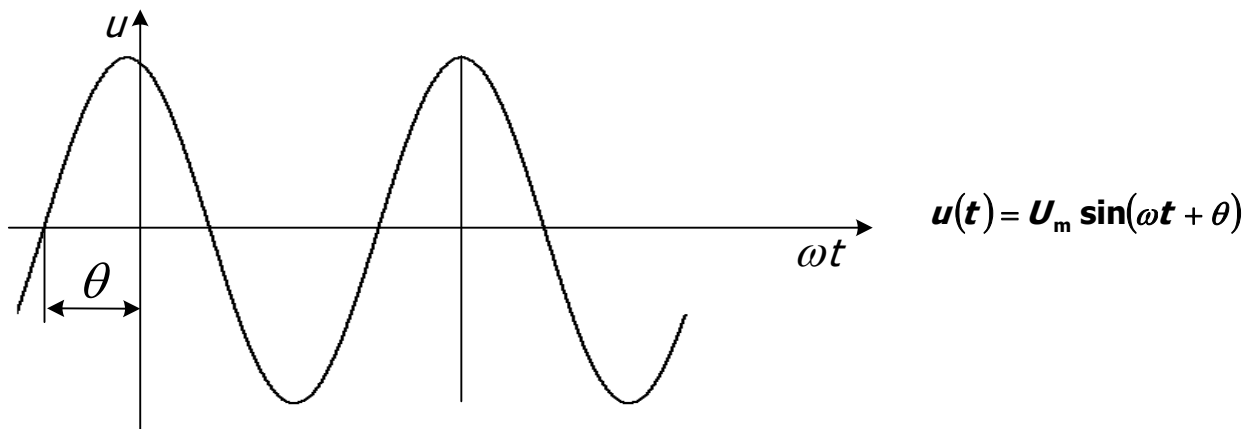
- Šta je efektivna vrednost električne struje?
 - Matematički izraz za srednju kvadratnu vrednost:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

– Efektivna vrednost električne struje sinusnog oblika je:

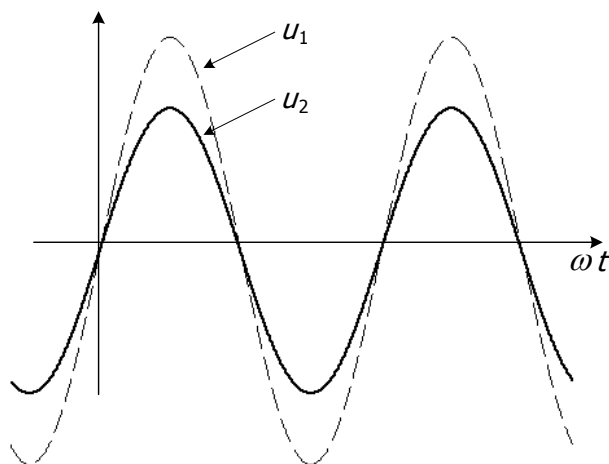
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

- Sve ove definicije važe i za napone.



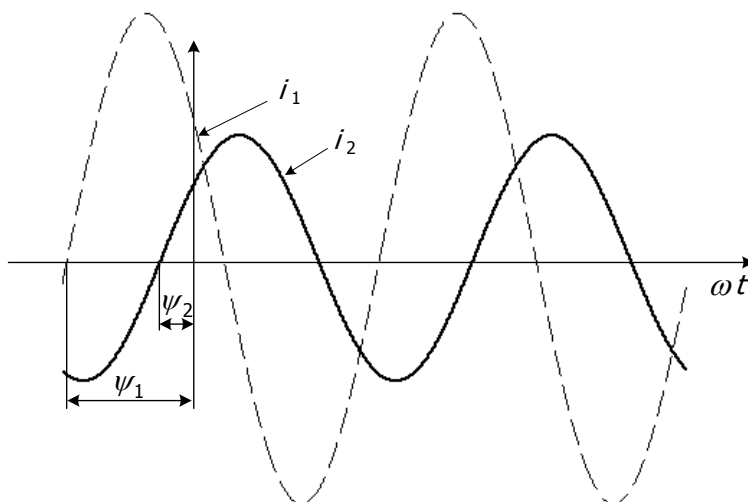
- Električne struje i naponi mogu se porediti po amplitudi i po fazi.

Primer 1:



– Napon u_1 ima veću amplitudu od napona u_2 .

Primer 2:



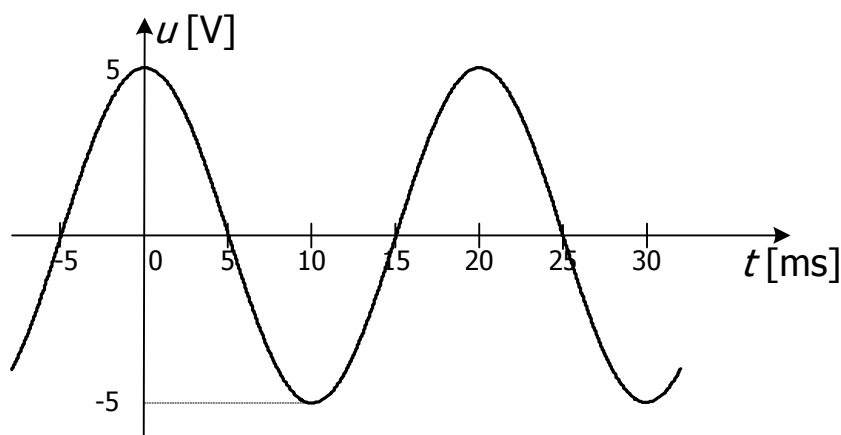
– Fazna razlika između struje i_1 i i_2 je $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$. Važi da je $\psi_1 > \psi_2$, pa je i $\Delta\psi > 0$. Tada kažemo da **struja i_1 fazno prednjači struji i_2 za $\Delta\psi$** , odnosno da **struja i_2 fazno kasni za strujom i_1 za $\Delta\psi$** .

- Za trenutne vrednosti prostoperiodičnih napona i struja važe Omov, I i II Kirhofov zakon.

ZADACI

IV.1.1 Na slici je prikazan grafik zavisnosti vremenske promene napona između dve tačke u jednom kolu.

- Odrediti amplitudu, efektivnu vrednost, početnu fazu, kružnu učestanost i frekvenciju ovog napona.
- Napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost ovog napona.
- Kolika je trenutna vrednost napon u trenutku $t = 10 \text{ ms}$?



Rešenje:

a) Vremenski periodične veličine su veličine čije se vrednosti ponavljaju u jednakim vremenskim intervalima. Taj vremenski interval naziva se period i obeležava se sa T . Prostoperiodične veličine se menjaju po sinusnom zakonu. Mi ćemo proučavati linearne mreže sa vremenski prostoperiodičnim strujama i naponima. Vrlo je bitno zapamtiti da su **u pojedinoj ovakvoj mreži svi naponi i struje iste frekvencije** (pod pretpostavkom da su svi generatori iste frekvencije, što će biti slučaj u svim našim primerima). Opšti oblik napona koji se menja po prostoperiodičnom zakonu je:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta).$$

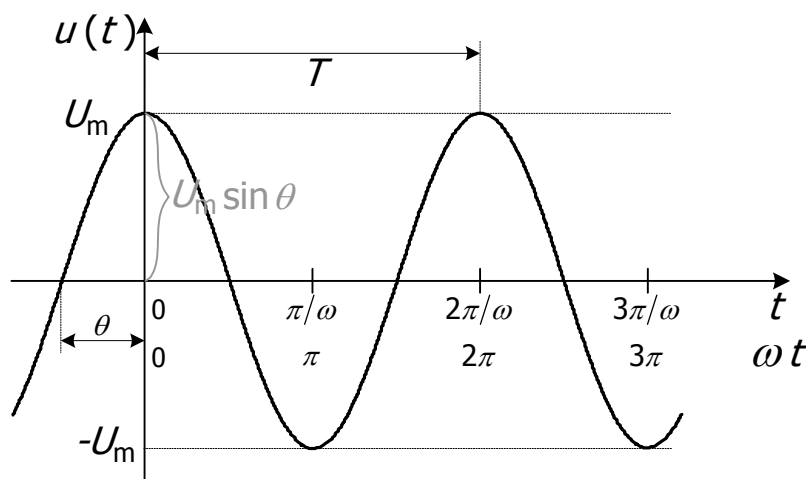
Labels for the equation:

- U_m : amplituda [V]
- ω : kružna učestanost [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ili s^{-1}]
- θ : početna faza [rad]

Na slici IV.1.1.1 obeležene su sve pomenute veličine za analizu datog prostoperiodičnog napona.

Amplituda prostoperiodične veličine je maksimalna apsolutna vrednost koju može imati ta prostoperiodična veličina. Pošto se prostoperiodične veličine menjaju po sinusnom zakonu, čija se vrednost menja između 1 i -1, amplituda je vrednost sa kojom se množi sinusna funkcija, a u slučaju prostoperiodičnog napona to je veličina U_m . Dakle, u opštem slučaju amplitudu obeležavamo velikim slovom koje označava prostoperiodičnu veličinu sa malim slovom m u indeksu. Sa slike IV.1.1.1 vidi se da je amplituda analiziranog napona:

$$U_m = 5 \text{ V}.$$



Slika IV.1.1.1

Efektivna vrednost prostoperiodične veličine je $\sqrt{2}$ puta manja od njene amplitude. Efektivnu vrednost obeležavamo velikim slovom koje označava prostoperiodičnu veličinu, bez indeksa. Dakle, u slučaju prostoperiodičnog napona efektivna vrednost je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Efektivna vrednost analiziranog napona je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,5\sqrt{2} \text{ V} = 3,54 \text{ V}.$$

Na početku smo uveli period prostoperiodične veličine. Kao što se može uočiti na slici IV.1.1.1 vrednosti napona se ponavljaju na svkih 20 ms pa je perioda:

$$T = 20 \text{ ms}.$$

Frekvencija ili **učestanost** predstavlja broj ponavljanja perioda u jednoj sekundi pa je veza između frekvencije i periode:

$$f = \frac{1}{T} [\text{Hz} = \text{s}^{-1}].$$

Vidi se da je jedinica za frekvenciju s^{-1} , ali je ipak uvedena nova jedinica: herc [Hz]. Frekvencija analiziranog napona je:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 50 \text{ Hz}.$$

Sinusna funkcija ne menja vrednost ako se uglu, čiji se sinus određuje, doda konstanta $2\pi n$, gde je n ceo broj. Dakle, za $n = 1$ važi:

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega t + \theta + 2\pi).$$

S obzirom da za periodičnu veličinu mora da važi:

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega(t + T) + \theta) = \sin(\omega t + \omega T + \theta),$$

poređenjem prethodna dva izraza vidimo da je period prostoperiodične veličine određen relacijom:

$$\omega T = 2\pi.$$

Na osnovu prethodnog izraza definiše se **kružna učestanost**:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f .$$

Kružna učestanost analiziranog napona je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

Trenutna faza prostoperiodične veličine je:

$$\omega t + \theta ,$$

a jedinica je radijan.

Početna faza prostoperiodične veličine pokazuje koliko je vremenski pomerena ta veličina u odnosu na vremenski početak i jednaka je trenutnoj fazi za početni trenutak $t = 0$ s. Početna faza se izražava u radijanima i može imati vrednosti od $-\pi$ do π . Početnu fazu napona obeležavamo sa θ . Početnu fazu struje obeležavamo sa ψ . U početnom trenutku $t = 0$ s napon ima vrednost:

$$u(t = 0 \text{ s}) = U_m \sin \theta .$$

U našem zadatku na apscisi (x -osi) se nalazi vreme - t . Pokazali smo da vremenskoj promeni od jedne periode odgovara promena faze od 2π , pa se češće na x -osu nanosi proizvod ωT u radijanima. Na ovaj način je odmah dostupna informacija o početnoj fazi, mada se na grafiku gubi informacija o frekvenciji signala. Na slici IV.1.1.1 prikazana su oba načina obeležavanja x -ose.

Sa slike iz zadatka vidimo da analizirani napon prednjači u odnosu na vremenski početak za 5 ms. Kažemo da "prednjači" jer se najbliži početak sinusoide početnom trenutku $t = 0$ s nalazi pre početnog trenutka (nalazi se sa leve strane). Da bismo dobili početnu fazu, kao što se vidi sa slike IV.1.1.1, ovu vrednost treba pomnožiti sa kružnom učestanošću. Dakle, početna faza analiziranog napona je:

$$\theta = \omega \cdot \Delta t = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0,5\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1,57 \text{ rad} .$$

(U sledećem zadatku srešćemo sa sa strujom koja ima negativnu početnu fazu.)

b) S obzirom da smo odredili sve potrebne veličine možemo napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost ovog napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 5 \sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V} .$$

c) Da bismo dobili trenutnu vrednost napona u trenutku $t = 10$ ms, zamenimo ovu vrednost u prethodno dobijenom izrazu:

$$u(t = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s}) = 5 \sin\left(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ s} + 1,57 \text{ rad}\right) \text{ V} = 5 \sin(4,71 \text{ rad}) \text{ V} = -5 \text{ V}$$

što se može proveriti na grafiku zadatom u zadatku.

IV.1.2 Trenutna vrednost struje u jednoj grani kola menja se po zakonu:

$$i(t) = 0,1 \sin\left(10^4 t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}.$$

a) Nacrati grafik zavisnosti vremenske promene ove struje.

b) Na istom grafiku nacrtati promene struje $i_1(t)$, koja prednjači struji $i(t)$ za $\frac{\pi}{2}$.

c) Na istom grafiku nacrtati promene struje $i_2(t)$, koja kasni za strujom $i(t)$ za $\frac{\pi}{3}$.

Rešenje:

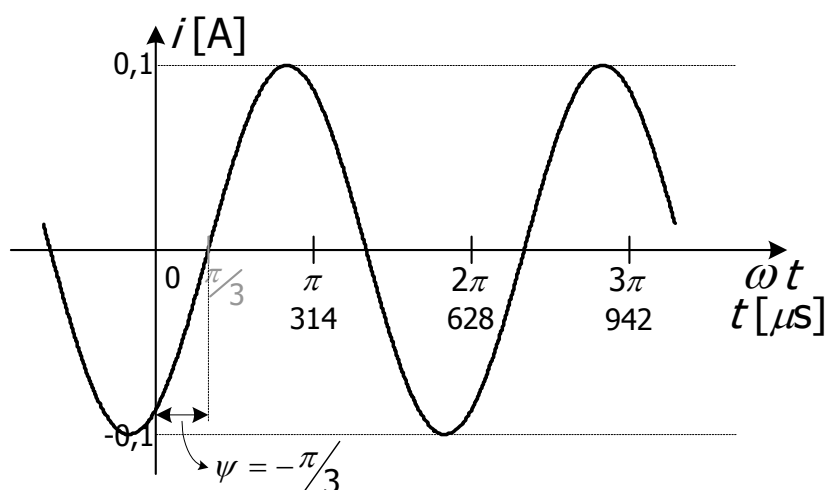
a) Napišimo opšti izraz po kome se menja trenutna vrednost prostoperiodične struje:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 0,1 \sin\left(10^4 t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}.$$

Odavde određujemo parametre:

- amplituda $I_m = 0,1 \text{ A}$,
- kružna učestanost $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$,
- frekvencija $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^4 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 1592 \text{ Hz}$,
- period $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^4 \text{ s}^{-1}} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 628 \text{ } \mu\text{s}$,
- početna faza $\psi = -\frac{\pi}{3}$.

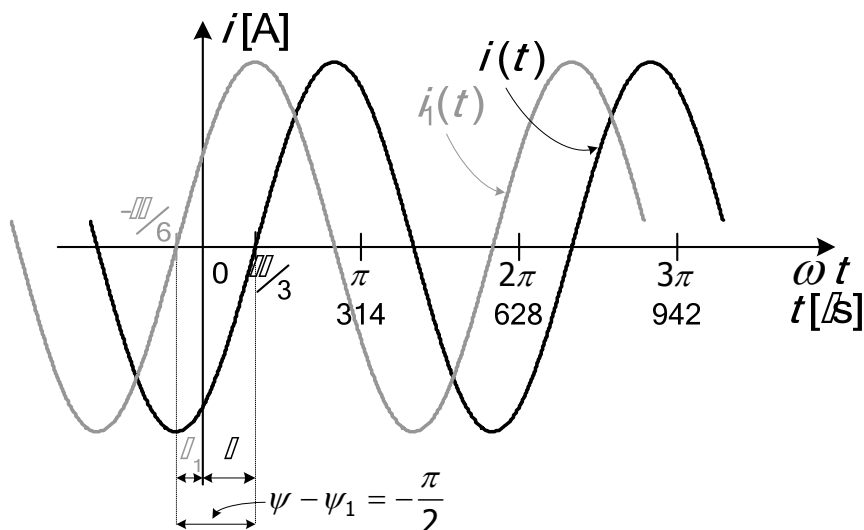
Uočimo da je početna faza struje negativna, što znači da struja kasni u odnosu na vremenski početak, odnosno da se najbliži početak sinusoide početnom trenutku $t = 0 \text{ s}$ nalazi posle početnog trenutka (nalazi se sa desne strane). Imajući ovo u vidu i s obzirom da smo odredili parametre, možemo nacrtati grafik zavisnosti trenutne vrednosti analizirane struje:



Slika IV.1.2.1

b) Struja koja prednjači za $\frac{\pi}{2}$ u odnosu na posmatranu struju ima najbliži početak sinusoide početku sinusoide $i(t)$ koji prednjači u vremenu, odnosno po ωt osi pomeren nalevo za $\frac{\pi}{2}$, kao što je prikazano na slici IV.1.2.2. Dakle, početna faza struje $i_1(t)$ je:

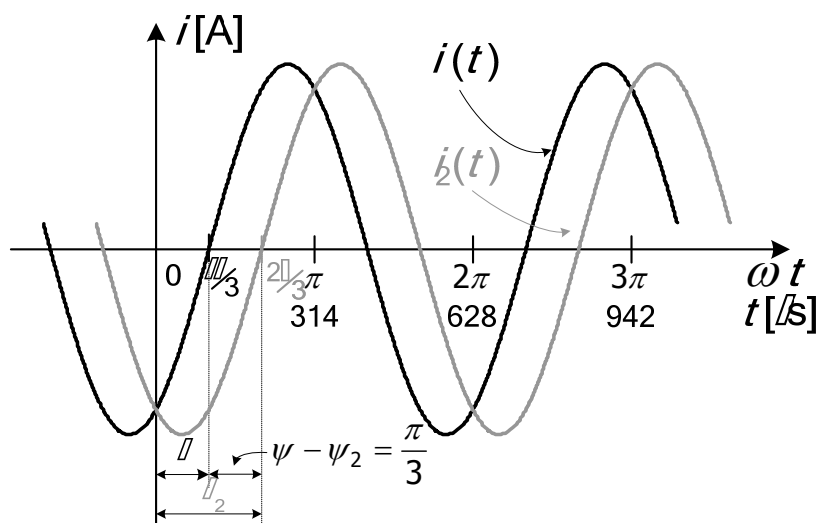
$$\psi_1 = \psi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$



Slika IV.1.2.2

c) Struja koja kasni za $\frac{\pi}{3}$ u odnosu na posmatranu struju ima najbliži početak sinusoide početku sinusoide $i(t)$ zakašnjen u vremenu, odnosno po ωt osi pomeren nadesno za $\frac{\pi}{3}$, kao što je prikazano na slici IV.1.2.3. Dakle, početna faza struje $i_2(t)$ je:

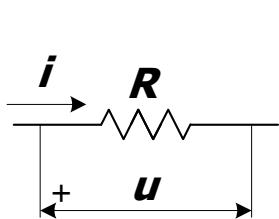
$$\psi_2 = \psi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$



Slika IV.1.2.3

IV.1.1 OTPORNIK U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE TEORIJSKA OSNOVA

- Napon na krajevima otpornika i električna struja koja protiče kroz njega povezani su Ohmovim zakonom:



$$u = R \cdot i$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$u = R \cdot i = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

Iz gornje jednačine vidimo da je amplituda napona:

$$U_m = R \cdot I_m,$$

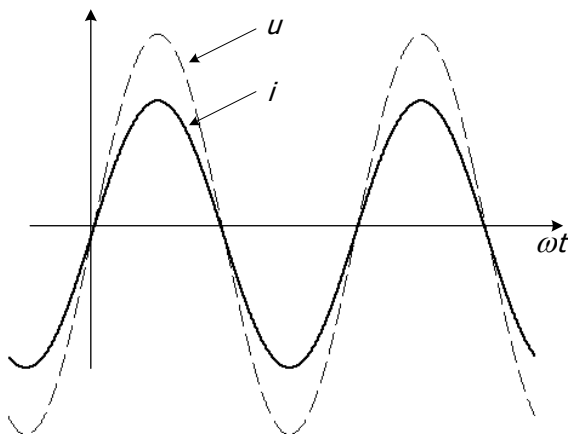
a početna faza napona jednaka je početnoj fazi struje:

$$\theta = \psi.$$

- Kako se fazno porede naponi i struje?
 - Uvodi se fazna razlika napona i struje φ . To je razlika početnih faza napona i struje:

$$\varphi = \theta - \psi.$$

- Kod otpornika je $\varphi = 0$, što znači da su **kod otpornika napon i struja u fazi**.



- Šta je R ?
 - Aktivna otpornost otpornika (rezistansa)**. Može biti isključivo pozitivna veličina.

ZADACI

IV.1.1.1 U otporniku otpornosti $R = 1 \text{ k}\Omega$ uspostavljena je prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 10 \text{ mA}$, učestanosti $f = 200 \text{ Hz}$ i početne faze $\psi = \frac{\pi}{8}$.

- Napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost struje kroz otpornik.
- Odrediti napon između krajeva otpornika.
- Nacrtati na istom grafiku promene trenutnih vrednosti napona i struje kroz otpornik.

Rešenje:

- a) Opšti izraz po kome se menja trenutna vrednost struje je:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Na osnovu poznate efektivne vrednosti određujemo amplitudu struje:

$$I_m = I\sqrt{2} = 10 \text{ mA} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ mA} = 14,1 \text{ mA}.$$

Kružna učestanost struje je:

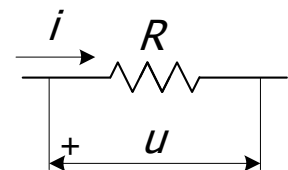
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 \text{ Hz} = 400\pi \text{ s}^{-1} = 1256 \text{ s}^{-1}.$$

Zamenjujući određene parametre u izrazu za struju dobijamo:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 14,1 \sin\left(1256 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ mA}$$

- b) Trenutne vrednosti napona i struje na otporniku povezane su Omovim zakonom, prema usaglašenim referentnim smerovima, kao to je prikazano na slici IV.1.1.1.1:

$$u(t) = R \cdot i(t).$$



Slika IV.1.1.1.1

Na osnovu toga trenutna vrednost napona na otporniku menja se po zakonu:

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \theta).$$

Poredeći levu i desnu stranu ove jednakosti zaključujemo da su **kod otpornika napon i struja u fazi**, odnosno da je:

$$\theta = \psi,$$

i fazna razlika napona i struje jednaka je nuli:

$$\varphi = \theta - \psi = 0.$$

kao i da je amplituda napona na otporniku jednaka proizvodu otpornosti otpornika i amplitude struje:

$$U_m = R \cdot I_m.$$

Zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

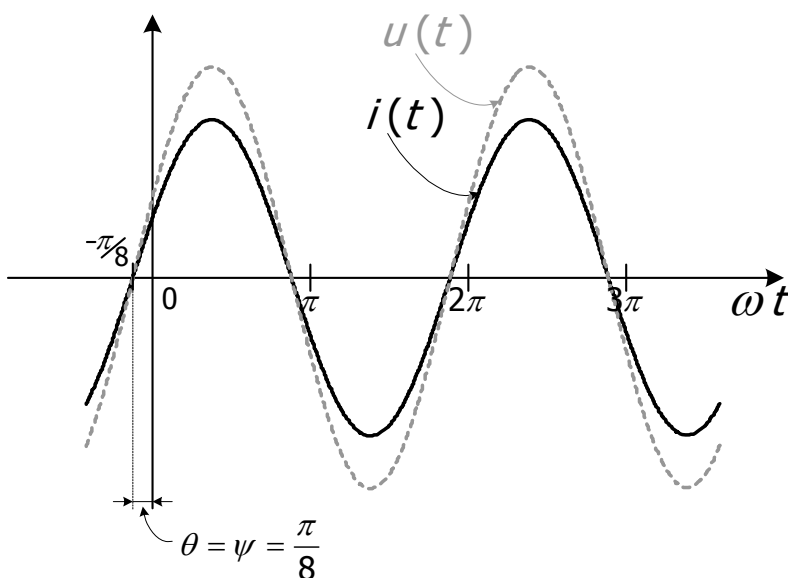
$$U_m = R \cdot I_m = 1 \cdot 10^3 \Omega \cdot 14,1 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 14,1 \text{ V}.$$

Naravno, napon i struja su iste učestanosti.

Izraz po kom se menja trenutna vrednost napona na posmatranom otporniku je:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 14,1 \sin\left(1256 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ V}.$$

c) Na slici IV.1.1.1.2 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje na otporniku. Ove dve veličine su, naravno, fizički potpuno različite, ali su nacrtane na istom grafiku da bi se uočila njihova fazna razlika (koja je jednaka nuli u slučaju otpornika). Dakle, "prividan" odnos njihovih amplituda na grafiku je proizvoljan, proizvoljno je nacrtana amplituda napona veća od napona struje. Amplituda pojedine veličine se crta prema vrednostima na ordinati (y -osi), posebno određenim za svaku od veličina (a koje zbog jednostavnosti grafika nisu prikazane).



Slika IV.1.1.1.2

IV.1.1.2 Napon na otporniku otpornosti $R = 5 \, \Omega$ menja se po zakonu $u(t) = 5 \sin(300t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}$.

- Odrediti zakon po kom se menja struja kroz otpornik.
- Koliko iznose efektivne vrednosti struje i napona na otporniku.
- Nacrtati na istom grafiku promene trenutnih vrednosti napona i struje kroz otpornik.

Rešenje:

a) Prema Omovom zakonu je:

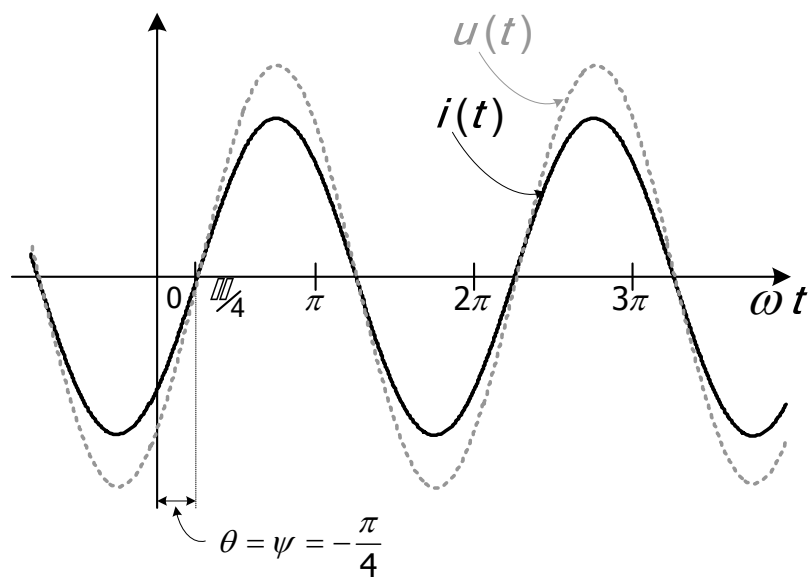
$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \theta) = \frac{5 \text{ V}}{5 \, \Omega} \sin\left(300t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \cdot \sin\left(300t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A} = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

b) Efektivna vrednost neke prostoperiodične veličine je $\sqrt{2}$ puta manja od njene amplitude pa su efektivne vrednosti napona i struje:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,5\sqrt{2} \text{ V} = 3,5 \text{ V},$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{2} \text{ A} = 0,7 \text{ A}.$$

c) Na slici IV.1.1.2.1 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje na otporniku.

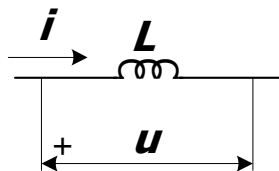


Slika IV.1.1.2.1

IV.1.2 KALEM U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE

TEORIJSKA OSNOVA

- Napon na krajevima kalema i električna struja koja protiče kroz njega povezani su određenom zakonitošću:



$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cos(\omega t + \psi) = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

Iz gornje jednačine vidimo da je amplituda napona:

$$U_m = \omega L \cdot I_m,$$

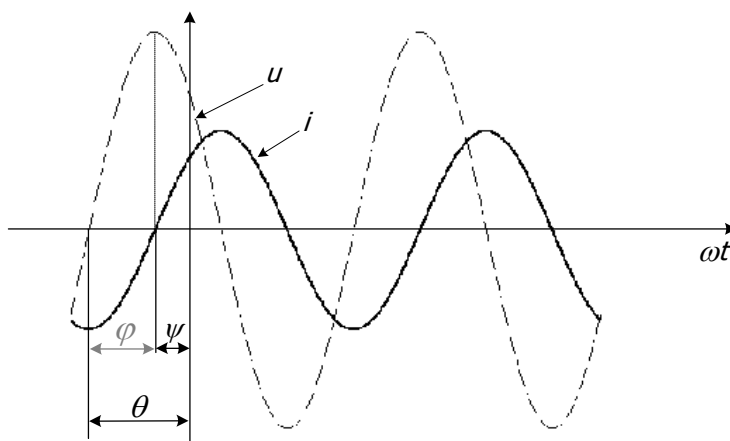
a početna faza napona:

$$\theta = \psi + \frac{\pi}{2}.$$

- Kakva je razlika faza napona na kalemu i struje kroz njega?

$$\varphi = \theta - \psi = \psi + \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2}$$

Kaže se da **napon na kalemu fazno prednjači struji za $\frac{\pi}{2}$** .



- Šta je ωL ?
 - Količnik amplitude napona U_m i amplitude struje I_m je proizvod ωL . To je po dimenzijama otpornost ($U_m/I_m = \text{otpornost}$). Ali to nije termogena otpornost (ne pretvara se električna energija u toplotnu kao kod otpornika). Zato se ova otpornost zove **reaktivna otpornost (reaktansa) kalema**:

$$X_L = \omega L.$$

- Koja je jedinica za reaktivnu otpornost kalema?
 - Om [Ω]
- Kako koristimo kalem u kolu s obzirom na njegovu reaktivnu otpornost?
 - Izborom induktivnosti kalema, a u zavisnosti od učestanosti na kojoj kolo radi, možemo određivati električne struje u granama kola.
 - Kalem je propusnik niskih učestanosti.

ZADACI

IV.1.2.1 U kalemu induktivnosti $L = 10 \text{ mH}$, zanemarljive električne otpornosti, uspostavljena je prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 5\sqrt{2} \text{ mA}$, kružne učestanosti $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ i početne faze $\psi = \frac{\pi}{3}$.

- Napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost struje kroz kalem.
- Odrediti napon između krajeva kalema.
- Nacrtati na istom grafiku promene intenziteta napona i struje kroz kalem.

Rešenje:

- a) Opšti izraz po kome se menja trenutna vrednost struje je:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Na osnovu poznate efektivne vrednosti određujemo amplitudu struje:

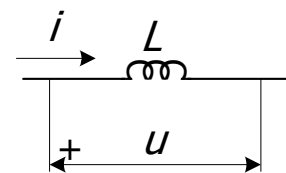
$$I_m = I\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ mA} \cdot \sqrt{2} = 10 \text{ mA}.$$

Zamenjujući određene parametre u izrazu za struju dobijamo:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 10 \sin\left(10^4 t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ mA}.$$

- b) U teoriji je pokazano da je, prema usaglašenim referentnim smerovima, kao što je prikazano na slici IV.1.2.1.1, napon na kalemu:

$$u(t) = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$



Slika IV.1.2.1.1

Poredeći levu i desnu stranu jednakosti vidimo da je veza između amplitude napona i struje:

$$U_m = \omega L \cdot I_m,$$

gde ωL predstavlja reaktivnu otpornost kalema. Za analizirani kalem reaktivna otpornost iznosi:

$$X_L = \omega L = 10^4 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 100 \Omega,$$

pa je amplituda napona:

$$U_m = \omega L \cdot I_m = 100 \Omega \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1 \text{ V}.$$

Razlika faza između napona i struje na kalemu je:

$$\varphi = \theta - \psi = \frac{\pi}{2},$$

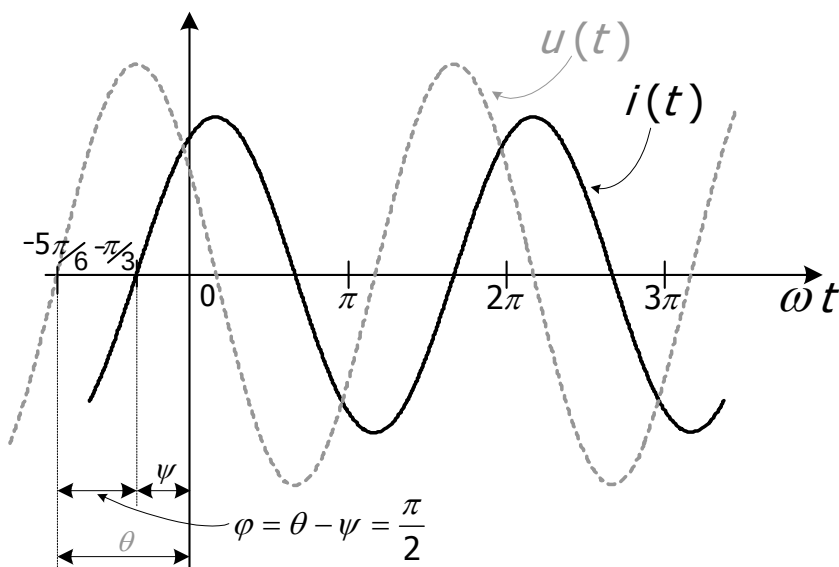
pa je početna faza napona:

$$\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

Naravno, napon i struja su iste učestanosti. Sada možemo napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost napona na kalemu:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 1 \sin\left(10^4 t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ V}.$$

c) Na slici IV.1.2.1.2 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje na kalemu.



Slika IV.1.2.1.2

IV.1.2.2 Napon na kalemu se menja po zakonu $u(t) = 5 \sin(500t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$. Pri tome je reaktansa kalema $X_L = 50 \Omega$.

- Odrediti induktivnost kalema.
- Odrediti zakon po kom se menja struja kroz kalem.
- Odrediti učestanost promene napona, odnosno struje.

Rešenje:

a) Iz izraza za trenutnu vrednost napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 5 \sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V},$$

vidimo da je kružna učestanost:

$$\omega = 500 \text{ s}^{-1}.$$

Induktivnost kalema je:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{50 \Omega}{500 \text{ s}^{-1}} = 0,1 \text{ H}.$$

b) Pošto je amplituda napona $U_m = 5 \text{ V}$, amplituda struje kroz kalem je:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{5 \text{ V}}{50 \Omega} = 0,1 \text{ A}.$$

Početna faza napona je $\theta = -\frac{\pi}{2}$, pa je početna faza struje:

$$\psi = \theta - \varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

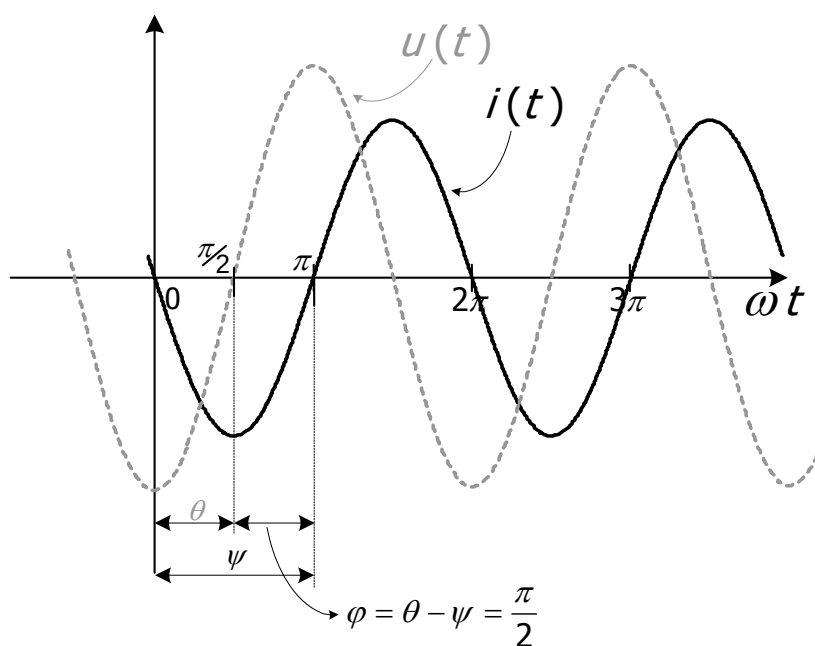
Trenutna vrednost struje kroz kalem menja se po zakonu:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 0,1 \sin(500t - \pi) \text{ A}.$$

c) Učestanost promene napona i struje je ista:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{500 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 79,6 \text{ Hz}.$$

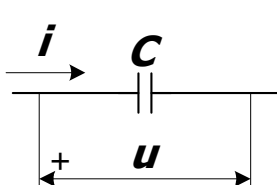
Na slici IV.1.2.2.1 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje na kalem.



