

**Ана Савић Зоран Мишковић Светлана Штрбац - Савић**

# **МАТЕМАТИКА 1**

Друго измењено и допуњено издање

Висока школа електротехнике и рачунарства

Београд, 2013.

Др Ана Савић, мр Зоран Мишковић, мр Светлана Штрбац - Савић

Математика 1

*Рецензенти*

Др Слободан Обрадовић, доцент, Факултет за компјутерске науке у Београду

Мр Марко Царић, асистент, Висока школа електротехнике и рачунарства у Београду

*Издавач*

Висока школа електротехнике и рачунарства  
Београд, Војводе Степе 283

*Техничка обрада*

Др Ана Савић

*Корице*

Струк. инж. Ненад Толић

CIP – Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд  
51 (075.8)

**САВИЋ, Ана, 1974-**

Математика 1 / Ана Савић, Зоран Мишковић,  
Светлана Штрбац-Савић. – 2. Измењено и  
допуњено изд. – Београд : Висока школа  
електротехнике и рачунарства, 2013 (Београд :  
Школски сервис Гајић). – 321 стр. : илустр. ;  
24 cm

Тираж 20. – Регистар. – Биграфија : стр.  
[324] .

ISBN 978-86-7982-168-3

1. Мишковић Зоран, 1949- [аутор] 2.  
Штрбац-Савић, Светлана, 1972- [аутор]

а) Математика

COBISS.SR – ID 201174028

*Наставно веће Високе школе електротехнике и рачунарства у  
Београду одобрило је коришћење овог уџбеника у настави.*

*Забрањено прештампавање и копирање. Сва права задржава издавач.*

## ПРЕДГОВОР

Књига је првенствено намењена студентима Високе школе електротехнике и рачунарства у Београду који слушају једносеместрални курс из предмета Математика 1. Наравно могу је користити сви који сматрају да ће им бити корисна. Материјал је прилагођен плану и програму предмета Математика 1 и подељен је у 15 поглавља. Планирано је да се свако поглавље обради у току једне радне недеље. Свако поглавље садржи циљеве учења, теоријски део, решене примере и питања и задатке за проверу знања на крају сваког поглавља.

Њена намена је да олакша студентима да савладају градиво предмета Математика 1.

Аутори позивају све читаоце да дају своје сугестије, да би наредна издања била квалитетнија и садржајнија.

У Београду,  
2013.

Аутори





“Математика – то је језик којим говоре све природне науке. Не постоји ниједна математичка област, ма каква она била, која се не би могла применити на појаве реалног света”

Николај Лобачевски



# Садржај

|                                                                            |               |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>1. Увод .....</b>                                                       | <b>1</b>      |
| 1.1. Језик математике .....                                                | 2             |
| 1.2. Основни појмови математичке логике .....                              | 3             |
| 1.3. Основни појмови теорије скупова .....                                 | 8             |
| 1.3.1. Операције са скуповима .....                                        | 9             |
| 1.3.2. Кардинални број .....                                               | 12            |
| Задаци за проверу знања .....                                              | 13            |
| <br><b>2. Теорија бројева .....</b>                                        | <br><b>17</b> |
| 2.1. Природни бројеви .....                                                | 18            |
| 2.2. Цели бројеви .....                                                    | 21            |
| 2.3. Рационални бројеви .....                                              | 22            |
| 2.4. Ирационални бројеви .....                                             | 22            |
| 2.5. Реални бројеви .....                                                  | 23            |
| 2.6. Проширење скупа реалних бројева .....                                 | 24            |
| 2.7. Комплексни бројеви .....                                              | 28            |
| 2.7.1. Алгебарски облик комплексног броја .....                            | 28            |
| 2.7.2. Операције са комплексним бројевима у алгебарском облику ..          | 31            |
| Задаци за проверу знања .....                                              | 32            |
| 2.7.3. Тригонометријски облик комплексног броја .....                      | 38            |
| 2.7.4. Операције са комплексним бројевима у тригонометријском облику ..... | 40            |
| Задаци за проверу знања .....                                              | 42            |
| 2.7.5. Експоненцијални облик комплексног броја .....                       | 47            |
| 2.7.6. Операције са комплексним бројевима у експоненцијалном облику .....  | 47            |
| <br><b>3. Функције .....</b>                                               | <br><b>49</b> |

|                               |                                        |    |
|-------------------------------|----------------------------------------|----|
| 3.1.                          | Појам функције .....                   | 50 |
| 3.2.                          | Начини задавања функција .....         | 51 |
| 3.3.                          | Реалне функције једне променљиве ..... | 52 |
| 3.4.                          | Инверзна функција.....                 | 53 |
| 3.5.                          | Слагање функција .....                 | 54 |
| 3.6.                          | Особине функција .....                 | 55 |
| 3.7.                          | Преглед елементарних функција.....     | 59 |
| Задаци за проверу знања ..... |                                        | 66 |

## **4. Низови .....** 73

|                               |                                                 |    |
|-------------------------------|-------------------------------------------------|----|
| 4.1.                          | Низови .....                                    | 74 |
| 4.2.                          | Гранична вредност низа .....                    | 75 |
| 4.3.                          | Особине конвергентних низова .....              | 76 |
| 4.4.                          | Операције са граничним вредностима низова ..... | 76 |
| 4.5.                          | Тачка нагомилавања низа.....                    | 77 |
| 4.6.                          | Број $\epsilon$ .....                           | 78 |
| Задаци за проверу знања ..... |                                                 | 78 |

## **5. Гранична вредност функције .....** 85

|                               |                                               |    |
|-------------------------------|-----------------------------------------------|----|
| 5.1.                          | Гранична вредност функције .....              | 86 |
| 5.2.                          | Лева и десна гранична вредност функције ..... | 87 |
| 5.3.                          | Особине граничних вредности функција.....     | 89 |
| 5.4.                          | Непрекидност функције .....                   | 90 |
| 5.5.                          | Особине непрекидних функција.....             | 91 |
| 5.6.                          | Асимптоте функције .....                      | 92 |
| Задаци за проверу знања ..... |                                               | 93 |

## **6. Извод функције.....** 105

|      |                                     |     |
|------|-------------------------------------|-----|
| 6.1. | Извод функције .....                | 106 |
| 6.2. | Леви и десни извод .....            | 107 |
| 6.3. | Основна правила диференцирања ..... | 108 |
| 6.4. | Таблица основних извода.....        | 110 |
| 6.5. | Извод инверзне функције.....        | 111 |
| 6.6. | Извод сложене функције .....        | 112 |
| 6.7. | Логаритамски извод.....             | 113 |
| 6.8. | Извод имплицитне функције .....     | 114 |

|       |                                         |     |
|-------|-----------------------------------------|-----|
| 6.9.  | Геометријско тумачење извода.....       | 114 |
| 6.10. | Диференцијал функције .....             | 116 |
| 6.11. | Изводи и диференцијали вишег реда ..... | 117 |
|       | Задаци за проверу знања .....           | 119 |

## **7. Тејлорова формула ..... 131**

|      |                                                   |     |
|------|---------------------------------------------------|-----|
| 7.1. | Тејлорова формула.....                            | 132 |
| 7.2. | Маклоренови развоји неких важнијих функција ..... | 134 |
|      | Задаци за проверу знања .....                     | 136 |

## **8. Основне теореме диференцијалног рачуна ..... 145**

|      |                               |     |
|------|-------------------------------|-----|
| 8.1. | Фермаова теорема .....        | 146 |
| 8.2. | Ролова теорема .....          | 147 |
| 8.3. | Кошијева теорема.....         | 148 |
| 8.4. | Лагранжова теорема.....       | 149 |
| 8.5. | Лопиталова теорема.....       | 151 |
|      | Задаци за проверу знања ..... | 153 |

## **9. Испитивање функција помоћу извода ..... 161**

|      |                                                             |     |
|------|-------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1. | Монотоност функције.....                                    | 162 |
| 9.2. | Екстремне вредности функције .....                          | 163 |
| 9.3. | Одређивање екстрема функције помоћу извода вишег реда ..... | 165 |
| 9.4. | Конвексност и конкавност функције .....                     | 166 |
| 9.5. | Превојне тачке функције .....                               | 167 |
| 9.6. | Испитивање тока функције .....                              | 168 |
|      | Задаци за проверу знања .....                               | 168 |

## **10. Неодређени интеграли ..... 205**

|       |                                    |     |
|-------|------------------------------------|-----|
| 10.1. | Неодређени интеграл .....          | 206 |
| 10.2. | Особине неодређеног интеграла..... | 208 |
| 10.3. | Таблица основних интеграла .....   | 209 |
| 10.4. | Основна правила интеграције .....  | 210 |
|       | Задаци за проверу знања .....      | 210 |



|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| Задаци за проверу знања .....                   | 285 |
| 13.3. Израчунавање запремина обртних тела ..... | 292 |
| Задаци за проверу знања .....                   | 294 |

## **14. Функције више променљивих .....** 299

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 14.1. Функције две независно променљиве .....           | 300 |
| 14.2. Парцијални изводи првог реда .....                | 300 |
| 14.3. Парцијални изводи другог реда .....               | 300 |
| Задаци за проверу знања .....                           | 301 |
| 14.4. Тотални диференцијал .....                        | 302 |
| Задаци за проверу знања .....                           | 302 |
| 14.5. Екстремне вредности функције две променљиве ..... | 303 |
| Задаци за проверу знања .....                           | 304 |

## **15. Бета и Гама функција .....** 309

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| 15.1. Бета функција .....                    | 310 |
| 15.2. Гама функција .....                    | 311 |
| 15.3. Веза између Бета и Гама функције ..... | 312 |
| Задаци за проверу знања .....                | 313 |

## **16. Индекс појмова .....** 322

## **17. Литература .....** 324

# 1. ГЛАВА

## *УВОД*

### 1. ЈЕЗИК МАТЕМАТИКЕ

### 2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

### 3. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА

## ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када савладате ово поглавље требало би да знате:

1. шта сачињава језик математике,
2. дефиницију исказа,
3. дефиниције логичких операција,
4. приоритете логичких операција,
5. шта су таутологије, а шта контрадикције,
6. основне логичке законе,
7. дефиниције основних скуповних релација и операција.

# УВОД

## 1.1. ЈЕЗИК МАТЕМАТИКЕ

Током свог развоја математика је развила један специфичан језик који се разликује од обичног, говорног језика. Математички језик је стваран постепено да одговори потребама математичког расуђивања и самим тиме је прецизнији и краћи од говорног језика. Како су у његовом стварању учествовали математичари широм света добијен је језик који је међународни.

Математички језик и математички модели расуђивања нашли су своје примене у природним и техничким наукама. У новије време математика се примењује и у наукама као што су психологија, социологија, лингвистика и многим другим.

- **Језик математике чине:**

**Константе:**  $2, 3, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{2}, \dots$ ;

**Променљиве:**  $x, y, a, b, \alpha, \beta, \dots$ ;

**Операцијски знаци:**

**алгебарске операције:**  $+, -, \cdot, /$ , **логичке операције:**  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ , **скуповне операције:**  $\cup, \cap, \setminus, \dots$ ;

**Релацијски знаци:**  $\rho: =, \leq, \geq, \perp, \parallel, \dots$ ;

**Специјални знаци:**  $(, ), [, ], \{, \}, \exists, \forall, !, \dots$

- Коришћењем ових симбола дефинишемо математичке изразе и формуле.
- Изрази садрже константе, променљиве и операцијске знаке.

**Пример:**  $x + 2$  је израз. Изрази у обичном језику су речи.

- Формуле садрже изразе и релацијске знаке.

**Пример:**  $x + 2 = 5$  је формула. Формуле су у обичном језику реченице.

## 1.2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

Математичка логика је савремена математичка дисциплина настала у другој половини 19. века. До скоро је сматрана за апстрактну дисциплину, без практичне примене. Данас се без ње не могу решити веома практични проблеми везани за конструкције електронских рачунара и других аутомата. Уз апстрактну алгебру она је данас веза између човека и електронских рачунара. Применом математичке логике може се постићи материјализација најапстрактнијих математичких истраживања.

- Афирмативна реченица која има истинитосну вредност назива се **исказ**.
- Искazi се обележавају малим словима  $p, q, r, \dots$  која се називају **искazна слова**.
- **Истинитосна вредност** исказа је  $\tau(p) = \begin{cases} 1, & p \text{ је тачан исказ} \\ 0, & p \text{ је нетачан исказ} \end{cases}$

Уместо 1 и 0, користе се и ознаке  $\top$  и  $\perp$ . Симболе 1 и 0 не треба схватати као бројеве 1 и 0 у уобичајеном смислу.

**Пример:** Реченица  $p: 2-1=1$  је исказ и има тачну истинитосну вредност,  $\tau(p)=1$ .

**Пример:** Реченица  $2-1=-1$  је исказ и има нетачну истинитосну вредност,  $\tau(p)=0$ .

**Пример:** Реченица  $x^2=1$  није исказ јер не можемо да одредимо њену истинитосну вредност. За  $x=\pm 1$  формула је тачна, а за све остале вредности је нетачна.

### Основне логичке операције

| операција                        | симбол            | исказ                 |
|----------------------------------|-------------------|-----------------------|
| Конјункција ( и )                | $\wedge$          | $p \wedge q$          |
| Дисјункција (или )               | $\vee$            | $p \vee q$            |
| Импликација ( ако онда )         | $\Rightarrow$     | $p \Rightarrow q$     |
| Еквиваленција ( ако и само ако ) | $\Leftrightarrow$ | $p \Leftrightarrow q$ |
| Негација ( не )                  | $\neg$            | $p \neg q$            |

### Истинитосна вредност логичких операција

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \wedge q)$ | $\tau(p \vee q)$ | $\tau(p \Rightarrow q)$ | $\tau(p \Leftrightarrow q)$ | $\tau(\neg p)$ |
|-----------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------|
| 1         | 1         | 1                  | 1                | 1                       | 1                           | 0              |
| 1         | 0         | 0                  | 1                | 0                       | 0                           | 0              |
| 0         | 1         | 0                  | 1                | 1                       | 0                           | 1              |
| 0         | 0         | 0                  | 0                | 1                       | 1                           | 1              |

Истинитосна вредност у табели је у сагласности са уобичајеном логиком. Једино код импликације наизглед налогичност видимо у случају када је  $\tau(p) = 0$ . Импликација је тада тачна без обзира на вредност исказног слова  $q$ .

**Пример:** Ако је Србија највећа на свету, већа је од Црне Горе.

**Пример:** Ако је Србија највећа на свету, већа је од САД.

- Формуле су сложени изрази кога чине исказна слова и логичке операције.

**Пример:** Формуле су  $(p \Rightarrow q) \wedge p$ ,  $p \vee q \vee r$ ,  $\neg p(p \Leftrightarrow q)$ .

**Пример:** Дати су искази  $p \equiv (4x^4y^3)^3 : (2x^2y)^5 = 2x^2y^3$ ,

$q \equiv (3x^4y^2)^2 : (3x^6y)^2 = 3xy^4$ ,  $r \equiv (2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2$  и

$s \equiv (x - 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$ .

Одредити њихову тачност и на основу тога одредити истинитосну вредност следећих изказа:

$$(p \wedge q) \vee r, (p \vee q) \vee (r \wedge s), (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s), (p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s).$$

$$\tau(p)=0, \tau(q)=0, \tau(r)=1, \tau(s)=0.$$

$$\tau((p \wedge q) \vee r)=1,$$

$$\tau((p \vee q) \vee (r \wedge s))=0,$$

$$\tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s))=1,$$

$$\tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s))=0.$$

- Исказна формула која је увек тачна назива се таутологија. Таутологије су математички закони.
- Важније таутологије:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \text{ закон комутације};$$

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r), (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \text{ закон асоцијације};$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \text{ закон дистрибуције};$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p \text{ закон идемпотенције};$$

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p \text{ закон двоструке негације};$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p, p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \text{ закон апсорпције};$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \text{ Де Морганов закон};$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \text{ Де Морганов закон};$$

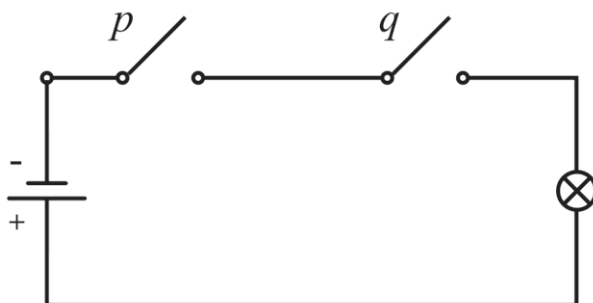
- Изказне формуле у којима се појављују само операције  $\wedge, \vee, \neg$ , при чему  $\neg$  делује само на исказна слова, имају једну занимљиву интерпретацију која се користи у техници и назива прекидачка алгебра.
- Исказна слова се третирају као нормално отворени прекидачи, а њихова негација као нормално затворени прекидачи. Ако исказно слово има вредност  $p=1$  сматра се да је прекидач затворен, тј. да проводи струју, а да је за  $p=0$  отворен.



Формула се третира као мрежа са два краја састављена од прекидача који су повезани паралелно или серијски. Таутологијама одговарају мреже које увек проводе струју.

### Пример:

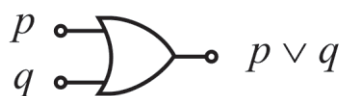
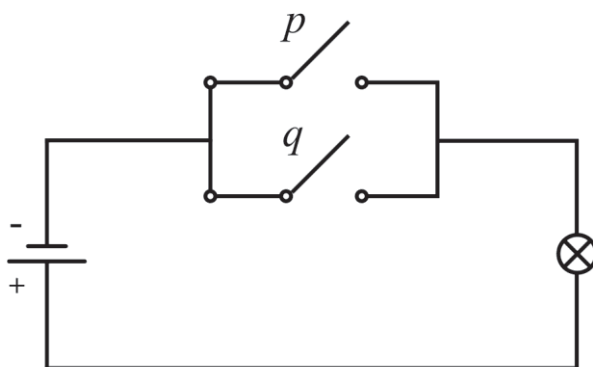
Посматрајмо прекидачко коло које садржи прекидач и сијалицу. Вредност 1 додељујемо прекидачима  $p$  и  $q$  када су затворени, тј ако кроз њих протиче струја. У супротном додељујемо им вредност 0. Када су прекидачи редно везани, сијалица ће светлети и коло ће имати вредност 1 само ако су оба прекидача  $p$  и  $q$  затворена. Према томе, ово коло ће одговарати исказу  $p$  и  $q$ , односно  $p \wedge q$  и зове се AND –и коло.



### Пример:

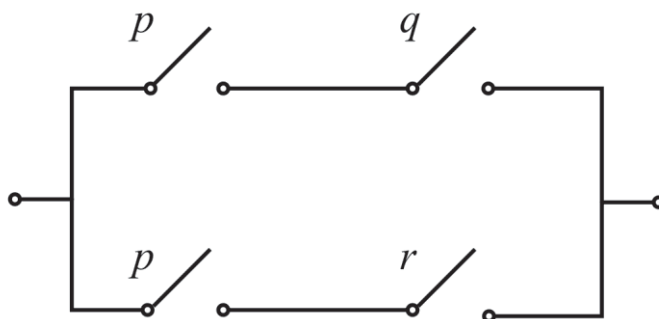
Посматрајмо прекидачко коло у коме су прекидачи  $p$  и  $q$  везани паралелно. Када су прекидачи паралелно везани, сијалица ће светлети ако је  $p=1$  или  $q=1$  и коло ће имати вредност 1 ако је бар један прекидача  $p$  и  $q$  затворен.