Slika IV.1.2.2.1

IV.1.3 KONDENZATOR U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE TEORIJSKA OSNOVA

- Napon na krajevima kondenzatora i električna struja koja protiče kroz granu sa kondenzatorom povezani su određenom zakonitošću:



$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

$$du = \frac{1}{C} i dt$$

$$u = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$u = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})$$

Iz gornje jednačine vidimo da je amplituda napona:

$$U_m = \frac{I_m}{\omega C},$$

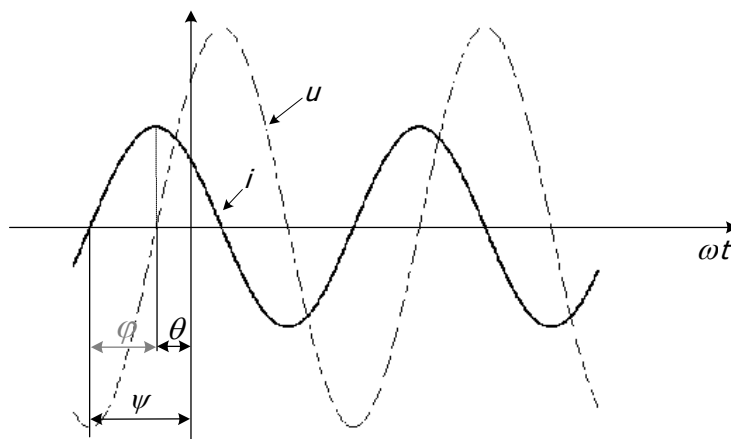
a početna faza napona:

$$\theta = \psi - \frac{\pi}{2}.$$

- Kakva je razlika faza napona na kondenzatoru i struje koja protiče kroz granu sa kondenzatorom?

$$\varphi = \theta - \psi = \psi - \frac{\pi}{2} - \psi = -\frac{\pi}{2}$$

Kaže se da **napon na kondenzatoru kasni za strujom za $\frac{\pi}{2}$** .



- Šta je $\frac{1}{\omega C}$?
 - Količnik amplitude napona U_m i amplitude struje I_m je $\frac{1}{\omega C}$. To je dimenziono otpornost ($U_m/I_m = \text{otpornost}$). To nije termogena otpornost (kao kod otpornika), pa se zato zove **reaktivna otpornost (reaktansa) kondenzatora**:

$$X_c = \frac{1}{\omega C}.$$

- Koja je jedinica za reaktivnu otpornost kondenzatora?
 - Om [Ω].
- Kako koristimo kondenzator u kolu prostoperiodične električne struje (s obzirom na njegovu reaktivnu otpornost)?
 - Izborom kapacitivnosti kondenzatora, prema zadatoj učestanosti kola, mogu se regulisati naponi i struje u kolu.
 - Kondenzator je propusnik visokih učestanosti.
- **Važno je uočiti da se na reaktivnoj otpornosti kalema i kondenzatora ne stvaraju gubici.** Gubici nastaju na: termogenoj otpornosti žice, na parazitnoj kapacitivnosti između zavoja kalema. Gubici su i struje curenja u dielektriku kondenzatora...

Uoč da je: $X_L = \omega L > 0$ (jer je $\omega > 0$ i $L > 0$),

$$X_c = \frac{1}{\omega C} > 0 \text{ (jer je } \omega > 0 \text{ i } C > 0 \text{)}.$$

ZADACI

IV.1.3.1 Između elektroda kondenzatora kapacitivnosti $C = 100 \text{ nF}$ napon je prostoperiodičan efektivne vrednosti $U = 1,2 \text{ V}$, kružne učestanosti $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$ i početne faze $\theta = \frac{\pi}{4}$.

- Napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost napona na kondenzatoru.
- Odrediti zakon po kom se menja struja u priključnim provodnicima kondenzatora.
- Nacrtati na istom grafiku promene intenziteta napona na kondenzatoru i struje u priključnim provodnicima kondenzatora.

Rešenje:

- a) Opšti izraz po kome se menja trenutna vrednost napona je:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta).$$

Na osnovu poznate efektivne vrednosti određujemo amplitudu napona:

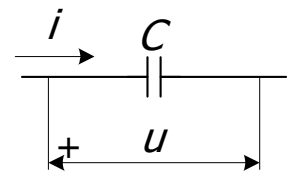
$$U_m = U\sqrt{2} = 1,2 \text{ V} \cdot \sqrt{2} = 1,7 \text{ V}.$$

Zamenjujući određene parametre u izrazu za napon dobijamo:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 1,7 \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$

- b) U teoriji je pokazano da je, prema usaglašenim referentnim smerovima, kao što je prikazano na slici IV.1.3.1.1, struja u priključnim provodnicima kondenzatora:

$$i(t) = \omega C \cdot U_m \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$



Slika IV.1.3.1.1

Poredeći levu i desnu stranu jednakosti vidimo da je veza između amplitude napona i struje:

$$I_m = \omega C \cdot U_m,$$

gde $\frac{1}{\omega C}$ predstavlja reaktivnu otpornost kalema. Za analizirani kondenzator reaktivna otpornost iznosi:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^5 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ H}} = 100 \Omega,$$

pa je amplituda struje:

$$I_m = \omega C \cdot U_m = \frac{1}{100 \Omega} \cdot 1,7 \text{ V} = 17 \text{ mA}.$$

Napomena: Ovde smo uveli reaktansu samog kondenzatora kao pozitivnu veličinu. To ne treba mešati sa reaktansom prijemnika, koji ima pretežno kapacitivan karakter, i koja je uvek negativna. O karakteru prijemnika i znaku njegove reaktanse biće reči kasnije.

Razlika faza između napona i struje na kondenzatoru je:

$$\varphi = \theta - \psi = -\frac{\pi}{2},$$

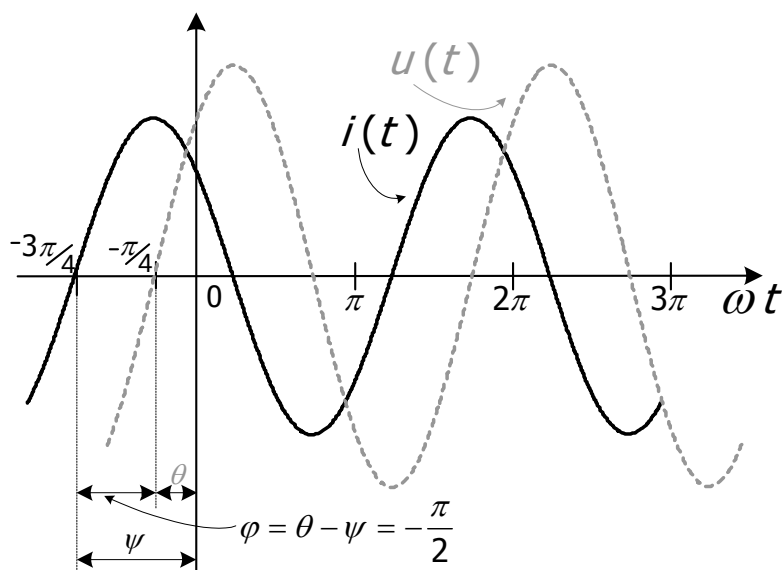
pa je početna faza napona:

$$\psi = \theta - \varphi = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Trenutna vrednost struje u priključnim provodnicima kondenzatora je:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 17 \sin\left(10^5 t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ mA}.$$

c) Na slici IV.1.3.1.2 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona na kondenzatoru i struje u priključnim provodnicima kondenzatora.



Slika IV.1.3.1.2

IV.1.3.2 Amplituda struje u priključnim provodnicima kondenzatora kapacitivnosti $C = 0,5 \mu\text{F}$ je $I_m = 0,01 \text{ A}$, frekvencija je $f = 50 \text{ Hz}$ i početna faza je $\psi = -\frac{\pi}{3}$. Odrediti zakon po kom se menja napon na kondenzatoru. Nacrtati na istom grafiku promene intenziteta napona na kondenzatoru i struje u priključnim provodnicima kondenzatora.

Rešenje:

Kružna učestanost struje kroz priključne provodnike kondenzatora, kao i napona na kondenzatoru je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ rad} = 314 \text{ rad}.$$

Reaktansa kondenzatora je:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \text{ s}^{-1} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 6,4 \text{ k}\Omega.$$

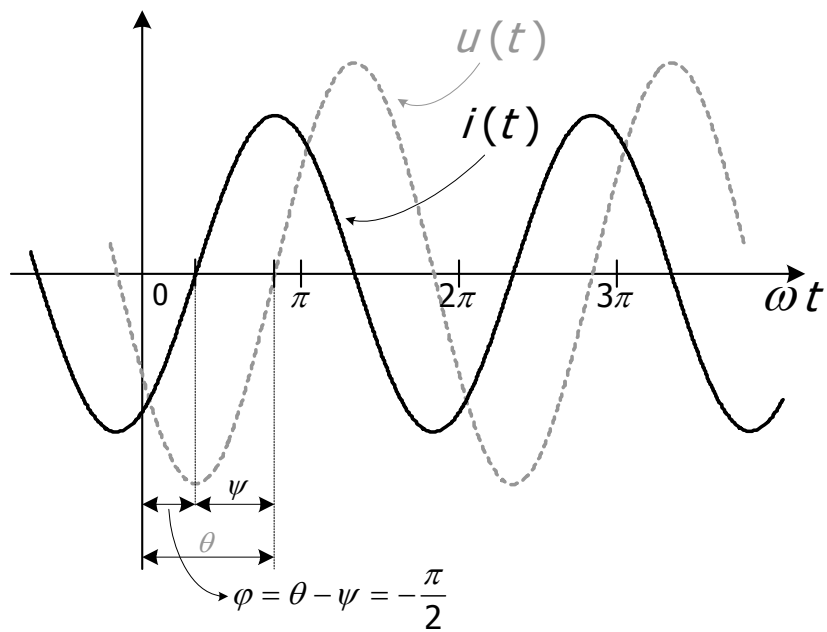
Amplituda napona na kondenzatoru je:

$$U_m = I_m \cdot \frac{1}{\omega C} = 0,01 \text{ A} \cdot 6,4 \cdot 10^3 \Omega = 64 \text{ V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta = \psi + \varphi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Na slici IV.1.3.2.1 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona na kondenzatoru i struje u priključnim provodnicima kondenzatora.

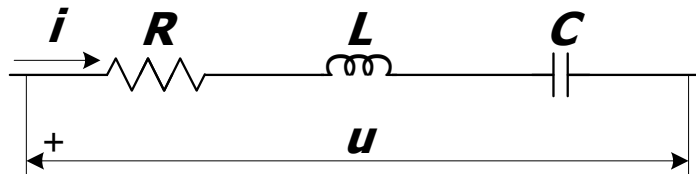


Slika IV.1.3.2.1

IV.1.4 REDNA RLC VEZA

TEORIJSKA OSNOVA

- Ako imamo prijemnik koji se sastoji od redne veze otpornika, kalema i kondenzatora, onda taj prijemnik ima svoju aktivnu, reaktivnu i prividnu otpornost i razliku faza napona na krajevima prijemnika i struje koja protiče kroz njega.



- Šta je impedansa prijemnika Z ?
 - To je prividna otpornost prijemnika. Definiše se količnikom amplitude napona i struje na prijemniku:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

- Impedansa je uvek pozitivna** (amplitude U_m i I_m su uvek pozitivne).
- R je aktivna otpornost prijemnika i **uvek je pozitivna**.
- X je reaktivna otpornost prijemnika:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

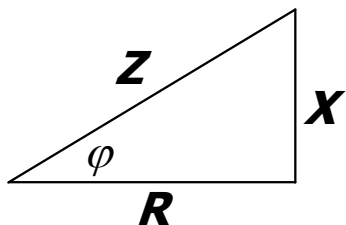
$$X = \begin{cases} > 0, & \omega L > \frac{1}{\omega C}, \text{ kolo je pretežno induktivno} \\ = 0, & \omega L = \frac{1}{\omega C}, \text{ rezonantno kolo} \\ < 0, & \omega L < \frac{1}{\omega C}, \text{ kolo je pretežno kapacitivno} \end{cases}$$

- Reaktivna otpornost može biti pozitivna (kada je induktivni deo veći od kapacitivnog). Tada kažemo da se prijemnik ponaša kao induktivnost.
 - Reaktivna otpornost može biti negativna (kada je induktivni deo manji od kapacitivnog). Tada kažemo da se prijemnik ponaša kao kapacitivnost.
- Šta je **rezonantno kolo**?
 - To je redno RLC kolo u kome kalem i kondenzator imaju takve vrednosti induktivnosti i kapacitivnosti da je reaktivna otpornost kola jednaka 0.
- Koje su glavne karakteristike rezonantnog kola?
 - Da je impedansa minimalna, a električna struja u grani maksimalna.

- Kakva je fazna razlika napona i struje rednog RLC prijemnika?

$$\varphi = \theta - \psi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- Svi ovi obrasci mogu se pamti pomoću "trougla impedansi":



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

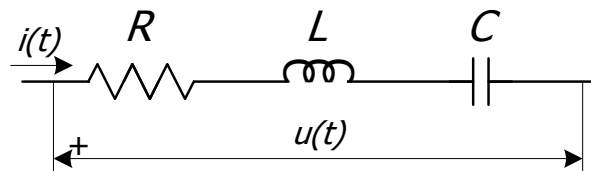
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{X}{R}$$

$$R = Z \cos \varphi$$

$$X = Z \sin \varphi$$

ZADACI

IV.1.4.1 Otpornik otpornosti $R = 50 \, \Omega$, kalem induktivnosti $L = 10 \, \text{mH}$ i kondenzator kapacitivnosti $C = 2 \, \mu\text{F}$ vezani su na red. U ovoj rednoj vezi je uspostavljena prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 4 \, \text{mA}$, kružne učestanosti $\omega = 5000 \, \text{s}^{-1}$ i početne faze $\psi = \pi/6$ prema usvojenom referentnom smeru. Odrediti napon između krajeva ove redne veze. Kakvog je karaktera ova veza elemenata?



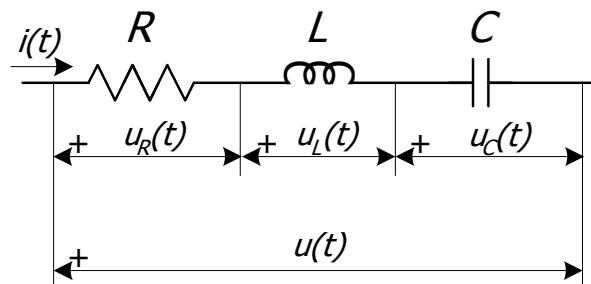
Rešenje:

Napišimo najpre izraz za trenutnu vrednost struje. Data je efektivna vrednost struje pa je amplituda:

$$I_m = I\sqrt{2} = 4 \, \text{mA} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \, \text{mA}.$$

Otuda je izraz za trenutnu vrednost struje:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 4\sqrt{2} \sin\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right) \, \text{mA}.$$



Slika IV.1.4.1.1

Naponi na pojedinim elementima, prema usaglašenim referentnim smerovima (slika IV.1.4.1.1), su:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi),$$

$$u_L(t) = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_C(t) = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Za trenutne vrednosti napona i struja važe Kirhofovi zakoni pa je:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = \\ &= R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) + \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

gde smo primenili činjenicu da je:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \text{ i } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha.$$

Primenom trigonometrijske relacije:

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin\left(\alpha + \arctg \frac{B}{A}\right),$$

na izraz za napon na rednoj RLC vezi, dobijamo:

$$U_m \sin(\omega t + \theta) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m \sin\left(\omega t + \psi + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

Izjednačavanjem amplitude i faze leve i desne strane jednakosti dobijamo odnos amplituda i razliku faza napona i struje redne veze. Generalno, odnos amplituda napona i struje na nekoj vezi elemenata nazivamo **impedansa Z** . Uočavamo da je odnos amplituda jednak odnosu efektivnih vrednosti:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U\sqrt{2}}{I\sqrt{2}} = \frac{U}{I}$$

Impedansa redne veze je:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Vidimo da je **impedansa uvek pozitivna veličina** s obzirom da predstavlja odnos amplituda koje su pozitivne veličine. Veličina R naziva se **aktivna otpornost** ili **rezistansa**. Veličina $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ naziva se **reaktivna otpornost** ili **reaktansa** redne veze, a predstavlja razliku reaktansi kalema i kondenzatora. U opštem slučaju reaktansu obeležavamo sa X , pa je u opštem slučaju impedansa neke veze elemenata:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Reaktansa redne veze je dakle:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Razliku faza napona i struje obeležavamo sa φ . Razlika faza napona i struje redne veze je:

$$\varphi = \theta - \psi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

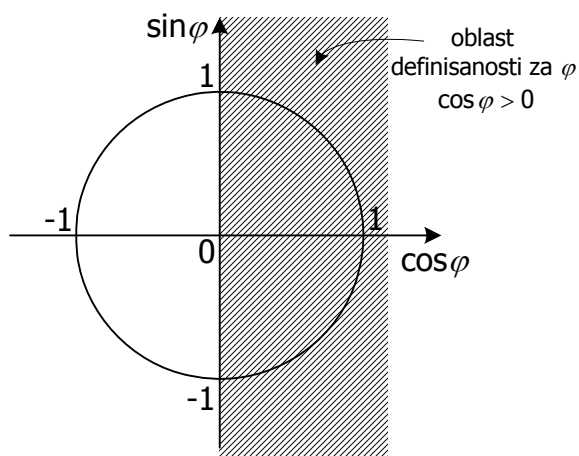
Odavde je:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

Odredimo sinus i kosinus razlike faza napona i struje. Primenimo trigonometrijske veze između sinusa, kosinusa i tangensa ugla:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{R}{Z},$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\frac{X}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{X}{Z}.$$



Slika IV.1.4.1.2

S obzirom da su veličine R i Z uvek pozitivne veličine, i kosinus ugla φ je uvek pozitivan. Pošto veličina X može biti i pozitivna i negativna, sinus ugla φ može biti i pozitivan i negativan. Na osnovu prethodnog se zaključuje da je oblast definisanosti razlike faza između napona i struje:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

što je prikazano na trigonometrijskom krugu na slici IV.1.4.1.2.

Zamenimo brojne vrednosti u izraze. Reaktansa posmatrane redne veze je:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 5000 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ H} - \frac{1}{5000 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 50 \Omega - 100 \Omega = -50 \Omega.$$

Impedansa posmatrane redne veze je:

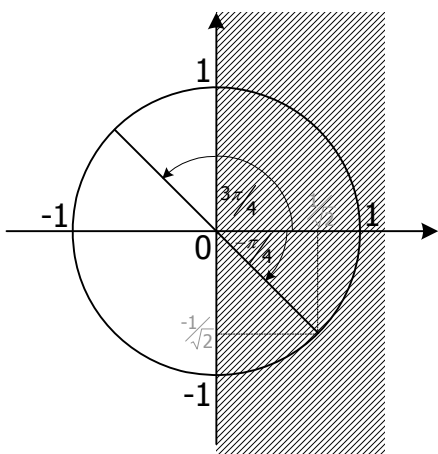
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(50 \Omega)^2 + (-50 \Omega)^2} = \sqrt{2 \cdot (50 \Omega)^2} = 50\sqrt{2} \Omega = 70,7 \Omega.$$

Amplituda napona je:

$$U_m = Z \cdot I_m = 50\sqrt{2} \Omega \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,4 \text{ V}.$$

Razlika faza napona i struje posmatrane redne veze je:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{-50 \Omega}{50 \Omega} = \operatorname{arctg}(-1).$$



Slika IV.1.4.1.3

Teoretski izraz $\operatorname{arctg}(-1)$ ima dva rešenja: $-\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$ (uvek pomerena za π), kao što je prikazano na slici IV.1.4.3.

Međutim, s obzirom na oblast definisanosti ugla $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, jedino moguće rešenje je:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

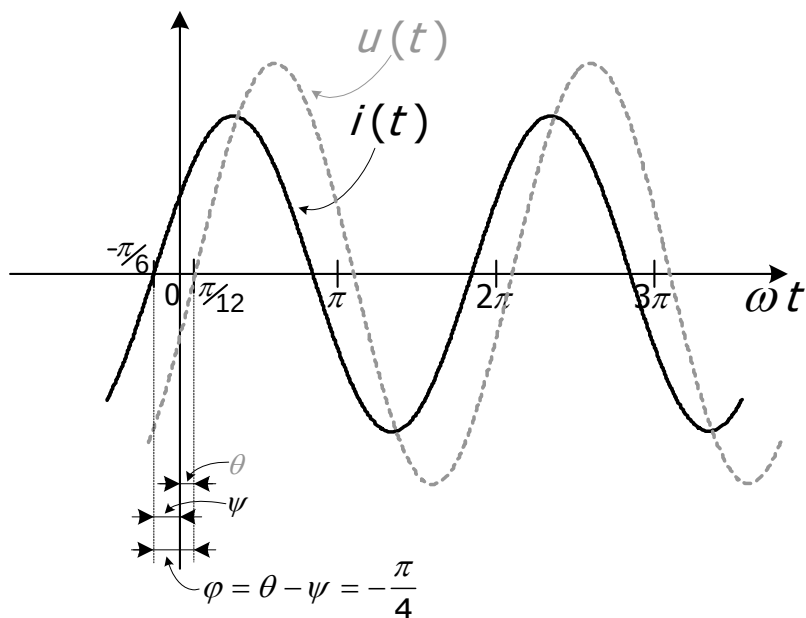
Početna faza napona je:

$$\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}.$$

Sada možemo napisati izraz za trenutnu vrednost napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 0,4 \sin\left(5000t - \frac{\pi}{12}\right) \text{ V}.$$

Na slici IV.1.4.1.4 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje posmatrane redne veze.



Slika IV.1.4.1.4

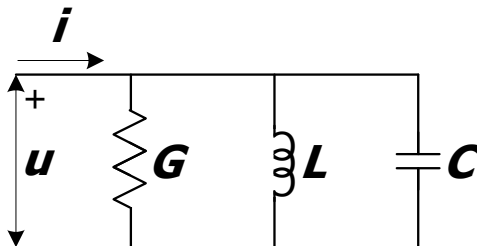
Sa slike vidmo da struja prednjači naponu za $\frac{\pi}{4}$ pa je razlika faza između napona i struje negativna, kao što smo računskim putem dobili. Setimo se da je razlika faza kod kondenzatora između napona i struje negativna pa posmatrana redna veza ima kapacitivni karakter.

Generalno, kada je reaktansa veze elemenata pozitivna, $X > 0$, tada je i razlika faza između napona i struje pozitivna, $\varphi > 0$, i tada veza ima pretežno induktivni karakter. Obrnuto, kada je reaktansa veze elemenata negativna, $X < 0$, tada je i razlika faza između napona i struje negativna, $\varphi < 0$, i tada veza ima pretežno kapacitivni karakter.

IV.1.5 PARALELNA RLC VEZA

TEORIJSKA OSNOVA

- Ako imamo prijemnik koji se sastoji od paralelne veze otpornika, kalema i kondenzatora, onda taj prijemnik ima svoju aktivnu, reaktivnu i prividnu provodnost i razliku faza električne struje i napona na njemu.



- Šta je admitansa prijemnika Y ?
 - To je prividna provodnost prijemnika. Definiše se količnikom amplitude struje i napona na prijemniku:

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B^2}.$$

- Admitansa je uvek pozitivna** (amplitude I_m i U_m su uvek pozitivne).
- G je **aktivna provodnost prijemnika (konduktansa)** i **uvek je pozitivna**.
- B je **reaktivna provodnost prijemnika (susceptansa)**:

$$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}.$$

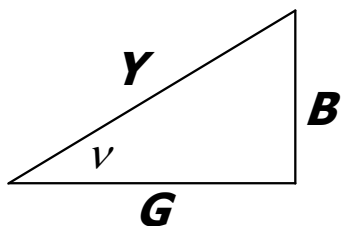
$$B = \begin{cases} > 0, & \omega C > \frac{1}{\omega L}, \text{ kolo je pretežno kapacitivno} \\ = 0, & \omega C = \frac{1}{\omega L}, \text{ antirezonantno kolo} \\ < 0, & \omega C < \frac{1}{\omega L}, \text{ kolo je pretežno induktivno} \end{cases}$$

- Reaktivna provodnost može biti pozitivna (kada je kapacitivni deo veći od induktivnog). Tada kažemo da se prijemnik ponaša kao kapacitivnost.
 - Reaktivna provodnost može biti negativna (kada je kapacitivni deo manji od induktivnog). Tada kažemo da se prijemnik ponaša kao induktivnost.
- Šta je **antirezonantno kolo**?
 - To je paralelno RLC kolo u kome kalem i kondenzator imaju takve vrednosti induktivnosti i kapacitivnosti da je reaktivna provodnost kola jednaka 0.
- Koje su glavne karakteristike antirezonantnog kola?

- Da je admitansa minimalna (impedansa maksimalna), a električna struja u napojnoj grani minimalna.
- Kakva je fazna razlika struje i napona paralelnog RLC prijemnika?
 - Za paralelnu vezu se definiše fazna razlika struje i napona:

$$\nu = \psi - \theta = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}.$$

- Svi ovi obrasci mogu se pamtit pomoću "trougla admitansi":



$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

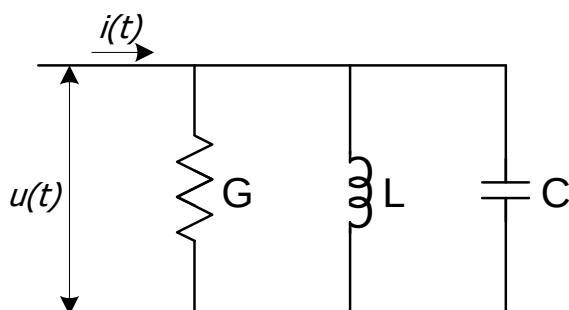
$$\operatorname{tg} \nu = \frac{B}{G} \Rightarrow \nu = \arctg \frac{B}{G}$$

$$G = Y \cos \nu$$

$$B = Y \sin \nu$$

ZADACI

IV.1.5.1 Otpornik provodnosti $G = 1 \text{ mS}$, kalem induktivnosti $L = 100 \text{ mH}$ i kondenzator kapacitivnosti $C = 200 \text{ nF}$ vezani su paralelno, a između njihovih krajeva je uspostavljen prostoperiodičan napon efektivne vrednosti $U = 2\sqrt{2} \text{ V}$, kružne učestanosti $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ i početne faze $\theta = \pi/4$ prema usvojenom referentnom smeru. Odrediti struju napojne grane ove paralelne veze. Kakvog je karaktera ova veza elemenata?



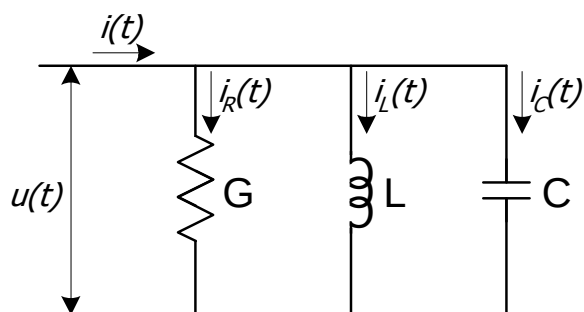
Rešenje:

Napišimo najpre izraz za trenutnu vrednost napona. Data je efektivna vrednost napona pa je amplituda:

$$U_m = U\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ V}.$$

Otuda je izraz za trenutnu vrednost napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 4 \sin\left(10^4 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$



Slika IV.1.5.1.1

Analiza paralelnog RLC kola vrši se na analogan način analizi radnog RLC kola. Struje kroz pojedine elemente, prema usaglašenim referentnim smerovima (slika IV.1.5.1.1), su:

$$i(t) = G \cdot u(t) = G \cdot U_m \sin(\omega t + \theta),$$

$$i_C(t) = \omega C \cdot U_m \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$i_L(t) = \frac{1}{\omega L} \cdot U_m \sin\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Za trenutne vrednosti napona i struja važe Kirhofovi zakoni pa je prema prvom Kirhofovom zakonu:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = \\ &= G \cdot U_m \sin(\omega t + \theta) + \omega C \cdot U_m \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega L} \cdot U_m \sin\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= G \cdot U_m \sin(\omega t + \theta) + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) U_m \cos(\omega t + \theta). \end{aligned}$$

I ovde smo primenili činjenicu da je:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \text{ i } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha.$$

Primenom trigonometrijske relacije:

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin\left(\alpha + \arctg \frac{B}{A}\right),$$

na izraz za napon na rednoj RLC vezi, dobijamo:

$$I_m \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} U_m \sin\left(\omega t + \theta + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{G}\right).$$

Izjednačavanjem amplituda i faze leve i desne strane jednakosti dobijamo odnos amplituda i razliku faza struje i napona paralelne veze. Generalno, odnos amplituda struje i napona na nekoj vezi elemenata nazivamo **admitansa** Y . Admitansa paralelne veze je:

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Vidimo da je **admitansa uvek pozitivna veličina** s obzirom da predstavlja odnos amplituda koje su pozitivne veličine. Veličina G naziva se **aktivna provodnost** ili **konduktansa**. Veličina $\omega C - \frac{1}{\omega L}$ naziva se **reaktivna provodnost** ili **susceptansa** paralelne veze, a predstavlja razliku susceptansi kondenzatora i kalema. Generalno, susceptansu obeležavamo sa B , pa je u opštem slučaju admitansa neke veze elemenata:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}.$$

Susceptansa paralelne veze je dakle:

$$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}.$$

Razliku faza struje i napona obeležavamo sa ν . Razlika faza struje i napona paralelne veze je:

$$\nu = \psi - \theta = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}.$$

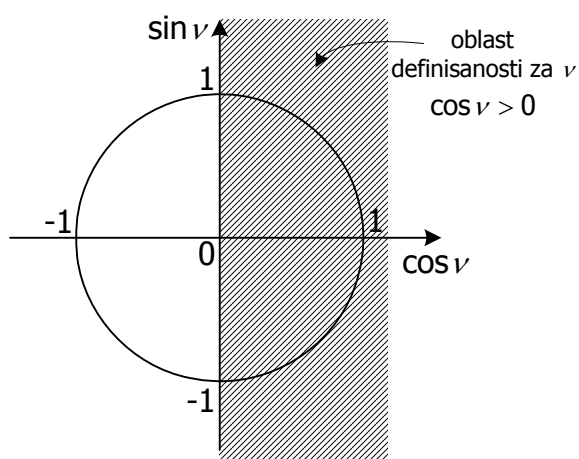
Odavde je:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{B}{G}.$$

Odredimo sinus i kosinus razlike faza napona i struje. Primenimo trigonometrijske veze između sinusa, kosinusa i tangensa ugla:

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{G}\right)^2}} = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{G}{Y},$$

$$\sin \nu = \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}} = \frac{\frac{B}{G}}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{G}\right)^2}} = \frac{B}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{B}{Y}.$$



Slika IV.1.5.1.2

S obzirom da su veličine G i Y uvek pozitivne veličine, i kosinus ugla ν je uvek pozitivan. Pošto veličina B može biti i pozitivna i negativna, sinus ugla ν može biti i pozitivan i negativan. Na osnovu prethodnog se zaključuje da je oblast definisanosti razlike faza između struje i napona:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq \frac{\pi}{2},$$

što je prikazano na trigonometrijskom krugu na slici IV.1.5.1.2.

Zamenimo brojne vrednosti u izraze. Susceptansa posmatrane paralelne veze je:

$$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 10^4 \text{ s}^{-1} \cdot 200 \cdot 10^{-9} \text{ F} - \frac{1}{10^4 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ H}} = 2 \text{ mS} - 1 \text{ mS} = 1 \text{ mS}.$$

Admitansa posmatrane paralelne veze je:

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(1 \text{ mS})^2 + (1 \text{ mS})^2} = \sqrt{2 \cdot (1 \text{ mS})^2} = \sqrt{2} \text{ mS}.$$

Amplituda struje kroz napojnu granu je:

$$I_m = Y \cdot U_m = \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot 4 \text{ V} = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ A} = 4\sqrt{2} \text{ mA}.$$

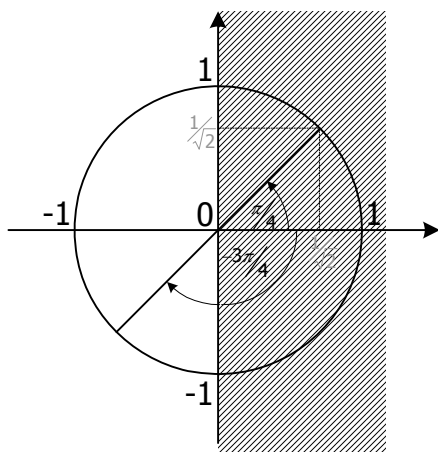
Razlika faza struje i napona posmatrane paralelne veze je:

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} = \operatorname{arctg} \frac{B}{G} = \operatorname{arctg} \frac{1 \text{ mS}}{1 \text{ mS}} = \operatorname{arctg} 1.$$

Teoretski, izraz $\operatorname{arctg} 1$ ima dva rešenja: $\frac{\pi}{4}$ i $-\frac{3\pi}{4}$, kao što je prikazano na slici IV.1.5.3.

Međutim, s obzirom na oblast definisanosti ugla $-\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$, jedino moguće rešenje je:

$$\nu = \frac{\pi}{4}.$$



Slika IV.1.5.1.3

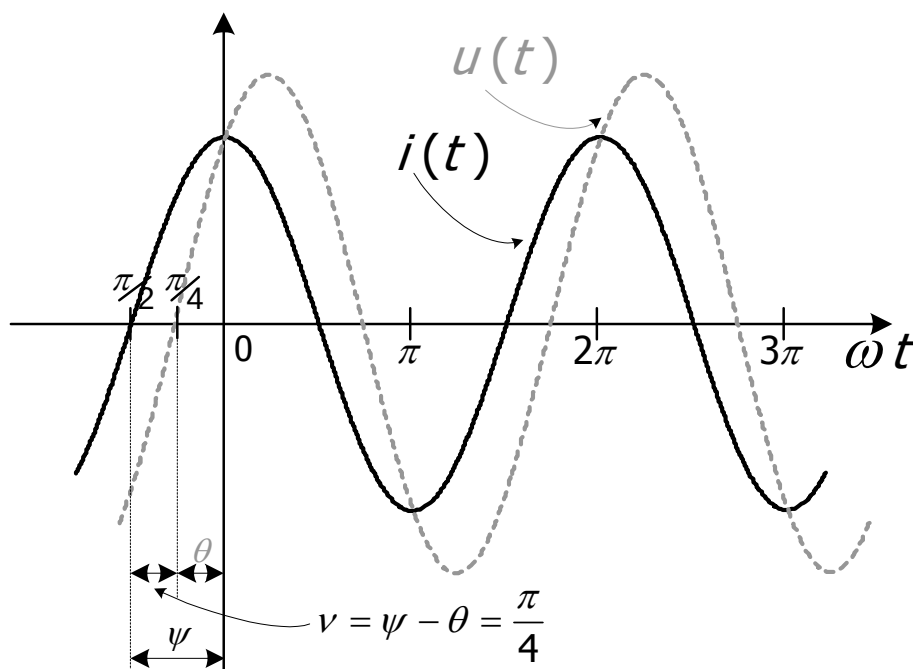
Početna faza struje je:

$$\psi = \theta + \nu = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Sada možemo napisati izraz za trenutnu vrednost struje napojne grane:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 4\sqrt{2} \sin\left(10^4 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ mA}.$$

Na slici IV.1.5.1.4 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje posmatrane paralelne veze.



Slika IV.1.5.1.4

Sa slike vidmo da struja prednjači naponu za $\frac{\pi}{4}$ pa je razlika faza između struje i napona pozitivna, kao što smo računskim putem dobili. Dakle, posmatrana redna veza ima kapacitivni karakter jer struja prednjači naponu.

Generalno, kada je susceptansa veze elemenata pozitivna, $B > 0$, tada je i razlika faza između struje i napona pozitivna, $\nu > 0$, i tada veza ima pretežno kapacitivni karakter. Obrnuto, kada je reaktansa veze elemenata negativna, $B < 0$, tada je i razlika faza između struje i napona negativna, $\nu < 0$, i tada veza ima pretežno induktivni karakter.

IV.1.6 PRETVARANJE REDNE VEZE U PARAMETRE PARALELNE VEZE I OBRNUTO TEORIJSKA OSNOVA

- Kada su prijemnici napravljeni od kombinacija redne i paralelne veze elemenata ili kada u kolu imamo redno - paralelnu vezu prijemnika, javlja se potreba tokom proračuna da parametre redne veze R , X , Z , prebacimo u parametre paralelne veze G , B , Y . To se radi pomoću obrazaca:

$$R = Z \cos \varphi = \frac{1}{Y} \cos(-\nu) = \frac{1}{Y} \cos \nu \cdot \frac{Y}{Y} = \frac{Y \cos \nu}{Y^2} = \frac{G}{Y^2} = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = Z \sin \varphi = \frac{1}{Y} \sin(-\nu) = -\frac{1}{Y} \sin \nu \cdot \frac{Y}{Y} = -\frac{Y \sin \nu}{Y^2} = -\frac{B}{Y^2} = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$G = Y \cos \nu = \frac{1}{Z} \cos(-\varphi) = \frac{1}{Z} \cos \varphi \cdot \frac{Z}{Z} = \frac{Z \cos \varphi}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = Y \sin \nu = \frac{1}{Z} \sin(-\varphi) = -\frac{1}{Z} \sin \varphi \cdot \frac{Z}{Z} = -\frac{Z \sin \varphi}{Z^2} = -\frac{X}{Z^2} = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

- Pri tome:

$$Z = \frac{1}{Y} \text{ i } Y = \frac{1}{Z}$$

$$\varphi = -\nu \text{ i } \nu = -\varphi$$

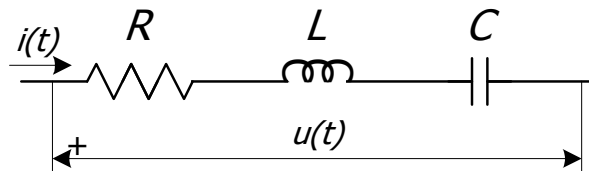
ZADACI

IV.1.6.1 Prijemnik se sastoji od redne veze otpornika otpornosti $R = 30 \, \Omega$, kalema induktivnosti $L = 6,5 \, \text{mH}$ i kondenzatora kapacitivnosti $C = 4 \, \mu\text{F}$. Kružna učestanost je $\omega = 10^4 \, \text{s}^{-1}$.

a) Odrediti impedansu i razliku faza između napona i struje ove veze. Kakvog je karaktera ovaj prijemnik?

b) Odrediti ekvivalentne parametre paralelne veze za posmatrani prijemnik.

Rešenje:



Slika IV.1.6.1.1

a) Reaktansa prijemnika je:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 10^4 \, \text{s}^{-1} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3} \, \text{H} - \frac{1}{10^4 \, \text{s}^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \, \text{F}} = 65 \, \Omega - 25 \, \Omega = 40 \, \Omega.$$

Impedansa prijemnika je:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(30 \, \Omega)^2 + (40 \, \Omega)^2} = \sqrt{2500 \, \Omega^2} = 50 \, \Omega,$$

a razlika faza između napona i struje:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{40 \, \Omega}{30 \, \Omega} = \arctg 1,33.$$

Izraz $\arctg 1,33$ ima dva rešenja: $0,93$ radijana i $-2,21$ radijana, a mora da važi $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. U

opsegu između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ nalazi se $0,93$ radijana (korisno je zapamtiti $\frac{\pi}{2} = 1,57$):

$$\varphi = 0,93.$$

Napomena: Kalkulator daje samo jednu vrednost funkcije arkustangens (koja je najčešće obeležena kao $\tan^{-1}$) i ta vrednost se nalazi između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$, što je upravo ono što nama

odgovara kada je u pitanju fazna razlika između napona i struje na prijemniku. Druga vrednost se dobija tako što se na dobijenu vrednost doda ili se od nje oduzme π , tako da dobijena vrednost bude između $-\pi$ i π (odnosno, ako je dobijena vrednost pozitivna treba oduzeti π , a ako je negativna treba dodati π). Ovo će nam biti potrebno za određivanje početnih faza napona i struja kod računa sa kompleksnim računom.

S obzirom da je reaktansa pozitivna (kao i ugao φ) ovaj prijemnik je pretežno induktivnog karaktera.

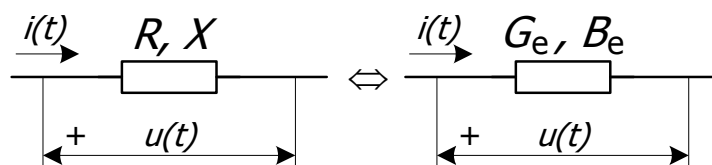
b) U teoriji su izvedene veze između rednih i paralelnih parametara prijemnika. Ekvivalentna konduktansa prijemnika je:

$$G_e = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{30 \, \Omega}{(30 \, \Omega)^2 + (40 \, \Omega)^2} = \frac{30}{2500 \, \Omega} = 0,012 \, \text{S} = 12 \, \text{mS}.$$

Ekvivalentna susceptansa prijemnika je:

$$B_e = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{40 \, \Omega}{(30 \, \Omega)^2 + (40 \, \Omega)^2} = -\frac{40}{2500 \, \Omega} = -0,016 \, \text{S} = -16 \, \text{mS}.$$

Napomena: Primetimo da je susceptansa negativna kada je prijemnik pretežno induktivnog karaktera. Dakle, reaktansa i susceptansa jednog istog prijemnika su uvek različitog znaka!



Slika IV.1.6.1.2

Admitansa prijemnika je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{50 \, \Omega} = 0,02 \, \text{S} = 20 \, \text{mS}$$

Razlika faza između struje i napona na ovom prijemniku je:

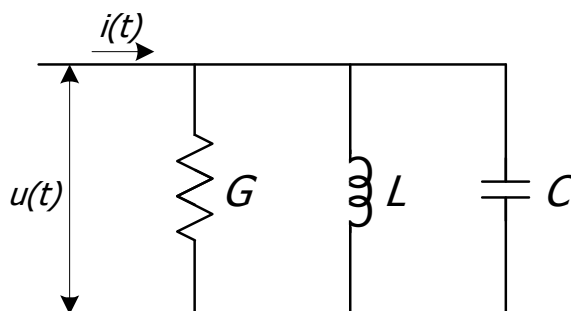
$$\nu_e = \psi - \theta = -\varphi = -0,93.$$

IV.1.6.2 Prijemnik se sastoji od paralelne veze otpornika provodnosti $G = 4 \, \text{mS}$, kalema induktivnosti $L = 2,5 \, \text{mH}$ i kondenzatora kapacitivnosti $C = 20 \, \text{nF}$. Kružna učestanost je $\omega = 10^5 \, \text{s}^{-1}$.

a) Odrediti admitansu i razliku faza između struje i napona ove veze. Kakvog je karaktera ovaj prijemnik?

b) Odrediti ekvivalentne parametre redne veze za posmatrani prijemnik.

Rešenje:



Slika IV.1.6.2.1

a) Susceptansa prijemnika je:

$$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 10^5 \text{ s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ F} - \frac{1}{10^5 \text{ s}^{-1} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ H}} = 2 \text{ mS} - 4 \text{ mS} = -2 \text{ mS}.$$

Admitansa prijemnika je:

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(4 \text{ mS})^2 + (-2 \text{ mS})^2} = \sqrt{20 \text{ mS}^2} = 4,5 \text{ mS},$$

a razlika faza između struje i napona:

$$\nu = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{-2 \text{ mS}}{4 \text{ mS}} = \arctg 0,5.$$

Izraz $\arctg 0,5$ ima dva rešenja: 0,46 radijana i -2,68 radijana, a mora da vazi $-\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$. U opsegu između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ nalazi se 0,46 radijana:

$$\nu = 0,46.$$

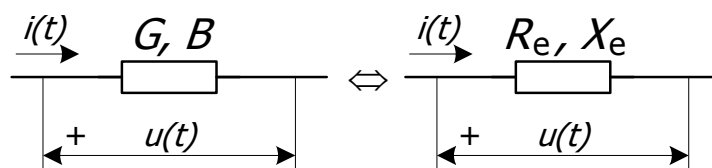
S obzirom da je susceptansa negativna (kao i ugao ν) ovaj prijemnik je pretežno induktivnog karaktera.

b) U teoriji su izvedene veze između rednih i paralelnih parametara prijemnika. Ekvivalentna rezistansa prijemnika je:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{4 \text{ mS}}{(4 \text{ mS})^2 + (-2 \text{ mS})^2} = \frac{4}{20 \text{ mS}} = \frac{4}{20 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 0,2 \text{ k}\Omega = 200 \Omega.$$

Ekvivalentna reaktansa prijemnika je:

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{-2 \text{ mS}}{(4 \text{ mS})^2 + (-2 \text{ mS})^2} = \frac{2}{20 \text{ mS}} = \frac{2}{20 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 0,1 \text{ k}\Omega = 100 \Omega.$$



Slika IV.1.6.2.2

Impedansa prijemnika je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{4,5 \text{ mS}} = \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 0,2222 \text{ k}\Omega = 222,2 \Omega$$

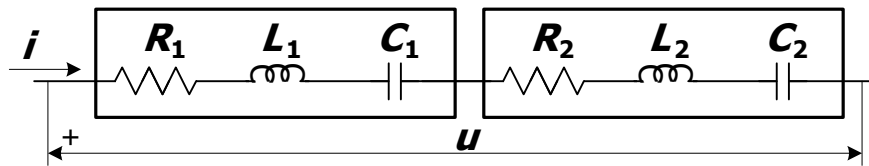
Napomena: Kada su parametri paralelne veze dati u osnovnim jedinicama, simensima (S), parametre redne veze dobijamo takođe u osnovnim jedinicama – omima (Ω). Kada su parametri paralelne veze dati u jedinicama milisimensima (mS) bez prelaska na osnovne jedinice direktno dobijamo parametre redne veze u jedinicama kiloomima ($\text{k}\Omega$).

Razlika faza između struje i napona na ovom prijemniku je:

$$\varphi = \theta - \psi = -\nu = -0,46.$$

IV.1.7 REDNA VEZA DVA PRIJEMNIKA TEORIJSKA OSNOVA

- Ako imamo rednu vezu dva RLC prijemnika, onda prilikom proračuna važe sledeća pravila:



- Aktivne otpornosti u rednoj vezi **se smeju sabirati**:

$$R_e = R_1 + R_2$$

- Reaktivne otpornosti u rednoj vezi **se smeju sabirati**:

$$X_e = X_1 + X_2$$

- Impedanse u rednoj vezi **se ne smeju sabirati**:

$$Z_e \neq Z_1 + Z_2$$

- Fazne razlike u rednoj vezi **se ne smeju sabirati**:

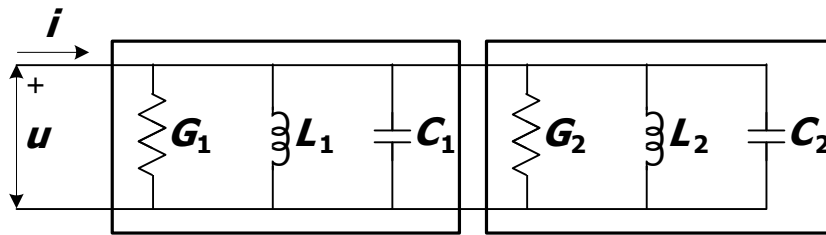
$$\varphi_e \neq \varphi_1 + \varphi_2$$

- U rednoj vezi se ne smeju sabirati parametri paralelne veze!**

IV.1.8 PARALELNA VEZA DVA PRIJEMNIKA

TEORIJSKA OSNOVA

- Ako imamo paralelnu vezu dva RLC prijemnika, onda prilikom proračuna važe sledeća pravila:



- Aktivne provodnosti u paralelnoj vezi **se smeju sabirati**:

$$G_e = G_1 + G_2$$

- Reaktivne provodnosti u paralelnoj vezi **se smeju sabirati**:

$$B_e = B_1 + B_2$$

- Admitanse u paralelnoj vezi **se ne smeju sabirati**:

$$Y_e \neq Y_1 + Y_2$$

- Fazne razlike u paralelnoj vezi **se ne smeju sabirati**:

$$\varphi_e \neq \varphi_1 + \varphi_2$$

- U paralelnoj vezi se ne smeju sabirati parametri redne veze!**

IV.1.9 SNAGE U PROSTOPERIODIČNOM REŽIMU

TEORIJSKA OSNOVA

- Koja je jedina realna snaga u prostoperiodičnom režimu?
 - Trenutna snaga p . To je snaga u nekom trenutku vremena:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- Koje još snage uvodimo u proračun?
 - Aktivnu snagu

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi$$

Aktivna snaga je korisna snaga na potrošaču (električna energija prelazi u toplotnu). Matematički se definiše kao srednja snaga u okviru jednog perioda.

- Reaktivnu snagu

$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi$$

Reaktivna snaga je snaga koju generator izmenjuje sa reaktivnim elementima (kalemovima i kondenzatorima). U jednoj poluperiodi generator njima predaje energiju, a u drugoj poluperiodi kalemovi i kondenzatori vraćaju energiju generatoru.

- Prividnu snagu

$$S = UI$$

Prividna snaga je maksimalna aktivna snaga ($\cos \varphi = 1$).

- Koje su jedinice za snage?
 - Za aktivnu – wat [W].
 - Za reaktivnu – volt-amper reaktivan [VA_r].
 - Za prividnu – volt-amper [VA].
- Šta je $\cos \varphi$?
 - Faktor snage. Pokazuje koliko prijemnik odstupa od savršenog. Idealno je kada je $\cos \varphi = 1$.
 - Može se vršiti i popravka faktora snage prijemnika dodavanjem elemenata tako da se dobije $\cos \varphi = 1$.
- Postoje još neki obrasci koji se koriste tokom proračuna:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P}$$

$$S = UI = Z \cdot I \cdot I = ZI^2$$

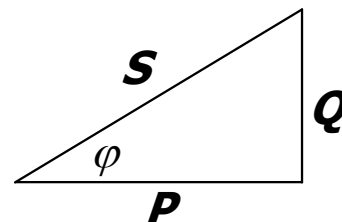
$$S = UI = U \cdot Y \cdot U = YU^2$$

$$P = UI \cos \varphi = Z \cdot I \cdot I \cos \varphi = ZI^2 \cos \varphi = RI^2$$

$$P = UI \cos \varphi = U \cdot Y \cdot U \cos(-\nu) = YU^2 \cos \nu = GU^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = Z \cdot I \cdot I \sin \varphi = ZI^2 \sin \varphi = XI^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = U \cdot Y \cdot U \sin(-\nu) = -YU^2 \sin \nu = -BU^2$$



- Za rednu ili paralelnu vezu dva RLC prijemnika prilikom proračuna važe sledeća pravila:

- aktivne snage pojedinačnih prijemnika se smeju sabirati:

$$\mathbf{P_e} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}$$

- reaktivne snage pojedinačnih prijemnika se smeju sabirati:

$$\mathbf{Q_e} = \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2}$$

- prividne snage pojedinačnih prijemnika se ne smeju sabirati:

$$\mathbf{S_e} \neq \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$$

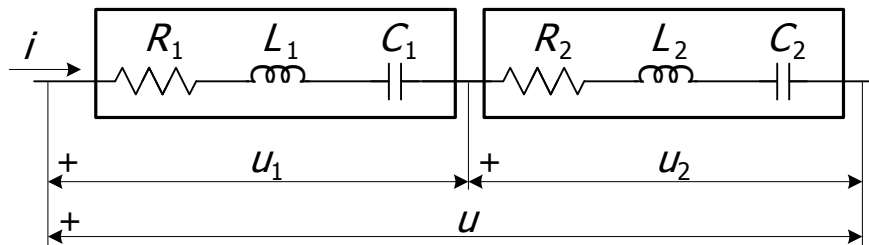
ZADACI

IV.1.9.1 Dva prijemnika koja se sastoje od redne veze elemenata, $R_1 = 80 \, \Omega$, $L_1 = 1 \, \text{mH}$ i $C_1 = 250 \, \text{nF}$, i $R_2 = 60 \, \Omega$, $L_2 = 1,2 \, \text{mH}$ i $C_2 = 50 \, \text{nF}$, vezana su redno i priključena u kolo naizmenične struje kružne učestanosti $\omega = 10^5 \, \text{s}^{-1}$. Odrediti:

- impedanse i razlike faza napona i struje pojedinih prijemnika,
- impedansu, razliku faza napona i struje i karakter redne veze,
- efektivnu vrednost napona na svakom od prijemnika, kao i efektivnu vrednost napona redne veze
- ekvivalentne paralelne parametre i admitansu cele veze,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu svakog prijemnika i redne veze, ako je efektivna vrednost struje $I = 1 \, \text{A}$.

Rešenje:

a) Na slici IV.1.9.1.1 prikazana je redna veza posmatrana dva prijemnika.



Slika IV.1.9.1.1

Reaktansa prvog prijemnika je:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \, \text{H} - \frac{1}{10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 250 \cdot 10^{-9} \, \text{F}} = 100 \, \Omega - 40 \, \Omega = 60 \, \Omega.$$

Impedansa prvog prijemnika je:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{(80 \, \Omega)^2 + (60 \, \Omega)^2} = \sqrt{10000 \, \Omega^2} = 100 \, \Omega,$$

a razlika faza između napona i struje:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1} = \arctg \frac{60 \, \Omega}{80 \, \Omega} = \arctg 0,75.$$

Izraz $\arctg 0,75$ ima dva rešenja: $0,64$ radijana i $-2,5$ radijana, a zbog uslova $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$ fazna razlika između napona i struje je:

$$\varphi_1 = 0,64.$$

S obzirom da je reaktansa pozitivna (kao i ugao φ_1) ovaj prijemnik je pretežno induktivnog karaktera.

Reaktansa drugog prijemnika je:

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \, \text{H} - \frac{1}{10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 50 \cdot 10^{-9} \, \text{F}} = 120 \, \Omega - 200 \, \Omega = -80 \, \Omega.$$

Impedansa drugog prijemnika je:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \sqrt{(60 \, \Omega)^2 + (-80 \, \Omega)^2} = \sqrt{10000 \, \Omega^2} = 100 \, \Omega,$$

a razlika faza između napona i struje:

$$\varphi_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2} = \arctg \frac{-80 \, \Omega}{60 \, \Omega} = \arctg (-1,33).$$

Izraz $\arctg (-1,33)$ ima dva rešenja: $-0,93$ radijana i $2,21$ radijana, a između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ je:

$$\varphi_2 = -0,93.$$

S obzirom da je reaktansa negativna (kao i ugao φ_2) ovaj prijemnik je pretežno kapacitivnog karaktera.

b) Ukupnu rezistansu redne veze dobijamo kada saberemo rezistanse svakog od prijemnika (prijemnika može biti proizvoljno mnogo, a u ovom slučaju ih je dva):

$$R_e = R_1 + R_2 = 80 \, \Omega + 60 \, \Omega = 140 \, \Omega.$$

Ukupnu reaktansu redne veze dobijamo kada saberemo reaktanse svakog od prijemnika:

$$X_e = X_1 + X_2 = 60 \, \Omega + (-80 \, \Omega) = -20 \, \Omega.$$

Kako je reaktansa negativna, ova redna veza je pretežno kapacitivnog karaktera. Impedansa redne veze je:

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{(140 \, \Omega)^2 + (-20 \, \Omega)^2} = \sqrt{20000 \, \Omega^2} = 141,4 \, \Omega,$$

Sada možemo proveriti da **u opštem slučaju impedansa redne veze nije jednaka zbiru impedansi svakog od prijemnika:**

$$Z_1 + Z_2 = 100 \, \Omega + 100 \, \Omega = 200 \, \Omega.$$

Evo i dokaza:

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \neq Z_1 + Z_2 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} + \sqrt{R_2^2 + X_2^2},$$

dakle:

$$Z_e \neq Z_1 + Z_2.$$

Razlika faza između napona i struje redne veze je:

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{-20 \, \Omega}{140 \, \Omega} = \arctg (-0,14).$$

Rešenja ovog izraza su: $-0,07$ radijana i 3 radijana, a između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ je:

$$\varphi_e = -0,14.$$

Takođe, **u opštem slučaju razlika faza napona i struje redne veze nije jednaka zbiru razlika faza napona i struje svakog od prijemnika:**

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0,93 + (-0,64) = 0,29$$

$$\varphi_e \neq \varphi_1 + \varphi_2$$

c) Pošto znamo efektivnu vrednost struje kroz prijemnike i njihove impedanse, možemo odrediti efektivne vrednosti napona na svakom prijemniku, kao i efektivnu vrednost napona na celoj paralelnoj vezi:

$$\begin{aligned}U_1 &= Z_1 \cdot I = 100 \, \Omega \cdot 1 \, \text{A} = 100 \, \text{V}, \\U_2 &= Z_2 \cdot I = 100 \, \Omega \cdot 1 \, \text{A} = 100 \, \text{V}, \\U &= Z_e \cdot I = 141,4 \, \Omega \cdot 1 \, \text{A} = 141,4 \, \text{V}.\end{aligned}$$

Kirhofovi zakoni važe za trenutne vrednosti napona i struja. Ali **Kirhofovi zakoni ne važe za efektivne vrednosti napona i struja**. S obzirom da je:

$$U_1 + U_2 = 100 \, \text{V} + 100 \, \text{V} = 200 \, \text{V},$$

lako proveravamo da je:

$$U \neq U_1 + U_2,$$

jer je

$$U = Z_e \cdot I \neq U_1 + U_2 = Z_1 \cdot I + Z_2 \cdot I \text{ i } Z_e \neq Z_1 + Z_2.$$

d) Ekvivalentna konduktansa analizirane veze prijemnika je:

$$G_e = \frac{R_e}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{140 \, \Omega}{(140 \, \Omega)^2 + (-20 \, \Omega)^2} = \frac{140}{20000 \, \Omega} = 0,007 \, \text{S} = 7 \, \text{mS}.$$

Ekvivalentna susceptansa analizirane veze prijemnika je:

$$B_e = -\frac{X_e}{R_e^2 + X_e^2} = -\frac{-20 \, \Omega}{(140 \, \Omega)^2 + (-20 \, \Omega)^2} = \frac{-20 \, \Omega}{20000 \, \Omega} = 0,001 \, \text{S} = 1 \, \text{mS}.$$

Admitansa analizirane veze prijemnika je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{141,4 \, \Omega} = 0,0071 \, \text{S} = 7,1 \, \text{mS}$$

d) Aktivna snaga prijemnika je korisna snaga, snaga koja se pretvori u toplotu na prijemniku (Džulovi gubici), a izračunava se na sledeći način:

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi.$$

Reaktivna snaga prijemnika je snaga koja se razmenjuje između prijemnika i kola, a izračunava se na sledeći način:

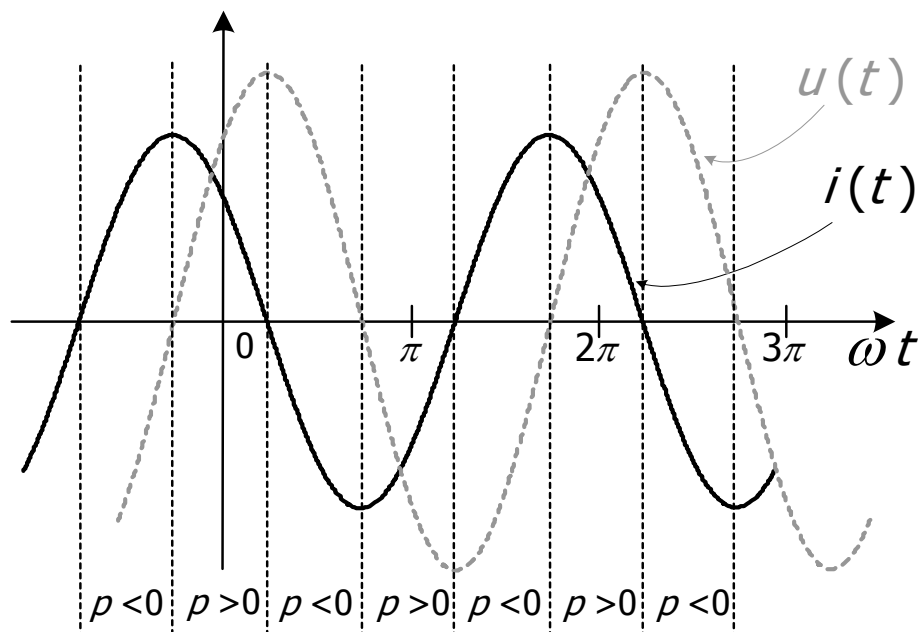
$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi.$$

Prividna snaga prijemnika je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2} = UI \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = UI$$

(Dakle, aktivna snaga predstavlja upravo Džulove gubitke sa kojima smo se sreli kod vremenski nepromenljivih (jednosmernih) struja. Pojam reaktivne snage može se razumeti kroz trenutnu snagu na jednom od dva reaktivna elementa, na primer na kondenzatoru. Ako posmatramo grafik promene trenutnih vrednosti napona i struje na kondenzatoru, uočavamo da su ove dve sinusoide, koje predstavljaju promene struje i napona, pomerene za $\frac{\pi}{2}$ i da su u određenim vremenskim intervalima i napon i struja istog znaka, a u ostalim vremenskim intervalima su različitog znaka,

kao što je prikazano na slici IV.1.9.1.2. S obzirom da je trenutna snaga jednaka proizvodu trenutnog napona i struje, vidimo da je u određenim vremenskim intervalima pozitivna (kad su napon i struja istog znaka) i tada se kondenzator ponaša kao potrošač, a u ostalim vremenskim intervalima negativna (kad su napon i struja različitog znaka) i tada kondenzator varaća energiju kolu. Isto se dešava i kod kalema. Na otporniku su napon i struja u fazi pa su uvek istog znaka i snaga je pozitivna, odnosno na otporniku se uvek javljaju gubici. Pošto se realan prijemnik sastoji od aktivnog (otpornog) i reaktivnog dela, aktivna snaga definiše gubitke na otpornom delu, dok reaktivna snaga definiše razmenu energije. Iako sve ove snage fizički imaju istu jedinicu – vat, zbog različitih priroda ovih snaga uvedene su posebne jedinice za svaku od njih: za aktivnu snagu je ostavljena jedinica vat [W], za reaktivnu snagu je uvedena jedinica volt-amper reaktivni ili var [VAr], a za prividnu snagu jedinica volt-amper [VA].)



Slika IV.1.9.1.2

Parametar $\cos \varphi$ naziva se **faktor snage**. Za čisto otporni prijemnik faktor snage je jednak 1, dok je za čisto reaktivan prijemnik (prijemnik koji se sastoji samo od kalema i kondenzatora) faktor snage jednak 0.

Primenimo u izrazima za aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu i izraze koje smo do sada izveli, koji definišu odnose između parametara. Primenimo u jednom slučaju parametre redne veze, a u drugom slučaju parametre paralelne veze.

$$P = UI \cos \varphi = Z \cdot I \cdot I \cdot \cos \varphi = Z \cdot I^2 \cdot \frac{R}{Z} = I^2 R$$

$$P = UI \cos \varphi = U \cdot \frac{U}{Z} \cdot \cos \varphi = U^2 \cdot \frac{R}{Z^2} = U^2 G$$

$$Q = UI \sin \varphi = Z \cdot I \cdot I \cdot \sin \varphi = Z \cdot I^2 \cdot \frac{X}{Z} = I^2 X$$

$$Q = UI \sin \varphi = U \cdot \frac{U}{Z} \cdot \sin \varphi = U^2 \cdot \frac{X}{Z^2} = -U^2 B$$

$$S = UI = Z \cdot I \cdot I = Z \cdot I^2$$

$$S = UI = U \cdot U \cdot Y = Y \cdot U^2$$

Vidimo da se aktivna i reaktivna snaga mogu izračunati bilo preko parametara redne, bilo preko parametara paralelne veze. U poslednjem izrazu za reaktivnu snagu pojavljuje se negativan predznak kao posledica veze između reaktanse i susceptanse: $B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{Z^2}$. Kao što su

aktivna otpornost i aktivna provodnost prijemnika uvek pozitivne, iz izraza za aktivnu snagu se vidi da je **aktivna snaga prijemnika uvek pozitivna**. Znak reaktivne snage zavisi od karaktera prijemnika: ako je prijemnik pretežno induktivan, reaktivna snaga je pozitivna, ako je prijemnik čisto otporan, reaktivna snaga je jednaka nuli, i ako je prijemnik pretežno kapacitivan, reaktivna snaga je negativna.

Na osnovu prethodno izvedenih izraza možemo napisati izraze za aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu svakog od prijemnika:

$$P_1 = I^2 R_1 = (1 \text{ A})^2 \cdot 80 \Omega = 80 \text{ W},$$

$$Q_1 = I^2 X_1 = (1 \text{ A})^2 \cdot 60 \Omega = 60 \text{ VAr},$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{(80 \text{ W})^2 + (60 \text{ W})^2} = 100 \text{ VA} \text{ ili } S_1 = U_1 I_1 = 100 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 100 \text{ VA},$$

$$P_2 = I^2 R_2 = (1 \text{ A})^2 \cdot 60 \Omega = 60 \text{ W},$$

$$Q_2 = I^2 X_2 = (1 \text{ A})^2 \cdot (-80 \Omega) = -80 \text{ VAr}.$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{(60 \text{ W})^2 + (-80 \text{ W})^2} = 100 \text{ VA} \text{ ili } S_2 = U_2 I_2 = 100 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 100 \text{ VA}$$

Izračunajmo sada čemu su jednake aktivna i reaktivna snaga redne veze dva prijemnika:

$$P_e = I^2 R_e = I^2 (R_1 + R_2) = I^2 R_1 + I^2 R_2 = P_1 + P_2 = 80 \text{ W} + 60 \text{ W} = 140 \text{ W},$$

$$Q_e = I^2 X_e = I^2 (X_1 + X_2) = I^2 X_1 + I^2 X_2 = Q_1 + Q_2 = 60 \text{ VAr} + (-80 \text{ VAr}) = -20 \text{ VAr}.$$

Vidimo da je ukupna aktivna snaga redne veze prijemnika jednaka zbiru aktivnih snaga pojedinih prijemnika (isto važi i za paralelnu vezu, što ćemo pokazati u zadatku IV.1.9.3). Takođe, ukupna reaktivna snaga redne veze prijemnika jednaka je zbiru reaktivnih snaga pojedinih prijemnika (isto važi i za paralelnu vezu).

$$S_e = \sqrt{P_e^2 + Q_e^2} = \sqrt{(140 \text{ W})^2 + (-20 \text{ VAr})^2} = 141,4 \text{ VA} \text{ ili } S_e = UI = 141,1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 141,4 \text{ VA}$$

Pošto je:

$$S_e = \sqrt{P_e^2 + Q_e^2} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2} \neq S_1 + S_2 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2},$$

i na osnovu brojnih podataka vidimo da **ukupna prividna snaga nije jednaka zbiru prividnih snaga pojedinih prijemnika**, odnosno da je:

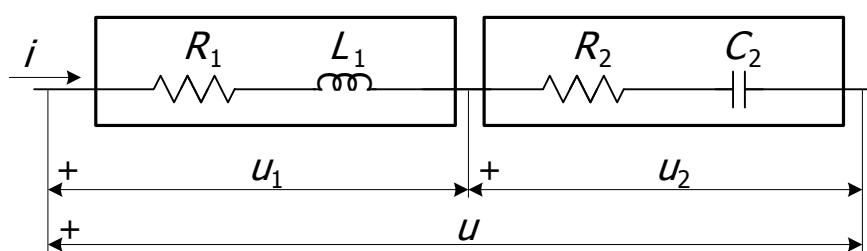
$$S_e \neq S_1 + S_2.$$

IV.1.9.2 Dva prijemnika vezana su redno i priključena su na napon efektivne vrednosti $U = 50 \text{ V}$ i kružne učestanosti $f = 50 \text{ Hz}$. Ako je $R_1 = 20 \text{ } \Omega$, $L_1 = 100 \text{ mH}$ i $R_2 = 15 \text{ } \Omega$, $C_2 = 100 \text{ } \mu\text{F}$, odrediti:

- impedanse pojedinih prijemnika, Z_1 i Z_2 ,
- faktore snage pojedinih prijemnika,
- impedansu redne veze,
- faktor snage redne veze,
- napon na pojedinim prijemnicima,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu svakog prijemnika i redne veze.

Rešenje:

Na slici IV.1.9.2.1 prikazana je redna veza posmatrana dva prijemnika.



Slika IV.1.9.1.2

Kružna učestanost je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ s}^{-1} = 314 \text{ s}^{-1}.$$

a) Redni parametri prvog prijemnika su:

$$X_1 = \omega L_1 = 314 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 31,4 \text{ } \Omega,$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{(20 \text{ } \Omega)^2 + (31,4 \text{ } \Omega)^2} = 37,2 \text{ } \Omega,$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1} = \arctg \frac{31,4 \text{ } \Omega}{20 \text{ } \Omega} = \arctg 1,57 = 1.$$

Nadalje nećemo više isticati dva rešenja funkcije arkustanges, jer smatramo da su čitaoci do sada savladali taj deo.

Redni parametri drugog prijemnika su:

$$X_2 = -\frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{314 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = -31,80 \text{ } \Omega.$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \sqrt{(15 \text{ } \Omega)^2 + (-31,8 \text{ } \Omega)^2} = 35,2 \text{ } \Omega,$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2} = \arctg \frac{-31,8 \text{ } \Omega}{15 \text{ } \Omega} = \arctg (-2,12) = -1,13.$$

b) Faktori snage pojedinih prijemnika su:

$$\cos \varphi_1 = \cos 1 = 0,54,$$

$$\cos \varphi_2 = \cos (-1,13) = 0,43.$$

c) Ukupna rezistansa redne veze je:

$$R_e = R_1 + R_2 = 20 \, \Omega + 15 \, \Omega = 35 \, \Omega.$$

Ukupna reaktansa redne veze je:

$$X_e = X_1 + X_2 = 31,4 \, \Omega + (-31,8 \, \Omega) = -0,4 \, \Omega.$$

Impedansa redne veze je:

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{(35 \, \Omega)^2 + (-0,4 \, \Omega)^2} \approx 35 \, \Omega.$$

Vidimo da ova redna veza ima veoma malu reaktivnu otpornost u odnosu na aktivnu otpornost, tako da gotovo ne utiče na impedansu.

Razlika faza između napona i struje redne veze je:

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{-0,4 \, \Omega}{35 \, \Omega} = \arctg (-0,01) = -0,01.$$

d) Kao što smo već rekli, rezistansa ove veze je mnogo veća od reaktanse pa možemo smatrati da je veza gotovo čisto otpornog karaktera i da je faktor snage skoro maksimalan, što možemo proveriti i računskim putem:

$$\cos \varphi_e = \cos (-0,01) \approx 1.$$

e) Pošto znamo efektivnu vrednost napona na rednoj vezi i ukupnu impedansu, možemo odrediti efektivnu vrednost struje kroz prijemnike:

$$I = \frac{U}{Z_e} = \frac{50 \, \text{V}}{35 \, \Omega} = 1,43 \, \text{A}.$$

Onda su naponi na pojedinim prijemnicima:

$$U_1 = Z_1 \cdot I = 37,2 \, \Omega \cdot 1,43 \, \text{A} = 53,2 \, \text{V},$$

$$U_2 = Z_2 \cdot I = 35,2 \, \Omega \cdot 1,43 \, \text{A} = 50,3 \, \text{V},$$

f) Aktivna, reaktivna i prividna snaga pojedinih prijemnika i redne veze su:

$$P_1 = I^2 R_1 = (1,43 \, \text{A})^2 \cdot 20 \, \Omega = 40,9 \, \text{W},$$

$$Q_1 = I^2 X_1 = (1,43 \, \text{A})^2 \cdot 31,4 \, \Omega = 64,2 \, \text{VAr},$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{(40,9 \, \text{W})^2 + (64,2 \, \text{W})^2} = 76,1 \, \text{VA} \text{ ili } S_1 = U_1 I_1 = 53,2 \, \text{V} \cdot 1,43 \, \text{A} = 76,1 \, \text{VA},$$

$$P_2 = I^2 R_2 = (1,43 \, \text{A})^2 \cdot 15 \, \Omega = 30,7 \, \text{W},$$

$$Q_2 = I^2 X_2 = (1,43 \, \text{A})^2 \cdot (-31,8 \, \Omega) = -65 \, \text{VAr}.$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{(30,7 \, \text{W})^2 + (-65 \, \text{W})^2} = 71,9 \, \text{VA} \text{ ili } S_2 = U_2 I_2 = 50,3 \, \text{V} \cdot 1,43 \, \text{A} = 71,9 \, \text{VA}$$

$$P_e = I^2 R_e = (1,43 \, \text{A})^2 \cdot 35 \, \Omega = 71,6 \, \text{W} \text{ ili } P_e = P_1 + P_2 = 40,9 \, \text{W} + 30,7 \, \text{W} = 71,6 \, \text{W},$$

$$Q_e = I^2 X_e = (1,43 \, \text{A})^2 \cdot (-0,4 \, \Omega) = -0,8 \, \text{VAr} \text{ ili } Q_e = Q_1 + Q_2 = 64,2 \, \text{VAr} + (-65 \, \text{VAr}) = -0,8 \, \text{VAr},$$

$$S_e = \sqrt{P_e^2 + Q_e^2} = \sqrt{(71,6 \, \text{W})^2 + (-0,8 \, \text{VAr})^2} = 71,6 \, \text{VA} \text{ ili } S_e = UI = 50 \, \text{V} \cdot 1,43 \, \text{A} = 71,5 \, \text{VA},$$

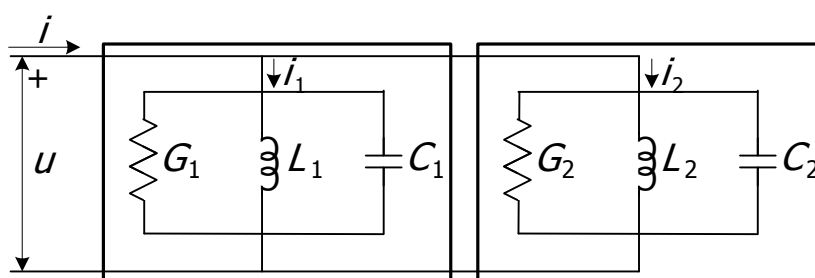
pri čemu je razlika u poslednja dva izraza posledica zaokruživanja, a u odnosu na vrednost prividne snage gotovo da je beznačajna.