Према томе, ово коло ће одговарати исказу  $p$  или  $q$ , односно  $p \vee q$  и зове се OR- или коло.



### Пример:

Формули  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  одговара мрежа:



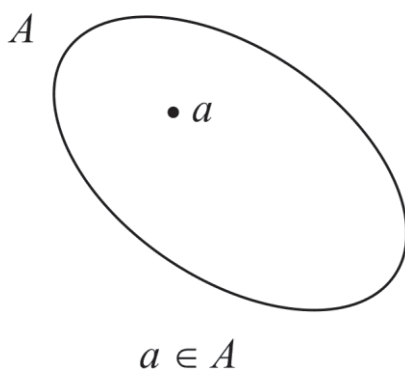
### 1.3. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА

Одлучујући корак у систематизацији математичких сазнања представља теорија скупова, тачније теорија бесконачних скупова чији је творац Кантор (1845-1918).

- Скуп је основни појам који се не дефинише, већ се узима као основни.

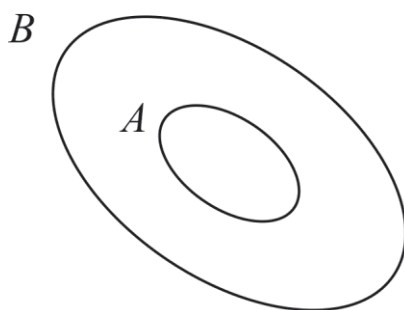
**Напомена:** Помоћу скупова дефинишу се други појмови, па говоримо о скуповима тачака, скуповима бројева, функција се дефинише као скуп уређених парова итд.

- Сваки **скуп** састоји се од различитих објеката које ћемо називати његовим **елементима**.



- Скупови се означавају великим словима  $A, B, C, \dots$ , а елементи малим словима  $a, b, c, \dots$  и користимо запис  $A = \{a, b, c, \dots\}$ .
- Неки елемент  $a$  може припадати датом скупу  $A$ , што се означава са  $a \in A$ , или не припадати истом скупу, што се означава са  $a \notin A$ .
- Скуп који нема елемената назива се **празан скуп** и обележава са  $\emptyset$ .
- Скуп  $A$  је **подскуп** скупа  $B$  и пишемо  $A \subset B$  ако сваки елемент скупа  $A$  припада истовремено и скупу  $B$ .

$$A \subset B \Leftrightarrow \{x | x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$



$$A \subset B$$

- Два скупа  $A$  и  $B$  су једнака ако сваки елемент скупа  $A$  припада и скупу  $B$  и ако сваки елемент скупа  $B$  истовремено припада и скупу  $A$ .

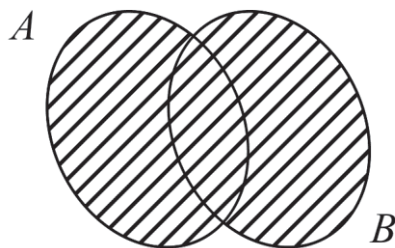
$$A = B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \in B\}.$$

- Партитивни** скуп  $P(S)$  датог скупа  $S$  је скуп  $P(S) = \{X; X \subseteq S\}$ .

**Пример:**  $S = \{a, b, c\}$ ,  $P(S) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$ .

### 1.3.1. ОПЕРАЦИЈЕ СА СКУПОВИМА

- Унија** два скупа  $A$  и  $B$  је скуп  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ .



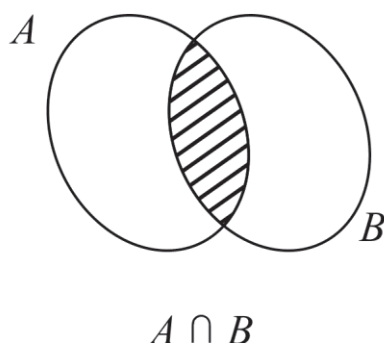
$$A \cup B$$

**Пример:**  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3, 6, 7\}$ ;  $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ .

- У општем случају, када имамо коначно много скупова  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , њихова унија је:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

- Пресек** скупова  $A$  и  $B$  је скуп  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ .

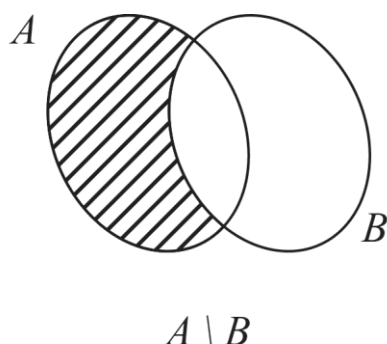


**Пример:**  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3, 6, 7\}$ ;  $A \cap B = \{2\}$ .

- Ако је пресек два скупа  $A$  и  $B$  празан,  $A \cap B = \emptyset$ , тада кажемо да су та два скупа **дисјунктна**.
- Ако је дато коначно много скупова  $A_1, A_2, \dots, A_n$  њихов пресек је:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

- Разлика** скупова  $A$  и  $B$  је скуп  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .



**Пример:** На скупу реалних бројева дати су интервали  $A = (1, 3)$  и  $B = (2, 5)$ . Према дефиницији разлике скупова имамо да је  $A \setminus B = (1, 2]$ , а  $B \setminus A = [3, 5)$ .

- **Симетрична разлика скупова**  $A$  и  $B$  је унија скупова  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ , тј.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- **Комплемент** скупа  $A$  у односу на скуп  $B$  (или допуна скупа  $A$  до скупа  $B$ ) где је  $A \subset B$  је скуп  $B \setminus A = C_B A$ .
- Пар елемената  $(a, b)$  називамо **уређеним паром** (или уређеном двојком) ако је тачно одређено који је елемент на првом, а који на другом месту.
- Уређени парови  $(a, b)$  и  $(c, d)$  су једнаки ако и само ако је  $a = c$  и  $b = d$ .
- **Декартовим производом** скупова  $A$  и  $B$  назива се скуп  $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ .

**Пример:** Дати су скупови  $A = \{1, 2, 3\}$  и  $B = \{x, y\}$ .

$$A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\},$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

Очигледно је да  $A \times B \neq B \times A$ , што значи да за Декартов производ скупова не важи закон комутације.

- Декартов производ  $A \times A$  се означава са  $A^2$ .
- Декартов производ  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  представља реалну равн, тј.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

**Пример:** Дат је скуп  $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Одредити скупове  $A = \{x | x \geq 3\}$  и  $B = \{x | x < 8\}$ , чији су елементи елементи скупа  $P$ , а затим одредити скупове  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A / B$ .

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A / B = \{8, 9\}.$$

### 1.3.2. КАРДИНАЛНИ БРОЈ

Одређивање броја елемената коначних скупова своди се на њихово пребројавање. Међутим, када се ради о бесконачним скуповима, ствар је много сложенија. Тада се срећемо са доста неочекиваним ситуацијама.

- Ако постоји „1-1“ и „на“ пресликавање  $f$  скупа  $A$  на скуп  $B$ , (бијекција) онда се за скупове  $A$  и  $B$  каже да су еквивалентни.
- Еквивалентни скупови  $A$  и  $B$  имају исти **кардинални број**, у ознаци  $k(A) = k(B)$ .
- Код коначних скупова **кардинални број** представља број елемената скупа.

**Пример:**

Еуклидова аксиома каже: Целина је већа од дела.

Кардинални број скупа природних бројева једнак је кардиналном броју скупа свих парних природних бројева.

Та једнакост се види из пресликавања

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 & \dots & 2 \cdot n & \dots \end{array}$$

Дакле  $k(\mathbb{N}) = k(2\mathbb{N})$ .

Још 1638. године Галилеј је сматрао да се овде ради о парадоксу. Интуитивно се чини да је скуп природних бројева има више елемената него скуп парних природних бројева.

Канторова теорија показује да се бесконачни скупови могу упоређивати. Скупови  $\mathbb{N}$  и  $2\mathbb{N}$  су еквивалентни, али скупови  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{R}$  нису.

Кардинални број скупа  $\mathbb{R}$  је већи од кардиналног броја скупа  $\mathbb{N}$ , значи можемо рећи да је неки бесконачни скуп „бесконачнији“ од другог.

**Пример:** Скуп свих тачака праве еквивалентан је са скупом тачака равни. Скуп свих реалних бројева између 0 и 1 има већи кардинални број од скупа свих рационалних бројева  $\mathbb{Q}$ .

**Пример:** Кардинални број празног скупа је 0, и пишемо  $k(\emptyset) = 0$ .

- Кардинални број скупа природних бројева означава се хебрејским словом  $\aleph$  и чита се **алеф**, са индексом 0

$$k(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

- Ако је  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  и  $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , одредити
  - $A \cup B$ ,  $(A \cup B) \cup C$ ,
  - $A \cap B$ ,  $(A \cap B) \cap C$ ,
  - $A \setminus B$ ,  $C \setminus A$ ,
  - $A \times B$ ,  $P(A)$ .

**Решење:**

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,

б)  $A \cap B = \{2, 3\}$ ,  $(A \cap B) \cap C = \{2, 3\}$ ,

ц)  $A \setminus B = \{1\}$ ,  $C \setminus A = \{4, 5, 6, 7\}$ ,

$A \times B =$

д)  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$

2. Одредити елементе скупова  $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$  и

$B = \{x \mid 2x + 1 < 7 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ , а затим израчунати  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ .

**Решење:**

$A = \{-1, 1\}.$

Како је  $2x + 1 < 7 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$ , а треба да узмемо само природне бројеве

$B = \{1, 2\}.$

$A \cap B = \{1\}$ ,  $A \cup B = \{-1, 1, 2\}$ ,  $A \setminus B = \{-1\}$ ,  $B \setminus A = \{2\}.$

3. Дат је скуп  $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Одредити скупове  $A = \{x \mid x \in P \wedge x \geq 3\}$  и

$B = \{x \mid x \in P \wedge x < 8\}$ , а затим израчунати  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ .

**Решење:**

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A \setminus B = \{8, 9\}.$

4. Дат је скуп  $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Одредити скупове  $A = \left\{x \mid x \in P \wedge \frac{2x}{12-x} \in P\right\}$

и  $B = \left\{x \mid x \in P \wedge \frac{x^2}{2} - x \in P\right\}$ , а затим израчунати  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,

$B \setminus A$ ,  $P(A \setminus B).$

**Решење:**

$A = \{0, 4, 6, 8, 9\}$ ,  $B = \{0, 2, 4\}.$

$$A \cap B = \{0, 6, 8\}, A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A \setminus B = \{6, 8, 9\}, B \setminus A = \{2\},$$

$$P(A \setminus B) = \{\emptyset, \{6\}, \{8\}, \{9\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{8, 9\}, \{6, 8, 9\}\}.$$

5. Дати су скупови  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, 4\}$ ,  $C = \{2, 4, c\}$ ,  $D = \{a, b, 3\}$  и  $E = \{1, b\}$ . Одредити  $a, b, c$  и  $d$  ако знамо да је  $B \subset A$ ,  $C \subset A$ ,  $D \subset A$  и  $E \subset B$ .

**Решење:**  $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ .

6. Дати су скупови  $A = \{n | n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$ ,  $B = \{n | n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 7\}$ ,  $C = \{2, 3, 6\}$ , Одредити скупове  $X$  и  $Y$  ако знамо да је  $X \subset A$ ,  $C \cup X = B$ .

**Решење:** Једно од решења је  $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

7. Применом таутологија доказати следеће скуповне једнакости:

а)  $A \cap (A \cup B) = A$ ,      б)  $(A/B) \cap B = \emptyset$ ,

в)  $A \cap B = B \cap A$ ,      г)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**Решење:**

а)

$$x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$$

$$x \in A \wedge x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$$

$$x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

Ако уведемо ознаке:  $p: x \in A$  и  $q: x \in B$ , добијамо исказну формулу

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ . Коришћењем таблице лако се доказује да је формула таутологија, па самим тим и свака формула која се на њу може свести је тачна.

б) Формули  $(A/B) \cap B = \emptyset$  одговара таутологија  $(p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow \perp$ .

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Исказ

Конјункција

Дисјункција

Импликација

Еквиваленција

Негација

Таутологија

Контрадикција

Скуп

Унија

Пресек

Декартов производ

## **2. ГЛАВА**

# ***ТЕОРИЈА БРОЈЕВА***

### **1. ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ**

### **2. ЦЕЛИ БРОЈЕВИ**

### **3. РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ**

### **4. ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ**

### **5. РЕАЛНИ БРОЈЕВИ**

### **6. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ**

## **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. природним бројевима,
2. целим бројевима,
3. рационалним бројевима,
4. ирационалним бројевима,
5. реалним бројевима,
6. комплексним бројевима.

# ТЕОРИЈА БРОЈЕВА

Историјски развитак појма броја је у непосредној вези са односима који постоје између предмета и појава реалног света. Научна еволуција појма броја може се пратити од староегипатске и вавилонске математике, преко старогрчке, затим индуске, арапске и европске математике средњег века када се без математички прецизних теорија рачунало са реалним бројевима, па све до данашњих дана.

Настанак сваке нове врста бројева био је праћен неповерењем и отпором. Дуго су негативни бројеви сматрани апсурдним бројевима, мада се они појвљују у записима старих Кинеза, Индуса и Арапа, а негативни корени су сматрани лажним.

Све до 19. века теорија бројева се развијала углавном због практичних потреба, да би током 19. и 20. века дошло до прецизног заснивања теорије бројева.

**Број је основни појам који се не дефинише већ се интуитивно схвата.**

## 2.1. ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

- За сваки број  $n \in \mathbb{N}$  постоји број  $n+1 \in \mathbb{N}$ . Бројеви  $n$  и  $n+1$  су **узастопни** или **сукцесивни** бројеви.
- Скуп природних бројева  $\mathbb{N}$  је **ограничен** с доње стране, а **није ограничен** с горње стране, тј. постоји најмањи природни број 1, а не постоји највећи.
- Природан број чији су једини чиниоци он сам и број 1, називамо **простим бројем**, на пример 2, 3, 5, 7, 11, .... **Узајамно простим** бројевима називамо два природна броја ако им је једини заједнички чинилац број 1.
- Природни број је **паран** ако му је бар један прост чинилац број 2. Ако то није случај број је **непаран**. Парне бројеве обележавамо са  $2k$ , а непарне са  $2k+1$  или  $2k-1$ , где је  $k \in \mathbb{N}$ .

- Скуп природних бројева је **затворен** у односу на операције **сабирања** и **множења**, тј. резултат сабирања и множења два природна броја увек је природан број.
- За операције сабирања и множења природних бројева важе закони:

$$\begin{array}{ll} a+b=b+a, ab=ba & \text{комутације;} \\ (a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc) & \text{асоцијације;} \\ (a+b)c=ac+bc, a(b+c)=ab+ac & \text{дистрибуције.} \end{array}$$

- **Степен** природног броја дефинишемо као  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ пута}}$ .

На основу дефиниције степена закључујемо:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

## ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ

Индукција је метод закључивања којим се из ставова који се односе на одређен број појединачних случајева изводи став који се односи на све случајеве те врсте.

Овај метод закључивања често се користи у природним наукама, где се посматрањем или експериментом долази до одређених сазнања о некој појави, па се на основу ових појединачних случајева изводи општи став. Таква индукција се назива **непотпуна** или **емпиријска индукција**.

Овакав начин закључивања није добар, јер се често на основу одређеног броја тачних појединачних случајева не добија тачан закључак у општем случају.

Математика је више **дедуктивна** наука, тј. метод закључивања је од општег ка посебном.

Међутим, многе математичке проблеме могуће је проучавати индуктивном методом.

Принцип математичке индукције искључује могућност грешке јер се односи на све могуће случајеве.

■ Нека је  $T(n)$  теорема чија формулација садржи природни број  $n$ .

1. Ако је теорема  $T(n)$  тачна за  $n=1$ ,
2. под претпоставком да је тачна за било који природни број  $n=k$ ,
3. ако докажемо да важи за  $n=k+1$ ,

онда је теорема  $T(n)$  тачна за све природне бројеве.

**Пример:** Доказати да важи једнакост:  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1. За  $n=1$  имамо  $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ , једнакост је тачна.
2. За  $n=k$  имамо  $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ . Претпостављамо да је једнакост тачна.
3. За  $n=k+1$  је  $1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ . Треба да докажемо, под претпоставком 2, да је једнакост тачна.

Ако обема страна једнакости 2 додамо сабирак  $k+1$  добијамо

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\dots+k+(k+1) = (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

чиме смо доказали да је под претпоставком 2, једнакост тачна и за  $n=k+1$ , одакле закључујемо да је формула тачна за све природне бројеве.

**Пример:** Доказати Бернулијеву неједнакост:

$$(1+h)^n > 1+nh, h \neq 1, h > 0, n \geq 2$$

1. За  $n = 2$  имамо  $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$ , неједнакост је тачна.
2. За  $n = k$  имамо  $(1+h)^k > 1+kh$ , претпостављамо да је неједнакост тачна.
3. За  $n = k+1$  је  $(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$ . Треба да докажемо, под претпоставком 2, да је једнакост тачна.

Користећи неједнакости 2 добијамо:

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k (1+h) > (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h,$$

чиме смо доказали да је под претпоставком 2, једнакост тачна и за  $n = k+1$ , одакле закључујемо да је формула тачна за све природне бројеве.

## 2.2. ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Операција **одузимања** се у скупу природних бројева не може увек дефинисати. Разлика два природна броја не мора бити природан број. Та чињеница доводи до проширења скупа природних бројева  $\mathbb{N}$  на скуп целих бројева  $\mathbb{Z}$ .

- **Одузимање** у скупу целих бројева је операција које се дефинише као:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a - b = c \Leftrightarrow a = b + c.$$

- Скуп **целих бројева** садржи све природне бројеве, нулу и бројеве облика  $-n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

- Скуп  $\mathbb{Z}$  је надскуп скупа  $\mathbb{N}$  и задржава сва правила која смо дефинисали у скупу  $\mathbb{N}$ , додајући нека нова која важе само у скупу  $\mathbb{Z}$ . Овај принцип користимо и у дефинисању наредних проширења скупова бројева и зове се **принцип перманенције**.
- Скуп целих бројева је **неограничен** како с доње тако и с горње стране, тј. у скупу  $\mathbb{Z}$  не постоји ни најмањи ни највећи цео број.

## 2.3. РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Операција **дељења** се у скупу целих бројева не може увек дефинисати, тј. количник два цела броја не мора да буде цео број, што доводи до проширења скупа целих бројева  $\mathbb{Z}$  на скуп **рационалних бројева**  $\mathbb{Q}$ .

- Скуп **рационалних бројева** је скуп облика:

$$\mathbb{Q} = \left( \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right).$$

- **Дељење** целих бројева дефинишемо на следећи начин:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0, \frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c.$$

- Скуп рационалних бројева је **неограничен** с обе стране, тј. не постоји ни најмањи ни највећи рационалан број.
- Скуп рационалних бројева је **свуда густ** скуп, што значи да се између свака два произвољна рационална броја  $a, b \in \mathbb{Q}$  увек може уметнути бар један нови рационалан број, па самим тим и бесконачно много њих.
- Скуп рационалних бројева је **пребројив** скуп тј. између тог скупа и скупа природних бројева може се успоставити обострано једнозначна кореспонденција.

## 2.4. ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Грчки математичари Питагорејске школе су у 5. веку пре нове ере наслутили постојање ирационалног броја, али нису успели да га схвате. Дошли су до сазнања да су страница квадрата дужине 1 и његова дијагонала дужине  $\sqrt{2}$  несамерљиве дужи, тј. да немају заједничку меру. Проблем је био у томе јер су број схватили као скуп састављен из јединица и тиме остали на

појму природног броја, тврдећи да се несамерљиве величине не односе као бројеви.