IV.1.9.3 Dva prijemnika koja se sastoje od paralelne veze elemenata, $R_1 = 100 \, \Omega$, $C_1 = 100 \, \text{nF}$ i $L_1 = 20 \, \text{mH}$ i $R_2 = 200 \, \Omega$, $C_2 = 1000 \, \text{nF}$ i $L_2 = 40 \, \text{mH}$, vezana su paralelno i priključena u kolo naizmenične struje efektivne vrednosti $I = 0,5 \, \text{A}$ i frekvencije $f = 1,5 \, \text{kHz}$. Odrediti:

- admitanse i razlike faza struje i napona pojedinih prijemnika,
- admitansu, faznu razliku struje i napona i karakter paralelne veze,
- efektivnu vrednost struje kroz svaki od prijemnika, kao i efektivnu vrednost napona na prijemnicima,
- ekvivalentne parametre i impedansu cele veze,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu i faktor snage svakog prijemnika i paralelne veze.

Rešenje:

a) Na slici IV.1.9.3.1 prikazana je redna veza posmatrana dva prijemnika.



Slika IV.1.9.3.1

Kružna učestanost je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1500 \, \text{Hz} = 9425 \, \text{s}^{-1}.$$

Konduktansa prvog prijemnika je:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{100 \, \Omega} = 0,01 \, \text{S} = 10 \, \text{mS}.$$

Obratiti pažnju da je ovo provodnost otpornika otpornosti $100 \, \Omega$ i da nema nikakve veze sa ekvivalencijom parametara redne i paralelne veze.

Susceptansa prvog prijemnika je:

$$B_1 = \omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1} = 9425 \, \text{s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \, \text{F} - \frac{1}{9425 \, \text{s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \, \text{H}} = 0,94 \, \text{mS} - 5,3 \, \text{mS} = -4,36 \, \text{mS}.$$

Admitansa prvog prijemnika je:

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = \sqrt{(10 \, \text{mS})^2 + (-4,36 \, \text{mS})^2} = 10,91 \, \text{mS},$$

a razlika faza između struje i napona:

$$\nu_1 = \arctg \frac{B_1}{G_1} = \arctg \frac{-4,36 \text{ mS}}{10 \text{ mS}} = \arctg (-0,436) = -0,41.$$

S obzirom da je susceptansa negativna (kao i ugao ν_1) ovaj prijemnik je pretežno induktivnog karaktera.

Konduktansa drugog prijemnika je:

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200 \Omega} = 0,005 \text{ S} = 5 \text{ mS}.$$

Susceptansa drugog prijemnika je:

$$B_2 = \omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2} = 9425 \text{ s}^{-1} \cdot 1000 \cdot 10^{-9} \text{ F} - \frac{1}{9425 \text{ s}^{-1} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ H}} = 9,42 \text{ mS} - 2,66 \text{ mS} = 6,76 \text{ mS}.$$

Admitansa drugog prijemnika je:

$$Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2} = \sqrt{(5 \text{ mS})^2 + (6,76 \text{ mS})^2} = 8,41 \text{ mS},$$

a razlika faza između struje i napona:

$$\nu_2 = \arctg \frac{B_2}{G_2} = \arctg \frac{6,76 \text{ mS}}{5 \text{ mS}} = \arctg 1,35 = 0,93.$$

S obzirom da je susceptansa pozitivna (kao i ugao ν_1) ovaj prijemnik je pretežno kapacitivnog karaktera.

b) Ukupnu konduktansu paralelne veze dobijamo kada saberemo konduktanse svakog od prijemnika (prijemnika može biti proizvoljno mnogo, a u ovom slučaju ih je dva):

$$G_e = G_1 + G_2 = 10 \text{ mS} + 5 \text{ mS} = 15 \text{ mS}.$$

Ukupnu susceptansu paralelne veze dobijamo kada saberemo susceptanse svakog od prijemnika:

$$B_e = B_1 + B_2 = -4,36 \text{ mS} + 6,76 \text{ mS} = -2,4 \text{ mS}.$$

Kako je susceptansa negativna, ova paralelna veza je pretežno induktivnog karaktera. Admitansa paralelne veze je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{(15 \text{ mS})^2 + (-2,4 \text{ mS})^2} = \sqrt{230,76 \text{ mS}^2} = 15,19 \text{ mS}.$$

Sada možemo proveriti da **u opštem slučaju admitansa paralelne veze nije jednaka zbiru admitansi svakog od prijemnika:**

$$Y_1 + Y_2 = 10,91 \text{ mS} + 8,41 \text{ mS} = 19,32 \text{ mS}.$$

Dokaz je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_1 + B_2)^2} \neq Y_1 + Y_2 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} + \sqrt{G_2^2 + B_2^2},$$

dakle:

$$Y_e \neq Y_1 + Y_2.$$

Razlika faza između struje i napona paralelne veze je:

$$\nu_e = \arctg \frac{B_e}{G_e} = \arctg \frac{-2,4 \text{ mS}}{15 \text{ mS}} = \arctg 0,16 = 0,16.$$

Takođe, **u opštem slučaju razlika faza struje i napona paralelne veze nije jednaka zbiru razlika faza struje i napona svakog od prijemnika:**

$$\nu_1 + \nu_2 = -0,41 + 0,93 = 0,52$$

$$\nu_e \neq \nu_1 + \nu_2$$

c) Pošto znamo efektivnu vrednost struje kroz napojnu granu i admitansu paralelne veze možemo odrediti napon na paralelnoj vezi, koji predstavlja napon na svakom od prijemnika:

$$U = \frac{I}{Y_e} = \frac{0,5 \text{ A}}{15,19 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 32,9 \text{ V},$$

pa su struje kroz pojedine prijemnike:

$$I_1 = Y_1 \cdot U = 10,91 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot 32,9 \text{ V} = 0,359 \text{ A},$$

$$I_2 = Y_2 \cdot U = 8,41 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot 32,9 \text{ V} = 0,277 \text{ A}.$$

Kirhofovi zakoni važe za trenutne vrednosti napona i struja. Ali **Kirhofovi zakoni ne važe za efektivne vrednosti napona i struja**. S obzirom da je:

$$I_1 + I_2 = 0,359 \text{ A} + 0,277 \text{ A} = 0,636 \text{ A},$$

vidimo da je:

$$I \neq I_1 + I_2,$$

jer je:

$$I = Y_e \cdot U \neq I_1 + I_2 = Y_1 \cdot U + Y_2 \cdot U \text{ i } Y_e \neq Y_1 + Y_2.$$

d) Ekvivalentna rezistansa analizirane veze prijemnika je:

$$R_e = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{15 \text{ mS}}{(15 \text{ mS})^2 + (-2,4 \text{ mS})^2} = \frac{15}{230,76 \text{ mS}} = 0,065 \text{ k}\Omega = 65 \Omega.$$

Ekvivalentna reaktansa analizirane veze prijemnika je:

$$X_e = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{-2,4 \text{ mS}}{(15 \text{ mS})^2 + (-2,4 \text{ mS})^2} = \frac{2,4}{230,76 \text{ mS}} = 0,0104 \text{ k}\Omega = 10,4 \Omega.$$

Admitansa analizirane veze prijemnika je:

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{15,19 \text{ mS}} = 0,0658 \text{ k}\Omega = 65,8 \Omega$$

e) Aktivna, reaktivna i prividna snaga pojedinih prijemnika i paralelne veze su:

$$P_1 = U^2 G_1 = (32,9 \text{ V})^2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 10,8 \text{ W},$$

$$Q_1 = -U^2 B_1 = -(32,9 \text{ V})^2 \cdot (-4,36 \cdot 10^{-3} \text{ S}) = 4,7 \text{ VAr},$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{(10,8 \text{ W})^2 + (4,7 \text{ W})^2} = 11,8 \text{ VA} \text{ ili } S_1 = UI_1 = 32,9 \text{ V} \cdot 0,359 \text{ A} = 11,8 \text{ VA},$$

$$P_2 = U^2 G_2 = (32,9 \text{ V})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 5,4 \text{ W},$$

$$Q_2 = -U^2 B_2 = -(32,9 \text{ V})^2 \cdot 6,76 \cdot 10^{-3} \text{ S} = -7,3 \text{ VAr}.$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{(5,4 \text{ W})^2 + (7,3 \text{ W})^2} = 9,1 \text{ VA} \text{ ili } S_2 = UI_2 = 32,9 \text{ V} \cdot 0,277 \text{ A} = 9,1 \text{ VA}$$

Izračunajmo sada čemu su jednake aktivna i reaktivna snaga paralelne veze dva prijemnika:

$$P_e = U^2 G_e = U^2 (G_1 + G_2) = U^2 G_1 + U^2 G_2 = P_1 + P_2 = 10,8 \text{ W} + 5,4 \text{ W} = 16,2 \text{ W},$$

$$Q_e = -U^2 B_e = -U^2 (B_1 + B_2) = -U^2 B_1 - U^2 B_2 = Q_1 + Q_2 = 4,7 \text{ VAr} + (-7,3 \text{ VAr}) = -2,6 \text{ VAr}.$$

Vidimo da je ukupna aktivna snaga paralelne (kao i redne) veze prijemnika jednaka zbiru aktivnih snaga pojedinih prijemnika. Takođe, ukupna reaktivna snaga paralelne veze prijemnika jednaka je zbiru reaktivnih snaga pojedinih prijemnika (isto važi i za paralelnu vezu).

$$S_e = \sqrt{P_e^2 + Q_e^2} = \sqrt{(16,2 \text{ W})^2 + (-2,6 \text{ VAr})^2} = 16,4 \text{ VA} \text{ ili } S_e = UI = 32,9 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} = 16,4 \text{ VA}$$

i kao i kod redne veze važi:

$$S_e \neq S_1 + S_2.$$

Bez obzira da li su u pitanju paralelni ili redni parametri nekog prijemnika faktor snage uvek je $\cos \varphi$, odnosno kosinus razlike faza napona i struje na tom prijemniku. Kako je:

$$\nu = -\varphi,$$

i kako je kosinus parna funkcija, važi da je:

$$\cos \varphi = \cos(-\nu) = \cos \nu.$$

Faktori snage pojedinih prijemnika, kao i cele veze su:

$$\cos \varphi_1 = \cos(-\nu_1) = \cos(-(-0,41)) = \cos 0,41 = 0,92,$$

$$\cos \varphi_2 = \cos(-\nu_2) = \cos(-0,93) = 0,6,$$

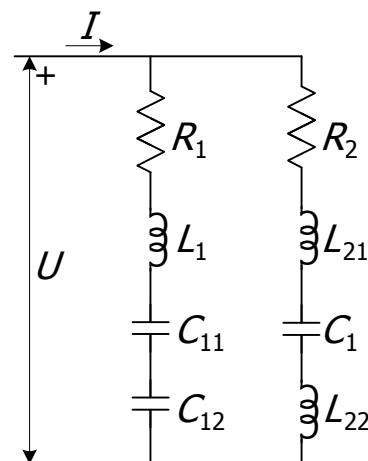
$$\cos \varphi_e = \cos(-\nu_e) = \cos(-0,16) = 0,99.$$

IV.1.9.4 Za vezu elemenata sa slike odrediti:

- ekvivalentnu impedansu, rezistansu i reaktansu,
- karakter kola,
- efektivnu vrednost struje kroz napojnu granu,
- aktivnu, reaktivnu, prividnu snagu i faktor snage cele veze.

Poznato je:

$$R_1 = 30 \, \Omega, L_1 = 6 \, \text{mH}, C_{11} = 2 \, \mu\text{F}, C_{12} = 2 \, \mu\text{F}, R_{21} = 10 \, \Omega, \\ R_{22} = 40 \, \Omega, L_{21} = 8 \, \text{mH}, L_{22} = 2 \, \text{mH}, C_2 = 2 \, \mu\text{F}, U = 100 \, \text{V}, \\ \omega = 10^4 \, \text{s}^{-1}.$$



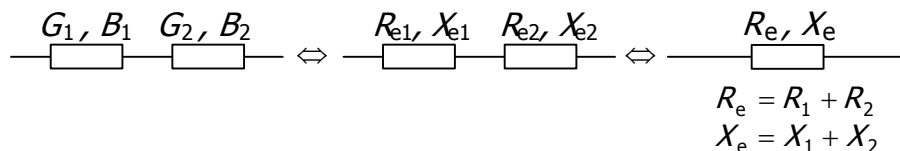
Rešenje:

a) U ovom kolu postoji paralelna veza redne veze elemenata. Uopšte, kada se rešavaju složene veze elemenata treba zapamtiti:

- kod redne veze ukupna ekvivalentna konduktansa ne može se dobiti kao zbir konduktansi pojedinih prijemnika; isto važi i za susceptansu.** Dakle, kod redne veze dva prijemnika je:

$$G_e \neq G_1 + G_2 \quad \text{i} \quad B_e \neq B_1 + B_2,$$

i ako želimo da ekvivalentiramo rednu vezu jednim prijemnikom moramo izračunati ekvivalentne parametre redne veze i onda njih možemo sabrati (slika IV.1.9.4.1). Isto važi i za rednu vezu više od dva prijemnika.

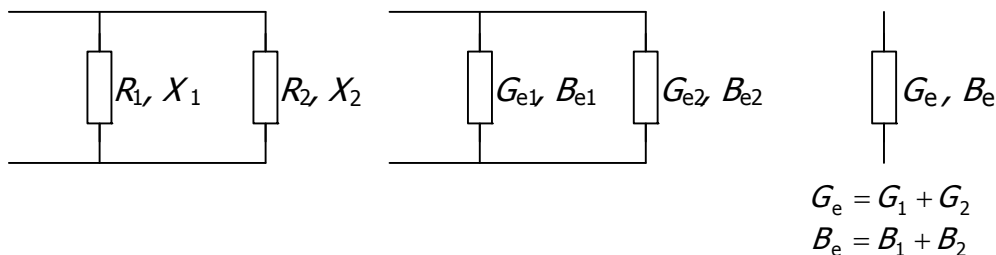


Slika IV.1.9.4.1

- kod paralelne veze ukupna ekvivalentna rezistansa ne može se dobiti kao zbir rezistansi pojedinih prijemnika; isto važi i za reaktansu.** Dakle, kod paralelne veze dva prijemnika je:

$$R_e \neq R_1 + R_2 \quad \text{i} \quad X_e \neq X_1 + X_2,$$

i ako želimo da ekvivalentiramo rednu vezu jednim prijemnikom moramo izračunati ekvivalentne parametre redne veze i onda njih možemo sabrati (slika IV.1.9.4.2). Isto važi i za rednu vezu više od dva prijemnika.



Slika IV.1.9.4.2

Rezistansa prve paralelne grane je:

$$R_1 = 30 \, \Omega.$$

Reaktansa prve paralelne grane je:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_{11}} - \frac{1}{\omega C_{12}} = 60 \, \Omega - 50 \, \Omega - 50 \, \Omega = -40 \, \Omega.$$

Rezistansa druge paralelne grane je:

$$R_2 = 50 \, \Omega.$$

Reaktansa druge paralelne grane je:

$$X_2 = \omega L_{21} + \omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_1} = 80 \, \Omega + 20 \, \Omega - 50 \, \Omega = 50 \, \Omega.$$

Odredimo ekvivalentne paralelne parametre obe grane da bismo ih mogli sabrati:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{30 \, \Omega}{(30 \, \Omega)^2 + (-40 \, \Omega)^2} = 12 \, \text{mS},$$

$$B_1 = -\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = -\frac{-40 \, \Omega}{(30 \, \Omega)^2 + (-40 \, \Omega)^2} = 16 \, \text{mS},$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{50 \, \Omega}{(50 \, \Omega)^2 + (50 \, \Omega)^2} = 10 \, \text{mS},$$

$$B_2 = -\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = -\frac{50 \, \Omega}{(50 \, \Omega)^2 + (50 \, \Omega)^2} = -10 \, \text{mS}.$$

Pošto smo dobili ekvivalentne parametre elemenata koji se nalaze u dve paralelne grane možemo sabrati odgovarajuće parametre:

$$G_e = G_1 + G_2 = 12 \, \text{mS} + 10 \, \text{mS} = 22 \, \text{mS},$$

$$B_e = B_1 + B_2 = 16 \, \text{mS} - 10 \, \text{mS} = 6 \, \text{mS}.$$

Admitansa kola je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{(22 \, \text{mS})^2 + (6 \, \text{mS})^2} = 22,8 \, \text{mS},$$

pa je impedansa kola:

$$Z_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{22,8 \cdot 10^{-3} \text{S}} = 43,9 \, \Omega.$$

Odgovarajući ekvivalentni redni parametri ove veze su:

$$R_e = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2} = \frac{22 \, \text{mS}}{(22 \, \text{mS})^2 + (6 \, \text{mS})^2} = 0,0423 \, \text{k}\Omega = 42,3 \, \Omega.$$

$$X_e = -\frac{B_e}{G_e^2 + B_e^2} = -\frac{6 \, \text{mS}}{(22 \, \text{mS})^2 + (6 \, \text{mS})^2} = -0,0115 \, \text{k}\Omega = 11,5 \, \Omega.$$

b) Kako je reaktansa kola negativna, $X_e < 0$, odnosno susceptansa pozitivna, $B_e > 0$, kolo je kapacitivnog karaktera.

c) Pošto znamo ekvivalentnu impedansu i efektivnu vrednost napona možemo odrediti efektivnu vrednost struje napojne grane:

$$I = \frac{U}{Z_e} = \frac{100 \text{ V}}{43,9 \Omega} = 2,28 \text{ A}.$$

d) Razlika faza napona i struje na celoj vezi je:

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{-11,5 \Omega}{42,3 \Omega} = \arctg (-0,27) = -0,26,$$

pa je faktor snage:

$$\cos \varphi_e = 0,96.$$

Snage možemo odrediti preko faktora snage, preko struje i rednih parametara, ili napona i paralelnih parametara:

$$P = UI \cos \varphi_e = I^2 R_e = U^2 G_e \approx 220 \text{ W},$$

$$Q = UI \sin \varphi_e = I^2 X_e = -U^2 B_e \approx -60 \text{ VAR}$$

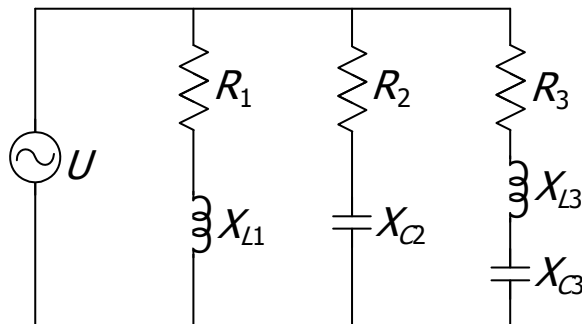
$$S = UI = I^2 Z_e = U^2 Y_e \approx 228 \text{ VA}.$$

IV.1.9.5 Tri prijemnika karakteristika $R_1 = 20 \Omega$, $X_{L1} = 20 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$, $X_{C2} = 80 \Omega$ i $R_3 = 50 \Omega$, $X_{L3} = 50 \Omega$, $X_{C3} = 100 \Omega$, vezana su paralelno i priključena na prostoperiodični napon

$$u(t) = 50\sqrt{2} \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$

Odrediti:

- ekvivalentnu impedansu kola,
- karakter kola,
- izraz po kome se menja trenutna vrednost struje u napojnoj grani,
- faktor snage kola,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola.



Rešenje:

a) Pošto se kolo sastoji od paralelno vezanih prijemnika, da bismo odredili parametre cele veze, moramo sabrati paralelne parametre svakog od prijemnika. Odredimo najpre redne parametre svakog od prijemnika, a zatim njegove paralelne parametre.

Reaktivni deo prvog prijemnika sastoji se samo od kalema pa je njegova reaktansa:

$$X_1 = X_{L1} = 20 \Omega.$$

Ekvivalentni paralelni parametri prvog prijemnika su:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{20 \Omega}{(20 \Omega)^2 + (20 \Omega)^2} = 0,025 \text{ S} = 25 \text{ mS},$$

$$B_1 = -\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = -\frac{20 \Omega}{(20 \Omega)^2 + (20 \Omega)^2} = -0,025 \text{ S} = -25 \text{ mS}.$$

Reaktivni deo drugog prijemnika sastoji se samo od kondenzatora pa je njegova reaktansa:

$$X_2 = -X_{C2} = -80 \Omega.$$

Ekvivalentni paralelni parametri drugog prijemnika su:

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{80 \Omega}{(80 \Omega)^2 + (-80 \Omega)^2} = 0,00625 \text{ S} = 6,25 \text{ mS},$$

$$B_2 = -\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = -\frac{-80 \Omega}{(80 \Omega)^2 + (-80 \Omega)^2} = 0,00625 \text{ S} = 6,25 \text{ mS}.$$

Reaktansa trećeg prijemnika je:

$$X_3 = X_{L3} - X_{C3} = 50 \Omega - 100 \Omega = -50 \Omega.$$

Ekvivalentni paralelni parametri trećeg prijemnika su:

$$G_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + X_3^2} = \frac{50 \Omega}{(50 \Omega)^2 + (-50 \Omega)^2} = 0,01 \text{ S} = 10 \text{ mS},$$

$$B_3 = -\frac{X_3}{R_3^2 + X_3^2} = -\frac{-50 \Omega}{(50 \Omega)^2 + (-50 \Omega)^2} = 0,01 \text{ S} = 10 \text{ mS}.$$

Konduktansa celog kola je:

$$G_e = G_1 + G_2 + G_3 = 25 \text{ mS} + 6,25 \text{ mS} + 10 \text{ mS} = 41,25 \text{ mS},$$

dok je susceptansa:

$$B_e = B_1 + B_2 + B_3 = -25 \text{ mS} + 6,25 \text{ mS} + 10 \text{ mS} = -8,75 \text{ mS}.$$

Admitansa celog kola je:

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{(41,25 \text{ mS})^2 + (-8,75 \text{ mS})^2} = 42,17 \text{ mS},$$

pa je impedansa:

$$Z_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{42,17 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 23,7 \Omega.$$

b) Pošto je ekvivalentna susceptansa celog kola negativna, $B_e < 0$, kolo ima pretežno induktivni karakter.

c) Na osnovu izraza po kome se menja trenutna vrednost napona možemo odrediti:

- amplitudu napona $U_m = 50\sqrt{2} \text{ V}$,
- efektivnu vrednost napona $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 50 \text{ V}$,
- kružnu učestanost $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$,
- početnu fazu $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Efektivna vrednost struje napojne grane je:

$$I = U \cdot Y_e = 50 \text{ V} \cdot 42,17 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 2,1 \text{ A} ,$$

pa je amplituda:

$$I_m = I\sqrt{2} = 2,1 \cdot \sqrt{2} \text{ A} = 2,97 \text{ A} .$$

Da bismo odredili početnu fazu ove struje moramo odrediti razliku faza struje i napona kola:

$$\nu_e = \arctg \frac{B_e}{G_e} = \arctg \frac{-8,75 \text{ mS}}{41,25 \text{ mS}} = \arctg (-0,21) = -0,21 .$$

Početna faza struje je:

$$\psi = \theta + \nu_e = \frac{\pi}{4} + (-0,21) = 0,79 - 0,21 = 0,58 .$$

Izraz po kome se menja trenutna vrednost struje napojne grane je:

$$i_1(t) = 2,97 \sin(10^5 t + 0,58) \text{ A}$$

d) Faktor snage kola je:

$$\cos \varphi_e = \cos(-\nu_e) = \cos(-0,21) = 0,98 .$$

e) Aktivna, reaktivna i prividna snaga kola su:

$$P = UI \cos \varphi_e = 50 \text{ V} \cdot 2,1 \text{ A} \cdot 0,98 = 102,9 \text{ W} ,$$

$$Q = UI \sin \varphi_e = 50 \text{ V} \cdot 2,1 \text{ A} \cdot \sin(-0,21) = -22,05 \text{ VAR}$$

$$S = UI = 50 \text{ V} \cdot 2,1 \text{ A} = 105 \text{ VA} .$$

IV.2 REŠAVANJE SLOŽENIH ELEKTRIČNIH KOLA PRIMENOM KOMPLEKSNOG RAČUNA

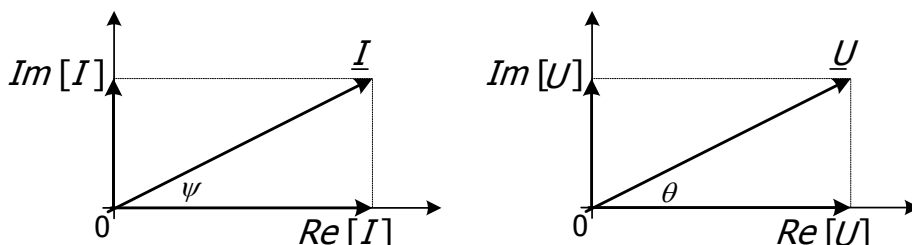
IV.2.1 PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM IZRAZIMA

TEORIJSKA OSNOVA

- Rešavanje složenih električnih mreža primenom trigonometrijskog računa dosta je složeno. Zato se uvodi rešavanje složenih mreža primenom kompleksnog računa.
- Kako se realne fizičke veličine predstavljaju kompleksnim izrazima?
 - Kompleksni izrazi za napon i električnu struju su eksponencijalni oblici kompleksnog broja:

$$\underline{U} = Ue^{j\theta} \quad \begin{array}{l} U - \text{efektivna vrednost prostoperiodičnog napona} \\ I - \text{efektivna vrednost prostoperiodične struje} \end{array}$$

$$\underline{I} = Ie^{j\psi} \quad \begin{array}{l} \theta - \text{početna faza napona} \\ \psi - \text{početna faza struje} \end{array}$$



- Kompleksni izraz za impedansu dobija se kao količnik kompleksnih izraza za napon i struju:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{U}{I} e^{j(\theta-\psi)} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX.$$

- Kompleksni izraz za admitansu dobija se kao količnik kompleksnih izraza za struju i napon:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\psi}}{Ue^{j\theta}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi-\theta)} = Ye^{j\nu} = Y \cos \nu + jY \sin \nu = G + jB.$$

- Kompleksni izraz za prividnu snagu dobija se kao proizvod kompleksnog izraza za napon i konjugovano kompleksnog izraza za struju:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\theta} Ie^{-j\psi} = UIe^{j(\theta-\psi)} = Se^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ.$$

- Sve ove veličine se proračunavaju prema pravilima o kompleksnim brojevima.
- Iz kompleksnih izraza za impedansu, admitansu i prividnu snagu sledi:
 - Realni deo kompleksnog izraza odgovara aktivnoj veličini (otpornost, provodnost ili snaga).
 - Imaginarni deo kompleksnog izraza odgovara reaktivnoj veličini (otpornost, provodnost ili snaga).
 - Prividne veličine se dobijaju po pravilu proračuna realnih veličina (ili proračuna modula kompleksnog broja, što je isto):

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

ZADACI

IV.2.1.1 Za sledeće struje i napone, za koje su dati izrazi po kojima se menjaju njihove trenutne vrednosti, napisati izraze u kompleksnom obliku:

a) $i_1(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(10^4 t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A},$

b) $u_1(t) = 4 \sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V},$

c) $i_2(t) = \sin \omega t \text{ A}.$

Rešenje:

a) Analizirajući izraz po kome se menja trenutna vrednost struje $i_1(t)$ zaključujemo da je:

- amplituda $I_{1m} = 2\sqrt{2} \text{ A},$
- efektivna vrednost $I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} \text{ A}}{\sqrt{2}} = 2 \text{ A},$
- kružna učestanost $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1},$
- početna faza $\psi_1 = \frac{\pi}{6}.$

Kompleksni izraz za jačinu struje je:

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} = 2 \text{ A} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

Primetimo da smo za oznaku kompleksne veličine uveli crtu ispod oznake veličine. Da bismo odredili realni i imaginarni deo kompleksnog izraza ove struje primenimo Ojlerovi formulu:

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi,$$

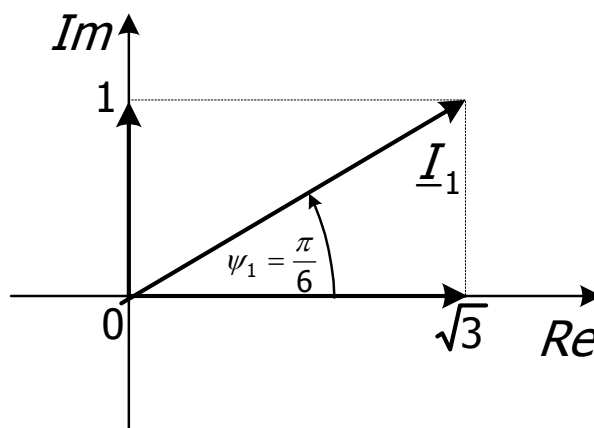
$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} = I_1 (\cos \psi_1 + j \sin \psi_1) = I_1 \cos \psi_1 + j \cdot I_1 \sin \psi_1.$$

Zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

$$\underline{I}_1 = 2 \text{ A} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 2 \text{ A} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \text{ A} \cdot (0,5\sqrt{3} + j0,5) = (\sqrt{3} + j) \text{ A}.$$

Na slici IV.2.1.1.1 prikazana je struja $\underline{I}_1$ u kompleksnoj ravni. Veličina u kompleksnoj ravni se može nacrtati na dva načina. Prema prvom načinu na realnu osu se nanosi realni deo veličine, a na imaginarnu osu imaginarni deo veličine, pri čemu treba voditi računa o znaku svakog dela. Strelice realne i imaginarne ose pokazuju pozitivan deo ose. U našem slučaju na realnu osu nanosimo $\sqrt{3}$, a na imaginarnu osu nanosimo 1, kao što se vidi na slici IV.2.1.1.1. Dijagonala pravougaonika određenog ovim dvema veličinama je prikaz naše veličine. Dužina ove dijagonale jednaka je efektivnoj vrednosti posmatrane kompleksne veličine, a u našem slučaju je to 2 A. Prema drugom načinu najpre se nacrtaju ugao i to sa početkom na pozitivnom delu realne ose, prema matematičkom smeru. Matematički smer je smer okretanja suprotno od smera kretanja kazaljke na satu. Ako je ugao pozitivan ugao se određuje u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu, a ako je ugao negativan ugao se određuje u smeru kazaljke na satu. U našem slučaju ugao je pozitivan pa se kompleksna veličina – struja crta pomerena za ugao $\frac{\pi}{6}$ suprotno od smera

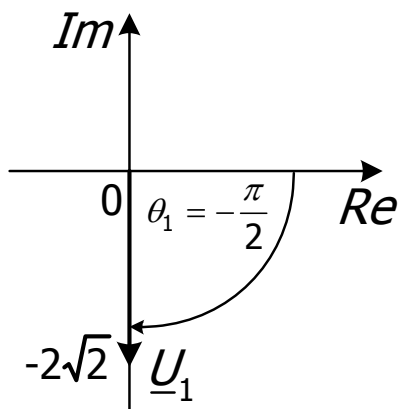
kazaljke na satu, a dužina vektora je jednaka efektivnoj vrednosti. Naravno, na oba načina se dobija ista kompleksna predstava veličine u kompleksnoj ravni.



Slika IV.2.1.1.1

b) Parametri analiziranog napona su:

- amplituda $U_{1m} = 4 \text{ V}$,
- efektivna vrednost $U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{4 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ V}$,
- kružna učestanost $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$,
- početna faza $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.



Slika IV.2.1.1.2

U kompleksnom izrazu za napon primenimo Ojlerovu formulu:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= U_1 e^{j\theta_1} = 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot (0 - j) = -j2\sqrt{2} \text{ V}.\end{aligned}$$

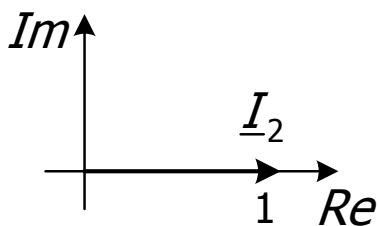
Kompleksni izraz za napon $\underline{U}_1$ ima samo imaginarni deo. Na slici IV.2.1.1.2 prikazan je napon $\underline{U}_1$ u kompleksnoj ravni.

c) Parametri analizirane struje su:

- amplituda $I_{2m} = 1 \text{ A}$,
- efektivna vrednost $I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{2} \text{ A}$,
- početna faza $\psi_2 = 0$.

Kompleksni izraz za jačinu struje je:

$$\underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_1} = 0,5\sqrt{2} \text{ A} \cdot e^{j0} = 0,5\sqrt{2} \text{ A} \cdot (\cos 0 + j \sin 0) = 0,5\sqrt{2} \text{ A} \cdot (1 + j0) = 0,5\sqrt{2} \text{ A}$$



Kompleksni izraz za struju $\underline{I}_2$ ima samo realni deo. Na slici IV.2.1.1.3 prikazana je struja $\underline{I}_2$ u kompleksnoj ravni.

Slika IV.2.1.1.3

IV.2.1.2 Za sledeće struje i napone koji su dati u kompleksnom obliku napisati izraze po kojima se menjaju njihove trenutne vrednosti:

- a) $\underline{U}_1 = (5 + j5) \text{ V}$,
- b) $\underline{I}_2 = (2 - j2\sqrt{3}) \text{ A}$,
- c) $\underline{U}_2 = 10 \text{ V}$,
- d) $\underline{I}_2 = -\sqrt{2} \text{ A}$,
- e) $\underline{U}_3 = j3 \text{ V}$.

Rešenje:

a) Ako je dat napon u kompleksnom obliku:

$$\underline{U}_1 = \text{Re}[\underline{U}_1] + j \text{Im}[\underline{U}_1],$$

onda je efektivna vrednost napona:

$$U_1 = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{U}_1] + \text{Im}^2[\underline{U}_1]},$$

a početna faza:

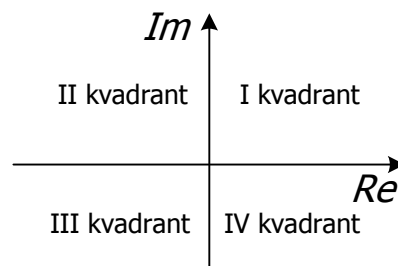
$$\theta_1 = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{U}_1]}{\text{Re}[\underline{U}_1]}.$$

Početne faze napona i struje, θ i ψ , mogu imati vrednosti između $-\pi$ i π :

$$-\pi \leq \theta, \psi \leq \pi,$$

(za razliku od uglova φ i ν , za koje važi $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi, \nu \leq \frac{\pi}{2}$). S

obzirom da poslednji izraz ima dva rešenja, vrednost za početnu fazu se određuje na osnovu znakova realnog i imaginarnog dela (odnosno kvadranta u kompleksnoj ravni kome pripada posmatrana veličina). Kada su realni i imaginarni deo pozitivni ($\text{Re}[\underline{U}_1], \text{Im}[\underline{U}_1] > 0$) posmatrana veličina pripada prvom kvadrantu; kada su realni i imaginarni deo negativni ($\text{Re}[\underline{U}_1], \text{Im}[\underline{U}_1] < 0$) posmatrana veličina pripada trećem kvadrantu; za slučaj kada je $\text{Re}[\underline{U}_1] > 0, \text{Im}[\underline{U}_1] < 0$ posmatrana veličina pripada četvrtom



Slika IV.2.1.2.1

kvadrantu; za slučaj kada je $\text{Re}[\underline{U}_1] < 0$, $\text{Im}[\underline{U}_1] > 0$ posmatrana veličina pripada trećem kvadrantu. Kvadranti su označeni na slici IV.2.1.2.1.

U našem slučaju realni i imaginarni deo kompleksnog napona $\underline{U}_1$ su:

$$\text{Re}[\underline{U}_1] = 5 \text{ V} \quad \text{ i } \quad \text{Im}[\underline{U}_1] = 5 \text{ V}.$$

Nacrtajmo kompleksni napon $\underline{U}_1$ u kompleksnoj ravni, kao što je prikazano na slici IV.2.1.2.2.

Efektivna vrednost napona je:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{\text{Re}^2[\underline{U}_1] + \text{Im}^2[\underline{U}_1]} = \sqrt{(5 \text{ V})^2 + (5 \text{ V})^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot (5 \text{ V})^2} = 5\sqrt{2} \text{ V}, \end{aligned}$$

pa je amplituda:

$$U_{1m} = U_1 \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ V} \cdot \sqrt{2} = 10 \text{ V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta_1 = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{U}_1]}{\text{Re}[\underline{U}_1]} = \arctg \frac{5 \text{ V}}{5 \text{ V}} = \arctg 1.$$

Izraz $\arctg 1$ ima dva rešenja: $\frac{\pi}{4}$ i $-\frac{3\pi}{4}$. S obzirom da su realni i imaginarni deo pozitivni, kompleksni napon $\underline{U}_1$ se nalazi u prvom kvadrantu kompleksne ravni, kao što se može videti na slici IV.2.1.2.2. (Da bi se izbegle greške u određivanju početne faze najbolje je uvek na početku nacrtati veličinu u kompleksnoj ravni.) U prvom kvadrantu se nalazi vrednost $\frac{\pi}{4}$, pa je:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Na osnovu kompleksnog izraza ne može se dobiti informacija o kružnoj učestanosti. Sada možemo napisati izraz za trenutnu vrednost napona:

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \theta_1) = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$

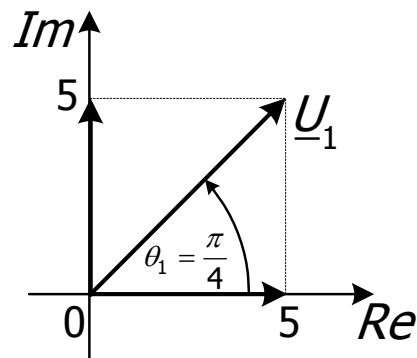
b) Realni i imaginarni deo kompleksne struje $\underline{I}_1$ su:

$$\text{Re}[\underline{I}_1] = 2 \text{ A} \quad \text{ i } \quad \text{Im}[\underline{I}_1] = -2\sqrt{3} \text{ A}.$$

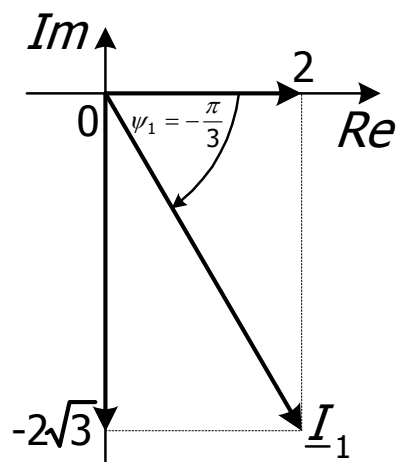
Na slici IV.2.1.2.3 prikazana je struja $\underline{I}_1$ u kompleksnoj ravni.

Efektivna vrednost struje je:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}_1] + \text{Im}^2[\underline{I}_1]} = \sqrt{(2 \text{ A})^2 + (-2\sqrt{3} \text{ A})^2} = \\ &= \sqrt{4 \text{ A}^2 + 12 \text{ A}^2} = 4 \text{ A}, \end{aligned}$$



Slika IV.2.1.2.2



Slika IV.2.1.2.3

pa je amplituda:

$$I_{1m} = I_1 \sqrt{2} = 4 \text{ A} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ A}.$$

Početna faza struje je:

$$\psi_1 = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{I}_1]}{\text{Re}[\underline{I}_1]} = \arctg \frac{-2\sqrt{3} \text{ A}}{2 \text{ A}} = \arctg(-\sqrt{3}).$$

Rešenja ovog izraza su: $-\frac{\pi}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}$. Realni deo je pozitivan, a imaginarni deo je negativan, pa se kompleksna struja $\underline{I}_1$ nalazi u četvrtom kvadrantu kompleksne ravni, kao što se može videti na slici IV.2.1.2.2. U četvrtom kvadrantu se nalazi vrednost $-\frac{\pi}{3}$, pa je:

$$\psi_1 = -\frac{\pi}{3}.$$

Izraz za trenutnu vrednost struje je:

$$i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) = 4\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}.$$

c) Realni i imaginarni deo kompleksnog napona $\underline{U}_2$ su:

$$\text{Re}[\underline{U}_2] = 10 \text{ V} \quad \text{i} \quad \text{Im}[\underline{U}_2] = 0 \text{ V}.$$

Na slici IV.2.1.2.3 prikazan je napon $\underline{U}_2$ u kompleksnoj ravni.



Slika IV.2.1.2.3

Efektivna vrednost napona je:

$$\begin{aligned} U_2 &= \sqrt{\text{Re}^2[\underline{U}_2] + \text{Im}^2[\underline{U}_2]} = \sqrt{(10 \text{ V})^2 + (0 \text{ V})^2} = \\ &= \sqrt{(10 \text{ V})^2} = 10 \text{ V}, \end{aligned}$$

pa je amplituda:

$$U_{2m} = U_2 \sqrt{2} = 10 \text{ V} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta_2 = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{U}_2]}{\text{Re}[\underline{U}_2]} = \arctg \frac{0 \text{ V}}{10 \text{ V}} = \arctg 0.$$

Rešenja ovog izraza su: 0 i π . S obzirom da je realni deo pozitivan, a imaginarni jednak nuli, početna faza napona je:

$$\theta_2 = 0.$$

Ovo se moglo videti i direktno na slici IV.2.1.2.3. Izraz za trenutnu vrednost struje je:

$$u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \theta_2) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 0) \text{ V} = 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}.$$

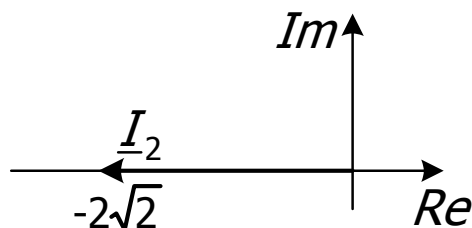
d) Napišimo potrebne parametre:

$$\operatorname{Re}[\underline{I}_2] = -2\sqrt{2} \text{ A}, \operatorname{Im}[\underline{I}_2] = 0 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{\operatorname{Re}^2[\underline{I}_2] + \operatorname{Im}^2[\underline{I}_2]} = \sqrt{(-2\sqrt{2} \text{ A})^2 + (0 \text{ A})^2} = \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2} \text{ A})^2} = 2\sqrt{2} \text{ A} \end{aligned}$$

$$I_{2m} = I_2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ A} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ A}$$

$$\psi_2 = \arctg \frac{\operatorname{Im}[\underline{I}_2]}{\operatorname{Re}[\underline{I}_2]} = \arctg \frac{0 \text{ A}}{-2\sqrt{2} \text{ A}} = \arctg 0$$



Slika IV.2.1.2.4

S obzirom da je realni deo negativan, a imaginarni jednak nuli, i kao što se može videti na slici IV.2.1.2.4, početna faza struje je:

$$\psi_2 = \pi,$$

pa je:

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = 4 \sin(\omega t + \pi) \text{ A}.$$

Napomena: Jedino u ovom slučaju moguća su dva rešenja: π i $-\pi$, jer oba pripadaju oblasti definisanosti početne faze, a u suštini predstavljaju istu vrednost. Rešenje $\arctg 0 = 0$ smo odmah odbacili jer je realan deo negativan.

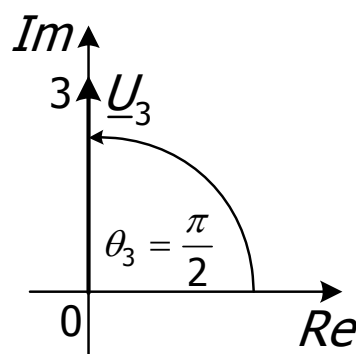
e) Napišimo potrebne parametre:

$$\operatorname{Re}[\underline{U}_3] = 0 \text{ V}, \operatorname{Im}[\underline{U}_3] = j3 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \sqrt{\operatorname{Re}^2[\underline{U}_3] + \operatorname{Im}^2[\underline{U}_3]} = \sqrt{(0 \text{ V})^2 + (3 \text{ V})^2} = \\ &= \sqrt{(3 \text{ V})^2} = 3 \text{ V} \end{aligned}$$

$$U_{3m} = U_3 \sqrt{2} = 3 \text{ V} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ V}$$

$$\theta_3 = \arctg \frac{\operatorname{Im}[\underline{U}_3]}{\operatorname{Re}[\underline{U}_3]} = \arctg \frac{3 \text{ V}}{0 \text{ V}} = \arctg \infty$$



Slika IV.2.1.2.5

Rešenja ovog izraza su $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$. S obzirom da je imaginarni deo pozitivan, a realni jednak nuli, i kao što se može videti na slici IV.2.1.2.5, početna faza napona je:

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2},$$

pa je:

$$u_3(t) = U_{3m} \sin(\omega t + \theta_3) = 3\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}.$$

IV.2.2 POSTUPCI ZA PRORAČUN SLOŽENIH ELEKTRIČNIH MREŽA

TEORIJSKA OSNOVA

- Od zakona se primenjuju Omov, I i II Kirhofov zakon za kompleksne izraze prostoperiodičnih veličina.
- Od postupaka ćemo primenjivati:
 - metod konturnih struja,
 - transfiguracije,
 - Tevenenovu teoremu.
- Sve ove postupke smo učili kod jednosmernih električnih struja, pa ćemo ih se sada samo podsetiti.

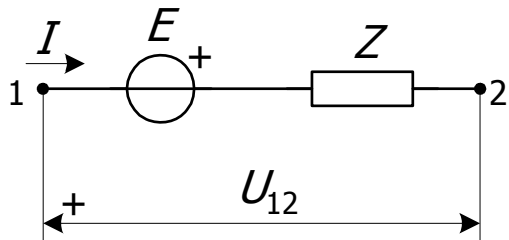
ZADACI

IV.2.2.1.1 Za deo kola prostoperiodične struje sa slike poznato je :

$$\underline{E} = (10 - j20) \text{ V}, \quad \underline{Z}_1 = 100(1 + j3) \Omega,$$

$$\underline{I} = (-20 - j40) \text{ mA}.$$

Odrediti efektivnu vrednost i početnu fazu napona $\underline{U}_{12}$.



Rešenje:

Za kompleksne izraze struja i napona važe svi zakoni sa kojima smo se upoznali kod vremenski nepromenljivih (jednosmernih) struja. Zbog toga ih ovde nećemo detaljno ponavljati jer se pretpostavlja da su ih studenti već naučili.

Primenimo izraz za računanje napona između dve tačke krećući se od tačke 2 ka tački 1:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{Z}\underline{I} - \underline{E} = 100(1 + j3) \Omega \cdot (-20 - j40) \cdot 10^{-3} \text{ A} - (10 - j20) \text{ V} = \\ &= 100(1 + j3) \Omega \cdot (-20)(1 + j2) \cdot 10^{-3} \text{ A} - (10 - j20) \text{ V} = \\ &= -100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} (1 \cdot 1 + j3 \cdot 1 + 1 \cdot j2 + j3 \cdot j2) \text{ V} - (10 - j20) \text{ V} = \\ &= -100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + j3 + j2 - 6) \text{ V} - (10 - j20) \text{ V} = -2 \cdot (-5 + j5) \text{ V} - (10 - j20) \text{ V} = \\ &= (10 - j10) \text{ V} - (10 - j20) \text{ V} = j10 \text{ V}. \end{aligned}$$

Ovde smo primenili pravilo o množenju dva kompleksna broja (množe se realni i imaginarni delovi kompleksnih brojeva, svaki sa svakim) i o sabiranju dva kompleksna broja (sabiraju se realni sa realnim i imaginarni sa imaginarnim delom), (pogledati *matematički podsetnik*, strana XII).

Realni i imaginarni deo napona $\underline{U}_{12}$ su:

$$\text{Re}[\underline{U}_{12}] = 0 \text{ V} \quad \text{i} \quad \text{Im}[\underline{U}_{12}] = j10 \text{ V}$$

Efektivna vrednost napona je:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{\text{Re}^2[\underline{U}_{12}] + \text{Im}^2[\underline{U}_{12}]} = \sqrt{(0 \text{ V})^2 + (10 \text{ V})^2} = \\ &= \sqrt{(10 \text{ V})^2} = 10 \text{ V}, \end{aligned}$$

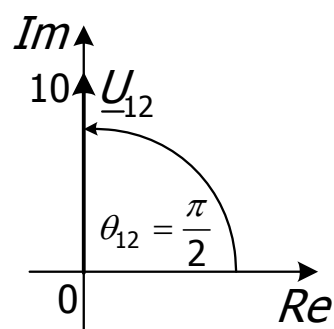
pa je amplituda:

$$U_{12m} = U_{12} \sqrt{2} = 10 \text{ V} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta_{12} = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{U}_{12}]}{\text{Re}[\underline{U}_{12}]} = \arctg \frac{10 \text{ V}}{0 \text{ V}} = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Na slici IV.2.2.1.1.1 prikazan je napon $\underline{U}_{12}$ u kompleksnoj ravni.



Slika IV. 2.2.1.1.1

IV.2.2.1.2 Redna veza RLC elemenata, $R = 10 \, \Omega$, $L = 10 \, \text{mH}$ i $C = 500 \, \mu\text{F}$, priključena je na napon $\underline{U} = 100 \, \text{V}$. Napisati izraz za trenutnu vrednost struje ako je $f = 100 \, \text{Hz}$.

Rešenje:

Ova vrsta zadatka može se rešiti u realnom ili u kompleksnom domenu. Rešimo zadatak u kompleksnom domenu.

Kružna učestanost je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 \, \text{Hz} = 628 \, \text{s}^{-1}$$

Reaktansa ove redne veze je:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 628 \, \text{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \, \text{H} - \frac{1}{628 \, \text{s}^{-1} \cdot 500 \cdot 10^{-6} \, \text{F}} = 6,28 \, \Omega - 3,18 \, \Omega = 3,1 \, \Omega.$$

Primetimo da je ova veza pretežno induktivnog karaktera pošto je reaktansa pozitivna.

Kompleksni izraz za impedansu je:

$$\underline{Z} = R + jX = 10 \, \Omega + j3,1 \, \Omega = (10 + j3,1)\Omega.$$

Prema Omovom zakonu struja kroz ovu rednu vezu je:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100 \, \text{V}}{(10 + j3,1)\Omega} = \frac{100 \, \text{V}}{(10 + j3,1)\Omega} \cdot \frac{10 - j3,1}{10 - j3,1} = \frac{100 \, \text{V} \cdot (10 - j3,1)}{(10 + j3,1)(10 - j3,1)\Omega} = 100 \cdot \frac{10 - j3,1}{10^2 + 3,1^2} \, \text{A} = \\ &= 100 \cdot \frac{10 - j3,1}{109,61} \, \text{A} = 0,91(10 - j3,1) \, \text{A}. \end{aligned}$$

Ovde smo primenili pravilo o deljenju dva kompleksna broja: i brojilac i imenilac se množe konjugovano kompleksnom vrednošću imenioca. Konjugovano kompleksna vrednost nekog kompleksnog broja ima realan deo isti kao posmatrani kompleksni broj, dok je imaginarni deo suprotnog znaka. S obzirom da je proizvod dva konjugovano kompleksna broja realan broj (čija je vrednost jednaka zbiru kvadrata realnog i imaginarnog dela posmatranih konjugovano kompleksnih brojeva) ovaj način rešavanja količnika dva kompleksna broja se primenjuje se da bi se u imeniocu dobio realan broj. Rezimirajmo na našem primeru: imenilac je $10 + j3,1$, pa je konjugovano kompleksna vrednost $10 - j3,1$, proizvod ova dva broja je $10^2 + 3,1^2 = 109,61$.

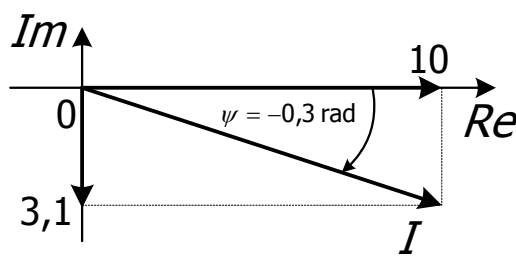
Odredimo izraz za trenutnu vrednost struje:

$$\text{Re}[\underline{I}] = 0,91 \cdot 10 \, \text{A} \quad \text{i} \quad \text{Im}[\underline{I}] = -0,91 \cdot 3,1 \, \text{A},$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}] + \text{Im}^2[\underline{I}]} = \sqrt{(0,91 \cdot 10 \, \text{A})^2 + (-0,91 \cdot 3,1 \, \text{A})^2} = \\ &= 0,91 \sqrt{(10 \, \text{A})^2 + (3,1 \, \text{A})^2} = 0,91 \sqrt{109,61 \, \text{A}^2} = 9,52 \, \text{A}, \end{aligned}$$

$$I_m = I\sqrt{2} = 9,52 \, \text{A} \cdot \sqrt{2} = 13,47 \, \text{A},$$

$$\psi = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{I}]}{\text{Re}[\underline{I}]} = \arctg \frac{-3,1 \, \text{A}}{10 \, \text{A}} = \arctg(-0,31).$$



Slika IV.2.2.1.2.1

Rešenja su $-0,31$ i $2,84$ (prisetimo se, kalkulator daje samo rešenje između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$, dakle u ovom slučaju daće rešenje $-0,31$, a drugo rešenje dobijamo tako što na prvo rešenje dodamo π). Kompleksna struja se nalazi u četvrtom kvadrantu (realni deo pozitivan, imaginarni deo negativan), pa je:

$$\psi = -0,3.$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 13,47 \sin(628t - 0,3) \text{ A}.$$

IV.2.2.2 METOD KONTURNIH STRUJA

TEORIJSKA OSNOVA

- Broj jednačina koje pišemo je $n_g - (n_\epsilon - 1)$.

- Opšti sistem, na primer drugog reda je:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11}\underline{I}_I + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{II} &= \underline{E}_I \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_I + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{II} &= \underline{E}_{II}\end{aligned}$$

gde su $\underline{Z}_{11}$ – kompleksni izraz za impedansu prve konture. Uvek je pozitivan;

$\underline{Z}_{22}$ – kompleksni izraz za impedansu druge konture. Uvek je pozitivan;

$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ – kompleksni izraz za impedansu zajedničku za prvu i drugu konturu. Može biti i pozitivan i negativan.

$\underline{E}_I$ – kompleksni izraz za elektromotornu silu naponskih generatora u prvoj konturi prema usaglašenom referentnom smeru;

$\underline{E}_{II}$ – kompleksni izraz za elektromotornu silu naponskih generatora u drugoj konturi prema usaglašenom referentnom smeru.

- Kada rešimo kompleksne izraze za konturne struje, onda preko njih dobijamo kompleksne izraze za struje grana.
- Efektivne vrednosti prostoperiodičnih struja možemo izračunati iz kompleksnih izraza za struje grana:

$$I = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}] + \text{Im}^2[\underline{I}]}.$$

- Ako u nekoj grani kola postoji strujni generator, ne smemo zaboraviti da samo jednu konturu smemo da provučemo kroz tu granu. Električna struja strujnog generatora biće jednaka toj konturnoj struji. Broj jednačina će se tako smanjiti za broj idealnih strujnih generatora u kolu, n_ϵ .

ZADACI

IV. 2.2.2.1 U kolu na slici poznato je:

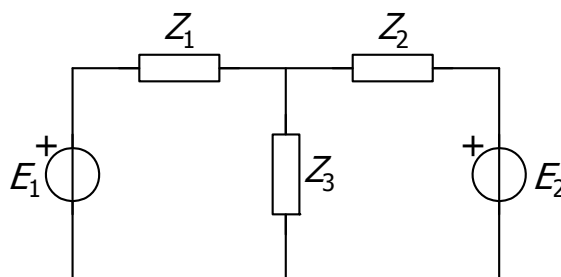
$$\underline{E}_1 = (10 + j20) \text{ V}, \quad \underline{E}_2 = j30 \text{ V},$$

$$\underline{Z}_1 = (1 + j2) \Omega, \quad \underline{Z}_2 = (2 + j4) \Omega,$$

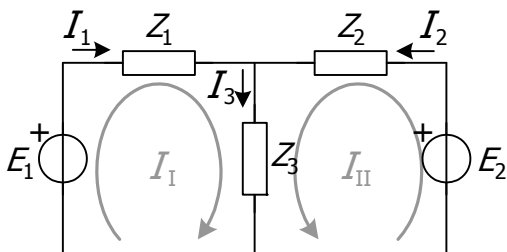
$$\underline{Z}_3 = (1 + j2) \Omega, \quad \omega = 314 \text{ rad/s}.$$

a) Odrediti kompleksne izraze za struje u kolu primenom metode konturnih struja.

b) Odrediti kompleksnu, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu prijemnika $\underline{Z}_2$ i generatora $\underline{E}_2$. Da li se elektromotorna sila ponaša kao generator ili kao potrošač?



Rešenje:



Slika IV.2.2.2.1.1

a) Prisjetimo se metode konturnih struja, koja se primenjuje i kod kompleksnih struja na potpuno isti način kao kod vremenskih nepromenljivih (jedsosmernih) struja.

Kolo koje analiziramo ima $n_k = 2$ čvora i $n_g = 3$ grane, pa je broj konturnih struja:

$$n_g - (n_k - 1) = 3 - (2 - 1) = 2.$$

Na slici IV.2.2.2.1.1 prikazana je jedna mogućnost za izbor konturnih struja i obeležene su nepoznate struje grana. Opšti oblik jednačina konturnih struja za ovo kolo je drugog reda (imamo dve konturne struje) i glasi:

$$\underline{Z}_{11}\underline{I}_I + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{II} = \underline{E}_I \quad (1)$$

$$\underline{Z}_{21}\underline{I}_I + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{II} = \underline{E}_{II} \quad (2)$$

Razlika u odnosu na metodu konturnih struja kod jednosmernih struja je što se umesto otpornosti javljaju impedanse. Značenje ovih impedansi je isto kao značenje analognih otpornosti.

$\underline{Z}_{11}$ predstavlja zbir svih impedansi kroz koje protiče konturna struja $\underline{I}_I$ i uvek ima pozitivan predznak:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = (1 + j2) \Omega + (1 + j2) \Omega = (2 + j4) \Omega.$$

$\underline{Z}_{22}$ predstavlja zbir svih impedansi kroz koje protiče konturna struja $\underline{I}_{II}$ i uvek ima pozitivan predznak:

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (2 + j4) \Omega + (1 + j2) \Omega = (3 + j6) \Omega.$$

Impedanse $\underline{Z}_{12}$ i $\underline{Z}_{21}$ uvek su jednake (imaju iste brojeve u indeksu, različitog redosleda) i predstavljaju ukupnu impedansu grane koja je zajednička za konturnu struju $\underline{I}_I$ i konturnu struju $\underline{I}_{II}$. U ovom kolu je to grana sa impedansom $\underline{Z}_3$. S obzirom da su konturne struje kroz ovu zajedničku granu istog smera, predznak otpornosti $\underline{Z}_{12}$ i $\underline{Z}_{21}$ je pozitivan:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 = (1 + j2) \Omega.$$

$\underline{E}_I$ je algebarski zbir svih elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja $\underline{I}_I$. Konturna struja $\underline{I}_I$ protiče kroz generator elektromotorne sile $\underline{E}_1$ i pošto se smer struje $\underline{I}_I$ poklapa sa referentnim smerom elektromotorne sile $\underline{E}_1$, ta elektromotorna sila ima predznak "+":

$$\underline{E}_I = \underline{E}_1$$

$\underline{E}_{II}$ je algebarski zbir svih elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja $\underline{I}_{II}$:

$$\underline{E}_{II} = \underline{E}_2$$

Ako ove izraze uvrstimo u opšti oblik jednačina za konturne struje dobijamo jednačine konturnih struja za analizirano kolo:

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)\underline{I}_I + \underline{Z}_3\underline{I}_{II} = \underline{E}_1 \quad (1)$$

$$\underline{Z}_3\underline{I}_I + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_{II} = \underline{E}_2 \quad (2)$$

Uvrstimo brojne vrednosti u prethodne dve jednačine vodeći računa o jedinicama krajnjeg rezultata. Uvrstimo otpornosti u omima (dobijene struje će biti u amperima):

$$(2 + j4)\underline{I}_I + (1 + j2)\underline{I}_{II} = (10 + j20) \quad (1)$$

$$(1 + j2)\underline{I}_I + (3 + j6)\underline{I}_{II} = j30 \quad (2)$$

Kada rešavamo sistem jednačina trudimo se da početni sistem što više uprostimo. Zato obe jednačine sistema podelimo sa $(1 + j2)$. Na taj način dobijamo realnu determinantu sistema pa smanjujemo broj deljenja kompleksnih brojeva.

$$2\underline{I}_I + \underline{I}_{II} = 10 \quad (1)$$

$$\underline{I}_I + 3\underline{I}_{II} = \frac{j30}{1 + j2} \cdot \frac{1 - j2}{1 - j2} = \frac{30(2 + j)}{1^2 + 2^2} = 6(2 + j) \quad (2)$$

Determinanta sistema i determinante promenljivih su:

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5,$$

$$\underline{\Delta}_I = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6(2 + j) & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 - 6(2 + j) \cdot 3 = 30 - 36 - j18 = -6 - j18 = -6(1 + j3),$$

$$\underline{\Delta}_{II} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 6(2 + j) \end{vmatrix} = 2 \cdot 6(2 + j) - 10 \cdot 1 = 24 + j12 - 10 = 14 + j12 = 2(7 + j6),$$

na osnovu čega se dobijaju konturne struje:

$$\underline{I}_I = \frac{\underline{\Delta}_I}{\underline{\Delta}} = \frac{-6(1 + j3)}{5} \text{ A} = 1,2(1 + j3) \text{ A}, \quad \underline{I}_{II} = \frac{\underline{\Delta}_{II}}{\underline{\Delta}} = \frac{2(7 + j6)}{5} \text{ A} = 0,4(7 + j6) \text{ A}.$$

Odredimo kompleksne struje grana. Struju $\underline{I}_1$ čini samo konturna struja $\underline{I}_I$ i istog je smera kao struja $\underline{I}_1$:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I = 1,2(1 + j3) \text{ A}.$$

Struju $\underline{I}_2$ čini samo konturna struja $\underline{I}_{II}$ i istog je smera kao struja $\underline{I}_2$:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{II} = 0,4(7 + j6) \text{ A}.$$

Struju $\underline{I}_3$ čine konturne struje $\underline{I}_I$ i $\underline{I}_{II}$ i obe su istog smera kao struja $\underline{I}_3$:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_I + \underline{I}_{II} = 1,2(1 + j3) \text{ A} + 0,4(7 + j6) \text{ A} = (4 + j6) \text{ A}.$$

b) S obzirom da znamo struju kroz otpornik $\underline{Z}_2$ možemo odrediti njegovu kompleksnu snagu:

$$\underline{S}_{Z_2} = \underline{U}_{Z_2} \underline{I}_2^* = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \underline{I}_2^* = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2^2$$

U izrazu za snagu pojavljuje se konjugovano kompleksna vrednost struje $\underline{I}_2^*$. Kada se u izrazu zameni napon na impedansi prema Omovom zakonu, u izrazu se javlja proizvod kompleksne vrednosti struje kroz impedansu i njene konjugovano kompleksne vrednosti. Ovaj proizvod je, kao što smo već pomenuli, realan i jednak je zbiru kvadrata realnih i imaginarnih delova struje, odnosno kvadratu njene efektivne vrednosti. Poslednji izvedeni izraz češće se koristi za izračunavanje kompleksne snage neke impedanse. Izračunajmo najpre efektivnu vrednost struje $\underline{I}_2$ pa zatim zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

$$\text{Re}[\underline{I}_2] = 0,4 \cdot 7 \text{ A}, \text{ Im}[\underline{I}_2] = 0,4 \cdot 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}_2] + \text{Im}^2[\underline{I}_2]} = \sqrt{(0,4 \cdot 7 \text{ A})^2 + (0,4 \cdot 6 \text{ A})^2} = 0,4 \sqrt{(7 \text{ A})^2 + (6 \text{ A})^2} = 0,4 \sqrt{85 \text{ A}^2} = 3,69 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_2} &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2^2 = (2 + j4) \Omega \cdot (0,4 \sqrt{85} \text{ A})^2 = (2 + j4) \Omega \cdot 0,16 \cdot 85 \text{ A} = \\ &= 13,6 \cdot (2 + j4) \text{ VA} = 27,2 \cdot (1 + j2) \text{ VA} \end{aligned}$$

S obzirom da je:

$$\underline{S}_{Z_2} = P_{Z_2} + jQ_{Z_2} = 27,2 \cdot (1 + j2) \text{ VA},$$

aktivna snaga, koja predstavlja Džulove gubitke na ovoj impedansi, je:

$$P_{Z_2} = 27,2 \text{ W},$$

dok je reaktivna snaga

$$Q_{Z_2} = 54,4 \text{ VAr},$$

a prividna snaga je:

$$S_{Z_2} = \sqrt{P_{Z_2}^2 + Q_{Z_2}^2} = \sqrt{(27,2 \text{ W})^2 + (54,4 \text{ VAr})^2} = 27,2 \cdot \sqrt{1^2 + 2^2} \text{ VA} = 27,2 \sqrt{5} \text{ VA} = 60,82 \text{ VA}$$

Kompleksna snaga generatora $\underline{E}_2$ je, prema usaglašenim referentnim smerovima (što, da se podsetimo, znači da struja kroz generator teče od negativnog ka pozitivnom kraju):

$$\begin{aligned} \underline{S}_{E_2} &= \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = j30 \text{ V} \cdot 0,4(7 + j6) \text{ A} = (j30 \cdot 0,4 \cdot 7 + j30 \cdot 0,4 \cdot j6) \text{ VA} = \\ &= (-72 + j84) \text{ VA} = 12(-6 + j7) \text{ VA} = P_{E_2} + jQ_{E_2} \end{aligned}$$

Aktivna snaga ovog generatora je:

$$P_{E_2} = -72 \text{ W}$$

Pošto je aktivna snaga ove elektromotorne sile negativna, ona se ponaša kao potrošač (dakle, nema veze sa znakom reaktivne snage).

Reaktivna snaga ovog generatora je:

$$Q_{E_2} = 84 \text{ VAr},$$

a prividna snaga je:

$$S_{E_2} = \sqrt{P_{E_2}^2 + Q_{E_2}^2} = \sqrt{(-72 \text{ W})^2 + (84 \text{ VAr})^2} = 12 \cdot \sqrt{6^2 + 7^2} \text{ VA} = 12 \sqrt{85} \text{ VA} = 110,63 \text{ VA}.$$

IV.2.2.2.2 Za kolo prikazano na slici metodom konturnih struja odrediti kompleksne izraze za struje u svim granama kola. Odrediti kompleksnu snagu strujnog generatora $\underline{I}_{g1}$.

Poznato je:

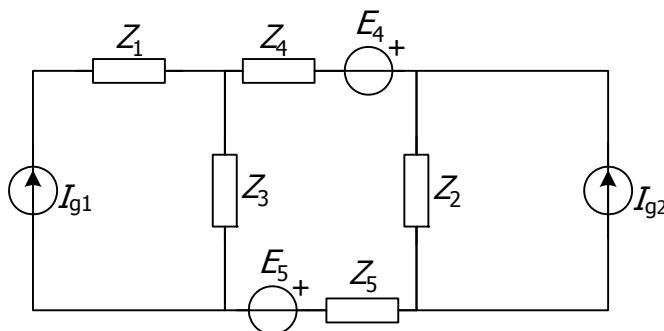
$$\underline{I}_{g1} = 250(1 + j1) \text{ mA}, \quad \underline{I}_{g2} = 100(1 - j2) \text{ mA},$$

$$\underline{E}_4 = 15 \text{ V}, \quad \underline{E}_5 = j5 \text{ V},$$

$$\underline{Z}_1 = (200 - j300) \Omega, \quad \underline{Z}_2 = (100 + j200) \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = (200 - j100) \Omega, \quad \underline{Z}_4 = (300 - j400) \Omega,$$

$$\underline{Z}_5 = (200 - j100) \Omega.$$



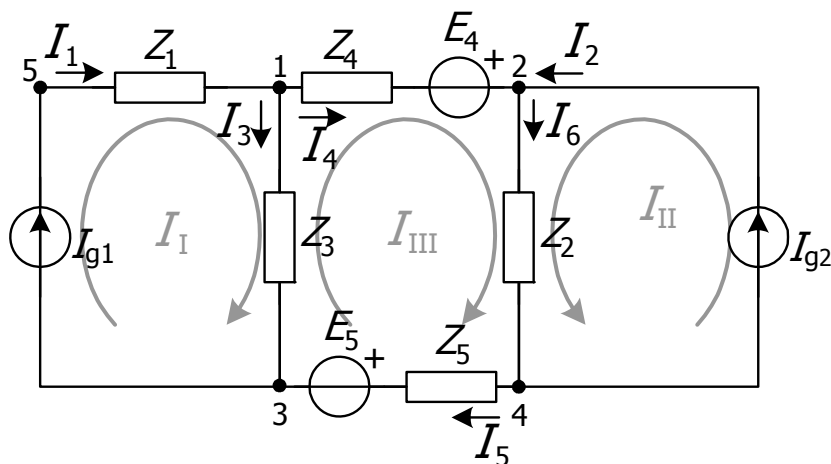
Rešenje:

Posmatrano kolo ima $n_k = 4$ čvora, $n_g = 6$ grana i sadrži $n_{tg} = 2$ idealna strujna generatora, pa je broj konturnih struja jednak:

$$n_g - (n_k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3,$$

a broj jednačina koje rešavamo je umanjen za broj idealnih strujnih generatora, jer po pravilu kroz svaki strujni generator prolazi tačno jedna konturna struja i njen intenzitet je određen strujom tog strujnog generatora. Dakle, broj jednačina koje rešavamo je:

$$n_g - (n_k - 1) - n_{tg} = 1.$$



Slika IV.2.2.2.2.1

Na slici IV.2.2.2.2.1 prikazana je jedna mogućnost za izbor konturnih struja i obeležene su nepoznate struje grana.