Међутим, лако се доказује да број  $\sqrt{2}$  није рационалан број, тј. не може се представити у облику разломка. На тај начин долазимо до новог проширења скупова бројева, тј. до појма **ирационалног броја**.

- Број који се не може представити у облику разломка називамо **ирационалним бројем**, на пример  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\log 2$ ,  $\pi$ ,  $e$ , ....
- Сваки ирационалан број може се представити у облику **бесконачног непериодичног разломка**.
- Скуп ирационалних бројева обележавамо са  $I$ .
- Скуп ирационалних бројева је неограничен.
- Скуп ирационалних бројева је свуда густ.

## 2.5. РЕАЛНИ БРОЈЕВИ



R. Dedekind (1831-1916)

Дедекинд је дао прву строгу дефиницију реалног броја.

- Сви рационални и сви ирационални бројеви образују скуп **реалних бројева**, тј.  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ .
- Скуп реалних бројева је **непребројив** скуп.

- Скуп реалних бројева је **уређен скуп**, тј. између свака два реална броја постоји само један од следећих односа  $a > b$ ,  $a = b$ ,  $a < b$ .
- На скупу реалних бројева за неједнакости важе следеће особине:

$$(a > b) \Leftrightarrow (b < a);$$

$$(a > b) \Leftrightarrow (a + c > b + c);$$

$$(a > b, c > 0) \Rightarrow (ac > bc), (a > b, c < 0) \Rightarrow (ac < bc).$$

- Реални бројеви се могу представити као тачке на бројној правој.

## АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ БРОЈА

- Ако је  $a$  произвољан реалан број, тада је **апсолутна вредност** броја  $a$ :

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

**Напомена:** Апсолутна вредност броја увек је ненегативан број, тј.  $|a| \geq 0$ .

- За **апсолутну вредност** броја  $a$  важе следећа правила:

$$|a| = |-a|, \quad |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, \quad |a| > b \Leftrightarrow (a > b) \wedge (a < -b).$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|.$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

## 2.6. ПРОШИРЕЊЕ СКУПА РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

- Скуп реалних бројева проширује се са два симбола  $-\infty$  и  $+\infty$ , тако да за сваки  $a \in \mathbb{R}$  важи неједнакост:  $-\infty < a < +\infty$ .

За операције са овим симболима важе правила ( $a \in \mathbb{R}$ ):

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad a + (+\infty) = +\infty;$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty.$$

За  $a > 0$  имамо:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty;$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Изрази  $(+\infty) - (+\infty)$  и  $\frac{+\infty}{+\infty}$  нису дефинисани.

## ИНТЕРВАЛ

- Ако су  $a, b \in \mathbb{R}$  такви да је  $a < b$  следећи подскупови називају се:

**отворен интервал:**  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ ,

**затворен интервал:**  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ ,

**полу-отворен интервал:**  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ,

**полу-затворен интервал:**  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ .

### Пример:

Одредити интервале у којима се мора налазити променљива  $x$  да би биле задовољене неједнакости:

а)  $|2x + 3| < 4$ ;   б)  $\left| \frac{2}{3}x + 3 \right| > 1$ .

$$\text{а) } |2x+3| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x+3 < 4 \Leftrightarrow -7 < 2x < 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left|\frac{2}{3}x+3\right| > 1 &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x+3 > 1 \wedge \frac{2}{3}x+3 < -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x > -2 \wedge \frac{2}{3}x < -4 \Leftrightarrow x > -3 \wedge x < -6 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty). \end{aligned}$$

## БИНОМНА ФОРМУЛА

- Ако је  $n \in \mathbb{N}$  онда  $n!$  (**факторијел**) дефинишемо као узастопни производ свих  $n$  бројева тј.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

- Израз  $\binom{n}{k}$  се назива **биномни коефицијент**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ и } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

- Биномна формула** гласи:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^n + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k; n, k \in \mathbb{N}.$$

- Општи члан** биномног развоја је облика  $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ .

**Пример:** Развити по биномној формули  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ .

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 &= x^6 - \binom{6}{1}x^4 + \binom{6}{2}x^2 - \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\frac{1}{x^2} - \binom{6}{5}\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \\ &= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}. \end{aligned}$$

**Пример:** Одредити пети члан у развијеном облику бинома  $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$ .

$$T_5 = \binom{12}{4} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-4} \cdot \left(-x^{\frac{2}{3}}\right)^4 = 495x^{\frac{20}{3}}.$$

**Пример:** Доказати:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ .

Ако у биномној формули заменимо  $a=1$  и  $b=1$  добићемо тражену везу.

**Пример:** Доказати:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$

Ако у биномној формули заменимо  $a=1$  и  $b=-1$  добићемо тражену везу.

## 2.7. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Комплексни бројеви представљали су велики проблем математичарима 18. века. Чак је велики математичар Ојлер покушавао да схвати шта комплексни бројеви представљају али му то не полази за руком и назива их немогућим или имагинарним бројевима јер постоје само у имагинацији. Теорију комплексних бројева дефинише почетком 19. века Гаус уводећи појам комплексног броја помоћу тачака равни.



K. F. Gauss (1777-1855)

Скоро све што је математика 19. века постигла везано је за Гаусово име. Скоро да нема области математике у којој његов геније није оставио трага и довео до револуционарног напретка, проузрокујући појаву нових научних дисциплина. Заједно са Архимедом и Њутном сматра се највећим математичарем свих времена.

### 2.7.1 АЛГЕБАРСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

Познато је да све квадратне једначине немају решења у скупу реалних бројева, на пример једначина  $x^2 + 1 = 0$ . Да бисмо решили ову веома једноставну једначину морамо скуп реалних бројева проширити новим елементима. Тако долазимо до скупа **комплексних** бројева.

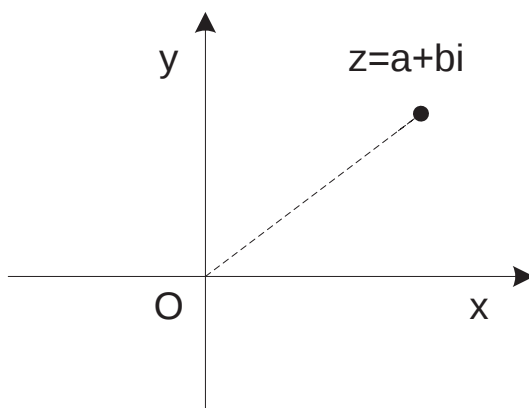
- **Имагинарна јединица** је по дефиницији  $i = \sqrt{-1}$ .

Решење поменуте једначине постаје сада  $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ .

**Пример:** Израчунати:  $I = 3\sqrt{-4} + \sqrt{-9} - 2\sqrt{-16}$ .

$$I = 3i\sqrt{4} + i\sqrt{9} - 2i\sqrt{16} = 6i + 3i - 8i = i.$$

- Скуп свих уређених парова реалних бројева  $(a, b)$  у којем је  $z = a + ib$ , тј.  $z = (a, b)$  назива се скупом **комплексних бројева**  $\mathbb{C}$ , где је  $i = \sqrt{-1}$ .



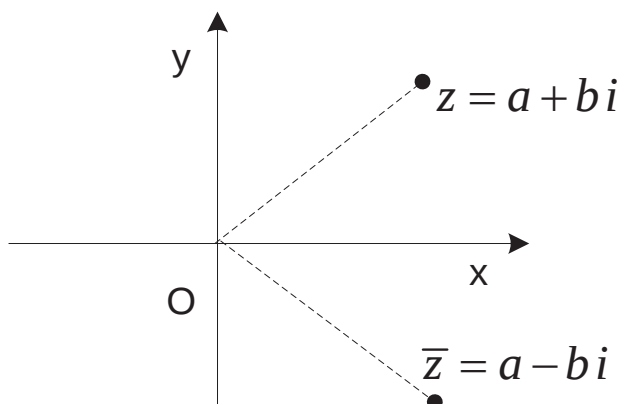
Комплексни бројеви могу се представити као тачке у комплексној, Гаусовој равни.

- Реални део** комплексног броја је  $\operatorname{Re}(z) = a$ , **имагинарни део**  $\operatorname{Im}(z) = b$ .

Ако је  $\operatorname{Re}(z) = 0$ , комплексни број је **чисто имагинари број**,

ако је  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , комплексни број је **реалан број**.

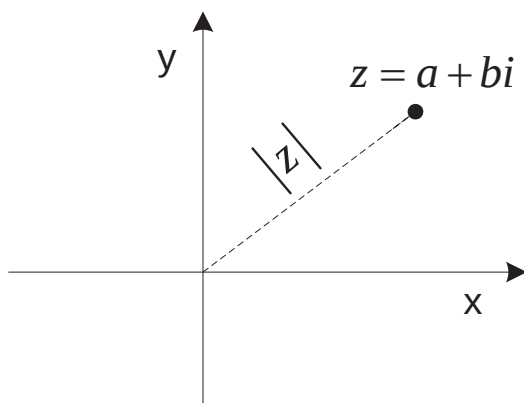
- Два комплексна броја  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$  су **једнака** ако су им једнаки реални делови за себе, а имагинарни за себе;  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .
- Сваком комплексном броју  $z = a + ib$  одговара **конјуговано комплексни број** у ознаци  $\bar{z} = a - ib$ .



**Пример:** Конјуговано комплексни број броја  $z = 2 - i$  је комплексни број  $\bar{z} = 2 + i$ .

- **Модуо** комплексног броја  $z = a + ib$  дефинише се као  $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Геометријски, модуо је растојање комплексног броја од координатног почетка.



**Пример:** Модуо комплексног броја  $z = 2 + i$  износи  $\rho = |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .

## 2.7.2 ОПЕРАЦИЈЕ СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА У АЛГЕБАРСКОМ ОБЛИКУ

Нека су дата два комплексна броја  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$ .

- **Сабирање:**  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ .
- **Одузимање:**  $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$ .
- **Множење:**  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$ .
- **Дељење:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ .

**Пример:** Нека су дата два комплексна броја  $z_1 = 1 + 2i$  и  $z_2 = 2 - 3i$ .

Израчунати  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ .

$$z_1 + z_2 = 1 + 2i + 2 - 3i = 3 - i;$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 2i - (2 - 3i) = -1 + 5i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 - 3i} = \frac{1 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i + 4i + 6i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-4 + 7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$$

- **Степеновање** комплексног броја природним бројем се дефинише као скраћено множење  $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ пута}}, n \in \mathbb{N}$ .

**Напомена:** Како је  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ,  $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ , можемо уопштити да је:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

**Пример:**  $i^{2004} = (i^4)^{501} = 1^{501} = 1$ .

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Решити квадратне једначине:

а)  $x^2 + 4 = 0$ ;    б)  $x^2 - 4x + 13 = 0$ .

**Решење:**

а)  $x^2 = -4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2i$ ;

б)  $x_1 = 2 + 3i$ ,  $x_2 = 2 - 3i$ .

2. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја:

а)  $z = \frac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i)$ ;    б)  $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ .

**Решење:**

а)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i) = \frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \cdot (3+2i) = \frac{2+3i+i^2}{4-i^2} \cdot (3+2i) \\ &= \frac{1+3i}{5} \cdot (3+2i) = \frac{-3+11i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{3}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{11}{5}.$$

б)  $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{-2i}{1-i^2}\right)^3 = (-i)^3 = i.$

3. Доказати да је  $z = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 - \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2$  чисто имагинаран број.

**Решење:**

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 - \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i} - \frac{2-i}{2+i}\right) \cdot \left(\frac{2-i}{2+i} + \frac{2-i}{2+i}\right) \\ &= \frac{(2+i)^2 - (2-i)^2}{5} \cdot \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{5} = \frac{8i}{5} \cdot \frac{8+2i^2}{5} = \frac{8i \cdot 6}{25} = \frac{48i}{25}. \end{aligned}$$

4. Дати су комплексни бројеви  $z_1 = 1+i$  и  $z_2 = 1-i$ , израчунати:

а)  $\frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1}$ ; б)  $\frac{z_1^2}{z_2} - \frac{z_2^2}{z_1}$ ; в)  $z_1^3 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^3$ .

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1} &= \frac{z_1^3 + z_2^3}{z_1 \cdot z_2} = \frac{(1+i)^3 + (1-i)^3}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)}{2} \\ &= \frac{2i(1+i) - 2i(1-i)}{2} = -2; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{z_1^2}{z_2} - \frac{z_2^2}{z_1} = 2i;$$

$$\text{в) } z_1^3 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1^2 + z_2^2) = (1+i)(1-i)(2i-2i) = 0.$$

5. Дати су комплексни бројеви  $z_1 = 1+2i$  и  $z_2 = 2+i$ , израчунати:

а)  $z_1^2 - z_2^2$ ; б)  $\overline{z_1} \cdot z_2 - \overline{z_2} \cdot z_1$ .

**Решење:**

$$\text{а) } z_1^2 - z_2^2 = (1+2i)^2 - (2+i)^2 = (1+4i+4i^2) - (4+4i+i^2) = -6;$$

$$\text{б) } \overline{z_1} \cdot z_2 - \overline{z_2} \cdot z_1 = (1-2i)(2+i) - (2-i)(1+2i) = -6i.$$

6. Дат је комплексни број  $z_1 = 2+i$ . Одредити комплексни број  $z = x+iy$  који

задовољава услов  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right) = \frac{3}{5}$  и  $\operatorname{Im}(\overline{z_1} \cdot z) = 1$ .

**Решење:**

$$\begin{aligned} \frac{x+iy}{2+i} &= \frac{x+iy}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2x+y}{5} + i \frac{2y-x}{5} \Rightarrow \frac{2x+y}{5} = \frac{3}{5}; \\ (2-i)(x+iy) &= 2x+y+i(-x+2y) \Rightarrow -x+2y=1. \end{aligned}$$

Решавање система једначина  $2x + y = 3$ ,  $-x + 2y = 1$  добијамо тражени комплексни број  $z = 1 + i$ .

7. Решити по  $z$  једначину  $|z| + z = 2 + i$ .

**Решење:**

$$|z| + z = 2 + i \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i;$$

два комплексна броја су једнака ако су им једнаки реални делови за себе, а имагинарни за себе, па добијамо систем једначина:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \text{ и } y = 1, \text{ чије је решење } (x, y) = \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

Тражени комплексни број гласи  $z = \frac{3}{4} + i$ .

8. Решити по  $z$  једначину  $|z| - z = 1 + 2i$ .

**Резултат:**  $z = \frac{3}{2} - 2i$ .

9. Решити систем једначина  $|z^2 - 2i| = 4 \wedge \left| \frac{z+1+i}{z-1-i} \right| = 1$ .

**Решење:**

$$|z^2 - 2i| = 4 \Leftrightarrow |(x + iy)^2 - 2i| = 4 \Leftrightarrow |x^2 - y^2 + i(2xy - 2)| = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2 = 16;$$

$$\left| \frac{z+1+i}{z-1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z+1+i| = |z-1-i| \Leftrightarrow |x+1+i(y+1)| = |x-1+i(y-1)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x = -y.$$

Решавањем система једначина  $(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2 = 16$  и  $x = -y$ , добијамо  $z = \pm(1 - i)$ .

10. Одредити све комплексне бројеве за које је испуњен услов:

а)  $\left| \frac{z}{z+1} \right| = 1$  и  $z : \bar{z} = 1$ ; б)  $z^2 + |\bar{z}| = 0$ .

Резултат: а)  $z = -\frac{1}{2}(1+i)$ ; б)  $z \in \{0, i, -i\}$ .

11. Доказати да је  $(1+i)^4 - (1-i)^4$  реалан број.

Решење:

Како је  $(1+i)^2 = 2i$ ,  $(1-i)^2 = -2i$ , добијамо:

$$(1+i)^4 - (1-i)^4 = \left( (1+i)^2 \right)^2 - \left( (1-i)^2 \right)^2 = (2i)^2 - (-2i)^2 = 0.$$

12. Доказати да је  $(1+i)^{50} = 2^{25}i$ .

13. Израчунати:

а)  $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$ ; б)  $\left( \frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i} \right)^{16}$ .

Резултат: а)  $-\frac{4}{3}$ ; б)  $2^{24}$ .

14. Израчунати  $\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^{2003}$ .

Решење:

Како је  $(1 \pm \sqrt{3}i)^3 = 1 \pm 3\sqrt{3}i + 9i^2 \pm 3\sqrt{3}i^3 = 1 \pm 3\sqrt{3}i - 9 \mp 3\sqrt{3}i = -8$ ;

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2003} &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2004} \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3\right)^{668} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\ &= \left(\frac{-8}{-8}\right)^{668} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i\sqrt{3})^2}{4} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

15. Нека је  $z_1 = 7\sqrt{3} + 7i$  и  $z_2 = 7\sqrt{3} - 7i$ , израчунати  $z_1^6 + z_2^6$ .

**Решење:**

Како је  $(\sqrt{3} \pm i)^3 = 3\sqrt{3} \pm 9i + 3\sqrt{3}i^2 \pm i^3 = 3\sqrt{3} \pm 9i - 3\sqrt{3} \mp i = \pm 8i$ ; имамо да је:

$$\begin{aligned} z_1^6 + z_2^6 &= (z_1^3)^2 + (z_2^3)^2 = \left((7\sqrt{3} + 7i)^3\right)^2 + \left((7\sqrt{3} - 7i)^3\right)^2 \\ &= \left(7^3 \cdot (\sqrt{3} + i)^3\right)^2 + \left(7^3 \cdot (\sqrt{3} - i)^3\right)^2 = 7^6 \cdot (8i)^2 + 7^6 \cdot (-8i)^2 = -128 \cdot 7^6. \end{aligned}$$

**Напомена:** Задатак се могао решити и применом биномне формуле или трансформацијом комплексног броја у тригонометријски облик.

16. Доказати да је  $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ .

17. Израчунати:  $\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1+i\sqrt{3})\right)^{54}$ .

**Резултат:**  $-2^{54}$ .

18. Израчунати: а)  $\sqrt{15-8i}$ ; б)  $\sqrt{3+4i}$ .

**Решење:**

а)  $\sqrt{15-8i} = x + iy \Leftrightarrow 15-8i = x^2 - y^2 + 2xyi$ .

На основу особине једнакости два комплексна броја добијамо систем једначина:

$x^2 - y^2 = 15 \wedge 2xy = -8$ , чије је решење  $x = \pm 4$ ,  $y = \mp 1$ .

Тражени комплексни бројеви су  $z = \pm 4 \mp i$ .

б)  $z = \pm 2 \pm i$ .

19. Одредити skup тачака у комплексној равни за које је испуњен услов  $|z - 3| = 3$ .

**Решење:**

$$|x + iy - 3| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = (x-3)^2 + y^2 = 9,$$

према томе решење је кружница са центром у тачки  $C(3, 0)$  и полупречником  $r = 3$ .

20. Коју линију у комплексној равни одређује једначина  $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$ ?

**Решење:**

$$z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) + i(x + yi - x + yi) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 3.$$

Последња једначина представља кружницу са центром у тачки  $C(0, 1)$  и полупречником  $r = \sqrt{3}$ .

21. Представити у комплексној равни skup тачака  $z$  за које је  $\operatorname{Re}(z + zi) = 0$ .

**Решење:**

$$z + zi = x + iy + i(x + iy) = x - y + i(x + y)$$

$$\operatorname{Re}(z + zi) = x - y, \text{ због услова задатка је: } x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Тражено геометријско место тачака је права  $y = x$ .