Opšti sistem jednačina konturnih struja je trećeg reda(imamo tri konturne struje). Pošto kroz svaki idealan strujni generator prolazi tačno jedna konturna struja i njen intenzitet je određen strujom tog strujnog generatora, **za konturnu struju koja prolazi kroz idealni strujni generator** (u ovom slučaju su to struje I_I i I_{II}) **ne postavlja se jednačina u opštem obliku**. Dakle, sistem jednačina konturnih struja za ovo kolo glasi:

$$\underline{I}_I = \underline{I}_{g1} \quad (1)$$

$$\underline{I}_{II} = \underline{I}_{g2} \quad (2)$$

$$\underline{Z}_{31} \underline{I}_I + \underline{Z}_{32} \underline{I}_{II} + \underline{Z}_{33} \underline{I}_{III} = \underline{E}_{III} \quad (3)$$

$\underline{Z}_{33}$ predstavlja zbir svih impedansi kroz koje protiče konturna struja $\underline{I}_{III}$ i uvek ima pozitivan predznak:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{33} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 = (100 + j200)\Omega + (200 - j100)\Omega + (300 - j400)\Omega + (200 - j100)\Omega = \\ &= ((100 + 200 + 300 + 200) + j(200 - 100 - 400 - 100))\Omega = (800 - j400)\Omega.\end{aligned}$$

$\underline{Z}_{31}$ predstavlja impedansu grane kroz koju protiču konturne struje $\underline{I}_I$ i $\underline{I}_{III}$ i negativnog je predznaka jer su struje $\underline{I}_I$ i $\underline{I}_{III}$ suprotnog smera u toj grani:

$$\underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_3 = -(200 - j100)\Omega.$$

$\underline{Z}_{32}$ predstavlja impedansu grane kroz koju protiču konturne struje $\underline{I}_{II}$ i $\underline{I}_{III}$ i pozitivnog je predznaka jer su struje $\underline{I}_{II}$ i $\underline{I}_{III}$ istog smera u toj grani:

$$\underline{Z}_{32} = \underline{Z}_2 = (100 + j200)\Omega.$$

$\underline{E}_{III}$ je algebarski zbir svih elektromotornih sila kroz koje protiče konturna struja $\underline{I}_{III}$:

$$\underline{E}_{III} = \underline{E}_4 - \underline{E}_5 = 15\text{ V} - j5\text{ V}.$$

Uvrstimo ove izraze u opšti oblik jednačina za konturne struje:

$$\underline{I}_I = \underline{I}_{g1} \quad (1)$$

$$\underline{I}_{II} = \underline{I}_{g2} \quad (2)$$

$$-\underline{Z}_3 \underline{I}_I + \underline{Z}_2 \underline{I}_{II} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \underline{I}_{III} = \underline{E}_4 - \underline{E}_5 \quad (3)$$

Zamenom poznate konturne struje $\underline{I}_I$ i $\underline{I}_{II}$ u jednačinu (3) dobijamo izraz za nepoznatu konturnu struju $\underline{I}_{III}$:

$$\begin{aligned}& -\underline{Z}_3 \underline{I}_{g1} + \underline{Z}_2 \underline{I}_{g2} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \underline{I}_{III} = \underline{E}_4 - \underline{E}_5 \\ & \underline{I}_{III} = \frac{\underline{E}_4 - \underline{E}_5 + \underline{Z}_3 \underline{I}_{g1} - \underline{Z}_2 \underline{I}_{g2}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \\ & = \frac{15\text{ V} - j5\text{ V} + 100(2 - j)\Omega \cdot 0,25(1 + j)\text{ A} - 100(1 + j2)\Omega \cdot 0,1(1 - j2)\text{ A}}{(800 - j400)\Omega} = \\ & = \frac{15\text{ V} - j5\text{ V} + 25(3 + j)\text{ V} - 50\text{ V}}{(800 - j400)\Omega} = \frac{40\text{ V} + j20\text{ V}}{(800 - j400)\Omega} \frac{800 + j400}{800 + j400} = \\ & = \frac{20 \cdot 400 \cdot (2 + j)(2 + j)}{800^2 + 400^2} = \frac{3 + j4}{100} = (0,03 + j0,04)\text{ A} = (30 + j40)\text{ mA}.\end{aligned}$$

Struje u granama kola su:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I = 0,25(1 + j)\text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{II} = 0,1(1 - j2)\text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_I - \underline{I}_{III} = 0,25(1 + j)\text{ A} - (0,03 - j0,04)\text{ A} = (0,22 + j0,21)\text{ A}.$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{III} = (0,03 + j0,04)\text{ A}$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{III} = (0,03 + j0,04)\text{ A}.$$

$$\underline{I}_6 = \underline{I}_{II} + \underline{I}_{III} = 0,1(1 - j2)\text{ A} + (0,03 + j0,04)\text{ A} = (0,13 - j0,16)\text{ A}.$$

Snaga strujnog generatora jednaka je proizvodu napona na strujnom generatoru i konjugovano kompleksne vrednosti struje strujnog generatora, prema usaglašenim referentnim smerovima. Kompleksna snaga strujnog generatora $\underline{S}_{I_{g1}}$ je:

$$\underline{S}_{I_{g1}} = \underline{U}_{53} \underline{I}_{g1}^*.$$

Odredićemo napon $\underline{U}_{53}$:

$$\underline{U}_{53} = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{Z}_1 \underline{I}_{g1} = 100(2 - j) \Omega \cdot (0,22 + j0,21) \text{ A} + 100(2 - j3) \Omega \cdot 0,25(1 + j) \text{ A} = (135 - j20) \text{ V},$$

pa je kompleksna snaga:

$$\underline{S}_{I_{g1}} = \underline{U}_{53} \underline{I}_{g1}^* = (135 - j20) \text{ V} \cdot 0,25(1 + j) \text{ A} = (38,75 + j28,75) \text{ VA}$$

Vidimo da je aktivna snaga strujnog izvora pozitivna:

$$P_{E_2} = 38,75 \text{ W}$$

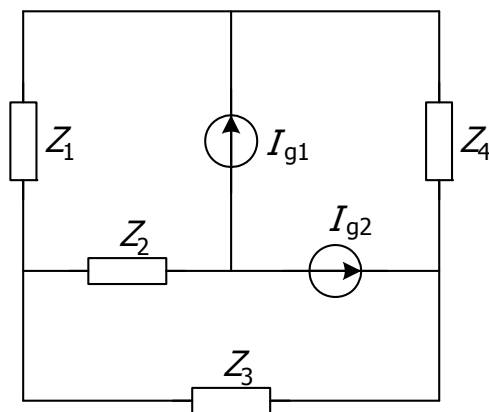
pa se on ponaša kao generator.

IV. 2.2.2.3 Za kolo prikazano na slici odrediti struje svih grana.

$$\underline{I}_{g1} = 1 \text{ A}, \quad \underline{I}_{g2} = j2 \text{ A},$$

$$\underline{Z}_1 = 10 \Omega, \quad \underline{Z}_2 = (5 + j5) \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = 5 \Omega, \quad \underline{Z}_4 = 15 \Omega, .$$



Rešenje:

Ovo kolo najlakše je rešiti metodom konturnih struja. Kolo ima $n_k = 4$ čvora, $n_g = 6$ grana i sadrži $n_{lg} = 2$ idealna strujna generatora, pa je broj konturnih struja jednak:

$$n_g - (n_k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3,$$

a broj jednačina koje rešavamo je:

$$n_g - (n_k - 1) - n_{lg} = 1.$$

Na slici IV.2.2.2.3.1 prikazana je jedina mogućnost za usvajanje konturnih struja. Na ovoj slici obeležene su i nepoznate struje grana. Konturne struje $\underline{I}_I$ i $\underline{I}_{II}$ određene su strujama strujnih generatora $\underline{I}_{g1}$ i $\underline{I}_{g2}$ pa sistem jednačina glasi:

$$\underline{I}_I = \underline{I}_{g1} \quad (1)$$

$$\underline{I}_{II} = \underline{I}_{g2} \quad (2)$$

$$\underline{Z}_{31} \underline{I}_I + \underline{Z}_{32} \underline{I}_{II} + \underline{Z}_{33} \underline{I}_{III} = \underline{E}_{III} \quad (3)$$

Pojedini parametri su:

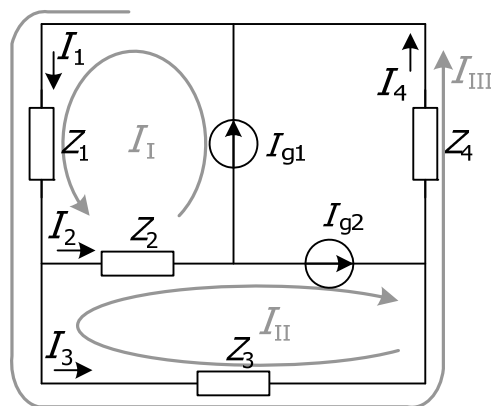
$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_1 = 10 \, \Omega,$$

$$\underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_3 = -5 \, \Omega,$$

$$\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = 30 \, \Omega$$

S obzirom da kolo ne sadrži naponske generatore, parametar je:

$$\underline{E}_{\text{III}} = 0 \, \text{V}.$$



Slika IV.2.2.2.3.1

Uvrstimo ove izraze u opšti oblik jednačina za konturne struje:

$$\underline{I}_I = \underline{I}_{g1} \quad (1)$$

$$\underline{I}_{II} = \underline{I}_{g2} \quad (2)$$

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_I - \underline{Z}_3 \underline{I}_{II} + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \underline{I}_{III} = 0 \quad (3)$$

Zamenom poznate konturne struje $\underline{I}_I$ i $\underline{I}_{II}$ u jednačinu (3) dobijamo izraz za nepoznatu konturnu struju $\underline{I}_{III}$:

$$\underline{I}_{III} = \frac{-\underline{Z}_1 \underline{I}_{g1} + \underline{Z}_3 \underline{I}_{g2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{-10 \, \Omega \cdot 1 \, \text{A} + 5 \, \Omega \cdot j2 \, \text{A}}{10 \, \Omega + 5 \, \Omega + 15 \, \Omega} = \frac{-10 + j10}{30} \, \text{V} = \frac{1}{3}(-1 + j) \, \text{V}$$

Struje u granama kola su:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I + \underline{I}_{III} = \left(\frac{2}{3} + j \frac{1}{3} \right) \text{A},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_I + \underline{I}_{II} = (1 + j2) \text{A},$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{II} + \underline{I}_{III} = \left(-\frac{1}{3} - j \frac{5}{3} \right) \text{A},$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{III} = \frac{1}{3}(-1 + j) \text{A}.$$

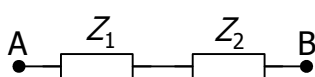
IV.2.2.3.1 TRANSFIGURACIJE KOLA

IV.2.2.3.1 TRANSFIGURACIJE IMPEDANSI

TEORIJSKA OSNOVA

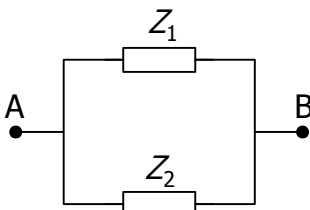
- Kod transfiguracija impedansi važe ista pravila kao i kod jednosmernih električnih struja ukoliko aktivne otpornosti u formulama zamenimo kompleksnim izrazima za impedanse.

REDNA VEZA

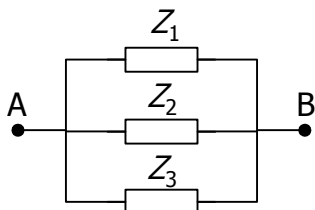


$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

PARALELNA VEZA



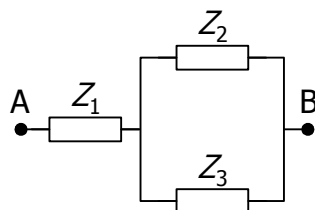
$$\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$



$$\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \Rightarrow$$

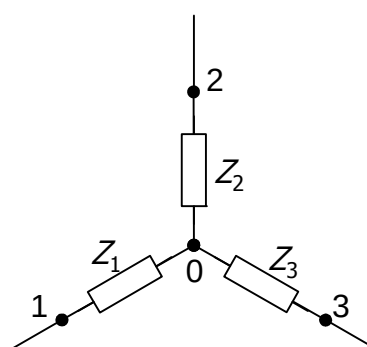
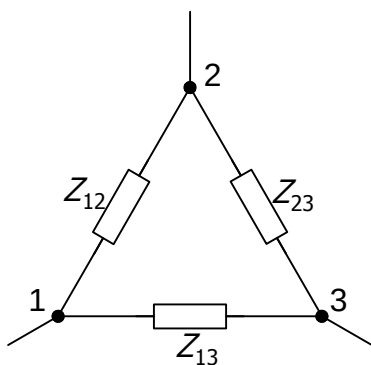
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}$$

MEŠOVITE VEZE



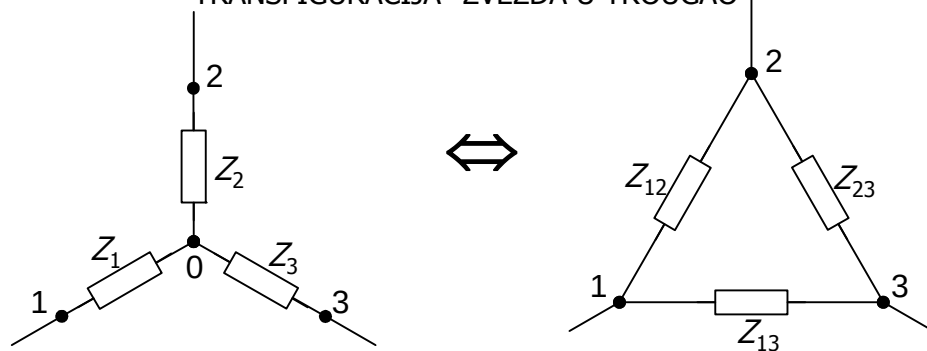
$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

TRANSFIGURACIJA "TROUGAO U ZVEZDU"



$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

TRANSFIGURACIJA "ZVEZDA U TROUGAO"



$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \quad \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}$$

ZADACI

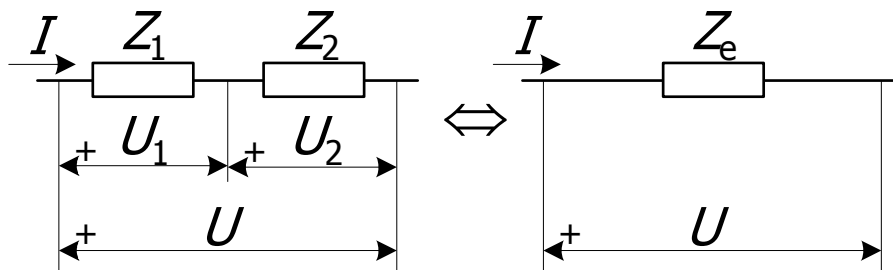
IV.2.2.3.1.1 Dva prijemnika koja se sastoje od redne veze elemenata, $R_1 = 80 \, \Omega$, $L_1 = 1 \, \text{mH}$ i $C_1 = 250 \, \text{nF}$, i $R_2 = 60 \, \Omega$, $L_2 = 1,2 \, \text{mH}$ i $C_2 = 50 \, \text{nF}$, vezana su redno i priključena u kolo naizmjenične struje kružne učestanosti $\omega = 10^5 \, \text{s}^{-1}$. Ako je efektivna vrednost struje $I = 1 \, \text{A}$, a početna faza $\psi = 0$ odrediti:

- kompleksni izraz za napon na rednoj vezi dva prijemnika,
- kompleksne izraze za napone na pojedinim prijemnicima,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu svakog prijemnika i redne veze.

Rešenje:

Ova vrsta zadatka može se rešiti u realnom ili u kompleksnom domenu. Konkretni zadatak u određenom obliku već smo rešili u realnom domenu (zadatak IV.1.9.1). Rešimo ga sada u kompleksnom domenu. Napišimo najpre kompleksni izraz za struju:

$$\underline{I} = I e^{j\psi} = 1 \, \text{A} \cdot e^{j0} = 1 \, \text{A} \cdot (\cos 0 + j \sin 0) = 1 \, \text{A} \cdot (1 + j0) = 1 \, \text{A}.$$



Slika IV.2.2.3.1.1.1

a) Reaktanse prijemnika smo odredili u zadatku IV.1.9.1:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \, \text{H} - \frac{1}{10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 250 \cdot 10^{-9} \, \text{F}} = 100 \, \Omega - 40 \, \Omega = 60 \, \Omega.$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \, \text{H} - \frac{1}{10^5 \, \text{s}^{-1} \cdot 50 \cdot 10^{-9} \, \text{F}} = 120 \, \Omega - 200 \, \Omega = -80 \, \Omega.$$

pa su kompleksni izrazi za impedanse:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 80 \, \Omega + j60 \, \Omega = (80 + j60) \, \Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 60 \, \Omega + j(-80 \, \Omega) = (60 - j80) \, \Omega.$$

Pošto su ova dva prijemnika vezana redno ekvivalentna kompleksna impedansa je:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (80 + j60) \, \Omega + (60 - j80) \, \Omega = (80 + 60 + j(60 - 80)) \, \Omega = (140 - j20) \, \Omega.$$

Primenom Omovog zakona prema usaglašenim referentnim smerovima dobijamo napon na ovoj rednoj vezi:

$$\underline{U} = \underline{Z}_e \underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I} = (140 - j20) \, \Omega \cdot 1 \, \text{A} = (140 - j20) \, \text{V}.$$

Možemo odrediti efektivnu vrednost napona da bismo je uporedili sa vrednošću dobijenom u zadatku IV.1.9.1:

$$U = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{U}] + \text{Im}^2[\underline{U}]} = \sqrt{(140 \, \text{V})^2 + (-20 \, \text{V})^2} = 141,4 \, \text{V}.$$

Naravno, dobijena je ista vrednost.

b) Prema Omovom zakonu kompleksni napon na impedansi Z_1 je:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = \underline{Z}_1 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}.$$

Ovo je **razdelnik napona** sa kojim smo se sreli kod vremenski nepromenljivih (jednosmernih) struja. Prema razdelniku napona napon na drugom prijemniku je:

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = \underline{Z}_2 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}.$$

Međutim, zbog komplikovanije operacije deljenja kod kompleksnih brojeva, zamenimo brojne vrednosti u izrazima na početku:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = (80 + j60) \Omega \cdot 1 \text{ A} = (80 + j60) \text{ V}.$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = (60 - j80) \Omega \cdot 1 \text{ A} = (60 - j80) \text{ V}.$$

c) Kompleksne snage pojedinih prijemnika, kao i ekvivalentne impedanse su:

$$\underline{S}_{Z_1} = \underline{U}_{Z_1} \underline{I}^* = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}^2 = (80 + j60) \Omega \cdot (1 \text{ A})^2 = (80 + j60) \text{ VA},$$

$$\underline{S}_{Z_2} = \underline{U}_{Z_2} \underline{I}^* = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}^2 = (60 - j80) \Omega \cdot (1 \text{ A})^2 = (60 - j80) \text{ VA},$$

$$\underline{S}_{Z_e} = \underline{U}_{Z_e} \underline{I}^* = \underline{Z}_e \cdot \underline{I}^2 = (140 - j20) \Omega \cdot (1 \text{ A})^2 = (140 - j20) \text{ VA}.$$

Na osnovu kompleksnih izraza za snagu određujemo aktivne, reaktivne i prividne snage:

$$P_1 = 80 \text{ W}, Q_1 = 60 \text{ VAr}, S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{(80 \text{ W})^2 + (60 \text{ W})^2} = 100 \text{ VA}$$

$$P_2 = 60 \text{ W}, Q_2 = -80 \text{ VAr}, S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{(60 \text{ W})^2 + (-80 \text{ W})^2} = 100 \text{ VA}$$

$$P_e = 140 \text{ W}, Q_e = -20 \text{ VAr}, S_e = \sqrt{P_e^2 + Q_e^2} = \sqrt{(140 \text{ W})^2 + (-20 \text{ W})^2} = 141,4 \text{ VA}$$

Vidimo da su dobijeni rezultati, naravno, isti kao u zadatku IV.1.9.1.

IV.2.2.3.1.2 Impedanse $\underline{Z}_1 = (2 + j2) \Omega$, $\underline{Z}_2 = (5 - j10) \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (8 - j12) \Omega$ vezane su redno na napon $u(t) = 625\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V}$. Napisati izraz za trenutnu vrednost struje $i(t)$.

Rešenje:

I ovaj zadatak se može rešiti u realnom i kompleksnom režimu. Uradimo ga na oba načina. Efektivna vrednost napona je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{625\sqrt{2} \text{ V}}{\sqrt{2}} = 625 \text{ V},$$

a početna faza je:

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Kompleksni domen

Napišimo kompleksni izraz za napon:

$$\underline{U} = U e^{j\theta} = 625 \text{ V} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 625 \text{ V} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 625(0,5 + j0,5\sqrt{3}) \text{ V} = 312,5(1 + j\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Ekvivalentna impedansa je:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (15 - j20) \Omega,$$

pa je na osnovu Omovog zakona struja kroz ovu rednu vezu:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{312,5(1 + j\sqrt{3}) \text{ V}}{(15 - j20) \Omega} \cdot \frac{(15 + j20)}{(15 + j20)} = \frac{312,5}{15^2 + 20^2} (15 + j15\sqrt{3} + j20 - 20\sqrt{3}) \text{ A} = \\ &= 0,5(-19,64 + j45,98) \text{ A}. \end{aligned}$$

Efektivna vrednost struje je:

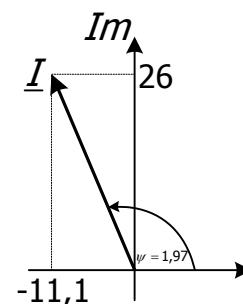
$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}] + \text{Im}^2[\underline{I}]} = \sqrt{(-0,5 \cdot 19,64 \text{ A})^2 + (0,5 \cdot 45,98 \text{ A})^2} = \\ &= 0,5\sqrt{(-19,64 \text{ A})^2 + (45,98 \text{ A})^2} = 25 \text{ A} \end{aligned}$$

Početna faza struje je:

$$\psi = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{I}]}{\text{Re}[\underline{I}]} = \arctg \frac{0,5 \cdot 45,98 \text{ A}}{-0,5 \cdot 19,64 \text{ A}} = \arctg(-2,34) = -1,17.$$

Rešenja $\arctg(-2,34)$ su $-1,17$, koje daje kalkulator, i $1,97$, koje smo dobili kada smo na prvo rešenje dodali π . Na slici IV.2.2.3.1.2.1 prikazana je struja $\underline{I}$ u kompleksnoj ravni. Zaključujemo da je tražena početna faza struje:

$$\psi = 1,97.$$



Slika IV.2.2.3.1.2.1

Realni domen

Na osnovu kompleksnih izraza za impedanse napišimo rezistanse i reaktanse pojedinih prijemnika:

$$R_1 = 2 \Omega, \quad X_1 = 2 \Omega,$$

$$R_2 = 5 \Omega, \quad X_2 = -10 \Omega,$$

$$R_3 = 8 \Omega, \quad X_3 = -12 \Omega.$$

Rezistansa redne veze prijemnika jednaka je zbiru rezistansi pojedinih prijemnika:

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 = 15 \Omega.$$

Isto važi i za reaktansu:

$$X_e = X_1 + X_2 + X_3 = -20 \Omega.$$

Impedansa redne veze je:

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = 25 \Omega,$$

dok je razlika faza napona i struje:

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg(-1,33) = -0,93.$$

Amplitudu struje dobijamo kao količnik amplitude napona i impedanse:

$$I_m = \frac{U_m}{Z_e} = \frac{625\sqrt{2} \text{ V}}{25 \Omega} = 25\sqrt{2} \text{ A}.$$

Početna faza struje je:

$$\psi = \theta - \varphi_e = \frac{\pi}{3} - (-0,93) = 1,97.$$

Na oba načina dobili smo istu amplitudu i početnu fazu struje. Izraz za trenutnu vrednost struje je:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 25\sqrt{2} \sin(\omega t + 1,97) \text{ A}.$$

IV.2.2.3.1.3 Dva prijemnika, kompleksnih impedansi $\underline{Z}_1 = (9 - j12) \Omega$ i $\underline{Z}_2 = (3 - j4) \Omega$, vezana su redno i priključena su na prostoperiodični napon. Ako je reaktivna snaga drugog prijemnika -100 VAR, odrediti:

- a) efektivnu vrednost napona na krajevima redne veze,
- b) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu celog kola.

Rešenje:

a) Izraz za reaktivnu snagu drugog prijemnika je:

$$Q_2 = I^2 X_2,$$

odakle se dobija efektivna vrednost struje:

$$I = \sqrt{\frac{Q_2}{X_2}} = \sqrt{\frac{-100 \text{ VAR}}{-4 \Omega}} = \sqrt{25 \text{ A}^2} = 5 \text{ A}.$$

Ekvivalentna kompleksna impedansa redne veze je:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (12 - j16) \Omega,$$

gde su ekvivalentna rezistansa i reaktansa:

$$R_e = 12 \Omega, \quad X_e = -16 \Omega,$$

pa je:

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = 20 \Omega.$$

Efektivna vrednost napona je otuda:

$$U = I \cdot Z_e = 5 \text{ A} \cdot 20 \Omega = 100 \text{ V}.$$

b) Tražene snage su:

$$P_e = I^2 R_e = (5 \text{ A})^2 \cdot 12 \Omega = 300 \text{ W},$$

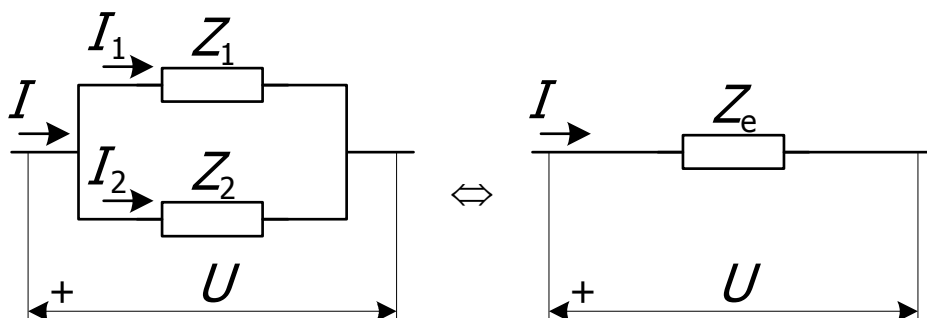
$$Q_e = I^2 X_e = (5 \text{ A})^2 \cdot (-16 \Omega) = -400 \text{ VAR},$$

$$S_e = UI = I^2 Z_e = (5 \text{ A})^2 \cdot 20 \Omega = 500 \text{ VA}.$$

IV.2.2.3.1.4 Dva prijemnika, kompleksnih impedansi $\underline{Z}_1 = (6 - j8) \Omega$ i $\underline{Z}_2 = (6 + j8) \Omega$, vezana su paralelno i priključena su na napon $\underline{U} = (100 + j100) \text{ V}$. Odrediti:

- kompleksnu ekvivalentnu admitansu kola,
- kompleksni izraz za struju napojne grane,
- kompleksne izraze za struje svakog od prijemnika.

Rešenje:



Slika IV.2.2.3.1.4.1

a) Za ekvivalentnu impedansu paralelne veze važi:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{12}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(8 - j6) \Omega \cdot (8 + j6) \Omega}{(8 - j6) \Omega + (8 + j6) \Omega} = \frac{8^2 + 6^2}{(8 - j6 + 8 - j6)} \Omega = 6,25 \Omega,$$

pa je admitansa veze:

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{6,25 \Omega} = 0,16 \text{ S}.$$

b) Kompleksni izraz za struju napojne grane je prema Omovom zakonu:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \underline{U} \cdot \underline{Y}_e = (100 + j100) \text{ V} \cdot 0,16 \text{ S} = (16 + j16) \text{ A}.$$

c) Kompleksni izrazi za struje pojedinih prijemnika mogu se odrediti primenom **strujnog razdelnika**:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_e \underline{I}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \frac{\underline{I}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_e \underline{I}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \frac{\underline{I}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}.$$

Kako je zbir kompleksnih izraza posmatranih impedansi realan broj, da bismo izbegli deljenje sa kompleksnim brojevima najlakše je zameniti brojne vrednosti u izvedene izraze za struje kroz posmatrane prijemnike:

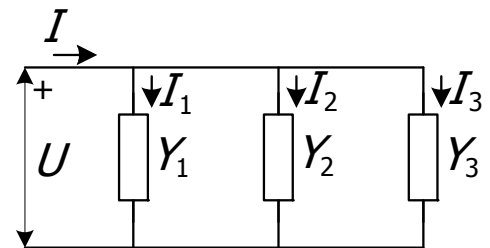
$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I} = \frac{(8 + j6) \Omega}{(8 - j6) \Omega + (8 + j6) \Omega} (16 + j16) \text{ A} = \frac{(8 + j6)(16 + j16)}{16} \text{ A} = \\ &= \frac{32(4 + j3)(1 + j1)}{16} \text{ A} = \frac{32(4 + j3 + j4 - 3)}{16} \text{ A} = 2 \cdot (1 + j7) \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I} = \frac{(8 - j6) \Omega}{(8 - j6) \Omega + (8 + j6) \Omega} (16 + j16) \text{ A} = \frac{(8 - j6)(16 + j16)}{16} \text{ A} = \\ &= \frac{32(4 - j3)(1 + j1)}{16} \text{ A} = \frac{32(4 - j3 + j4 + 3)}{16} \text{ A} = 2 \cdot (7 + j) \text{ A}.\end{aligned}$$

IV.2.2.3.1.5 Tri prijemnika kompleksnih admitansi $\underline{Y}_1 = (10 - j5) \text{ mS}$, $\underline{Y}_2 = (3 - j3) \text{ mS}$ i $\underline{Y}_3 = (7 - j12) \text{ mS}$, vezana su paralelno, kao što je prikazano na slici. Kompleksna struja prvog prijemnika je $\underline{I}_1 = (100 + j100) \text{ mA}$. Odrediti:

a) kompleksne izraze za napon na krajevima prijemnika, kao i struje kroz prijemnike,

b) kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu u kolu.



Rešenje:

a) Ekvivalentna kompleksna admitansa paralelne veze prijemnika jednaka je zbiru admitansi pojedinih prijemnika:

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = (20 - j20) \text{ mS},$$

Naponi na svim prijemnicima, koji su paralelno vezani, isti su pa je:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \frac{(100 + j100) \text{ mA}}{(10 - j5) \text{ mS}} \cdot \frac{10 + j5}{10 + j5} = \frac{100(10 + j10 + j5 - 5)}{10^2 + 5^2} \text{ V} = (4 + j12) \text{ V},$$

(pošto smo zamenili struju u miliamperima i admitansu u milisimensima, rezultat napona je u voltima),

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}_e = (100 + j100) \text{ V} \cdot (20 - j20) \text{ mS} = 4000 \text{ mA} = 4 \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_2 = (100 + j100) \text{ V} \cdot (3 - j3) \text{ mS} = 600 \text{ mA} = 0,6 \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_3 = (100 + j100) \text{ V} \cdot (7 - j12) \text{ mS} = (1900 - j500) \text{ mA} = (1,9 - j0,5) \text{ A}.$$

b) Kompleksna snaga ove paralelne veze je:

$$\underline{S}_e = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_e \cdot \underline{I}^2 = (4 + j12) \text{ V} \cdot 4 \text{ A} = (16 + j48) \text{ VA},$$

Napomena: Na ovom mestu treba naglasiti da se izrazu za kompleksnu snagu

$$\underline{S}_e = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_e \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_e \cdot \underline{I}^2$$

ne može napisati analogan izraz koji zavisi od admitanse, zbog konjugovano kompleksne vrednosti struje.

Na osnovu kompleksnog izraza za snagu možemo odrediti aktivnu i reaktivnu snagu:

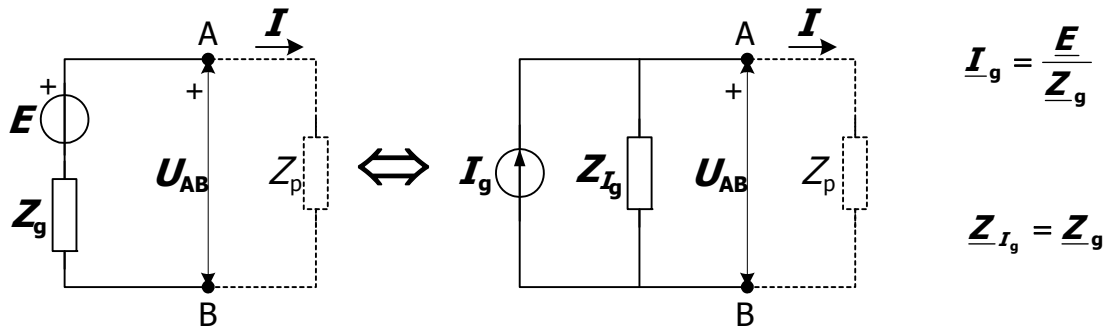
$$P_e = 16 \text{ W} \quad \text{i} \quad Q_e = 48 \text{ VAr}.$$

IV.2.2.3.2 TRANSFIGURACIJE GENERATORA

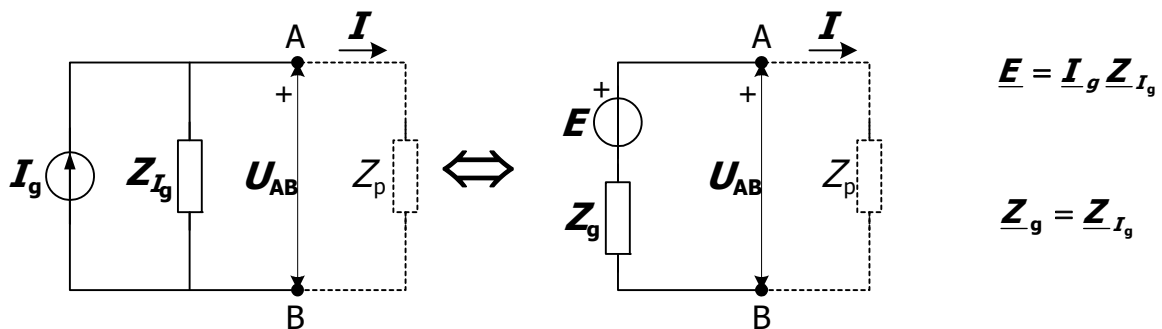
TEORIJSKA OSNOVA

- Kao i u električnim kolima jednosmernih struje i ovde ćemo transfigurisati samo realne generatore:

TRANSFIGURACIJA NAPONSKOG U STRUJNI GENERATOR



TRANSFIGURACIJA STRUJNOG U NAPONSKI GENERATOR



- Sve transfiguracije se obavljaju tako da se napon i struja u ostatku kola koji se ne transfiguriše ne promene.

ZADACI

IV.2.2.3.2.1 Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici odrediti struju $\underline{I}_1$. Poznato je:

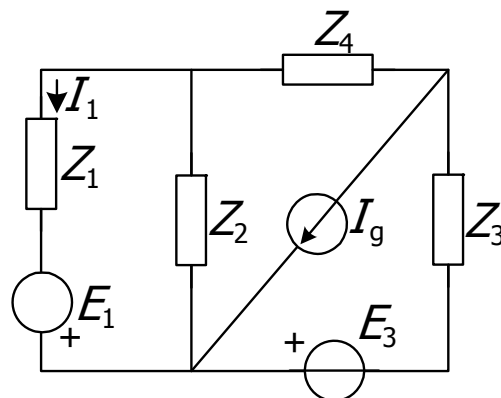
$$\underline{I}_g = j8 \text{ A},$$

$$\underline{E}_1 = j50 \text{ V}, \quad \underline{E}_3 = 100 \text{ V},$$

$$\underline{Z}_1 = (5 - j5) \Omega, \quad \underline{Z}_2 = j10 \Omega,$$

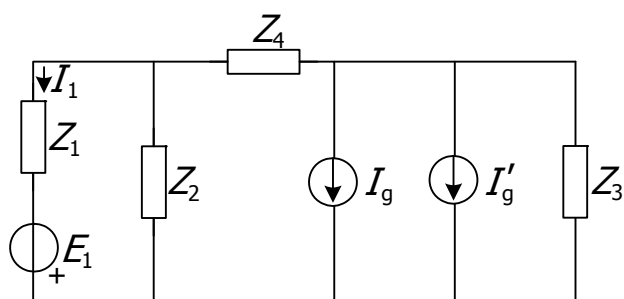
$$\underline{Z}_3 = (5 - j5) \Omega, \quad \underline{Z}_4 = (5 - j5) \Omega,$$

$$\underline{Z}_5 = 10 \Omega.$$



Rešenje:

Rešimo kolo primenom transfiguracija generatora. Smatramo da su studenti savladali pravila za transfiguracije generatora kod vremenski nepromenljivih (jednosmernih) struja, kao i kompleksni račun, pa nećemo davati mnogo komentara. Uočimo karakteristične veze generatora, vodeći računa da grana sa strujom $\underline{I}_1$ ostane netransfigurisana.



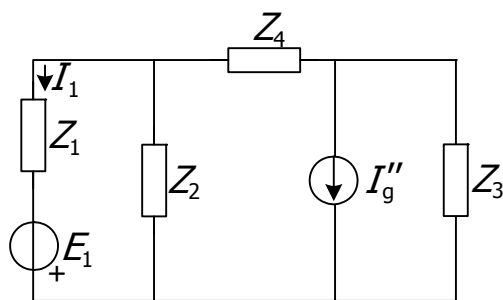
Slika IV.2.2.3.2.1

- generator $\underline{E}_3$ sa redno vezanom impedansom $\underline{Z}_3$ transfigurisacemo u ekvivalentni strujni generator $\underline{I}'_g$, čija je unutrašnja impedansa $\underline{Z}_3$, a referentni smer je isti kao referentni smer transfigurisanog generatora $\underline{E}_3$:

$$\underline{I}'_g = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{100 \text{ V}}{(5 - j5) \Omega} = \frac{100 \text{ V}}{5(1 - j1) \Omega} \cdot \frac{1 + j1}{1 + j1} =$$

$$= 20 \frac{1 + j1}{(1 - j1)(1 + j1)} \text{ A} = 10(1 + j1) \text{ A},$$

$$\underline{Z}' = \underline{Z}_3 = (5 - j5) \Omega$$



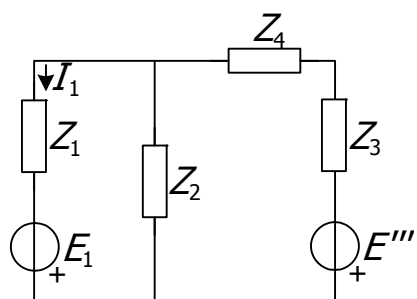
Slika IV.2.2.3.2.2

- dva paralelno vezana strujna generatora, $\underline{I}_g$ i $\underline{I}'_g$, istih referentnih smerova transfigurisemo u jedan; čija je struja:

$$\underline{I}''_g = \underline{I}_g + \underline{I}'_g = j8 \text{ A} + 10(1 + j1) \text{ A} = (10 + j18) \text{ A}$$

a unutrašnja impedansa $\underline{Z}_3$.

$$\underline{Z}'' = \underline{Z}_3 = (5 - j5) \Omega$$



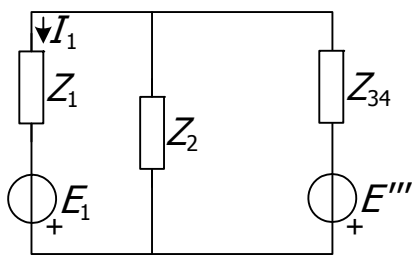
Slika IV.2.2.3.2.3

- strujni generator $\underline{I}''_g$ sa paralelno vezanom impedansom $\underline{Z}_3$ transfigurisacemo u naponski, čija je unutrašnja impedansa $\underline{Z}_3$:

$$\underline{E}''' = \underline{I}''_g \cdot \underline{Z}'' = \underline{I}''_g \cdot \underline{Z}_3 = (10 + j18) \text{ A} \cdot (5 - j5) \Omega =$$

$$= (50 - j50 + j90 + 90) \text{ V} = (140 + j40) \text{ V} = 20(7 + j2) \text{ V},$$

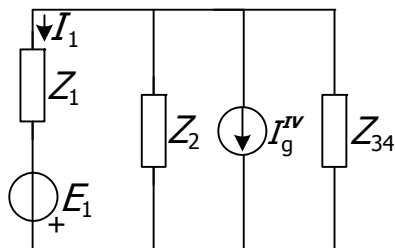
$$\underline{Z}''' = \underline{Z}_3 = (5 - j5) \Omega.$$



Slika IV.2.2.3.2.4

- impedanse $\underline{Z}_3$ i $\underline{Z}_4$ vezane su redno:

$$\underline{Z}_{34} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = (5 - j5) \Omega + (5 - j5) \Omega = (10 - j10) \Omega$$

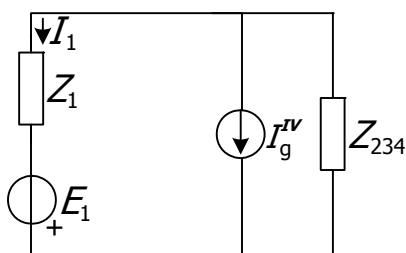


Slika IV.2.2.3.2.5

- generator $\underline{E}'''$ sa redno vezanom impedansom $\underline{Z}_{34}$ transfigurisaćemo u ekvivalentni strujni generator $\underline{I}_g''$, čija je unutrašnja impedansa $\underline{Z}_{34}$:

$$\underline{I}_g'' = \frac{\underline{E}'''}{\underline{Z}'''} = \frac{\underline{E}'''}{\underline{Z}_{34}} = \frac{20(7 - j2) \text{ V}}{10(1 - j) \Omega} = (5 - j9) \text{ A},$$

$$\underline{Z}'' = \underline{Z}_{34} = 10(1 - j) \Omega.$$



Slika IV.2.2.3.2.6

- impedanse $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_{34}$ vezane su paralelno:

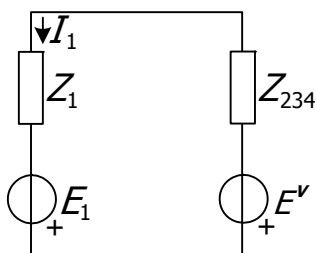
$$\frac{1}{\underline{Z}_{234}} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_{34}} \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_{234} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}} = \frac{j10 \Omega \cdot 10(1 - j) \Omega}{j10 \Omega + 10(1 - j) \Omega} = \frac{100 + j100}{10} \Omega = (10 + j10) \Omega.$$

- strujni generator $\underline{I}_g''$ sa paralelno vezanom impedansom $\underline{Z}_{234}$ transfigurisaćemo u naponski, čija je unutrašnja impedansa $\underline{Z}_{234}$:

$$\underline{E}^v = \underline{I}_g'' \cdot \underline{Z}'' = \underline{I}_g'' \cdot \underline{Z}_{234} = (5 + j9) \text{ A} \cdot (10 + j10) \Omega = (50 + j50 + j90j - 90) \text{ V} = (-40 + j140) \text{ V} = 20(-2 + j7) \text{ V},$$

$$\underline{Z}^v = \underline{Z}_{234} = (10 + j10) \Omega.$$



Slika IV.2.2.3.2.7

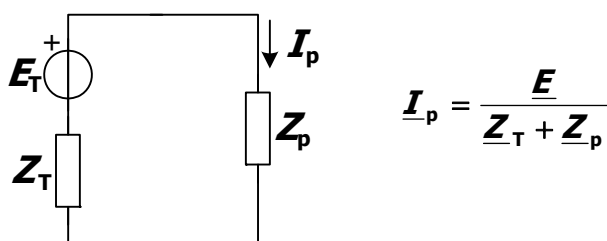
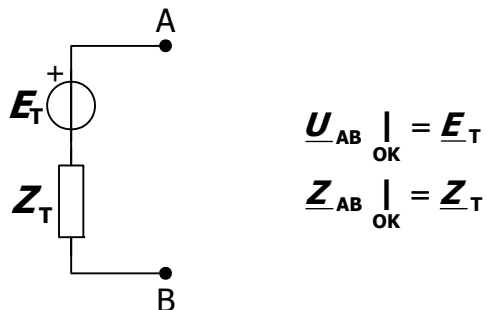
Sada smo dobili prosto kolo pa čemo primeniti Omov zakon za prosto kolo:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{E}_1 - \underline{E}^\vee}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{234}} = \frac{j50 \text{ V} - 20(-2 + j7) \text{ V}}{(5 - j5) \Omega + (10 + j10) \Omega} = \frac{(40 - j90) \text{ V}}{5(3 + j) \Omega} \cdot \frac{3 - j}{3 + j} = \frac{210 - j310}{5(3^2 + 1^2)} \text{ A} = \\ &= \frac{21 - j31}{5} \text{ A} = (4,2 + j6,2) \text{ A}.\end{aligned}$$

IV.2.2.4 TEVENENOVA TEOREMA

TEORIJSKA OSNOVA

- Ova teorema je teorijski potpuno identična kao u kolima jednosmernih električnih struja, samo umesto aktivnih otpora imamo impedanse.



ZADACI

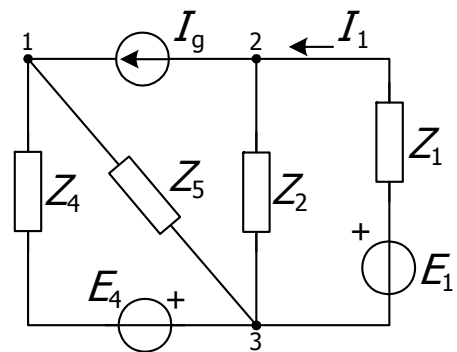
IV.2.2.4.1 Za kolo prostoperiodične struje, prikazano na slici, primenom Tevenenove teoreme odrediti struju $\underline{I}_1$. Poznato je:

$$\underline{I}_g = 0,1(1 + j) \text{ A},$$

$$\underline{E}_1 = j2 \text{ V}, \underline{E}_4 = j \text{ V},$$

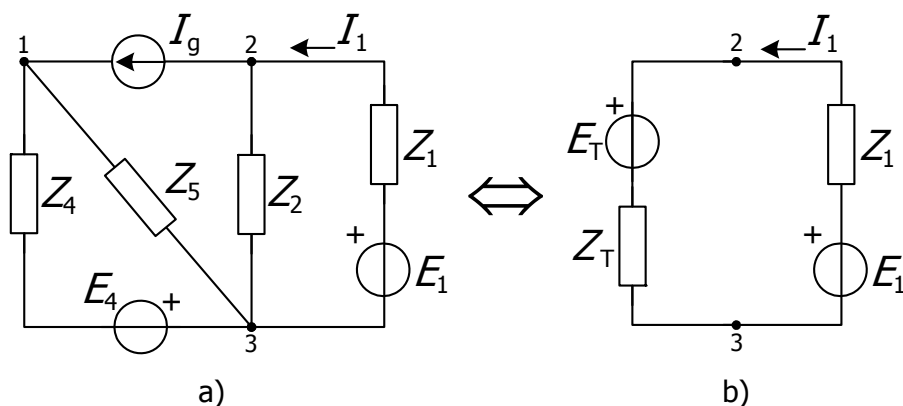
$$\underline{Z}_1 = j5 \Omega, \underline{Z}_2 = 10 \Omega,$$

$$\underline{Z}_4 = (4 - j7) \Omega, \underline{Z}_5 = (3 + j4) \Omega.$$



Rešenje:

Prema Tevenenovoj teoremi, koja važi i u prostoperiodičnim mrežama, deo električnog kola između bilo koje dve tačke može se zameniti ekvivalentnim realnim naponskim generatorom a da se u ostatku kola ništa ne promeni (sve struje i naponi ostaju isti). Pošto u analiziranom kolu treba odrediti struju u grani sa generatorom $\underline{E}_1$, ostatak kola između tačaka 2 i 3 ekvivalentiraćemo Tevenenovim generatorom. Elektromotornu silu Tevenenovog generatora određujemo kao napon između tačaka između kojih ekvivalentiramo kolo (u ovom slučaju su to tačke 2 i 3) kada iz kola uklonimo sve ono što ne pripada Tevenenovom generatoru (u ovom slučaju to je grana sa generatorom $\underline{E}_1$). Na slici IV.2.2.4.1.1b prikazano je ekvivalentno kolo sa Tevenenovim generatorom.



Slika IV.2.2.4.1.1

Prema ovoj slici, pošto je referentni smer Tevenenovog generatora od tačke 3 ka tački 2, elektromotorna sila Tevenenovog generatora jednaka je:

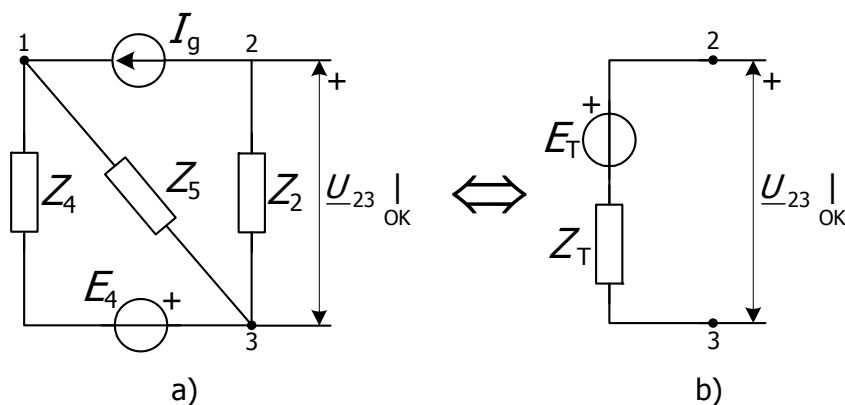
$$\underline{E}_T = \underline{U}_{23} \Big|_{\text{OK}}$$

Na slici IV.2.2.4.1.2 prikazano je ekvivalentno kolo za određivanje elektromotorne sile Tevenenovog generatora $\underline{E}_T$, iz koga je uklonjena grana sa generatorom $\underline{E}_1$. Rešimo ovo kolo primenom metode konturnih struja, kao što je prikazano na slici IV.2.2.4.1.3. Kolo ima $n_c = 2$ čvora, $n_g = 3$ grane i sadrži $n_{I_g} = 1$ idealni strujni generator, pa je broj nezavisnih kontura, odnosno broj konturnih struja:

$$n_g - (n_c - 1) = 2,$$

a broj jednačina koje postavljamo je:

$$n_g - (n_c - 1) - n_{I_g} = 1.$$

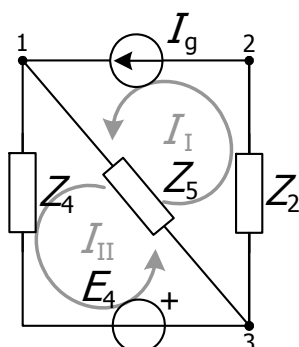


Slika IV.2.2.4.1.2

Konturne struje prikazane su na slici IV.2.2.4.1.3. Podsetimo se da tačno jedna konturna struja mora prolaziti kroz idealni strujni generator. Jednačine konturnih struja glase:

$$\underline{I}_I = \underline{I}_g \quad (1)$$

$$-\underline{Z}_5 \underline{I}_I + (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \underline{I}_{II} = \underline{E}_4 \quad (2)$$



Kolo za određivanje $\underline{E}_T$

Slika IV.2.2.4.1.3

Primitimo da ne moramo rešavati ceo sistem jednačina jer je napon $\underline{U}_{23} \big|_{OK}$ određen strujom strujnog generatora:

$$\begin{aligned} \underline{E}_T = \underline{U}_{23} \big|_{OK} &= -\underline{Z}_2 \underline{I}_g = -10 \, \Omega \cdot 0,1(1 + j) \, A = \\ &= -(1 + j) \, V. \end{aligned}$$

Impedansa Tevenenovog generatora jednaka je ekvivalentnoj impedansi između tačaka 2 i 3 kada se isključe svi generatori, i to: naponski se kratko spajaju, a umesto strujnih ostaje otvorena veza. Na slici IV.2.2.4.1.4 prikazano je ekvivalentno kolo za određivanje impedanse Tevenenovog generatora $\underline{Z}_T$. Impedanse $\underline{Z}_4$ i $\underline{Z}_5$ nisu uključene u kolo jer imaju po jedan kraj slobodan. Tačnije, kada bismo u kolu sa slike IV.2.2.4.1.4 vezali generator između tačaka 2 i 3 kroz impedanse $\underline{Z}_4$ i $\underline{Z}_5$ ne bi tekla struja. Dakle, za analizirano kolo impedansa Tevenenovog generatora je:

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_2 = 10 \, \Omega.$$

Kolo za određivanje $\underline{Z}_T$

Slika IV.2.2.4.1.4

Primenjujući Omov zakon za prosto kolo na kolo sa slike IV.2.2.4.1.1 dobijamo traženu struju:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{E}_T}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_T} = \frac{j2 \, V - (-1 - j) \, V}{j5 \, \Omega + 10 \, \Omega} = \frac{(1 + j3) \, V}{5(2 + j) \, \Omega} \cdot \frac{2 - j}{2 - j} = \frac{5 + j5}{25} \, A = (0,2 + j0,2) \, A.$$

IV.2.2.4.1 PRILAGOĐENJE PRIJEMNIKA PO AKTIVNOJ SNAZI *TEORIJSKA OSNOVA*

- Uslov prilagođenja po snazi je da je

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_g^*$$

- Tada se na prijemniku razvija maksimalna aktivna snaga:

$$P_{\max} = I^2 R_p = \frac{E^2}{4R_p}.$$

- Opet koristimo Tevenenovu teoremu za lakše proračunavanje otpornosti prijemnika kada želimo da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga:

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_T^*$$

ZADACI

IV.2.2.4.1.1.1 Za kolo prostoperiodične struje sa slike poznato je:

$$\underline{E}_1 = (100 + j100) \text{ V}, \underline{E}_4 = (40 - j30) \text{ V}, \underline{I}_g = 5 \text{ A}$$

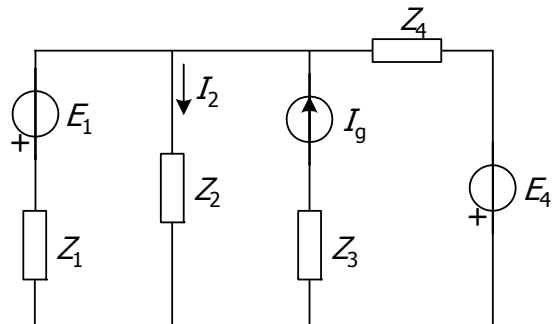
$$\underline{Z}_1 = 20 \Omega, \underline{Z}_3 = j6 \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = (200 - j100) \Omega, \underline{Z}_4 = j10 \Omega.$$

a) Odrediti kompleksni izraz za impedansu $\underline{Z}_2$ tako da se na njoj razvija maksimalna aktivna snaga i odrediti tu snagu.

b) Odrediti kompleksni izraz za struju $\underline{I}_2$ za tako određeno $\underline{Z}_2$.

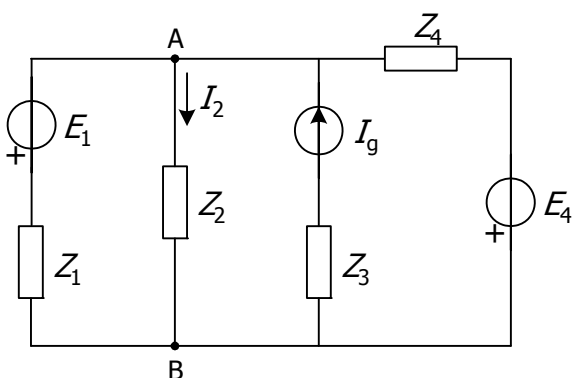
c) Ako je učestanost u kolu $f = 50 \text{ Hz}$ napisati izraz po kome se menja trenutna vrednosti struje $\underline{I}_2$.



Rešenje:

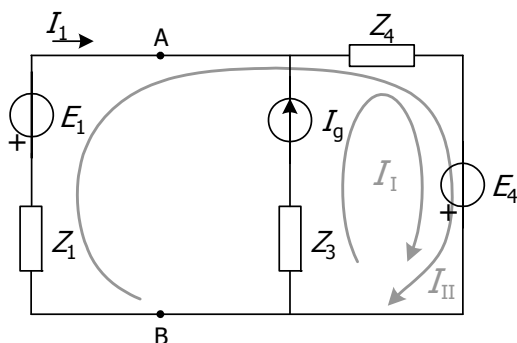
Na prijemniku, koji je vezan na realni generator, razvija se maksimalna aktivna snaga kada je impedansa prijemnika jednaka konjugovano kompleksnoj vrednosti impedanse generatora. Ovo je potreban i dovoljan uslov za **prilagođenje prijemnika po aktivnoj snazi**. Da bismo primenili uslov prilagođenja po aktivnoj snazi kada je prijemnik vezan u složeno kolo, najpre treba kolo između tačaka između kojih je vezan posmatrani prijemnik, ekvivalentirati Tevenenovim generatorom i tada uslov prilagođenja po maksimalnoj aktivnoj snazi glasi:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^*.$$



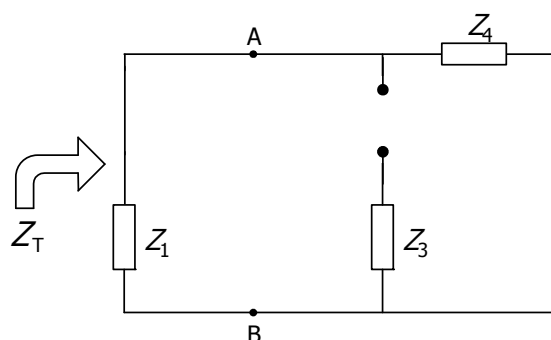
Slika IV.2.2.4.1.1.1

U našem slučaju zahtevano je da se na impedasni $\underline{Z}_2$ razvija maksimalna aktivna snaga pa ćemo ekvivalentirati kolo između tačaka A i B, kao što je prikazano na slici IV.2.2.4.1.1.1. Na slici IV.2.2.4.1.1.2 prikazano je ekvivalentno kolo za određivanje elektromotorne sile Tevenenovog generatora $\underline{E}_T$. Na slici IV.2.2.4.1.1.3 prikazano je ekvivalentno kolo za određivanje impedanse Tevenenovog generatora $\underline{Z}_T$. Odredimo najpre ovu impedansu.



Kolo za određivanje $\underline{E}_T$

Slika IV.2.2.4.1.1.2



Kolo za određivanje $\underline{Z}_T$

Slika IV.2.2.4.1.1.3

Sa slike IV.2.2.4.1.1.3 vidimo da impedansa $\underline{Z}_3$ nije uključena u kolo jer ima jedan kraj slobodan. Kako su obe impedanse, $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_4$, vezane između tačaka A i B, ekvivalentna impedansa je jednaka paralelnoj vezi ove dve impedanse:

$$\frac{1}{\underline{Z}_T} = \frac{1}{\underline{Z}_{14}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_4} \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{14} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} = \frac{20 \Omega \cdot j10 \Omega}{20 \Omega + j10 \Omega} = \frac{j20}{2+j} \Omega \cdot \frac{2-j}{2-j} = \frac{20(1+j2)}{5} \Omega = 4(1+j2) \Omega$$

Dakle, uslov prilagođenja po aktivnoj snazi je:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_T^* = 4(1-j2) \Omega$$

Da bismo odredili maksimalnu aktivnu snagu moramo da odredimo elektromotornu silu Tevenenovog generatora. Primenimo metodu konturnih struja na kolo sa slike IV.2.2.4.1.1.2. Kolo ima $n_k = 2$ čvora, $n_g = 3$ grane i sadrži $n_{ig} = 1$ idealni strujni generator. Rešimo kolo primenom metode konturnih struja. Broj nezavisnih kontura, odnosno broj konturnih struja, je:

$$n_g - (n_k - 1) = 2,$$

a broj jednačina koje postavljamo je:

$$n_g - (n_k - 1) - n_{ig} = 1.$$

Podsetimo se da tačno jedna konturna struja mora prolaziti kroz idealni strujni generator. Jednačine konturnih struja glase:

$$\underline{I}_I = \underline{I}_g \quad (1)$$

$$\underline{Z}_4 \underline{I}_I + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{I}_{II} = \underline{E}_4 - \underline{E}_1 \quad (2)$$

Zamenom poznate konturne struje u jednačinu 2 dobijamo izraz za nepoznatu konturnu struju:

$$\underline{Z}_4 \underline{I}_g + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{I}_{II} = \underline{E}_4 - \underline{E}_1 \Rightarrow$$

$$\underline{I}_{II} = \frac{\underline{E}_4 - \underline{E}_1 - \underline{Z}_4 \underline{I}_g}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} = \frac{(40 - j30) \text{ V} - (100 + j100) \text{ V} - j10 \Omega \cdot 5 \text{ A}}{20 \Omega + j10 \Omega} = \frac{-60 - j180}{20 + j10} \text{ A} =$$

$$= -6 \cdot \frac{1+j3}{2+j1} \cdot \frac{2-j1}{2-j1} \text{ A} = -6(1+j) \text{ A}$$

Kroz granu sa elektromotornom silom $\underline{E}_1$ i impedansom $\underline{Z}_1$ teče samo konturna struja $\underline{I}_{II}$, koja je istog smera kao i struja $\underline{I}_I$, pa je:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{II} = -6(1+j) \text{ A}.$$

Elektromotorna sila Tevenenovog generatora je:

$$\underline{E}_T = U_{AB} \Big|_{OK} = -\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{E}_1 = -20 \Omega \cdot (-6(1+j) \text{ A}) - (100 + j100) \text{ V} = (20 + j20) \text{ V}.$$

Kompleksna snaga impedanse $\underline{Z}_2$ je:

$$\underline{S}_{Z_2} = \underline{U}_{Z_2} \underline{I}_2^* = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2^2 = R_2 I_2^2 + jX_2 I_2^2,$$

gde je I_2^2 kvadrat efektivne vrednosti struje kroz impedansu $\underline{Z}_2$.

Odatle je aktivna snaga:

$$P_{Z_2} = R_2 I_2^2$$

Na osnovu slike IV. 2.2.4.1.1.4 primenom Omovog zakona za prosto kolo odredimo struju $\underline{I}_2$ za slučaj prilagođenja po aktivnoj snazi:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_T} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2^*} = \frac{\underline{E}_T}{R_2 + jX_2 + R_2 - jX_2} = \frac{\underline{E}_T}{2R_2}.$$

S obzirom da je imenilac ovog izraza realan broj, efektivna vrednost struje biće jednaka količniku efektivne vrednosti elektromotorne sile generatora i dvostruke vrednosti rezistanse prijemnika $\underline{Z}_2$:

$$I_2 = \frac{E_T}{2R_2}.$$

Zamenimo ovaj izraz u izraz za aktivnu snagu:

$$P_{Z_2} = R_2 I_2^2 = R_2 \cdot \left(\frac{E_T}{2R_2} \right)^2 = \frac{E_T^2}{4R_2}.$$

Odredimo efektivnu vrednost elektromotorne sile Tevenenovog generatora i zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

$$E_T = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{E}_T] + \text{Im}^2[\underline{E}_T]} = \sqrt{(20 \text{ V})^2 + (20 \text{ V})^2} = 20\sqrt{2} \text{ V},$$

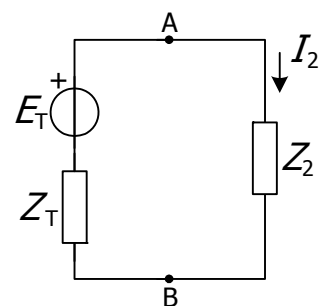
$$P_{Z_2} = \frac{E_T^2}{4R_2} = \frac{(20\sqrt{2} \text{ V})^2}{4 \cdot 4 \Omega} = 50 \text{ W}.$$

Vrednost aktivne snage mogli smo dobiti i direktno računajući struju $\underline{I}_2$:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_T} = \frac{(20 + j20) \text{ V}}{(4 - j8) \Omega + (4 + j8) \Omega} = \frac{(20 + j20) \text{ V}}{8 \Omega} = (2,5 + j2,5) \text{ A}$$

$$I_2 = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}_2] + \text{Im}^2[\underline{I}_2]} = \sqrt{(2,5 \text{ A})^2 + (2,5 \text{ A})^2} = 2,5\sqrt{2} \text{ A},$$

$$P_{Z_2} = R_2 I_2^2 = 4 \Omega \cdot (2,5\sqrt{2} \text{ A})^2 = 50 \text{ W}.$$

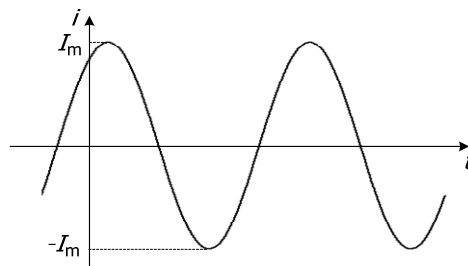


Slika IV.2.2.4.1.1.4

TEST

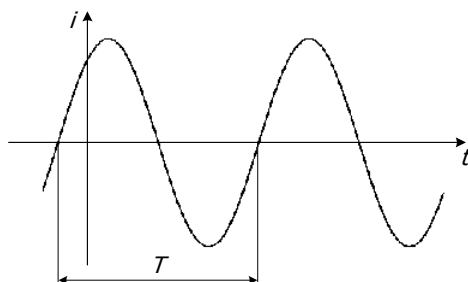
IV.1. Veličina prikazana na slici je:

- a) amplituda
- b) period
- c) početna faza



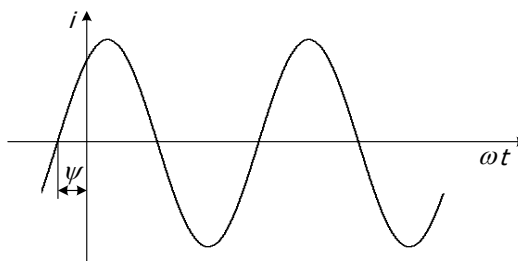
IV.2. Veličina prikazana na slici je:

- a) amplituda
- b) period
- c) početna faza



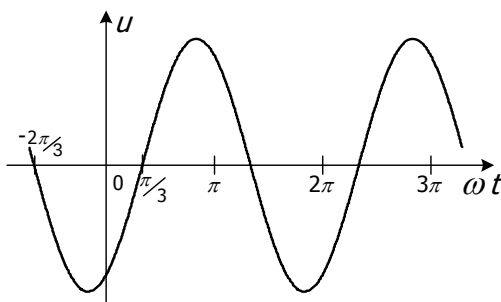
IV.3. Veličina prikazana na slici je:

- a) amplituda
- b) period
- c) početna faza



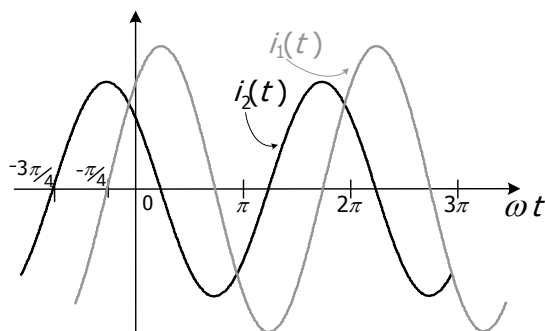
IV.4. Početna faza napona prikazanog na slici je:

- a) $\frac{\pi}{3}$
- b) $-\frac{\pi}{3}$
- c) $\frac{2\pi}{3}$
- d) $-\frac{2\pi}{3}$



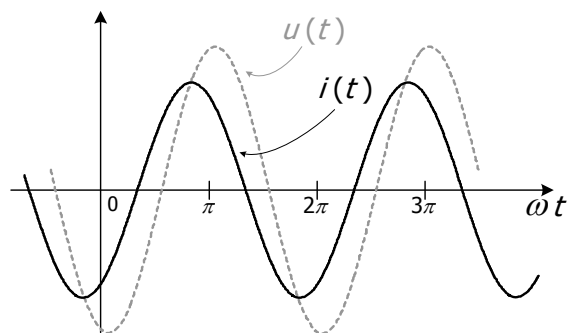
IV.5. Za struje prikazane na slici važi:

- a) struja i_1 prednjači struji i_2 za $\frac{\pi}{2}$
- b) struja i_1 kasni za strujom i_2 za $\frac{\pi}{2}$



IV.6. Na slici su prikazane promene trenutnih vrednosti struje i napona jednog prijemnika. Prijemnik je:

- a) čisto otpornog karaktera
- b) pretežno kapacitivnog karaktera
- c) pretežno induktivnog karaktera



IV.7. Prostoperiodične električne struje su:

- a) vremenski promenljive struje
- b) vremenski konstantne struje

IV.8. Amplituda je:

- a) minimalna vrednost prostoperiodične struje
- b) maksimalna vrednost prostoperiodične struje
- c) efektivna vrednost prostoperiodične struje

IV.9. Početna faza struje je:

- a) fazna razlika početnih faza napona i struje
- b) ugao za koji u početnom trenutku struja prednjači ili zaostaje u odnosu na referentni
- c) jedna od tri faze trofazne naizmenične struje

IV.10. Početna faza struje obeležava se sa:

- a) φ
- b) ψ
- c) θ

IV.11. Početna faza napona obeležava se sa:

- a) φ
- b) ψ
- c) θ

IV.12. Kod otpornika u naizmeničnom režimu su:

- a) napon i struja u fazi
- b) napon prednjači struji
- c) struja prednjači naponu

IV.13. Kod kondenzatora u naizmeničnom režimu su:

- a) napon i struja u fazi
- b) napon prednjači struji
- c) struja prednjači naponu

IV.14. Kod kalema u naizmeničnom režimu su:

- a) napon i struja u fazi
- b) napon prednjači struji
- c) struja prednjači naponu

IV.15. Otpornost R prijemnika je:

- a) aktivna otpornost
- b) reaktivna otpornost
- c) prividna otpornost

IV.16. Otpornost X prijemnika je:

- a) aktivna otpornost
- b) reaktivna otpornost
- c) prividna otpornost

IV.17. Otpornost Z prijemnika je:

- a) aktivna otpornost
- b) reaktivna otpornost
- c) prividna otpornost

IV.18. Aktivna otpornost prijemnika R je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.19. Reaktivna otpornost prijemnika X je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.20. Prividna otpornost prijemnika Z je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.21. Provodnost G prijemnika je:

- a) aktivna provodnost
- b) reaktivna provodnost
- c) prividna provodnost

IV.22. Provodnost B prijemnika je:

- a) aktivna provodnost
- b) reaktivna provodnost
- c) prividna provodnost

IV.23. Provodnost Y prijemnika je:

- a) aktivna provodnost
- b) reaktivna provodnost
- c) prividna provodnost

IV.24. Aktivna provodnost prijemnika G je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.25. Reaktivna provodnost prijemnika B je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.26. Prividna provodnost prijemnika Y je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.27. Snaga P prijemnika je:

- a) aktivna snaga
- b) reaktivna snaga
- c) prividna snaga
- d) trenutna snaga

IV.28. Snaga Q prijemnika je:

- a) aktivna snaga
- b) reaktivna snaga
- c) prividna snaga
- d) trenutna snaga

IV.29. Snaga S prijemnika je:

- a) aktivna snaga
- b) reaktivna snaga
- c) prividna snaga
- d) trenutna snaga

IV.30. Snaga p prijemnika je:

- a) aktivna snaga
- b) reaktivna snaga
- c) prividna snaga
- d) trenutna snaga

IV.31. Aktivna snaga prijemnika P je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.32. Reaktivna snaga prijemnika Q je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.33. Prividna snaga prijemnika S je:

- a) uvek pozitivna
- b) uvek negativna
- c) može biti i pozitivna i negativna

IV.34. Ako je u rednoj RLC vezi reaktivna otpornost prijemnika 0, to kolo se zove:

- a) rezonantno
- b) antirezonantno

IV.35. Ako je u paralelnoj RLC vezi reaktivna provodnost prijemnika 0, to kolo se zove:

- a) rezonantno
- b) antirezonantno

IV.36. Ako je u rednoj RLC vezi prijemnika $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, to kolo je pretežno:

- a) induktivno
- b) kapacitivno
- c) aktivno

IV.37. Ako je u rednoj RLC vezi prijemnika $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, to kolo je pretežno:

- a) induktivno
- b) kapacitivno
- c) aktivno

IV.38. Ako je u paralelnoj RLC vezi prijemnika $\omega C > \frac{1}{\omega L}$, to kolo je pretežno:

- a) induktivno
- b) kapacitivno
- c) aktivno

IV.39. Ako je u paralelnoj RLC vezi prijemnika $\omega C < \frac{1}{\omega L}$, to kolo je pretežno:

- a) induktivno
- b) kapacitivno
- c) aktivno

IV.40. Fazna razlika napona i struje (u rednoj vezi) obeležava se sa:

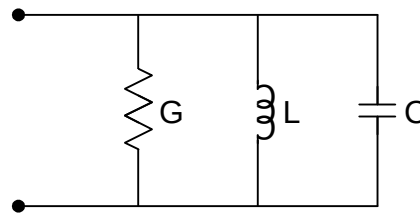
- a) φ
- b) ν
- c) ψ
- d) θ

IV.41. Fazna razlika struje i napona (u paralelnoj vezi) obeležava se sa:

- a) φ
- b) ν
- c) ψ
- d) θ

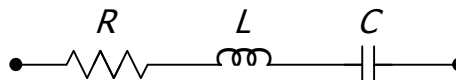
IV.42. Ako je u kolu sa slike $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, onda je to kolo:

- a) rezonantno
- b) antirezonantno



IV.43. Ako je u kolu sa slike $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, onda je to kolo:

- a) rezonantno
- b) antirezonantno



IV.44. Trenutna snaga je:

- a) srednja vrednost trenutne snage u okviru jednog perioda
- b) proizvod trenutnih vrednosti napona i struje
- c) proizvod efektivnih vrednosti napona i struje

IV.45. Aktivna snaga je:

- a) srednja vrednost trenutne snage u okviru jednog perioda
- b) proizvod trenutnih vrednosti napona i struje
- c) proizvod efektivnih vrednosti napona i struje

IV.46. Prividna snaga je:

- a) srednja vrednost trenutne snage u okviru jednog perioda
- b) proizvod trenutnih vrednosti napona i struje
- c) proizvod efektivnih vrednosti napona i struje

IV.47. Jedinica za aktivnu snagu je:

- a) W
- b) VA_r
- c) VA

IV.48. Jedinica za reaktivnu snagu je:

- a) W
- b) VA_r
- c) VA

IV.49. Jedinica za prividnu snagu je:

- a) W
- b) VA_r
- c) VA

IV.50. Jedinica za trenutnu snagu je:

- a) W
- b) VA_r
- c) VA

IV.51. Jedinica za aktivnu otpornost je:

- a) Ω
- b) S

IV.52. Jedinica za reaktivnu otpornost je:

- a) Ω
- b) S

IV.53. Jedinica za prividnu otpornost je:

- a) Ω
- b) S

IV.54. Jedinica za aktivnu provodnost je:

- a) Ω
- b) S

IV.55. Jedinica za reaktivnu provodnost je:

- a) Ω
- b) S

IV.56. Jedinica za prividnu provodnost je:

- a) Ω
- b) S

IV.57. Kompleksni izraz za snagu definiše se kao

- a) $\underline{P} = \underline{U}\underline{I}$
- b) $\underline{Q} = \underline{U}\underline{I}$
- c) $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}$
- d) $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$

IV.58. Kompleksni izraz za impedansu definiše se kao

a) $\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m}$

b) $\underline{Z} = \frac{U}{I}$

c) $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

IV.59. Kompleksni izraz za admitansu definiše se kao

a) $\underline{Y} = \frac{I_m}{U_m}$

b) $\underline{Y} = \frac{I}{U}$

c) $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$

IV.60. Kompleksni izraz za struju je:

a) $\underline{I} = I e^{j\psi}$

b) $\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$

c) $\underline{I} = I_m e^{j\psi}$

IV.61. Kompleksni izraz za napon je:

a) $\underline{U} = U e^{j\theta}$

b) $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$

c) $\underline{U} = U_m e^{j\theta}$

IV.62. Kompleksni izraz za impedansu je:

a) $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\psi}$

b) $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$

c) $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\theta}$

d) $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\nu}$

IV.63. Kompleksni izraz za admitansu je:

a) $\underline{Y} = Y \cdot e^{j\psi}$

b) $\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi}$

c) $\underline{Y} = Y \cdot e^{j\theta}$

d) $\underline{Y} = Y \cdot e^{j\nu}$

IV.64. Kompleksni izraz za snagu je:

a) $\underline{S} = S \cdot e^{j\psi}$

b) $\underline{S} = S \cdot e^{j\varphi}$

c) $\underline{S} = S \cdot e^{j\theta}$

d) $\underline{S} = S \cdot e^{j\nu}$

IV.65. Aktivne otpornosti u rednoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.66. Reaktivne otpornosti u rednoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.67. Prividne otpornosti u rednoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.68. Aktivne provodnosti u paralelnoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.69. Reaktivne provodnosti u paralelnoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.70. Prividne provodnosti u paralelnoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.71. Aktivne snage u rednoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.72. Reaktivne snage u rednoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.73. Prividne snage u rednoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.74. Aktivne snage u paralelnoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.75. Reaktivne snage u paralelnoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.76. Prividne snage u paralelnoj vezi se:

- a) smeju sabirati
- b) ne smeju sabirati

IV.77. Omov zakon u električnim kolima naizmeničnog režima važi:

- a) samo za trenutne vrednosti napona i struje
- b) samo za efektivne vrednosti napona i struje
- c) i za trenutne i za efektivne vrednosti napona i struje

IV.78. I i II Kirhofov zakon u električnim kolima naizmeničnog režima važi:

- a) samo za trenutne vrednosti napona i struje
- b) samo za efektivne vrednosti napona i struje
- c) i za trenutne i za efektivne vrednosti napona i struje

MATEMATIČKI PODSETNIK

EKSPONENTI

1) 10^x :

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100 \dots$$

2) $10^{-x} = \frac{1}{10^x}$:

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} \dots$$

3) $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$:

$$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$$

4) $(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$:

$$(10^2)^3 = 10^6$$

5) $\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$:

$$\frac{10^5}{10^3} = 10^2$$

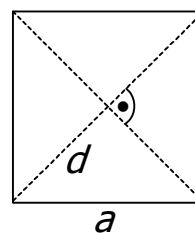
6) $\sqrt[x]{10} = 10^{\frac{1}{x}}$

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

GEOMETRIJA

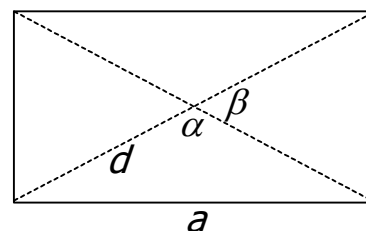
• Kvadrat

- stranica dužine a ,
- obim $O = 4a$,
- površina $P = a^2$,
- dijagonala $d = a\sqrt{2}$; obe dijagonale su iste i seku se pod pravim uglom.