22. Одредити геометријско место тачака  $z$  за које је  $|z - i| = |z - 1|$ .

**Решење:**

$$|z - i| = |z - 1| \Leftrightarrow |x + iy - i| = |x + iy - 1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Leftrightarrow y = x.$$

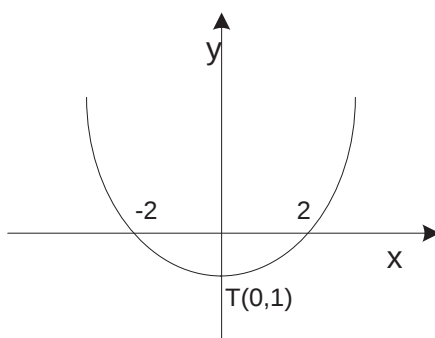
Геометријско место тачака је права  $y = x$ .

23. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је испуњен услов  $|z| = 2 + \operatorname{Im}(z)$ . Резултат представити и геометријски.

**Решење:**

$$|z| = 2 + \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 + 4y + y^2.$$

Тражено геометријско место тачака је парабола  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ .



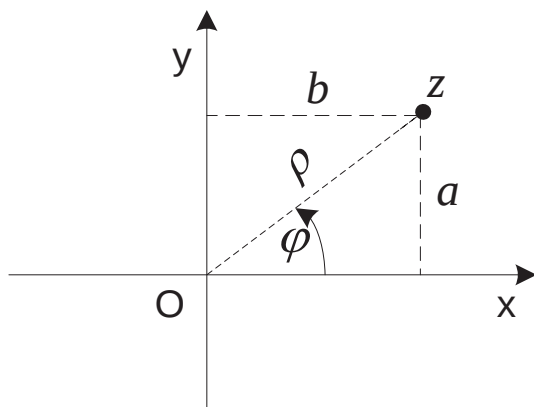
24. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је испуњен услов  $2 \leq |z| \leq 4$ .

**Резултат:** Кружни прстен:  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ .

### 2.7.3 ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

- Тригонометријски облик комплексног броја  $z = x + iy$  је облика  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где је  $x = \rho \cos \varphi$  и  $y = \rho \sin \varphi$ .

- $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  је **модуо**, а  $\varphi$  је **аргумент** комплексног броја где је  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$  и обележава се  $\varphi = \operatorname{Arg} z$ .



Аргумент комплексног броја није једнозначно одређен. Имајући у виду периодичност тригонометријских функција, аргумент је сваки реални број облика  $\varphi + 2k\pi$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$ .

Специјално, број  $\varphi$  који задовољава услов  $-\pi < \varphi \leq \pi$  назива се **главни аргумент**.

### Пример:

Комплексан број  $z = 1 + i$  написати у тригонометријском облику.

Модуо датог комплексног броја је  $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , а аргумент је

$\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ , па је тригонометријски облик датог комплексног броја

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

**Напомена:** Једначина  $\operatorname{tg} \varphi = 1$  има два решења у интервалу  $[0, 2\pi]$  тј.  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

и  $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ . Како задати комплексни број припада првом квадранту решење је

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

## 2.7.4 ОПЕРАЦИЈЕ СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА У ТРИГОНОМЕТРИЈСКОМ ОБЛИКУ

Нека су дата два комплексна броја:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

▪ **Множење:**  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$

▪ **Дељење:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$

▪ **Степеновање:**  $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{N}.$

Ова формула се зове **Моаврова формула**.

Моаврова формула се може доказати применом математичке индукције.

**Пример:** Користећи Моаврову формулу за степеновање комплексних бројева одредити  $z^4$ , ако је  $z = -1 - i$ .

Модуо датог комплексног броја је  $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ , а аргумент је

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$ , зато што угао припада трећем квадранту, па

тригонометријски облик броја  $z = -1 - i$  је  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$

Сада је:  $z^4 = (\sqrt{2})^4 \left( \cos 4 \cdot \frac{5\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{5\pi}{4} \right) = 4 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -4.$

▪ **Корен** комплексног броја:

Свако решење једначине  $z = \omega^n$ , где је  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , а  $\omega = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ , дефинише се као корен комплексног броја.

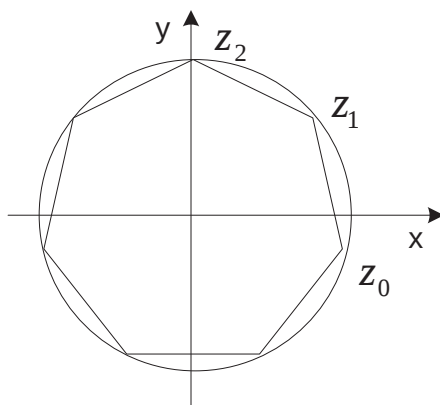
$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Доказ:**

Из једнакости  $r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$  добијамо:

$$r = \rho^n \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, n\theta = \varphi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Геометријски ова решења су темена правилног многоугла уписаног у круг полупречника  $\sqrt[n]{r}$ .



**Пример:** Израчунати  $\sqrt[3]{-1}$ .

Како је  $-1 = \cos \pi + i\sin \pi$ , користећи формулу за корен комплексног броја добијамо:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right).$$

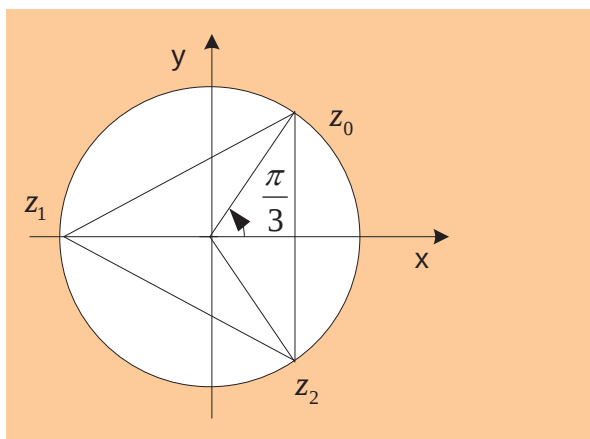
За  $k = 0, 1, 2$  добијамо три различите вредности:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos \pi + i\sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i\sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решења трећег корена геометријски гледано су темена једнакостраничног троугла уписаног у круг полупречника 1.



## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Комплексне бројеве представити у тригонометријском облику:

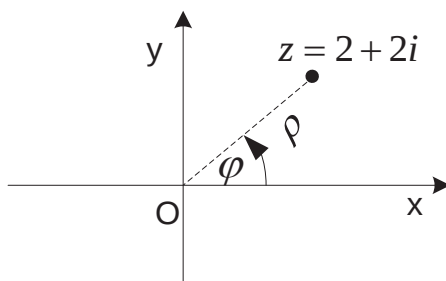
а)  $z = 2 + 2i$ ;   б)  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Решење:**

а) Модуо датог комплексног броја је  $\rho = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ .

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$  је аргумент, па је тригонометријски облик датог броја

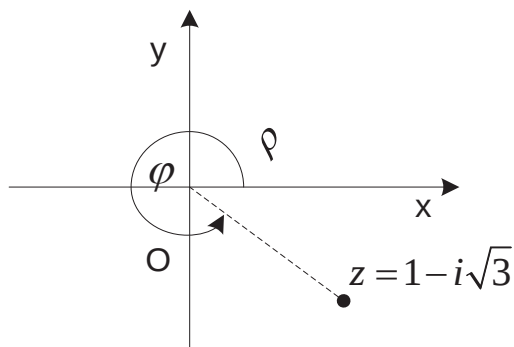
$$z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



б) Модуо датог комплексног броја је  $\rho = 2$ , а аргумент  $\varphi$  је:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}.$$

Тригонометријски облик датог комплексног броја је  $z = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$ .



2. Израчунати:

а)  $z^{20}$  ако је  $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

б)  $z^{10}$  ако је  $z = 1 + i$ ;

в)  $z^{18}$  ако је  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

**Решење:**

а) Како је  $\rho = 1$ , а  $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ , тригонометријски облик датог комплексног броја гласи  $z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ . Користећи Моаврову формулу за степеновање комплексних бројева  $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$  добијамо:

$$\begin{aligned} z^{20} &= \cos 20 \cdot \frac{5\pi}{3} + i \sin 20 \cdot \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} \\ &= \cos \left( 16 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( 16 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

б)  $z = 32i$ ;

в)  $z = 1$ .

3. Израчунати  $(1+i)^{2002}$ .

**Решење:**

**Први начин:**  $\left((1+i)^2\right)^{1001} = (2i)^{1001} = 2^{1001} \cdot (i^4)^{250} \cdot i = 2^{1001} \cdot i$ ;

**Други начин:**  $\rho = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

Користећи Моаврову формулу за степеновање комплексних бројева добијамо:

$$\begin{aligned} (1+i)^{2002} &= \left(\sqrt{2}\right)^{2002} \cdot \left(\cos 2002 \frac{\pi}{4} + i \sin 2002 \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{1001} \cdot \left(\cos 1001 \frac{\pi}{2} + i \sin 1001 \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^{1001} \cdot \left(\cos \left(250 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(250 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^{1001} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2^{1001} \cdot i. \end{aligned}$$

4. Дат је комплексни број  $z_1 = 2+i$ . Одредити комплексни број  $z = x+iy$  који задовољава услов да је  $\operatorname{Re}(\bar{z} \cdot z_1) = 1$  и  $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{3}{5}$ , а затим израчунати  $z^{2005}$ .

**Решење:**

$(x-iy)(2+i) = 2x+y+i(x-2y)$ . Због првог услова имамо  $2x+y=1$ .

$\frac{z}{z_1} = \frac{x+iy}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2x+y}{5} + \frac{-x+2y}{5}i$ . Због другог услова имамо  $-x+2y=-3$ .

Систем  $2x+y=1$  и  $-x+2y=-3$  даје решење  $x=1 \wedge y=-1$ , па је тражени комплексни број  $z=1-i$ .

$$\begin{aligned}
 z^{2005} &= (1-i)^{2005} = (1-i)^{2004} (1-i) = \left((1-i)^2\right)^{1002} (1-i) \\
 &= (-2i)^{1002} (1-i) = 2^{1002} \left((i)^4\right)^{250} i^2 (1-i) = -2^{1002} (1-i).
 \end{aligned}$$

**Напомена:** Задатак се могао решити и применом Моаврове формуле.

5. Израчунати:

а)  $\sqrt[3]{1}$ ; б)  $\sqrt[4]{i}$ ; в)  $\sqrt[5]{1+i}$ ; г)  $\sqrt[4]{1-i}$ .

**Решење:**

а)  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ , пошто је  $\rho = 1$  и  $\varphi = 0$  добијамо:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3} \right).$$

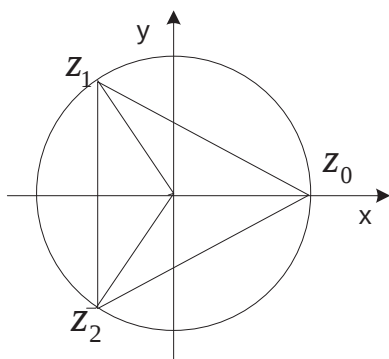
Постоје три различита решења која добијамо за  $k = 0, 1, 2$ .

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометријски гледано решења трећег корена су темена једнакостраничног троугла уписаног у централни круг полупречника  $r = 1$ .



б)  $z_{0,1} = \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} + i \sqrt{2-\sqrt{2}} \right), z_{2,3} = \pm \frac{1}{2} \left( -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i \sqrt{2+\sqrt{2}} \right).$

$$\text{в)} \quad \rho = \sqrt{2} \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad z_k = \sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$z_0 = \sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \right), \quad z_1 = \sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{17\pi}{20} + i \sin \frac{17\pi}{20} \right), \quad z_3 = \sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{20} + i \sin \frac{25\pi}{20} \right),$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{33\pi}{20} + i \sin \frac{33\pi}{20} \right).$$

$$\text{г)} \quad z_k = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

**6. Решити једначине:**

$$\text{а)} \quad z^3 + 1 = 0; \quad \text{б)} \quad z^8 - 16 = 0; \quad \text{в)} \quad (2 + 5i)z^3 - 2i + 5 = 0.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \quad z^3 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-1},$$

$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , пошто је  $\rho = 1$  и  $\varphi = \pi$  добијамо:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Постоје три различита решења која добијамо за  $k = 0, 1, 2$ .

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{б)} \quad \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i, \pm 1, \pm i, \pm 2\sqrt{3} \pm 2i, \mp 2\sqrt{3} \pm 2i.$$

**в)** Дата једначина се своди на  $z^3 = i$ , чија су решења:

$$z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, z_1 = -i, z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}.$$

## 2.7.5 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА



L. Ojler (1707-1783)

- **Експоненцијални облик** комплексног броја је  $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ .
- **Ојлерова формула:**  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

## 2.7.6 ОПЕРАЦИЈЕ СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА У ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНОМ ОБЛИКУ

Нека су дати комплексни бројеви  $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ .

- **Множење:**  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ .
- **Дељење:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ .

■ **Логаритам:**  $\ln z = \ln \rho + i\varphi$ .

**Напомена:** Коришћењем ове формуле у могућности смо да дефинишемо логаритам негативног реалног броја.

**Пример:** Одредити  $\ln(-2)$ .

$$\ln(-2) = \ln 2 + i\pi.$$

Леонард Ојлер је један од најзначајнијих математичара свих времена. Рођен у Швајцарској већи део живота провео је у Петрограду. Написао је око 900 научних радова. Бавио се свум математичким дисциплинама. Скоро половину својих радова написао је као потпуно слеп. Први свој самостални рад написао је са 19 година. Ништа није могло да га одвоји од математике, чак ни тринаесторо деце колико их је имао.

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Природан број

Цео број

Рационалан број

Ирационалан број

Реалан број

Биномни коефицијенти

Биномна формула

Општи члан биномне формуле

Комплексан број

Алгебарски облик комплексног броја

Тригонометријски облик комплексног броја

Експоненцијални облик комплексног броја

## 3. ГЛАВА

# ***ФУНКЦИЈЕ***

1. РЕАЛНА ФУНКЦИЈА
2. ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА
3. СЛАГАЊЕ ФУНКЦИЈА
4. ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈА
5. ПРЕГЛЕД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

## ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију појма функције,
2. особине реалних функција,
3. дефиницију инверзне функције,
4. дефиницију сложене функције,
5. дефиниције елементарних функција.

# ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

## 3.1. ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ

Пут од фиксних величина ка променљивој, као апстракцији вишег степена, везан је за период од 13. до 16. века. Декартова метода координата омогућила је дефинисање функционалне зависности и даљи развој математике. Тек у 19. веку немачки математичар L. Dirichlet (1805-1859) направио је одлучијући корак у уопштавању појма функције, прекинувши традиционална схватања којим се појам функције изједначавао са појмом аналитичког израза и даје дефиницију коју ми данас модификовано користимо. Модерна теорија скупова отишла је још даље и ослободила појам функције ограничења везаних за домен и кодомен.



R Descartes (1596-1650)

Рене Декарт је био велики француски математичар и филозоф, али се данас његово име првенствено памти по вези коју је успоставио између алгебре и геометрије. На тај начин створио је нову научну дисциплину, аналитичку геометрију, која је омогућила даљи напредак математике.

У филозофији заступао је методу критичке сумње и позната је његова мисао “мислим дакле постојим”.

- Нека су  $A$  и  $B$  произвољни скупови. **Пресликавање** или **функција**  $f : A \rightarrow B$  представља закон кореспонденције помоћу кога се произвољном елементу  $x \in A$  додељује неки елемент  $y \in B$  такав да је  $y = f(x)$ .
- Елемент  $x \in A$  назива се **оригинал**, а  $y \in B$  његова **слика**.

- Скуп  $D_x \subset A$  оних елемената из  $A$  којима су кореспондирани елементи скупа  $B$  назива се **област дефинисаности** или **домен** функције.
- Скуп  $D_y \subset B$  оних елемената из  $B$  којима су кореспондирани елементи скупа  $B$  назива се **област вредности** или **кодомен**  $D_y$  функције.
- За функцију  $f: A \rightarrow B$  кажемо да је **једнозначна** ако се било којем елементу из скупа  $A$  кореспондира највише један елемент из скупа  $y \in B$ .
- Функција  $f: A \rightarrow B$  се назива “1–1” или **инјективном** ако
 
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$
- Функција  $f: A \rightarrow B$  се назива “на” или **сурјективном** ако
 
$$(\forall y \in B, \exists x \in A)(y = f(x)).$$
- Ако је пресликавање  $f: A \rightarrow B$  “1–1” и “на” такво пресликавање или функцију називамо **бијективним** (обострано једнозначно пресликавање).

**Пример:**

$f(x) = 3x + 2$ ,  $A = B = \mathbb{R}$ , јесте бијекција.

$f(x) = 3x^2 + 2$ ,  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = [2, +\infty)$ , није “1–1”, а јесте “на”, није бијекција.

**3.2. НАЧИНИ ЗАДАВАЊА ФУНКЦИЈА**

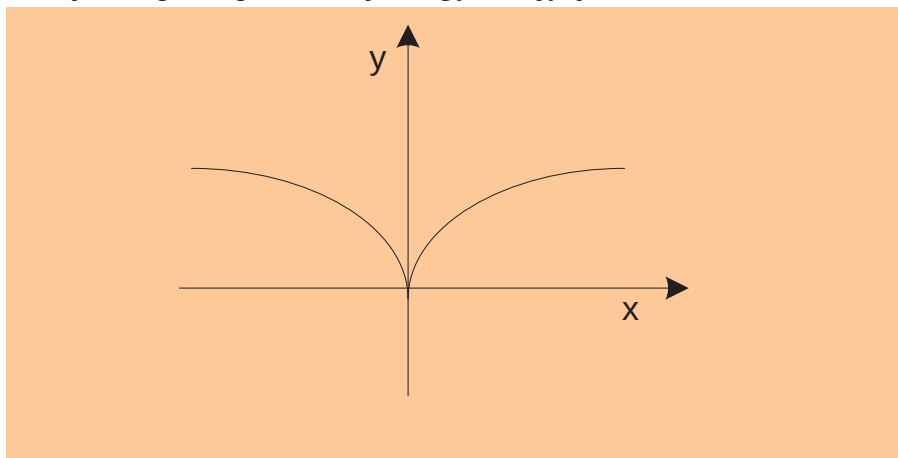
- Задавање функције аналитичким изразом.  
Аналитички израз може бити експлицитног облика  $y = f(x)$ , или имплицитног облика  $F(x, y) = 0$ .
- Таблични начин задавања функције.
- Задавање функције њеним графиком.
- Задавање функције помоћу параметара.

**Напомена:** Представљање функције графиком или табелом углавном се користи у применама математике.

**Пример:**

Нека је дата функција у параметарском облику  $\left. \begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \end{array} \right\}$ .

Елиминацијом параметра  $t$  добијамо функцију  $y^3 = x^2$ .



### 3.3. РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

- Под **реалном функцијом** подразумева се свако пресликавање  $f : D_x \rightarrow \mathbb{R}$ , тј. за свако  $x \in D_x$  постоји једна и само једна реална вредност функције  $f(x)$ .

**Пример:** Одредити домен функција:

а)  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ ;

Знајући да именилац разломка мора да буде различит од нуле, тј.  $x-3 \neq 0$ , добијамо  $x \neq 3$ . Према томе домен функције је скуп  $D_x = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  или уобичајен је и запис  $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ .

б)  $y = \sqrt{4-x^2}$ ;

$4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \Leftrightarrow D_x : x \in [-2, 2]$ .

$$\text{в)} y = \ln \frac{x}{3-x};$$

$$\frac{x}{3-x} > 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow D_x : x \in (0, 3).$$

$$\text{г)} y = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$D_x = \mathbb{R}.$$

**Пример:** Одредити кодомен функција:

$$\text{а)} y = \sin x, D_y : y \in [-1, 1];$$

$$\text{б)} y = x - 2, D_y = \mathbb{R};$$

$$\text{в)} y = x^2 + 1, D_y : y \in [1, +\infty).$$

## 3.4. ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

- Нека је  $f : A \rightarrow B$  бијективно пресликавање (“1–1” и “на”), тада постоји јединствена функција  $f^{-1} : B \rightarrow A$  коју називамо **инверзно пресликавање** или **инверзна функција** таква да је

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

- За дату функцију  $f : A \rightarrow B$  може да постоји само једна инверзна функција  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

**Пример:** Одредити инверзну функцију функције  $f(x) = 2x - 1$ .

Прво треба доказати да је пресликавање бијекција.

Ако је испуњено  $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$  пресликавање је “1–1”. Изрази који у себи садрже неједнакости се тешко доказују и једноставније је користити контрапозицију предходног израза која гласи  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Дакле  $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ , чиме смо доказали да је пресликавање “1–1”.

Да бисмо доказали да је пресликавање “на” решимо полазну једначину по  $y$ .

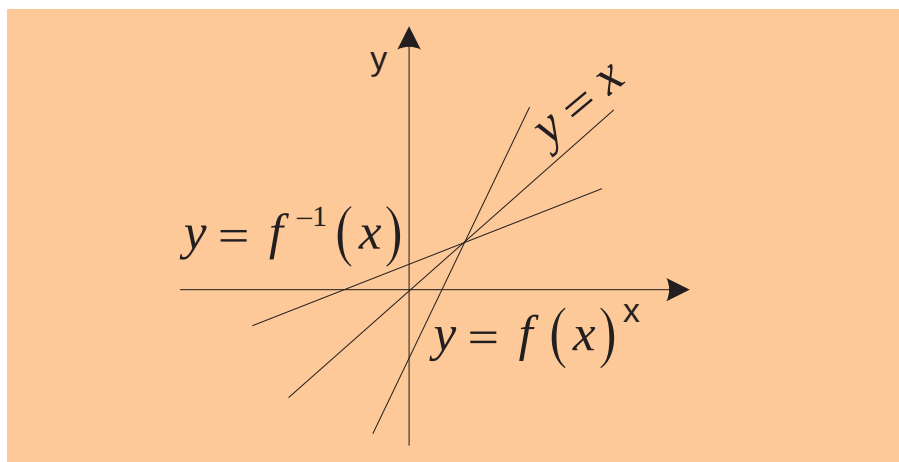
Добићемо израз  $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ . Онда  $(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}) \left( x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right)$  и

закључујемо да је пресликавање “на”.

Пошто је пресликавање “1-1” и “на”, односно бијекција, постоји инверзно пресликавање  $f^{-1}$ .

Заменом вредности  $x$  и  $y$  у изразу  $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$  добијамо  $f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

Графици функција  $f$  и  $f^{-1}$  су симетрични у односу на праву  $y = x$ .



**Пример:** Одредити инверзну функцију функције  $f(x) = x^2$ .

Пошто је пресликавање  $f(x) = x^2$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  није “1-1” односно бијекција, не постоји инверзно пресликавање  $f^{-1}$ .

### 3.5. СЛАГАЊЕ ФУНКЦИЈА

- **Композицијом** две функције  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  назива се функција  $g \circ f: A \rightarrow C$ , за коју важи:

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Пример:**

Дате су функције  $f(x) = x + 3$  и  $g(x) = 2x - \sqrt{x}$ . Одредити  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  и  $f \circ f$ .

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2x + 3 - \sqrt{x}.$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2x + 6 - \sqrt{x+3}.$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = x + 6.$$

**3.6. ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈА**

- Функција  $f(x)$  је **ограничена** на скупу  $A \subseteq D_x$  ако важи:

$$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in A, m \leq f(x) \leq M).$$

График функције налази између две праве  $y = m$  и  $y = M$ .

Ако бројеви  $m$  и  $M$  не постоје, за функцију  $f(x)$  кажемо да је неограничена.

**Пример:** Испитати ограниченост функције  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Како је за  $(\forall x \in \mathbb{R}), 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ , функција је ограничена на интервалу  $(0, 1]$ .

- **Нула** функције је онај број  $\alpha \in D_x$  за који је  $f(\alpha) = 0$ .

Нуле функције су тачке пресека функције са  $Ox$  осом.

**Пример:** Одредити нуле функција:

а)  $y = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8};$

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ . Како функција није дефинисана за  $x = -2$  нула функције је само  $x = 2$ .

$$\text{б)} y = \frac{1 + \ln x}{x^2};$$

$$y = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

$$\text{в)} y = \frac{e^x}{x-1};$$

$y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  и функција нема нула.

■ Функција  $f(x)$  је **парна** ако је  $(\forall x \in D_x), f(-x) = f(x)$ .

График парне функције је симетричан у односу на осу  $Oy$ .

■ Функција  $f(x)$  је **непарна** ако је  $(\forall x \in D_x), f(-x) = -f(x)$ .

График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак  $O$ .

**Пример:** Испитати парност и непарност функција:

$$\text{а)} f(x) = x^2 - 2;$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x), \text{ функција је парна.}$$

$$\text{б)} f(x) = x^3 - 2x + \sin x;$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + \sin(-x) = -x^3 + 2x - \sin x = -(x^3 - 2x + \sin x) = -f(x),$$

функција је непарна.

$$\text{в)} f(x) = x^2 - 2x^3 + 1;$$

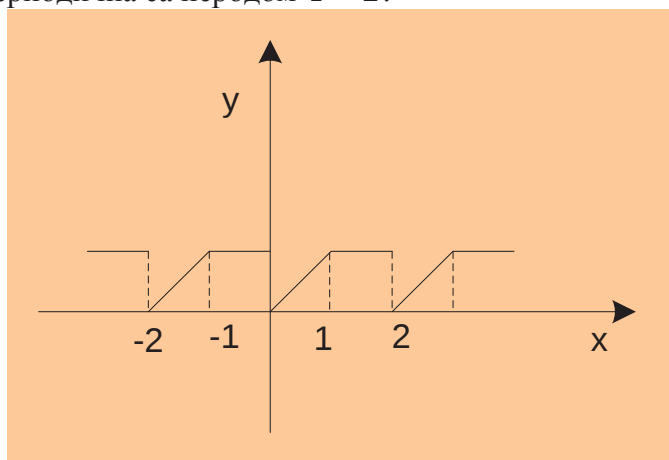
$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)^3 + 1 = x^2 + 2x^3 + 1, \text{ функција није ни парна ни непарна.}$$

■ Функција  $f(x)$  је **периодична** ако постоји број  $T$  за који је испуњена једнакост  $(\forall x \in D_x), f(x+T) = f(x)$ . Број  $T$  називамо периодом функције.

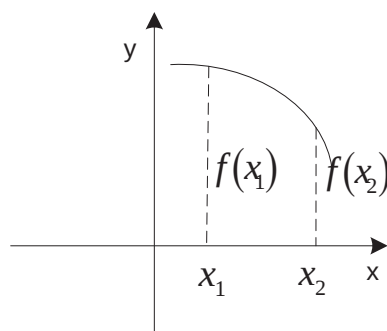
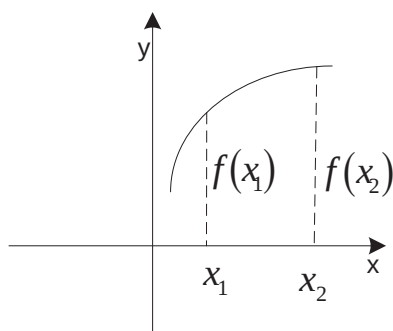
**Пример:** Све тригонометријске функције су периодичне. Функције  $f(x) = \sin x$  и  $f(x) = \cos x$  имају основни период  $T = 2\pi$ , а функције  $f(x) = \operatorname{tg} x$  и  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  имају основни период  $T = \pi$ .

**Пример:**  $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  и  $f(x+2) = f(x)$ .

Функција је периодична са периодом  $T = 2$ .



- Функција  $f(x)$  је **растућа** (означавамо  $f(x) \nearrow$ ) на скупу  $A \subseteq D_x$  ако  $(\forall x_1, x_2 \in A) \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ , а **строго растућа** ( $f(x) \nearrow$ ) ако  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- Функција  $f(x)$  је **опадајућа** (означавамо  $f(x) \searrow$ ) на скупу  $A \subseteq D_x$  ако  $(\forall x_1, x_2 \in A) \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ , а **строго опадајућа** ( $f(x) \searrow$ ) ако  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .
- Растуће и опадајуће функције једним именом зовемо **монотоне функције**.



**Пример:** Испитати монотоност следећих функција:

а)  $y = e^x$ ;

Функција је стриктно растућа  $\forall x \in \mathbb{R}$ , јер за  $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ .

б)  $y = \ln x$ ;

Функција је стриктно растућа  $\forall x \in (0, \infty)$ .

в)  $y = -x^3$ ;

Функција је стриктно опадајућа  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

г)  $y = 2x^2 - 8x + 5$ ;

Ако је  $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - 8x_1 + 5 - 2x_2^2 - 8x_2 - 5 &= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 8(x_1 - x_2) = \\ &= 2 \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(x_1 + x_2 - 4)}_{\substack{>0, x>2 \\ <0, x<2}} \end{aligned}$$

$< 0$ , расте ;  
 $> 0$ , опада .

### Екстремне вредности функције:

- Функција  $f(x)$  има **максимум** у тачки  $x = a$  ако постоји број  $\varepsilon > 0$ , такав да је  $f(a) \geq f(x)$  за  $\forall x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .
- Функција  $f(x)$  има **минимум** у тачки  $x = a$  ако постоји број  $\varepsilon > 0$ , такав да је  $f(a) \leq f(x)$  за  $\forall x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .
- Минимум и максимум функције називамо **екстремним вредностима** функције.

**Пример:**Одредити екстреме функција:

а)  $y = x^2 - 1$ ;

Тачка  $(0, -1)$  представља минимум функције.

б)  $y = 3^x$ ;

Функција нема екстрема.

- Функција  $f(x)$  је **конвексна** на скупу  $A \subseteq D_x$  ако је

$(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ , а **конкавна** ако је

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

**Пример:** Функција  $y = x^2$  је конвексна, што закључујемо из неједначине

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2, \text{ тј. } (x_1 - x_2)^2 > 0.$$

### 3.7. ПРЕГЛЕД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

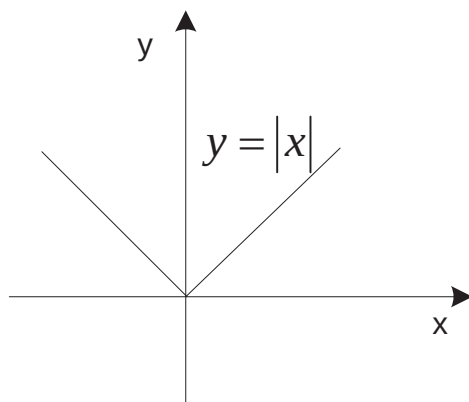
- **Степена функција**  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- **Експоненцијална функција**  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- **Логаритамска функција**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- **Тригонометријске функције:**  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .
- **Инверзне тригонометријске функције:**  
 $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .
- **Елементарним функцијама** називају се функције које се могу задати помоћу основних елементарних функција и константи помоћу коначно много операција сабирања, одузимања, множења, дељења и композиције функција.

Поновићемо неке од најважнијих основних функција са којима ћемо се сретати у раду.

- **Апсолутна вредност:**

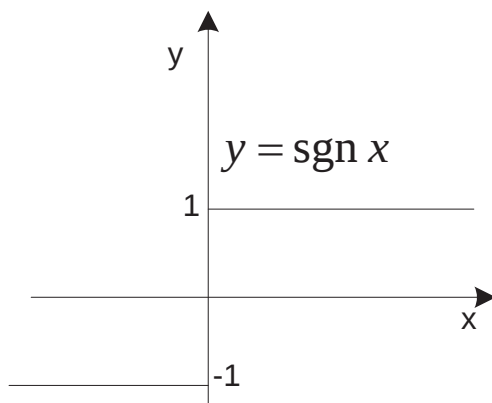
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Функција је дефинисана  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$



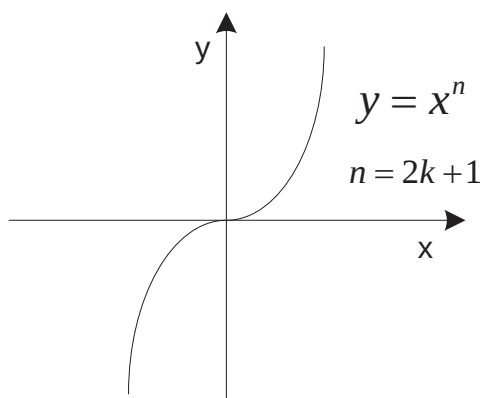
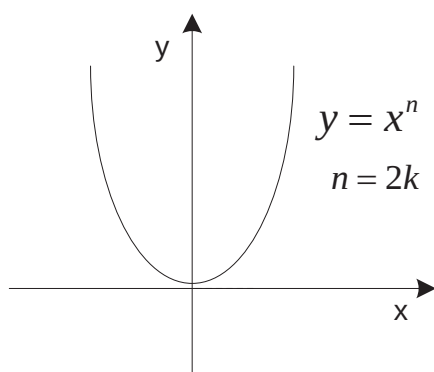
▪ **Функција знака:**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



▪ **Степена функција:**  $y = x^n, n \in \mathbb{R}$ .

Ако је  $n \in \mathbb{N}$  функција представља степене реалног броја  $y = x^n$  и та функција ће за  $n = 2k$  паран број бити парна и ограничена, а за  $n = 2k + 1$  непаран број бити непарна и неограничена.

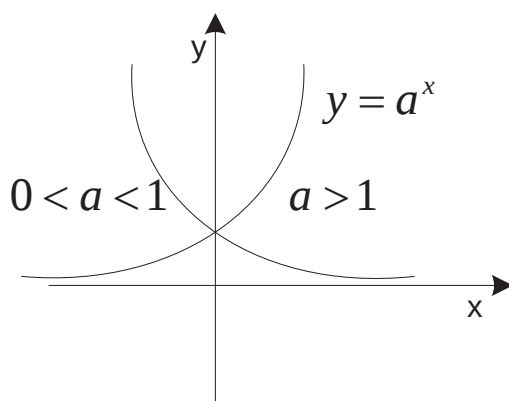


Ако је степен облика  $n = \frac{1}{k}$ , функција представља корену функцију, тј. ако је  $k$  паран број, домен је  $[0, \infty)$ , а ако је  $k$  непаран број, домен је  $(-\infty, +\infty)$ .

▪ **Експоненцијална функција:**  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Домен функције је скуп свих реалних бројева  $\mathbb{R}$ , а кодомен  $(0, \infty)$ .

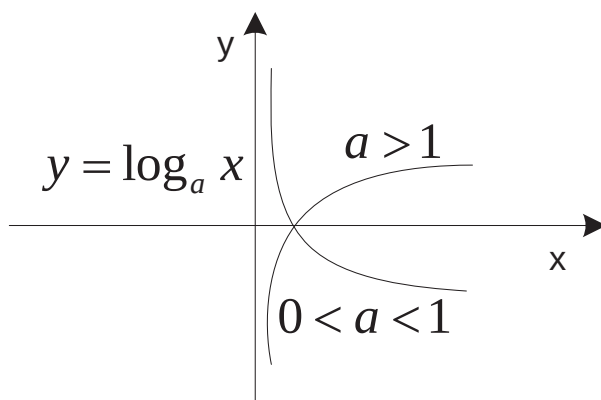
Функција нема нула јер је  $a^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  и на целом домену је позитивна, тј.  $y > 0$ . Уколико је  $0 < a < 1$  функција стално опада, а када је  $a > 1$  функција стално расте и самим тим нема екстрема.



- **Логаритамска функција:**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Домен функције је скуп свих позитивних реалних бројева  $(0, \infty)$ , а кодомен је  $\mathbb{R}$ .

Функција има нулу за  $x=1$  јер је  $\log_a 1 = 0$ . Уколико је  $0 < a < 1$  функција стално опада, а када је  $a > 1$  функција стално расте и самим тим нема екстрема.



- **Тригонометријске функције:**  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .

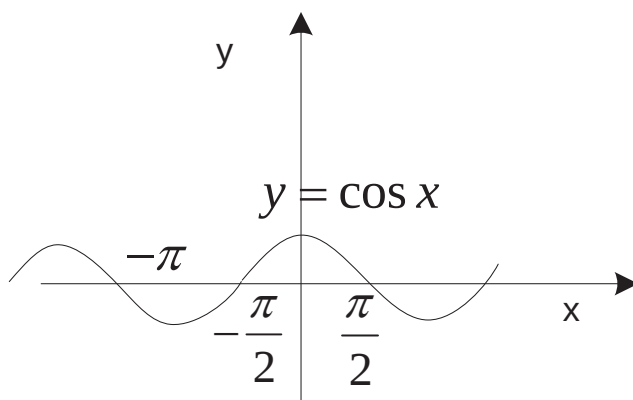
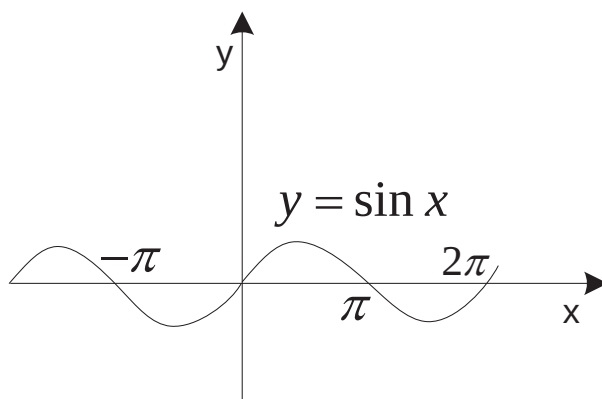
Домен функција  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  је скуп свих реалних бројева  $\mathbb{R}$ , а кодомен  $[-1, 1]$ . Домен функција  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  је  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{R}$  односно,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq k\pi$ , а кодомен је скуп свих реалних бројева  $\mathbb{R}$ .