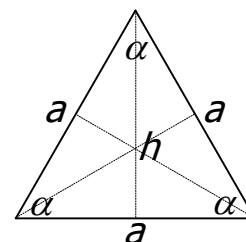
• Pravougaonik

- stranice dužina a i b ,
- obim $O = 2a + 2b$,
- površina $P = ab$,
- dijagonala $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; obe dijagonale su iste i seku se pod proizvoljnim uglom (koji nije prav, a zavisi od a i b).



• Jednakostranični trougao

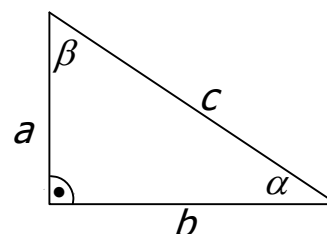
- sve tri stranice dužine a ,
- sva tri ugla jednaka $\frac{\pi}{3}$ (60°)
- obim $O = 3a$,
- površina $P = \frac{ah}{2}$,
- visina $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- preseci visina i težišnih linija, centar upisane i centar opisane kružnice su u istoj tački; ta tačka deli visinu u razmeri 2:1,
- visine polove uglove i polove stranice.



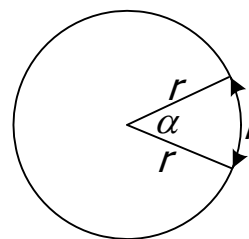
• Pravougli trougao

- katete dužina a i b ,
- hipotenuza dužine c ,
- važi Pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$
- obim $O = a + b + c$,
- površina $P = \frac{ab}{2}$,

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$

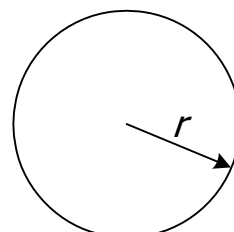


- **Ravanski ugao** $\alpha = \frac{l}{r}$



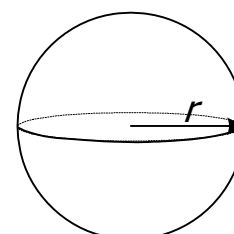
- **Krug**

- poluprečnik r ,
- obim $O = 2r\pi$,
- površina $P = r^2\pi$,



- **Lopta**

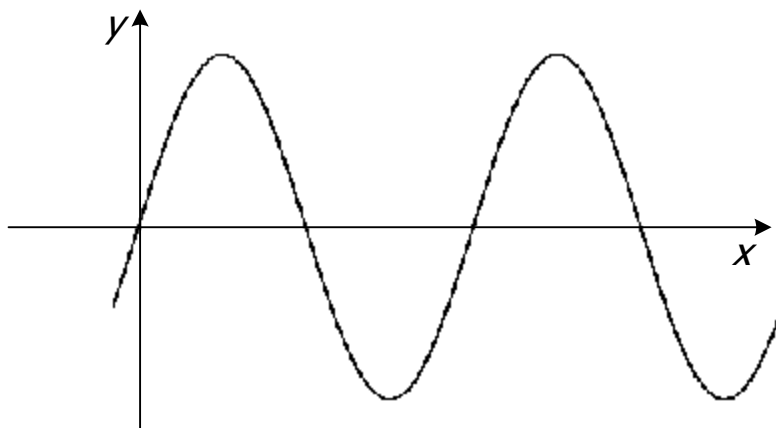
- poluprečnik r ,
- površina sfere $P = 4\pi r^2$,
- zapremina $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



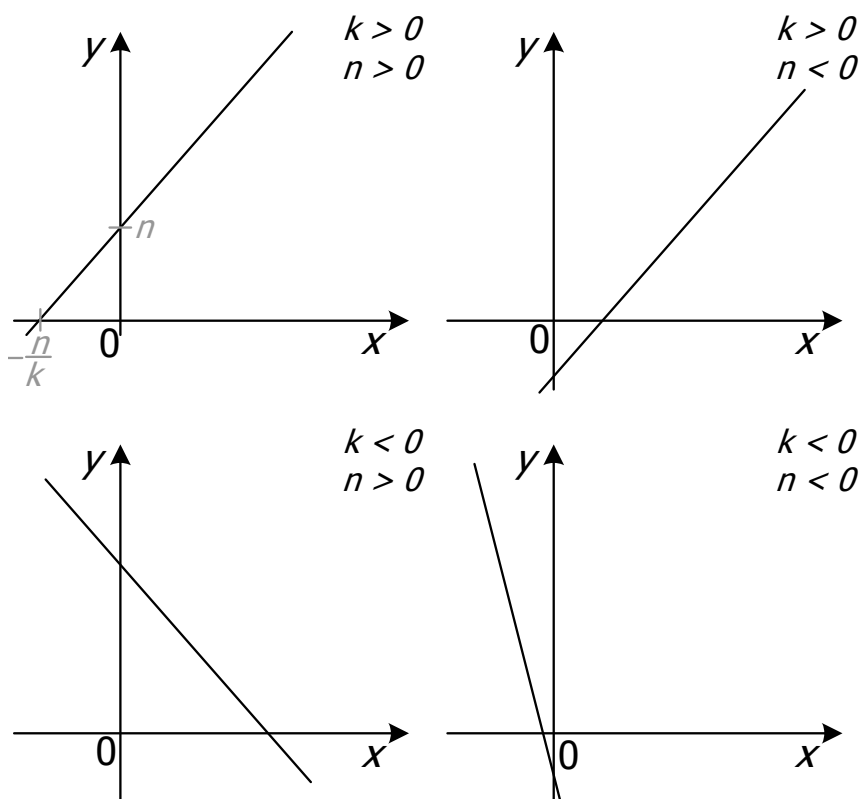
FUNKCIJE

- Šta je funkcija?
 - Preslikavanje jednog skupa u drugi. Svakom elementu prvog skupa (koji se najčešće obeležava sa x) odgovara tačno jedan element drugog skupa (koji se najčešće obeležava sa y).

Primer: $y = f(x) = \sin x$

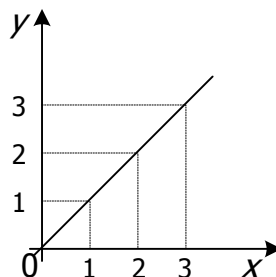


- Šta je linearna funkcija?
 - Funkcija oblika $y = f(x) = kx + n$, gde su k i n realni brojevi.



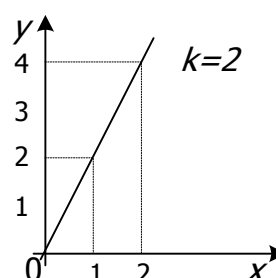
- Šta znači "direktno srazmerno", a šta "obrnuto srazmerno"?
 - Kod linearne funkcije $y = f(x) = kx$ promenljiva y je direktno srazmerna promenljivoj x , a konstanta srazmernosti je k .
 - Ako je $k = 1$ tada je $y = x$, (y i x su jednaki). Grafik ove funkcije je prava koja je nagnuta pod uglom od 45° (ili $\pi / 4$) u odnosu na x osu.

- za $x = 1$ je $y = 1$;
- za $x = 2$ je $y = 2$...



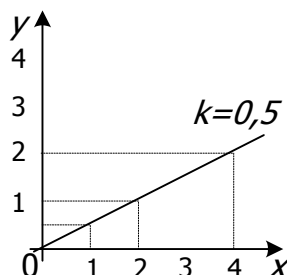
- Ako je na primer $k = 2$ tada je $y = 2x$

- za $x = 1$ je $y = 2$;
- za $x = 2$ je $y = 4$...



- Ako je na primer $k = 0,5$ tada je $y = 0,5x$

- za $x = 1$ je $y = 0,5$;
- za $x = 2$ je $y = 1$...



- Posmatrajmo funkciju dve promenljive $y = \frac{k_1 x}{k_2 z}$; promenljive su x i z .

y je direktno srazmerno x , a to znači da koliko puta *poraste* promenljiva x toliko puta *poraste* promenljiva y ;

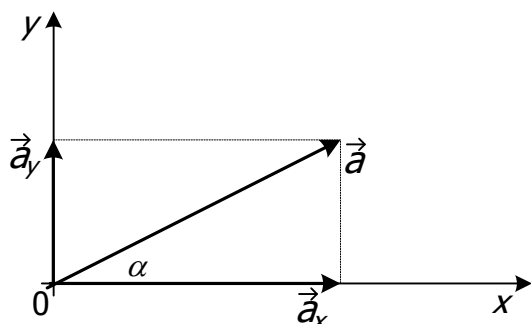
y je obrnuto srazmerno z , a to znači da koliko puta *poraste* promenljiva z toliko puta *se smanji* promenljiva y .

- Šta znači "direktno srazmerno", a šta "obrnuto srazmerno" sa nekim stepenom (na primer sa kvadratom)?

- Na primer, u funkciji $y = \frac{k_1 x^2}{k_2 z^3}$ y je direktno srazmerno x^2 , a obrnuto srazmerno z^3 .

SKALARI I VEKTORI

- **Skalari** su brojne vrednosti.
- **Vektori** su usmerene duži. Definišu se intenzitetom, pravcem i smerom.
- **Intenzitet vektora** (ili **moduo vektora**) je dužina vektora.



$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2}$$

- **Pravac vektora** je definisan uglom u odnosu na jednu od osa koordinatnog sistema (x ili y).
- Svaki pravac može imati dva **smera**, na primer: udesno ili ulevo, nagore ili nadole, ka ili od.
- Svaki vektor ima i sebi **suprotan vektor**. To je vektor istog intenziteta, istog pravca, a suprotnog smera.

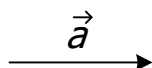


- **Jedinični vektor** (ili **ort**) je vektor koji ima intenzitet jednak jedinici, a pravac i smer su zadati. Svaki vektor se može prikazati proizvodom svog algebarskog intenziteta i jediničnog vektora. Algebarski intenzitet je intenzitet koji može biti pozitivan i negativan, za razliku od intenziteta koji je isključivo pozitivan.

Primer:



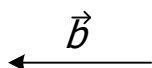
jedinični vektor



$$\vec{a} = 3\vec{r}_0$$

intenzitet je 3

algebarski intenzitet je 3



$$\vec{b} = -3\vec{r}_0$$

intenzitet je 3

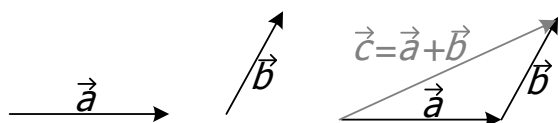
algebarski intenzitet je -3

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog pravca a suprotnog smera; istog intenziteta, a algebarski intenziteti su im suprotnog znaka.

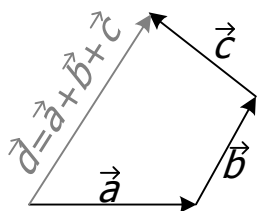
RAČUNSKE OPERACIJE SA VEKTORIMA

- **Sabiranje vektora** se može vršiti nadovezivanjem i po paralelogramu.

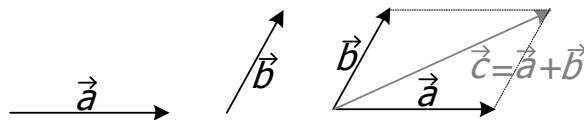
SABIRANJE VEKTORA NADOVEZIVANJEM



- Zbirni vektor se dobija kada se početak narednog vektora nadoveže na kraj prethodnog, a onda se spoji početak prvog i kraj poslednjeg.
- Na ovaj način se može sabirati neograničen broj vektora odjednom.



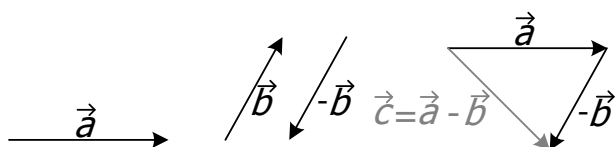
SABIRANJE VEKTORA PO PRAVILU PARALELOGRAMA



- Vektori se dovedu na zajednički početak. Na njih se docrta paralelogram. Zbirni vektor predstavlja dijagonalu paralelograma koja polazi iz zajedničke tačke vektora.
- Na ovaj način se mogu sabirati najviše dva vektora odjednom.

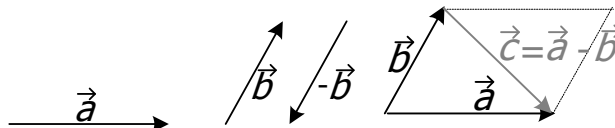
- **Oduzimanje vektora** se može vršiti nadovezivanjem i po paralelogramu.

ODUZIMANJE VEKTORA NADOVEZIVANJEM



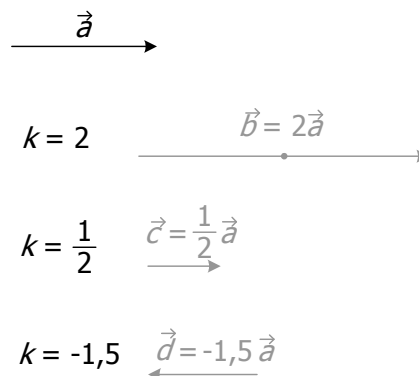
- Vektor razlike se dobija sabiranjem vektora $\vec{a}$ i suprotnog vektora vektoru $\vec{b}$ (to je vektor $-\vec{b}$).
- Početak vektora $-\vec{b}$ se nadoveže na kraj vektora $\vec{a}$, a onda se spoji početak prvog i kraj poslednjeg.
- Na ovaj način se može oduzeti neograničen broj vektora odjednom.
- Nadovezivanjem vektora se istovremeno može i sabirati i oduzimati neograničen broj vektora.

ODUZIMANJE VEKTORA PO PRAVILU PARALELOGRAMA



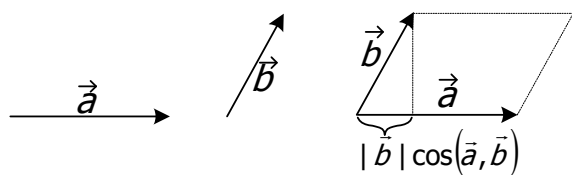
- Vektor $\vec{a}$ i vektor $-\vec{b}$ se dovedu na zajednički početak. Na njih se docrta paralelogram. Vektor razlike predstavlja dijagonalu paralelograma koja ne polazi iz zajedničke tačke vektora (smer je od kraja vektora $\vec{b}$ ka kraju vektora $\vec{a}$).
- Na ovaj način se mogu oduzeti najviše dva vektora odjednom.

- **Množenje vektora skalarom.** Ako vektor $\vec{a}$ pomnožimo nekim brojem k dobićemo vektor istog pravca i smera, a intenzitet novog vektora biće k puta veći od intenziteta vektora $\vec{a}$. (Ukoliko je k negativan broj vektor će biti suprotnog smera.)



- **Proizvodi vektora.** Definišu se skalarni i vektorski proizvod dva vektora.

SKALARNI PROIZVOD $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$



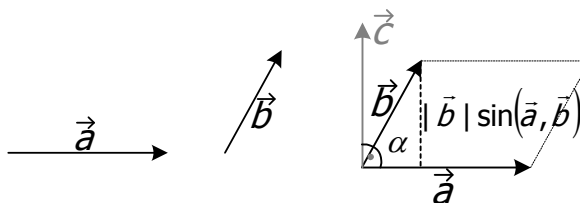
- Skalarni proizvod dva vektora je skalar čiji je intenzitet jednak

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

To je površina pravougaonika stranice $|\vec{a}|$ i stranice $|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

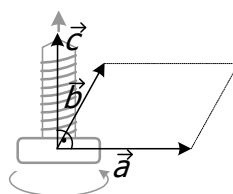
- Skalarni proizvod dva vektora koristimo kada tražimo koliki doprinos daje vektorska veličina $\vec{a}$ u pravcu neke druge vektorske veličine $\vec{b}$.

VEKTORSKI PROIZVOD $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

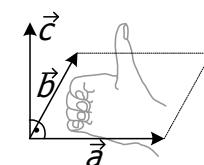


- Vektorski proizvod dva vektora je vektor čiji je:

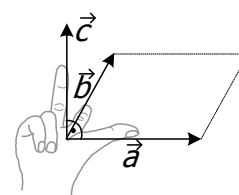
- intenzitet $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ (i jednak je površini paralelograma koji određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$),
- pravac normalan na ravan koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
- smer određen jednim od sledeća tri pravila:



najkraćim putem poklopi sa vektorom $\vec{b}$;



vektorom $\vec{b}$;



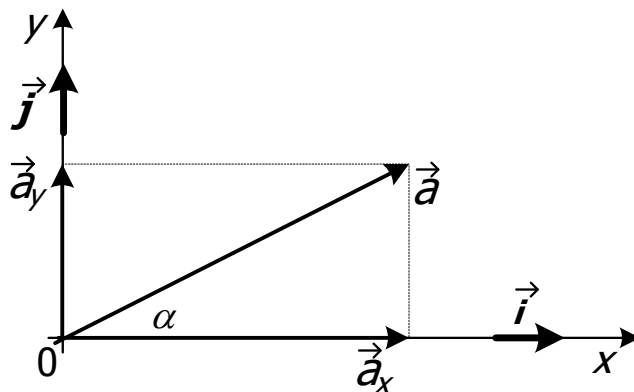
▪ pravilom desne zavojnice: smer vektora $\vec{c}$ poklapa se sa smerom kretanja zavojnice, ako bi se ona okretala zajedno sa vektorom $\vec{a}$ tako da se

▪ pravilom desne ruke: ispruženi palac će pokazivati smer vektora $\vec{c}$ ako savijeni prsti pokazuju smer okretanja vektora $\vec{a}$, kojim bi se najkraćim putem poklopio sa

▪ pravilom tri prsta: ako palac usmerimo kao vektor $\vec{a}$, kažiprst kao vektor $\vec{b}$, srednji prst će pokazivati smer vektora $\vec{c}$.

RAZLAGANJE VEKTORA NA OSE

- Svaki vektor se može razložiti u Dekartovom koordinatnom sistemu na svoju x i y komponentu:



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = |\vec{a}_x| \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos \alpha \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = |\vec{a}_y| \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

gde je $\vec{i}$ - jedinični vektor x -ose (ima intenzitet jednak 1, pravac i smer x -ose),

$\vec{j}$ - jedinični vektor y -ose (ima intenzitet jednak 1, pravac i smer y -ose),

$|\vec{a}|$ - intenzitet vektora $\vec{a}$.

- Za ove veličine važi da je:

$$|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\alpha = \arctg \frac{|\vec{a}_y|}{|\vec{a}_x|}$$

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

- Za proračun linearnih sistema jednačina drugog i trećeg reda koristimo determinante:

SISTEM JEDNAČINA I DETERMINANTA DRUGOG REDA

- Sistem linearnih nezavisnih jednačina drugog reda je:

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = c_2$$

- Glavna determinanta ovog sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Pojedinačne determinante promenljivih su:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1a_{22} - a_{12}c_2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = a_{11}c_2 - c_1a_{21}$$

- Nepoznate u jednačinama se izračunavaju Kramerovim pravilima:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

SISTEM JEDNAČINA I DETERMINANTA TREĆEG REDA

- Sistem linearnih nezavisnih jednačina trećeg reda je:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

- Glavna determinanta ovog sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- Pojedinačne determinante promenljivih su:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

- Nepoznate u jednačinama se izračunavaju Kramerovim pravilima:

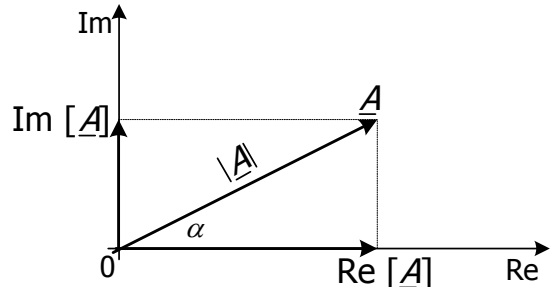
$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

KOMPLEKSNI BROJEVI

- Šta je kompleksni broj?
 - Broj koji ima svoj realan i svoj imaginaran deo u kompleksnoj ravni.
- Koliko kompleksni broj ima oblika?

Tri:

- analitički $\underline{A} = x + jy$,
- trigonometrijski $\underline{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$,
- eksponencijalni $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$.



- Šta je j ?

$$j = \sqrt{-1}$$

- Analitički i trigonometrijski oblik mogu se direktno prevoditi jedan u drugi.
- Eksponencijalni i trigonometrijski oblik se mogu direktno prevoditi jedan u drugi. Veze između ta dva oblika su **moduo A** i **argument** α kompleksnog broja:

$$A = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{A}] + \text{Im}^2[\underline{A}]} = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ moduo je isključivo pozitivan;}$$

$$\alpha = \arctg \frac{\text{Im}[\underline{A}]}{\text{Re}[\underline{A}]} = \arctg \frac{y}{x}, \text{ argument može biti i pozitivan i negativan.}$$

Ovo proističe iz Ojlerove formule:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha.$$

- Šta je konjugovani broj kompleksnom broju?
 - To je broj koji ima isti znak realnog dela a suprotan znak imaginarnog dela datog kompleksnog broja, odnosno broj koji ima isti moduo a suprotan znak argumenta datog kompleksnog broja.

$$\underline{A}^* = x - jy = A e^{-j\alpha}$$

- Za kompleksne brojeve važi još i:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^4 = 1$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

RAČUNSKE OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

- **Sabiranje.** Zbir dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Sabiraju se realan deo sa realnim i imaginaran sa imaginarnim:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x_3 + jy_3$$

- **Oduzimanje.** Razlika dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Oduzimaju se realan deo od realnog i imaginaran od imaginarnog:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) = x_3 + jy_3$$

- **Množenje.** Množenje dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Množe se realni i imaginarni delovi kompleksnih brojeva, svaki član sa svakim:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\begin{aligned} \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} &= (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) = x_3 + jy_3 \end{aligned}$$

Ili ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku:

$$\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$$

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot e^{j\alpha} \cdot B \cdot e^{j\beta} = AB \cdot e^{j(\alpha+\beta)} = C \cdot e^{j\gamma}$$

- **Deljenje.** Količnik dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Brojilac i imenilac količnika pomnožimo sa konjugovano kompleksnim brojem imenioca:

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\begin{aligned} \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \cdot \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{x_1x_2 - jx_1y_2 + jx_2y_1 - j^2y_1y_2}{x_2^2 + jx_2y_2 - jx_2y_2 - j^2y_2^2} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = x_3 + jy_3 \end{aligned}$$

Ili ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku:

$$\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$$

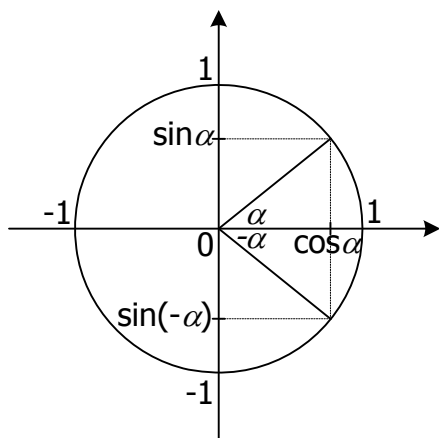
$$\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A \cdot e^{j\alpha}}{B \cdot e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} = C \cdot e^{j\gamma}$$

- Za proračun sa kompleksnim brojevima korisno je znati još i:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	0
e $j\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$	j	-1	-1	$-j$	1

- **Trigonometrijski krug** je krug čiji je poluprečnik jednak 1, a centar se nalazi u koordinatnom početku. Za dati ugao α kosinus očitavamo na x osi, a sinus na y osi.



Iz trigonometrijskog kruga se vidi da je

sinus – neparna funkcija: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

cosinus – parna funkcija: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

tangens – neparna funkcija: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

INTEGRALI

- Šta je integral?
 - Može se shvatiti kao suma beskonačno mnogo beskonačno malih veličina.
 - Oznaka integrala je $\int$.
- Kakvi integrali postoje?
 - Određeni i neodređeni.
- Šta je rešenje neodređenog integrala?
 - Funkcija.

Primer: $\int dx = x = f(x)$, rešenje ovog integrala je linearna funkcija.

- Šta je rešenje određenog integrala?
 - Brojna vrednost.

$$\int_A^B dx = x \Big|_A^B = B - A = C$$

- Za integrale važi:

$$1) \int_A^B = - \int_B^A$$

$$2) \int_A^B + \int_B^C = \int_A^C$$

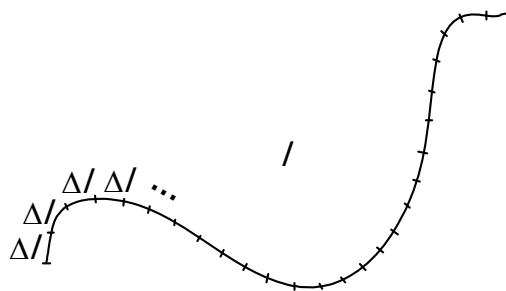
- U matematici postoji nekoliko osnovnih integrala čija se rešenja uče tablično. Mi ćemo koristiti samo dva:

$$\int dx = x$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

- Pojam određenog integrala se može razumeti na primeru linijskog i površinskog integrala.
 - *Linijski integral*. Posmatrajmo liniju čiju dužinu želimo da odredimo. Podelimo liniju na male (elementarne) delove dužine Δl (neka ih ima n). Dužina linije jednaka je zbiru dužina svih malih delova Δl :

$$l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$$



Ako podelimo liniju na jako veliki broj ovih delova ($n \rightarrow \infty$) dužina ovih delova postaje jako mala ($\Delta l \rightarrow 0$) i pišemo je kao dl , a sumu pišemo kao **linijski integral** (čija je podintegralna funkcija jednaka 1):

$$l = \sum_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \Delta l = \int_l dl,$$

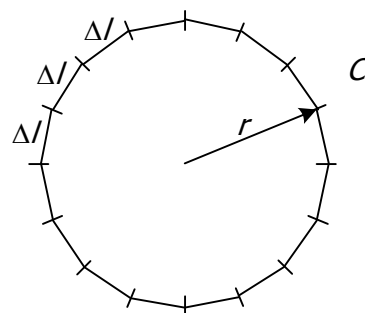
gde je ispod integrala označeno da se sabiranje vrši po liniji l .

– Ako je linija zatvorena obično je obeležavamo sa C (zatvorena kontura), a oznaka linijskog integrala je $\oint$, i označava integraljenje (sabiranje) po zatvorenoj konturi:

$$l = \oint_C dl,$$

Primer: Ako je zatvorena kontura C krug poluprečnika r tada je linijski integral po konturi C jednak obimu kruga:

$$l = \oint_C dl = 2\pi r.$$

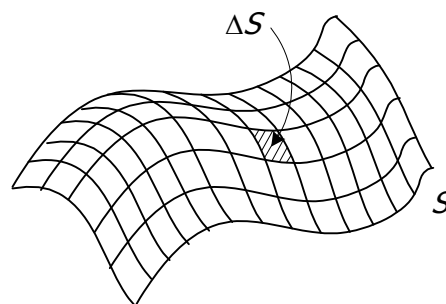


– *Površinski integral.* Posmatrajmo površ čiju površinu želimo da odredimo. Podelimo površ na male delove (elementarne) površine ΔS (neka ih ima n). Ukupna površina S jednaka je zbiru površina svih malih delova ΔS :

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

Ako podelimo površ na jako veliki broj ovih delova ($n \rightarrow \infty$), površina ovih delova postaje jako mala ($\Delta S \rightarrow 0$) i pišemo je kao dS , a sumu pišemo kao **površinski integral** (čija je podintegralna funkcija jednaka 1):

$$S = \sum_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \Delta S = \int_S dS,$$



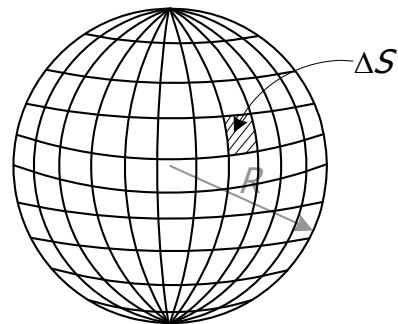
gde je ispod integrala označeno da se sabiranje vrši po površi S .

– Ako je površ zatvorena oznaka površinskog integrala je $\oint$, i označava integraljenje (sabiranje) po zatvorenoj površini:

$$S = \oint_S dS,$$

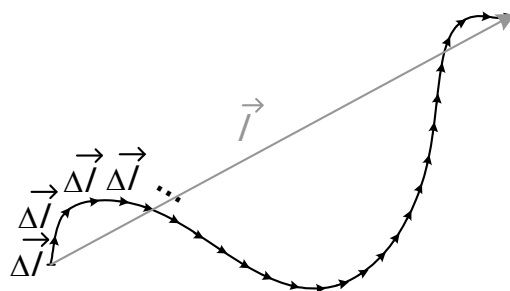
Primer: Ako je zatvorena površ S sfera poluprečnika R tada je površinski integral po sferi S jednak površini sfere:

$$S = \oint_S dS = 4\pi r^2.$$



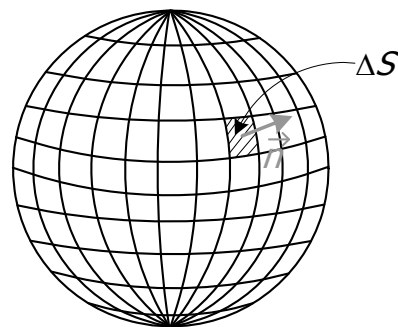
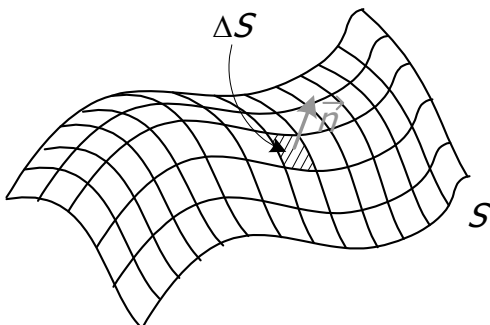
- Linijski i površinski integral mogu biti vektorski:
 - Svakom elementarnom delu $d\vec{l}$ dodeljuje se pravac koji se poklapa sa pravcem tangente na liniju l u posmatranoj tački, a smer po liniji se usvaja. Integral tada predstavlja vektorski zbir vektora $d\vec{l}$:

$$\vec{l} = \int_l d\vec{l}$$



- Svakom elementarnom delu dS dodeljuje se pravac koji se poklapa sa pravcem normale na površinu S u posmatranoj tački, a smer se usvaja, pa se može napisati da je $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$. Ako je S zatvorena površina usvojen je dogovor da je normala uvek usmerena iz površine. Integral tada predstavlja vektorski zbir vektora $d\vec{S}$:

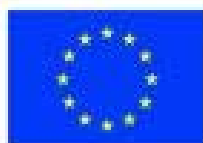
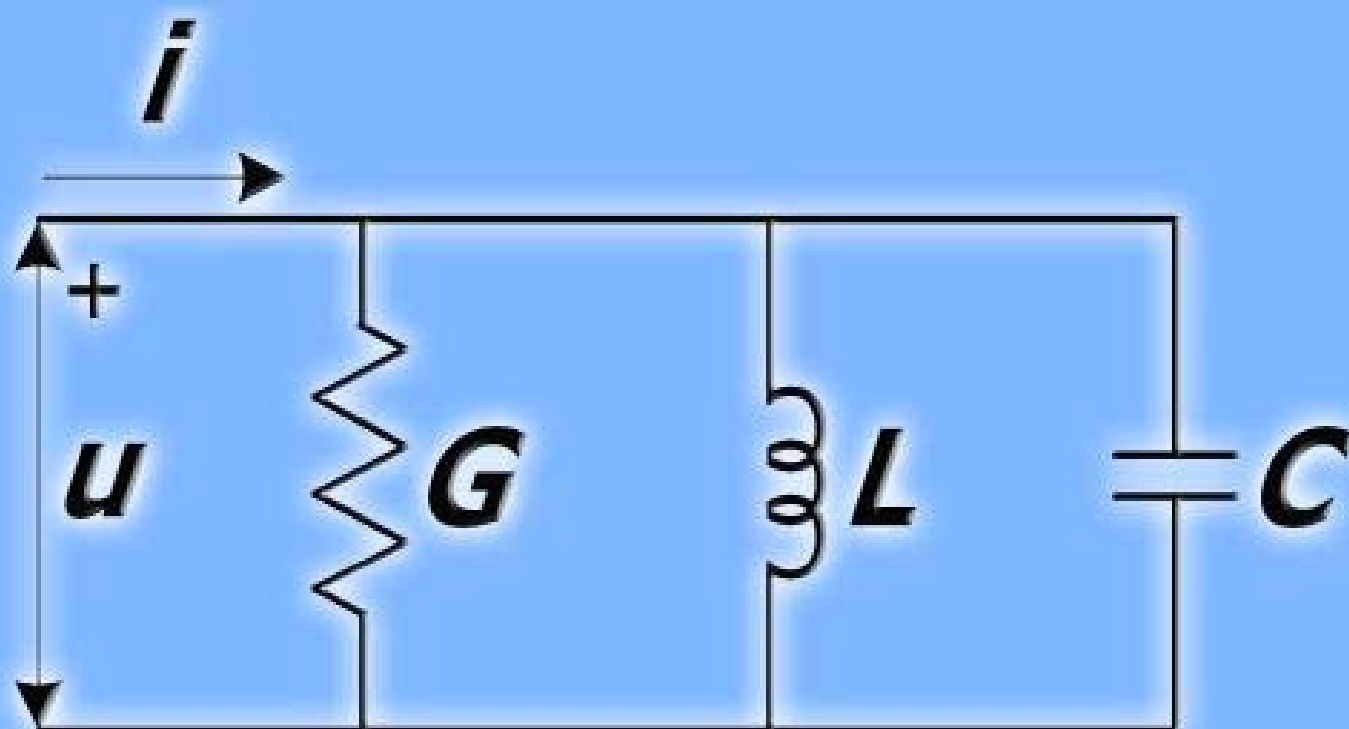
$$\int_S d\vec{S}$$



- Linijski i površinski integral mogu imati i podintegralne funkcije različite od jedinice. Na primer: $\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$, $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$.

LITERATURA

1. Surutka, J. *Osnovi elektrotehnike*, Akademska misao, Beograd, 2002.
2. Popović, B. *Osnovi elektrotehnike I i II*, Akademska misao, Beograd, 2004.
3. Božilović, H., Spasojević, Ž., Božilović, G. *Zbirka zadataka iz osnova elektrotehnike*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
4. Popović, B., Đorđević, A. *Osnovi elektrotehnike III*, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
5. Gavrilović, A. *Osnovi elektrotehnike, zbirka rešenih zadataka*, Viša elektrotehnička škola, Beograd, 2003.



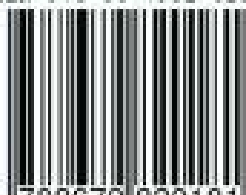
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



WAMP PP
561821-EPP-1-2015
EPPKA2-CBHE-JP

ISBN 978-86-7982-018-1



9 788679 820181 >