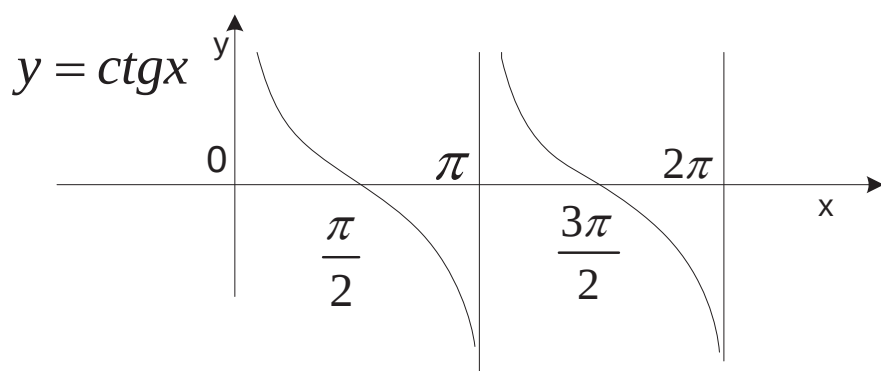
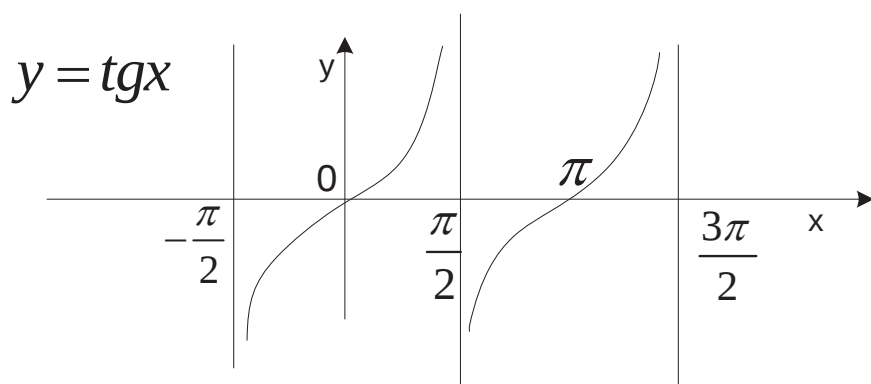
Функције  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  су непарне, а  $y = \cos x$  парна.

Функције  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  су периодичне са периодом  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  са периодом  $\pi$ .

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \cos(x + 2k\pi) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x.$$





■ **Инверзне тригонометријске функције:**

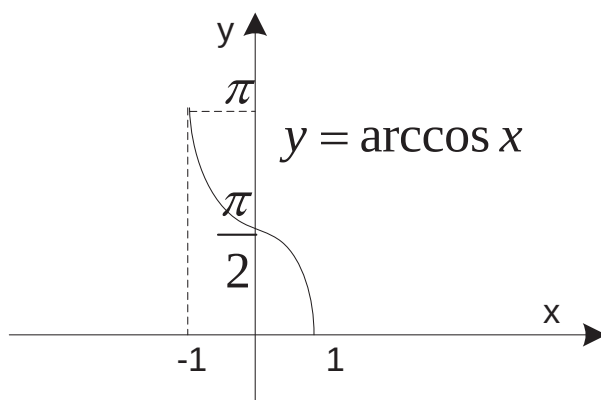
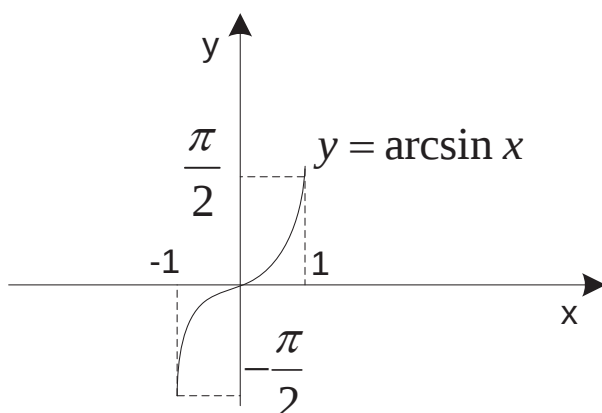
$y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

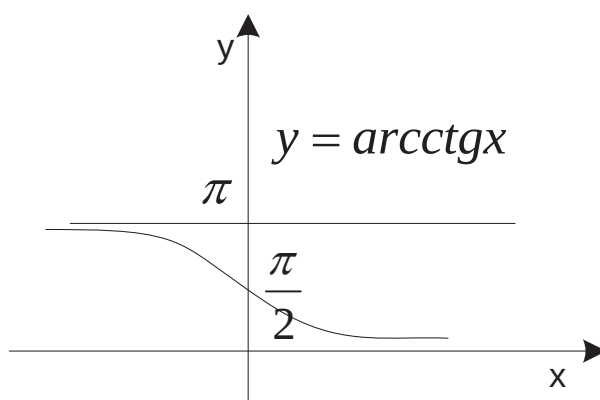
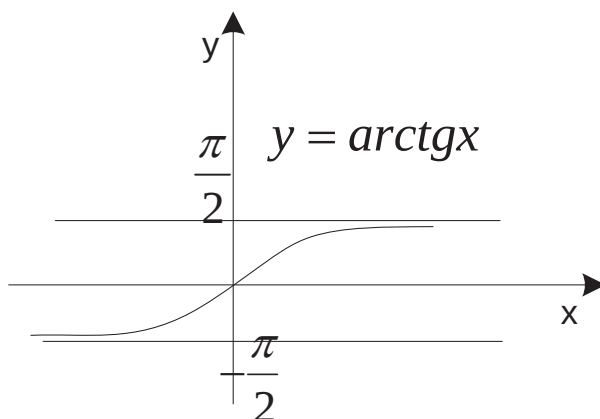
За функцију  $y = \arcsin x$  домен је  $x \in [-1, 1]$ , а кодомен је  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ;

за  $y = \arccos x$  домен је  $x \in [-1, 1]$ , а кодомен је  $y \in [0, \pi]$ ;

за  $y = \operatorname{arctg} x$  домен је  $x \in (-\infty, \infty)$ , а кодомен је  $y \in (0, \pi)$ ;

за  $y = \operatorname{arcctg} x$  домен је  $x \in (-\infty, \infty)$ , а кодомен је  $y \in (0, \pi)$ .





## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Одредити област дефинисаности следећих функција:

1. а)  $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$ ;      б)  $y = \frac{1 - 2x}{(x - 1)^2}$ .

**Решење:**

а)  $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ ,  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

б)  $D_x = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$$2. \text{ а) } y = \sqrt{9 - x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt{4x - x^2}; \quad \text{в) } y = \frac{8x - 16 - x^2}{\sqrt{2 - x}};$$

$$\text{г) } f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3 - x)(3 + x) \geq 0, D_x : x \in [-3, 3];$$

$$\text{б) } 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4 - x) \geq 0, D_x : x \in [0, 4];$$

$$\text{в) } 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2, D_x : x \in (-\infty, 2);$$

$$\text{г) } 1^\circ \quad x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty);$$

$$2^\circ \quad 3 + 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -(x + 1)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3 - x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3).$$

Решење је пресек решења оба случаја  $D_x : x \in [2, 3)$ .

$$3. \text{ а) } y = \ln \frac{x}{3 - x}; \quad \text{б) } y = \ln(x^2 - 6x); \quad \text{в) } f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \frac{x}{3 - x} > 0, D_x : x \in (0, 3);$$

$$\text{б) } x^2 - 6x > 0, D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty);$$

**в)**

$$1^\circ \quad \ln \frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \Leftrightarrow 5x - x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (4 - x)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$$

$$2^\circ \quad \frac{5x - x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow 5x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(5 - x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 5).$$

Решење је пресек решења оба случаја  $D_x : x \in [1, 4]$ .

**4. Одредити кодомен функција:**

$$\text{а) } y = -\frac{1}{2}x^2 - 1; \quad \text{б) } y = x^2 - 9; \quad \text{в) } y = 2^x + 1.$$

**Решење:**

а)  $D_y : y \in (-\infty, -1]$ ;

б)  $D_y : y \in [-9, +\infty)$ ;

в)  $D_y : y \in [1, +\infty)$ .

5. Одредити домен и нуле датих функција:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } y = x\sqrt{x^2 - 1}; \quad \text{в) } y = (x^2 - 4)e^x; \quad \text{г) } y = \frac{1 + \ln x}{x^2}.$$

**Решење:**

а) Домен:  $D_x = \mathbb{R}$ .

Нуле функције:  $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -5$ .

б) Домен:  $D_x : x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$ .

в) Домен је скуп  $\mathbb{R}$ . Нуле функције:  $(x^2 - 4)e^x = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2, e^x \neq 0$ .

г) Домен:  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Нуле функције:  $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ .

6. Одредити домен нуле и знак функција:

а)  $y = \ln(x^2 - 1)$ ; б)  $y = \ln \frac{x-4}{1-x}$ .

**Решење:**

а) Домен:  $(x-1)(x+1) > 0, D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Нуле функције:  $x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ .

Знак функције:

$$f(x) < 0 : 0 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$$

$$f(x) > 0 : x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

б) Домен:  $\frac{x-4}{1-x} > 0$ ,  $D_x : x \in (1, 4)$ .

Нуле функције:  $\frac{x-4}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ .

Знак функције:  $f(x) < 0$  за  $0 < \frac{x-4}{1-x} < 1$   $\frac{x-4}{1-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{1-x} < 0$ ,  $x \in \left(\frac{5}{2}, 4\right)$  и

$f(x) > 0$  за  $\frac{x-4}{1-x} > 1$  за  $x \in \left(1, \frac{5}{2}\right)$ .

7. Доказати да функције нису ни парне ни непарне:

а)  $y = \frac{2x-2}{x^2}$ ;      б)  $y = \frac{e^x}{x-1}$ .

**Решење:**

а)  $f(-x) = \frac{2(-x)-2}{(-x)^2} = \frac{-2(x+1)}{x^2} \neq f(x)$ ;

б)  $f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x-1} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{e^x(x+1)} \neq f(x)$ .

8. Доказати да су функције парне:

а)  $y = \sqrt{4-x^2}$ ;      б)  $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ ;      в)  $y = (x^2-1)e^{-x^2}$ ;      г)  $y = x^2-1-3\cos x$ .

**Решење:**

а)  $f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = f(x)$ ;

б)  $f(-x) = e^{\frac{(-x)^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} = f(x)$ ;

в)  $f(-x) = ((-x)^2-1)e^{-(-x)^2} = (x^2-1)e^{-x^2} = f(x)$ ;

г)  $f(-x) = (-x)^2-1-3\cos(-x) = x^2-1-3\cos x = f(x)$ .

9. Доказати да су функције непарне:

$$\text{а)} y = x^3 - 2x; \quad \text{б)} y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}; \quad \text{в)} f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}; \quad \text{г)} y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -(x^3 - 2x) = -f(x);$$

$$\text{б)} f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{2 \cdot (-x)} = \frac{x^2 - 4}{-2x} = -\frac{x^2 - 4}{2x} = -f(x);$$

$$\text{в)} f(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{e^{-x} - 1} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} = \frac{\frac{e^x + 1}{e^x}}{\frac{1 - e^x}{e^x}} = -\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -f(x);$$

$$\text{г)} f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = \frac{\frac{1 - 2^x}{2^x}}{\frac{1 + 2^x}{2^x}} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -f(x).$$

Испитати све познате особине функција:

$$10. \quad \text{а)} y = \ln(x^2 - 1); \quad \text{б)} y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \text{ Домен: } (x-1)(x+1) > 0, D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

$$\text{Нуле: } x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{2}.$$

Знак функције:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

$$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x), \text{ функција је парна.}$$

$$\text{б)} \text{ Домен: } 1 - \ln x \neq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \neq e \wedge x > 0, D_x : x \in (0, e) \cup (e, +\infty).$$

$$\text{Нуле: } 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

$$f(x) < 0, x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$$

$$f(x) > 0, x \in (e^{-1}, e).$$

Функција није ни парна ни непарна.

11. Одреди периоду следећих функција:

а)  $y = 2 \sin 2x$ ; б)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ; в)  $y = \sin^2 x$ ; г)  $y = \cos x + 3 \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x$ .

**Решење:**

а)

$$2 \sin 2x = 2 \sin 2(x+T) \Leftrightarrow \sin 2x - \sin 2(x+T) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{2x - 2x + 2T}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2x - 2T}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin T \cdot \cos(2x - T) = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0, \cos(2x - T) \neq 0 \Leftrightarrow T = \pi;$$

**Напомена:** Периода функција  $y = \sin bx$  и  $y = \cos bx$  износи  $T = \frac{2\pi}{b}$ , а за функције  $y = \operatorname{tg} bx$  и  $y = \operatorname{ctg} bx$  износи  $T = \frac{\pi}{b}$ .

б)  $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi;$

в)  $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), T = \pi;$

г)  $T_1 = 2\pi, T_2 = \pi, T_3 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \operatorname{NZS}(T_1, T_2, T_3) = 2\pi.$

12. Испитати ограниченост следећих функција:

а)  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ; б)  $y = x - 4$ ; в)  $y = 2 \sin 2x$ .

**Решење:**

а) Функција је ограничена  $y \in [0, \infty)$ ;

б) Функција је неограничена;

в) Функција је ограничена  $y \in [-2, 2]$ .

13. Испитати монотоност следећих функција:

а)  $y = 2x + 3$ ; б)  $y = 2^x$ ; в)  $y = \frac{2x-1}{5-x}$ .

**Решење**

а) Ако је  $x_1 > x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 > 2x_2 + 3$ , што значи да функција расте.

б) Ако је  $x_1 > x_2 \Rightarrow 2^{x_1} > 2^{x_2}$ , што значи да функција расте.

в) Нека је  $x_1 < x_2$ . Тада је:

$$y_1 - y_2 = \frac{2x_1 - 1}{5 - x_1} - \frac{2x_2 - 1}{5 - x_2} = \frac{9(x_1 - x_2)}{(5 - x_1)(5 - x_2)}.$$

Нека  $x_1, x_2 \in (5, +\infty)$ . Тада је  $x_1 > 5$  и  $x_2 > 5$ , па су  $5 - x_1 < 0$  и  $5 - x_2 < 0$ , односно  $(5 - x_1)(5 - x_2) > 0$ . Како је  $x_1 - x_2 < 0$  закључујемо да је у овом случају  $y_1 - y_2 < 0$ , односно функција је растућа.

Ако је  $x_1, x_2 \in (-\infty, 5)$ , тада су  $x_1 < 5$  и  $x_2 < 5$ , па су  $5 - x_1 > 0$  и  $5 - x_2 > 0$ , односно  $(5 - x_1)(5 - x_2) > 0$ . Како је  $x_1 - x_2 < 0$  закључујемо да је и у овом случају  $y_1 - y_2 < 0$ , односно да је функција растућа.

**14.** Испитати конвексност, конкавност функције  $f(x) = \log_2 x$ .

**Решење**

$$\log_2 \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \frac{\log_2(x_1) + \log_2(x_2)}{2}$$

$\log_2 \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \log_2(x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$ , а ово је тачно, значи функција је конвексна.

**К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И**

Функција

Домен

Кодомен

Инјекција (пресликавање „1-1“)

Сурјекција (пресликавање „на“)

Бијекција (пресликавање „1-1“ и „на“)

Инверзна функција

Слагање функција

Сложена функција

## 4. ГЛАВА

# ***НИЗОВИ***

1. ПОЈАМ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ НИЗА
2. ОСОБИНЕ КОНВЕРГЕНТНИХ НИЗОВА
3. БРОЈ  $\epsilon$

## ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију низа,
2. дефиницију граничне вредности низа,
3. особине конвергентних низова
4. број  $\epsilon$ ,

## 4.1. НИЗОВИ

- Уређени скуп елемената  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  образује **низ** ако се сваком природном броју  $n \in \mathbb{N}$  по неком закону придружи један и само један елемент  $a_n \in \mathbb{R}$ .
- Низ је пресликавање  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Пример:**  $1, 2, 3, \dots$  представља низ природних бројева.

- Низ је одређен својим општим чланом  $a_n$ .

**Пример:** Ако је општи члан низа  $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , онда су чланови низа

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

- Низ  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  је:

**монотono растући** ако  $a_{n+1} > a_n$ ,

**монотono опадајући** ако је  $a_{n+1} < a_n$ ,

**монотono неопадајући** ако је  $a_{n+1} \geq a_n$ ,

**монотono нерастући** ако је  $a_{n+1} \leq a_n$ .

- За низ  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  се каже да је **ограничен** ако постоје реални бројеви  $m$  и  $M$  такви да је  $m \leq a_n \leq M$ .

Број  $m$  представља **доње ограничење (миноранта)**, док је  $M$  **горње ограничење (мајоранта)** низа.

- Највећа доња граница назива се **инфимум** низа, а најмања горња граница назива се **супремум** низа.

**Пример:** Низ са општим чланом  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  је ограничен. Доње ограничење је  $m = -1$ , а горње ограничење је  $M = \frac{1}{2}$ , тј. сви чланови низа задовољавају релацију  $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ .

**Напомена:** Треба нагласити да  $m$  и  $M$  нису јединствени, наиме има непребројиво много других мајоранти и миноранти.

Тачне су и следеће неједнакости  $-1 \leq a_n < 1$  или  $-2 < a_n < 2$  итд.

У овом примеру су наведени управо инфимум и супремум скупа вредности низа.

## 4.2. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Идеја граничне вредности била је позната још у античком добу. Старогрчки математичари Еудокс (408-355), Архимед (287-212) и други бавили су се проблемом квадратуре равних фигура и кубатуре геометријских тела и те проблеме успешно решавали методом исцрпљивања али прецизну дефиницију граничне вредности функције дао је Коши 1821. год.

- Број  $a$  се назива **граничном вредношћу** низа  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , ако за сваки произвољно мали позитивни број  $\varepsilon$ , може да се нађе природни број  $n_0$ , такав да је  $\forall n > n_0, |a_n - a| < \varepsilon$ , тј.  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \forall n > n_0, |a_n - a| < \varepsilon$ , што означавамо са  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , или  $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ .
- Низ који има граничну вредност назива се **конвергентним низом**, а који је нема назива се **дивергентним низом**.
- Граница конвергентног низа је **јединствена**.

**Пример:** Дат је низ  $a_n = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ . Показати да је његова гранична вредност  $\frac{1}{2}$ . Одредити  $n_0$  за  $\varepsilon = 0,01$ .

Како је  $|a_n - a| = \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$  за  $\forall \varepsilon > 0$ , закључујемо да је  $\frac{1}{2}$  гранична вредност низа.

За  $\varepsilon = 0,01$  добијемо  $\frac{1}{4n+2} < 0,01$ , одакле  $n > \frac{98}{4} = 24,5$  тј.  $n_0 \geq 25$ .

Дакле ван  $\varepsilon$  околине броја  $\frac{1}{2}$  налази се 24 члана низа, а у  $\varepsilon$  околини почев од  $a_{25}$  свих осталих бесконачно много чланова низа.

### 4.3. ОСОБИНЕ КОНВЕРГЕНТНИХ НИЗОВА

- Сваки конвергентан низ је ограничен.
- Монотон и ограничен низ је конвергентан.

**Пример:** Низ  $a_n = \frac{n+1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , односно  $\left( 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \right)$  је монотono опадајући ( $a_n > a_{n+1}$ ) и ограничен је са доње стране  $\left( \frac{n+1}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N} \right)$ , што значи да постоји гранична вредност овог низа, тј.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

### 4.4. ОПЕРАЦИЈЕ СА ГРАНИЧНИМ ВРЕДНОСТИМА НИЗОВА

Нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Тада важи:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$ ;

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0).$$

$$\text{Пример: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

## 4.5. ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА НИЗА

- Тачка  $a$  на бројној правој у чијој се свакој произвољно малој околини  $\varepsilon$  налази бесконачно много чланова низа  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  назива се **тачка нагомилавања** тог низа.
- Број  $a$  је **тачка нагомилавања** низа ако је за  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall n \in I \quad |a_n - a| < \varepsilon$ , где је  $I$  један бесконачни подскуп природних бројева.
- Низ може имати једну, две, уопште коначно или бесконачно много тачака нагомилавања.
- Низ који има само једну тачку нагомилавања и то коначну, назива се **конвергентним** низом.

**Пример:** Низ са општим чланом  $a_n = n$  нема тачку нагомилавања.

**Пример:** Низ са општим чланом  $a_n = \frac{1}{n}$  има једну тачку нагомилавања  $a = 0$  која не припада низу.

**Пример:** Низ са општим чланом  $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + 1}$  има две тачке нагомилавања  $a_1 = 1$ , која припада низу и  $a_2 = -1$ , која не припада низу.

## 4.6. БРОЈ $e$

- Гранична вредност низа са општим чланом  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  је број  $e = 2,718281\dots$  односно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Напомена:** Може се доказати да је низ са општим чланом  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотон и ограничен, па самим тим и конвергентан.

**Пример:** Наћи граничне вредности следећих низова:

а)  $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ ;    б)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .

а) Ако уведемо смену  $\frac{3}{n} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow n = 3t$  и за  $n \rightarrow \infty$  добијамо  $t \rightarrow \infty$ , онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3;$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

### ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Написати неколико чланова низа чији је општи члан:

а)  $a_n = \frac{1}{n+1}$ ;    б)  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ .

**Решење:**

а)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ; б)  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$

2. Наћи општи члан низа задатог са неколико првих чланова:

а)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ; б)  $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$

**Решење:**

а)  $a_n = \frac{1}{2^n}$ ; б)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ .

3. Наћи тачке нагомилавања и испитати конвергенцију следећих низова:

а)  $a_n = \frac{1}{n+1}$ ; б)  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ; в)  $a_n = \frac{n+1}{n}$ ; г)  $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$ .

**Решење:**

- а) конвергира и тачка нагомилавања је 0;  
 б) конвергира и тачка нагомилавања је 0;  
 в) конвергира и тачка нагомилавања је 1;  
 г) не конвергира и тачке нагомилавања су  $-1$  и  $1$ .

4. Дат је низ  $a_n = \frac{n}{n+1}$ . Показати да је његова гранична вредност 1.

Одредити  $n_0$  за  $\varepsilon = 0,01$ .

**Решење:**

Ако је број 1 је гранична вредност низа онда важи да је

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < 0,01 \text{ одакле је } n > 99 \text{ тј. } n_0 = 99.$$

Према томе 99 чланова низа је ван  $\varepsilon$  околине броја 1 ширине 0,01, а почев од  $a_{100}$  свих бесконачно много чланова низа се налазе у  $\varepsilon$  околини.

Одредити граничне вредности низова:

5. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 1}$ .

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{3};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{6. а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(n+1)^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}.$$

**Решење:**а) Знајући формулу за збир првих  $n$  чланова аритметичког низа
 $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d),$  где је  $a_1 = 1, d = 2$ , добијамо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

б) Знајући формулу за збир првих  $n$  чланова геометријског низа
 $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$  где је  $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$  добијамо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

в)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = 2.$$

7. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}}$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ .

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}} \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty. \end{aligned}$$

8. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+1)!}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n - 5^n}$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ .

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + n!(n+1)}{n! - n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(1+n+1)}{n!(1-(n+1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{-n} = -1.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1} = -1.$$

**в)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$9. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{3}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n}; \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-3}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1-1}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right)^{-\frac{2n}{n+1}} \\ &= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-3}{n} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 - \frac{3}{n} \right)^{-\frac{n}{3}} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+2) - \ln n).$$

**Решење:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}}^2 = \ln e^2 = 2.$$

Доказати следеће резултате:

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 1.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = 0.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{3n+1} - \frac{n}{2} \right) = -\frac{1}{3}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{1+2+3+\dots+(n-1)} = 2.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1} = 0.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = 3.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n} = 0.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{3n} = e^{-6}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{2n+1} = e^{-2}.$$

**К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И**

Низ

Број  $e$

Гранична вредност низа



## 5. ГЛАВА

# *ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ*

### 1. ДЕФИНИЦИЈА И ОСОБИНЕ

### 2. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

### 3. АСИМПТОТЕ

## ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. дефиницији граничне вредности функције,
2. операцијама са граничним вредностима функција,
3. појму непрекидности функције,
4. асимптотама неких функција.

## 5.1. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

Уопштавајући појам граничне вредности низа долазимо до појма граничне вредности функције.

- Кажемо да је  $a$  **тачка нагомилавања** скупа  $A \subset \mathbb{R}$  ако се у свакој околини тачке  $a$  налази бар један елемент из  $A$  различит од  $a$ .
- Тачка нагомилавања скупа  $A$  не мора да припада скупу  $A$ .
- Ако  $a$  није тачка нагомилавања, она се назива **изолована тачка**.

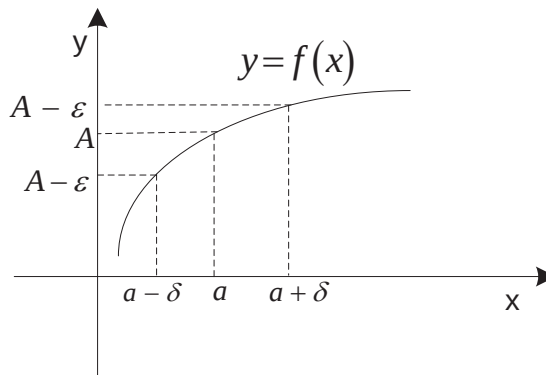
Нека је  $a$  тачка нагомилавања домена  $D_x$  функције  $f(x)$ .

- Број  $A$  је **гранична вредност** функције  $f(x)$  када  $x \rightarrow a$ , ако за сваки  $\varepsilon > 0$  постоји број  $\delta > 0$ , такав да је за  $\forall x \in D_x$  за које важи услов  $|x - a| < \delta$ , испуњена неједнакост  $|f(x) - A| < \varepsilon$  и пишемо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

- Наведену дефиницију можемо записати и на следећи начин:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon))$$



**Напомена:** Претходна дефиниција значи да ако се на  $y$  оси зада  $\varepsilon$  околина тачке  $A$ , тада постоји  $\delta$  околина тачке  $a$  на  $x$  оси, тако да када  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ , онда  $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ , тј. ако независно променљива  $x$  тежи  $a$ , вредности функције  $f(x)$  теже  $A$ .

**Напомена:** Функција у тачки  $a$  може, а не мора бити дефинисана, али мора бити тачка нагомилавања.

**Пример:** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ .

Полазећи од дефиниције граничне вредности, ако је  $|3x + 1 - 7| < \varepsilon$ , добијамо  $3|x - 2| < \varepsilon$ , тј.  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Довољно је узети да је  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ , па да горња формула буде тачна.

## 5.2. ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- Број  $A$  је десна гранична вредност функције  $f(x)$  у тачки  $a$ , тј.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ , ако и само ако је (акко) 
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$
- Број  $A$  је лева гранична вредност функције  $f(x)$  у тачки  $a$  тј.  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ , акко 
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$
- Функција  $f(x)$  има граничну вредност  $A$  када  $x \rightarrow a$  ако лева и десна гранична вредност постоје и једнаке су  $A$ .

**Пример:** Одредити леву и десну граничну вредност функције  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  у тачки  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 1) = 2.$$

Пошто су лева и десна гранична вредност функције у тачки  $x = 1$  постоје и имају исту бројну вредност, функција има граничну вредност у тој тачки која износи 2.

**Пример:** Одредити леву и десну граничну вредност функције  $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} x$  у тачки  $x = 2$ .

Имајући у виду дефиницију апсолутне вредности  $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x \leq 2 \end{cases}$ , добијамо:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x-2} x = \lim_{x \rightarrow 2+0} x = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-x+2}{-x+2} x = \lim_{x \rightarrow 2-0} -x = -2.$$

Пошто лева и десна гранична вредност функције у тачки  $x = 2$  нису једнаке, функција нема граничну вредност у тачки  $x = 2$ .

### Гранична вредност функције кад аргумент $x \rightarrow \infty$

■  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  акко:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M > 0) (\forall x) x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

■  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  акко:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M < 0) (\forall x) x < M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Ако је  $a \in D_x$  тачка нагомилавања функције  $f(x)$ , онда дефинишемо:

### Бесконечно мале величине:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  акко

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

**Бесконечно велике величине:**

■  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  акко

$$(\forall M > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

■  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  акко

$$(\forall M < 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M.$$

■ Ако је функција  $f(x)$  бесконачно мала величина кад  $x \rightarrow a$ , тада је  $\frac{1}{f(x)}$  бесконачно велика величина.

## 5.3. ОСОБИНЕ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈА

Ако функције  $f(x)$  и  $g(x)$  имају граничне вредности кад аргумент  $x \rightarrow a$ , тј.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , тада је:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$  за  $(g(x) \neq 0, B \neq 0).$

**Напомена:** И код функција као код низова срећемо се са неодређеним изразима “ $\infty - \infty$ ”, “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, “ $\frac{0}{0}$ ”, итд.

■ **Лема о два полицајца:**

Ако је  $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ , тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A.$$

**Пример:** Користећи лему о два полицајца доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Како је  $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , уз услов  $x \neq 0$ , добијамо  $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$ .

$$|\sin x| \leq |x| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right|$$

$$1 \leq \left| \frac{x}{\sin x} \right| \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$|\cos x| \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Знајући да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , на основу леме закључујемо да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

## 5.4. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- Функција  $f(x)$  је **непрекидна** у тачки  $a \in D_x$ , ако  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \forall x |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .
- Нека је  $a$  тачка нагомилавања функција  $f(x)$  дефинисане на скупу  $D_x$  тада је непрекидна акко је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- Функција  $f(x)$  је **непрекидна с'десна** у тачки  $a$ , ако је  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ , а **непрекидна с'лева** ако је  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ .
- Функција  $f(x)$  је непрекидна у тачки  $a$  акко је непрекидна и с'лева и с'десна у тој тачки.

- Ако функција није непрекидна у тачки  $a$ , онда је то **тачка прекида функције**.
- Функција је **непрекидна на скупу**  $A \subseteq D_x$  ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

**Напомена:** Дефиниција непрекидности има сличности са дефиницијом граничне вредности у тачки. Разлика је у томе што дефиниција граничне вредности не захтева дефинисаност функције у тачки  $a$ , а непрекидности захтева. Такође за дефиницију непрекидности није обавезно да тачка буде и тачка нагомилавања домена функције.

Ако је функција дефинисана у тачки  $a$ , која је при том тачка нагомилавања тада се појмови граничне вредности и непрекидности изједначају.

## 5.5. ОСОБИНЕ НЕПРЕКИДНИХ ФУНКЦИЈА

- Ако су функције  $f(x)$  и  $g(x)$  непрекидне у тачки  $a \in D_x$ , онда су у тој тачки непрекидне и функције:  $C \cdot f(x)$ ,  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .
- За сваку функцију  $f(x)$  непрекидну на скупу  $D_x$ , постоји  $m = \min f(x)$  и  $M = \max f(x)$ .

**Пример:** Испитати непрекидност функције  $f(x) = \begin{cases} 3x & , -\infty < x \leq 1 \\ 3-x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$ .

Функција је непрекидна у свакој тачки осим за  $x=1$  јер су функције  $f(x)=3x$  и  $f(x)=3-x$  непрекидне.

$\lim_{x \rightarrow 1-} 3x = 3 = f(1)$ , а  $\lim_{x \rightarrow 1+} (3-x) = 2$ , значи да је дата функција непрекидна с'лева у тачки  $x=1$ , а с'десна у тој тачки има прекид.

## 5.6. АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈЕ

### ■ Вертикална асимптота:

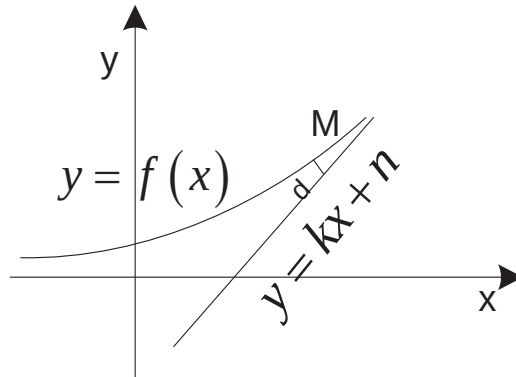
Права  $x = a$  је **вертикална асимптота** функције  $f(x)$  ако је  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .

Ако је  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$  онда говоримо о **десној** или **левој** вертикалној асимптоти.

### ■ Хоризонтална асимптота:

Права  $y = b$  је **хоризонтална асимптота** функције  $f(x)$  ако је  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ .

### ■ Коса асимптота:



Права  $y = kx + n$  је **коса асимптота** функције  $f(x)$  ако је:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ а } n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

**Доказ:**

Права  $y = kx + n$  ће бити коса асимптота функције  $f(x)$  ако је  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - n) = 0$ .

Да би одредили косу асимптоту  $y = kx + n$ , треба наћи коефицијенте  $k$  и  $n$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = n.$$

Ако поделимо последњу везу са  $x$  добићемо:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x) - kx}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - k \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = k.$$

**Пример:** Одредити асимптоте функције  $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$ .

Како функција има прекиде за  $x = \pm 1$ , те праве могу да буду вертикалне асимптоте функције.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Како је када  $x \rightarrow 1 \pm 0$  гранична вредност функције  $\pm\infty$ , функција има две вертикалне асимптоте  $x = \pm 1$ .

Пошто је  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2 - 1} = 0$ , функција има хоризонталну асимптоту,  $x$  - осу, тј. праву  $y = 0$ .

Функција која има хоризонталну нема косу асимптоту.

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. На основу дефиниције граничне вредности показати да је:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$ ;   б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ .

**Решење:**

а) По дефиницији број 1 ће бити гранична вредност функције ако  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , такав да ако је  $|x - 1| < \delta$ ; следи да је  $|(2x - 1) - 1| < \varepsilon$ .

Како је  $|(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Ако узмемо да је  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , биће задовољен услов да из услова  $|x-1| < \delta$  следи да је  $|(2x-1)-1| < \varepsilon$ , тј. 1 је гранична вредност функције.

$$\text{б)} \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon, \text{ за сваки } |x-2| < \delta = \varepsilon.$$

Одредити граничне вредности функција:

$$2. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^2; \text{ б)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+1}{2x+1}; \text{ в)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2-2x+1}; \text{ г)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2-2x+1}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} \right)^2 = 1; \text{ б)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \infty; \text{ в)} 0; \text{ г)} \frac{1}{2}.$$

$$3. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-2}{x^3-4x+3}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5-16x}{2x^2+4x-16}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+4)} = -1;$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2-9)(x^2+3)}{(x+3)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x^2+3)}{x^2+1} = -\frac{36}{5};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x^3-x-3x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x^2-1)-3(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x(x+1)-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x-3} = -3;$$

г)  $\frac{16}{3}$ .

4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{4x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2}$ .

**Решење:**

а) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

б) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 4}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8}.$$

в)  $\frac{1}{4}$ ; г) 4.

5. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

**Решење:**

а) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + 1}{\sqrt{x^2+1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+16} + 4}{\sqrt{x^2+16} + 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16} + 4}{\sqrt{x^2+1} + 1} = 4;$$

б) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^2+1})^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1}{(\sqrt[3]{x^2+1})^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3 - 1}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \frac{1}{3};$$

в)  $-\frac{1}{3}$ ;    г)  $\frac{2}{3}$ .

6. а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ ;    в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}}$ .

**Решење:**

а)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{x-a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sqrt{(x-a)^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}; \end{aligned}$$

б) 1;    в)  $2\sqrt[4]{a}$ .

**Основни лимес је:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

7. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ ;    в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x}$ .

**Решење:**

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin 2x}{2x}}{\frac{3 \sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$ ;    в) 1;    г)  $\frac{1}{3}$ .

8. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;    в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^3}{x^2 \sin^4 x}$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ .

**Решење:**

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2.$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^3}{x^2 \sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x^3}{2}}{x^2 \sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin^2 \frac{x^3}{2}}{\frac{x^6}{4}}}{x^6 \frac{\sin^4 x}{x^4}} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2 (\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2 (\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x})} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2} \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3}{2} x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$9. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2}} = \pi^2 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)(\pi + x)} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{4\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{в)} -\frac{1}{2}; \quad \text{г)} 2.$$

$$10. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) + \sin(x-a)}{x} = 2 \cos a; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x - \cos 3x};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos x - \sin x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) + \sin(x-a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos a}{x} = 2 \cos a;$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{-2 \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \sin \frac{5x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 \cdot \frac{\sin^2 2x}{4x^2}}{2 \frac{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \cdot \frac{5x}{2}} = \frac{8}{5};$$

$$\text{в)} \sqrt{2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = -\frac{3}{2}.$$

$$11. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}.$$

$$\text{Резултат: а)} 16; \quad \text{б)} \frac{1}{18}; \quad \text{в)} 3.$$

**БРОЈ е :**

$$\boxed{e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \quad \text{односно} \quad \boxed{e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

**12. Одредити граничне вредности функција:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{6}{2x}} = e^6;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2;$$

$$\text{г) } e^3.$$

$$13. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3x+3)^{\frac{1}{x+1}}.$$

**Резултат:** а)  $e^4$ ; б)  $e^8$ ; в)  $e$ .

$$14. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(4-x)}{x-3} = -1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+6) - \ln 6}{x}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\ln(4-x)}{x-3}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \ln(4-x)^{\frac{1}{x-3}} = \ln \lim_{x \rightarrow 3} (1 - (x-3))^{\frac{1}{x-3}} = \ln e^{-1} = -1; \quad \text{б) } \frac{1}{6}.$$

$$15. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x^2}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{ђ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2}{2\operatorname{tg}^2 x}} = e^2;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{1-\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-(1-\cos x))^{\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1+\cos \frac{x}{2}-1 \right)^{\frac{\cos \frac{x}{2}-1}{\cos \frac{x}{2}-1} \cdot \frac{3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{3}{2}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos 2x-1)^{\frac{\cos 2x-1}{\cos 2x-1} \cdot \frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = e^{-2};$$

$$\text{ђ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1+\sin 2x-1)^{\frac{\sin^2 2x}{(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{(1+\sin 2x)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$16. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

$$17. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{4}{4} x^2} = \frac{3}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = -2; \quad \text{в) } 1.$$

**18. Одредити асимптоте функција:**

$$\text{а) } y = \frac{1}{x-1}; \quad \text{б) } y = \frac{x+3}{x+1}; \quad \text{в) } y = \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1}; \quad \text{г) } y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 4}.$$

**Решење:**

**а)**

В.А. Функција има прекид за  $x=1$ .

Како је  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ , функција има вертикалну асимптоту  $x=1$ .

Х.А.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ , функција има и хоризонталну асимптоту,  $x$  - осу, тј. праву  $y=0$ .

К.А. Функција која има хоризонталну асимптоту нема косу асимптоту.

**б)**

В.А.  $x=-1$ .

Х.А.  $y=1$ .

К.А. нема.

**в)**

В.А. је  $x=1$ .

Х.А.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1} = \infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту.

К.А.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 6x + 4}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x^2 - x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 4}{x-1} = -5.$$

Коса асимптота је  $y = x - 5$ .

г)

В.А.  $x = \pm 2$ .

Х.А. нема.

К.А.  $y = 2x$ .

19. а)  $y = \frac{e^x}{x}$ ; б)  $y = xe^{\frac{1}{x}}$ ; в)  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ ; г)  $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$ .

**Решење:**

а)

В.А.  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ , вертикална асимптота је  $x = 0$ .

Х.А.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ , функција има хоризонталну асимптоту само када  $x \rightarrow -\infty$ .

К.А. Нема косих асимптота.

б)

В.А.  $\lim_{x \rightarrow 0+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$ , функција има вертикална асимптоту само када  $x \rightarrow 0+$ .

Х.А.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$  нема хоризонталну асимптоту.

К.А.  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ ,  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$ .

Коса асимптота је права  $y = x + 1$ .

в) Како је  $D_x : x \in (0, +\infty)$ , имамо:

В.А.  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ , функција има вертикална асимптоту само када  $x \rightarrow 0+$ .

Х.А.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ , хоризонтална асимптота је права  $y = 0$ .

К.А. Нема косих асимптота.

г) Како је  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ , имамо:

В.А.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \frac{x-2}{x+1} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln \frac{x-2}{x+1} = -\infty$ , функција има вертикалне асимптоте само када  $x \rightarrow -1^-$  и  $x \rightarrow 2^+$ .

Х.А.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x-2}{x+1} = 0$ , хоризонтална асимптота је права  $y = 0$ .

К.А. Нема косих асимптота.

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Гранична вредност

Непрекидност

Асимптоте



## 6. ГЛАВА

# ***ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ***

### **1. ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ**

### **2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈЕ**

### **3. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ВИШЕГ РЕДА**

## **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију извода функције,
2. геометријско тумачење извода функције,
3. таблицу основних извода функције,
4. основна правила диференцирања,
5. извод сложене функције,
6. дефиницију диференцијала функције,
7. појам извода и диференцијала вишег реда.

## 6.1. ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ

Проблеми тангенте и брзине, као и проблеми екстрема, тј. минимума и максимума постепено су подстицали настајање појма извода. Многи математичари још од античке Грчке успевали су да реше неке од ових проблема за појединачне случајеве.

Тек када је Декарт пронашао методу координата омогућено је да се криве представљају једначинама, тако да је створен основни предуслов за појаву опште методе за аналитичко решавање проблема тангенте, односно за дефинисање појма извода.

Проблем тангенте први је решио немачки математичар и филозоф Лајбниц дефинишући нову област математике под називом диференцијални рачун. У исто време Исак Њутн је дефинисао извод као последицу истрживања феномена кретања.

То су биле две идејно и методолшки различите концепције које су довеле до истог резултата.

Данас, диференцијални рачун, представља незаобилазно средство у решавању многих проблема савремене науке и технике.



G. Leibniz (1646-1716)



I. Newton (1642-1727)

Најпознатији спор у историји математике вођен је између Њутна и Лајбница око откитића диференцијалног рачуна.

Њутн је има само 23 године када је 1666. год. открио метод, који је назвао метод флуksiје. Он је први схватио да су интеграција и диференцирање две инверзне операције. Међутим оклевао је са објављивањем својих резултата. У међувремену 1675. Лајбниц је самостално дошао до истог метода који је назвао диференцијални рачун. Он је своје резултате одмах публиковао и задобио сва признања. Сукоб ових математичара се настављао тако да је Лондонско краљевско друштво формирало комитет који је 1713. год. дало приоритет Њутну. Међутим симболика коју је увео Лајбниц била је много једноставнија и опште је прихваћена.

- Нека је функција  $f(x)$  дефинисана у околини тачке  $x$ .

Произвољну малу величину  $\Delta x$  називамо **прираштај аргумента  $x$** . Када се независна променљива, аргумент, промени од  $x$  до  $x + \Delta x$ , тада се вредност функције промени од  $f(x)$  до  $f(x + \Delta x)$ , тј. за величину  $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ , која се назива **прираштај функције**.

- Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

тада кажемо да је  $f'(x)$  **први извод функције** или **извод функције  $f(x)$  у датој тачки  $x$** .

- Поступак налажења извода назива се **диференцирање**.
- Ако је  $f'(x)$  коначна вредност, тада кажемо да је функција **диференцијабилна** у датој тачки  $x$ .

**Пример:** Одредити извод функције  $y = x^2$  по дефиницији.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

## 6.2. ЛЕВИ И ДЕСНИ ИЗВОД

- Ако постоји гранична вредност  $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  она се назива **леви извод функције**, а гранична вредност

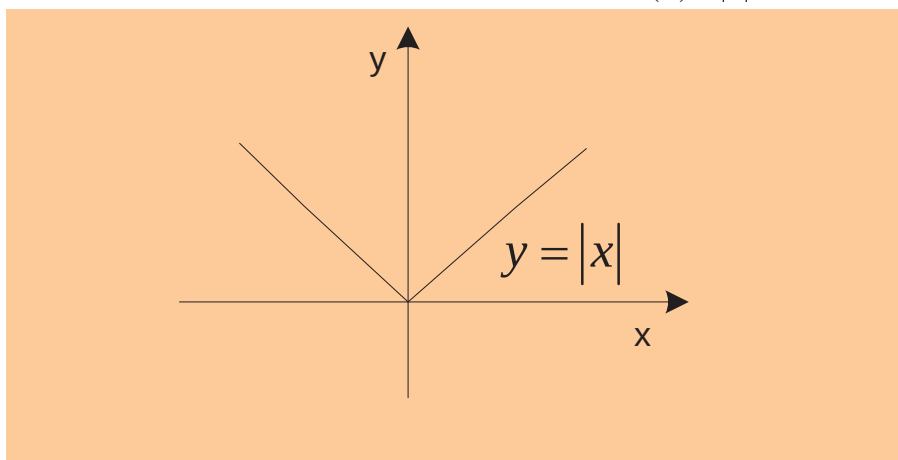
$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ назива се десни извод функције.}$$

- Функција  $f(x)$  је диференцијабилна у тачки  $x$  ако и само ако постоји леви и десни извод функције и једнаки су.

$$f'_+(x) = f'_-(x)$$

- Функција  $f(x)$  је диференцијабилна на интервалу ако и само ако је диференцијабилна у свакој тачки тог интервала.
- Ако је функција  $f(x)$  диференцијабилна у некој тачки, онда је она и непрекидна у тој тачки. Обрнуто тврђење није тачно.

**Пример:** Испитати диференцијабилност функције  $f(x) = |x|$  у тачки  $x = 0$ .



Функција је непрекидна у тачки  $x = 0$ , али није диференцијабилна јер је

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

тј.  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$  и закључујемо да  $f'(0)$  не постоји.

### 6.3. ОСНОВНА ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦИРАЊА

- Ако су функције  $f(x)$  и  $g(x)$  диференцијабилне у тачки  $x$ , тада је:

а)  $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), (C = \text{const.});$

$$\text{б)} \left( f(x) \pm g(x) \right)' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$\text{в)} \left( f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$\text{г)} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0).$$

**Доказ:**

$$\text{а)} y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot f(x + \Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot f'(x);$$

$$\begin{aligned} \text{б)} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x) \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \end{aligned}$$

г) Доказуємо на сличан начин.

## 6.4. ТАБЛИЦА ОСНОВНИХ ИЗВОДА

| $y = f(x)$                                 | $y = f'(x)$               |
|--------------------------------------------|---------------------------|
| $C = \text{const.}$                        | 0                         |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$          | $\alpha x^{\alpha-1}$     |
| $\sqrt{x}$                                 | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$     |
| $a^x, a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$      | $a^x \ln a$               |
| $e^x$                                      | $e^x$                     |
| $\log_a x, a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ | $\frac{1}{x} \log_a e$    |
| $\ln x$                                    | $\frac{1}{x}$             |
| $\sin x$                                   | $\cos x$                  |
| $\cos x$                                   | $-\sin x$                 |
| $\operatorname{tg} x$                      | $\frac{1}{\cos^2 x}$      |
| $\operatorname{ctg} x$                     | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     |
| $\arcsin x$                                | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos x$                                | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$                   | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\operatorname{arcctg} x$                  | $-\frac{1}{1+x^2}$        |

Таблица извода је добијена применом дефиниције извода на задате функције.

**Пример:** Наћи извод функције  $y = C$ ,  $C = \text{const}$  по дефиницији.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Пример:** Наћи извод функције  $y = \sin x$  по дефиницији.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

**Пример:** Наћи извод функције  $y = a^x$  по дефиницији.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

## 6.5. ИЗВОД ИНВЕРЗНЕ ФУНКЦИЈЕ

Нека је функција  $f(x)$  монотона и непрекидна у околини тачке  $x$ , а диференцијабилна у тачки  $x$ , тј. постоји  $f'(x) \neq 0$ .

Нека је  $x = f^{-1}(y)$  њена инверзна функција.

- Извод инверзне функције се дефинише као:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Доказ:**

Како је  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$ , тј.  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = 1$  и знајући да је функција  $y = f(x)$  диференцијабилна,  $\Delta y \rightarrow 0$  тада  $\Delta x \rightarrow 0$ , па добијамо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = 1$$

$$f'(x) \cdot (f^{-1}(y))' = 1 \Leftrightarrow (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Пример:**  $y = \arcsin x$

Како је  $x = \sin y$  инверзна функција функције  $y = \arcsin x$  добијамо:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Пример:** Наћи први извод следећих функција:

а)  $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$

б)  $y = 3x^3 + 2x - 3, \quad y' = 3(x^3)' + 2(x)' - (3)' = 9x^2 + 2;$

в)  $y = e^x \ln x, \quad y' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x};$

г)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad y' = \frac{(x^2)'(x^2 - 1) - x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$

## 6.6. ИЗВОД СЛОЖЕНЕ ФУНКЦИЈЕ

- Ако је дата сложена функција  $F(x) = f(g(x))$  где је функција  $g(x)$  диференцијабилна у тачки  $x$ , а функција  $f(u)$  диференцијабилна у тачки  $u = g(x)$ , онда је:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Доказ:**

По дефиницији је:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Замењујући  $g(x + \Delta x) = u + \Delta u$ , а знајући да је функција  $u = g(x)$  диференцијабилна, тада  $\Delta u \rightarrow 0$  када  $\Delta x \rightarrow 0$ , па добијамо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u) = f'(g(x)).$$

Дакле, имамо  $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

**Пример:** Наћи извод следећих сложених функција:

а)  $y = (3 + 2x^2)^{33}$ ,

$$y' = 33(3 + 2x^2)^{32} (3 + 2x^2)' = 33(3 + 2x^2)^{32} \cdot 4x = 132x(3 + 2x^2)^{32};$$

б)  $y = e^{x^2}$ ,  $y' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2};$

в)  $y = \ln(\operatorname{tg} x)$ ,  $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}.$

## 6.7. ЛОГАРИТАМСКИ ИЗВОД

- Извод функције облика  $f(x) = g(x)^{h(x)}$  добија се тако што се функција прво логаритмује

$$\log f(x) = h(x) \cdot \ln g(x),$$

а затим се тражи њен извод.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = f(x) \left( h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right)$$

$$\left( g(x)^{h(x)} \right)' = \left( g(x)^{h(x)} \right) \left( h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right).$$

- Формула се могла извести коришћењем израза  $g(x)^{h(x)} = e^{g(x)\ln h(x)}$ .

**Пример:** Наћи извод функције  $y = x^x$ .

Први начин:

$$\ln y = \ln x^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Leftrightarrow y' = y(\ln x + 1) \Leftrightarrow y' = x^x (\ln x + 1).$$

Други начин:

$$y = x^x = e^{x \ln x},$$

$$y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1).$$

## 6.8. ИЗВОД ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ

Ако је функција задата у имплицитном облику  $F(x, y) = 0$  и диференцијабилна је по променљивим  $x$  и  $y$ , а  $F'(x, y) \neq 0$ , онда је:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

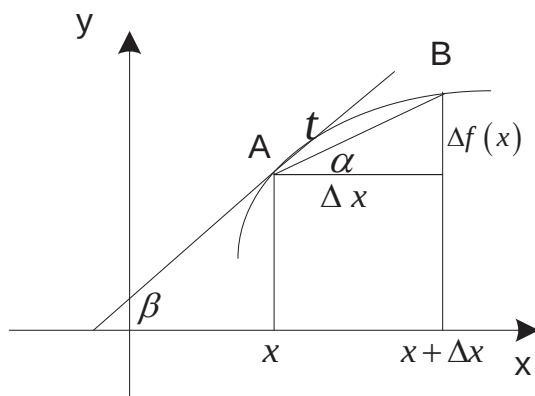
**Пример:** Наћи извод функције  $x^4 + y^4 = x^2 y^2$ .

Како је  $4x^3 + 4y^3 y' = 2xy^2 + 2x^2 yy'$ , добијамо

$$4y^3 y' - 2x^2 yy' = 2xy^2 - 4x^3 \Leftrightarrow y'(4y^3 - 2yx^2) = 2xy^2 - 4x^3 \Leftrightarrow y' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - yx^2}.$$

## 6.9. ГЕОМЕТРИЈСКО ТУМАЧЕЊЕ ИЗВОДА

Нека је функција  $f(x)$  непрекидна у тачки  $x$  и дефинисана у некој њеној околини.



Коефицијент правца сечице која је повучена кроз тачке  $A$  и  $B$  износи  $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ , где је  $\alpha$  угао који сечица заклапа са  $x$ -осом.

Са друге стране када пустимо да  $\Delta x \rightarrow 0$ , односно када се тачка  $B$  по кривој приближава тачки  $A$ , сечица  $AB$  постепено постаје тангента криве у тачки  $A$ .

Коефицијент правца тангенте која је повучена кроз тачку  $A$  износи  $k_t = \operatorname{tg} \beta$ . Како  $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \beta$ , када  $\Delta x \rightarrow 0$  добијамо  $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = y'(A)$ , а то је извод функције  $f(x)$  у тачки  $A$ .

- **Коефицијент правца тангенте** у тачки  $A$ , једнак вредности првог извода у тој тачки.
- **Једначина тангенте** криве у тачки  $A$  гласи  $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$ .
- **Једначина нормале** криве у тачки  $A$  гласи  $y - y_A = -\frac{1}{f'(x_A)}(x - x_A)$ .

### Пример:

Наћи једначину тангенте функције  $y = x^2 + 1$  у њеној тачки  $A(1, 2)$ .

Како је  $y' = 2x$  добијамо  $k_t = y'(A) = 2 \cdot 1 = 2$ .

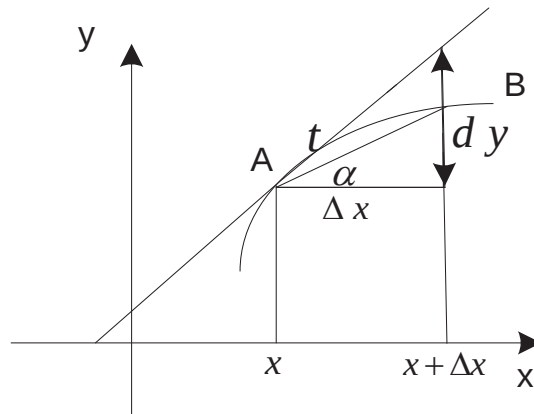
Тангента је права која пролази кроз тачку  $A$ , а коефицијент правца је  $k_t = 2$ .

Њена једначина је  $y - 2 = 2(x - 1)$ , односно  $y = 2x$ .

## 6.10. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈЕ

- Ако је функција  $f(x)$  диференцијабилна у некој тачки  $x$ , онда се израз  $f'(x)\Delta x$  назива се **диференцијалом** дате функције у тачки  $x$  и обележава са  $dy$ .

$$dy = f'(x)\Delta x.$$



- Диференцијал функције  $y = x$  износи  $dy = 1 \cdot \Delta x$ , тј.  $dx = \Delta x$ .
- Извод функције се може изразити преко диференцијала као  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .
- Диференцијал функције пропорционалан је прираштају функције:

$$\Delta y \approx dy$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

**Доказ:**

Знајући да је  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$  добијамо  $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x)$ , тј.

$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ . Знајући да је  $dy = f'(x)\Delta x$  добијамо  $\Delta y \approx dy$ .

Како је диференцијал функције **линеарна функција** прираштаја  $\Delta x$ , много је једноставније одредити диференцијал дате функције него њен прираштај  $\Delta y$ . Та чињеница се користи у приближном рачунању.

- За диференцијал функције важе слична правила као за изводе функција:

$$d(Cf) = Cd(f), C = \text{const.};$$

$$d(f \pm g) = d(f) \pm d(g);$$

$$d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g);$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2}.$$

**Пример:** Наћи диференцијал функције  $y = 2x^3 + 3x$ .

$$dy = y'dx = (6x^2 + 3)dx.$$

## 6.11. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ВИШЕГ РЕДА

- Нека је  $f(x)$  диференцијабилна функција, тј. постоји њен извод  $f'(x)$ . Ако постоји извод функције извода  $f'(x)$ , он се дефинише као други извод функције  $f(x)$  и обележава са  $f''(x)$ . На сличан начин се дефинишу  $f'''(x)$ ,  $f^{(4)}(x)$ , извод.
- Изводи вишег реда функције дефинишу се као:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})', \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Диференцијали вишег реда функције  $f(x)$  дефинишу се као:

$$d^0 y = y, \quad d^{n+1} y = d(d^n y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- За функцију кажемо да је  $n$  пута диференцијабилна у тачки  $x$ , ако постоји коначан  $k$ -ти извод  $f^{(k)}(x)$ , за свако  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .
- Ако су функције  $f$  и  $g$ ,  $n$  пута диференцијабилна у тачки  $x$ , онда важе следећа правила:

$$(C \cdot f(x))^{(n)} = C \cdot f^{(n)}(x), C = \text{const.};$$

$$(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) g^{(i)}(x) \quad \text{Лајбницова формула.}$$

**Пример:** Одредити други извод функција:

**а)**  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ;

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

**б)**  $f(x) = e^{-x^2}$ ;

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

**Пример:** Одредити трећи извод функција:

**а)**  $f(x) = \cos^2 x$ ;

$$f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) = -\sin 2x, \quad f''(x) = -2 \cos 2x, \quad f'''(x) = 4 \sin 2x;$$

**б)**  $f(x) = x^2 \ln x$ ;

$$f'(x) = 2x \ln x + x, \quad f''(x) = 2 \ln x + 3, \quad f'''(x) = \frac{2}{x}.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Користећи таблицу извода наћи први извод следећих функција:

1. а)  $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ ;                      б)  $y = 4x^3 + 2x^2 - 3 + \sqrt{x}$ ;

в)  $y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4$ ;    г)  $y = 6x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x} + 5x^2\sqrt[5]{x}$ .

**Решење:**

а)  $y' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ;

б)  $y' = (4x^3)' + (2x^2)' - (3)' + (\sqrt{x})' = 4 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 12x^2 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;

в)  $y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4 = x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{1}{3}} - \frac{x^{-5}}{5} - x^{-\frac{1}{2}} - 4$ ,

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}} + x^{-6} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}};$$

г)  $y = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} + 5x^2 \cdot \sqrt[5]{x} = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 5x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}} = 6x^{\frac{7}{6}} + 5x^{\frac{11}{5}}$ ,

$$y' = 6 \cdot \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1} + 5 \cdot \frac{11}{5}x^{\frac{11}{5}-1} = 7x^{\frac{1}{6}} + 11x^{\frac{6}{5}} = 7\sqrt[6]{x} + 11x \cdot \sqrt[5]{x}.$$

2. а)  $y = (x+2)(\sqrt{x}+2)$ ;    б)  $y = x^2 \cos x$ ;

в)  $y = x - \sin x \cos x$ ;    г)  $y = (x^2 - 2x) \cdot (x^4 + 7)$ .

**Решење:**

а)  $y' = (x+2)'(\sqrt{x}+2) + (x+2)(\sqrt{x}+2)' = \sqrt{x}+2 + (x+2)\frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 $= \sqrt{x}+2 + \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}+2 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}};$

$$\text{б)} y' = 2x \cos x - x^2 \sin x;$$

$$\text{в)} y' = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x;$$

$$\text{г)} y' = (2x - 2) \cdot (x^4 + 7) + (x^2 - 2x) \cdot 4x^3 = 6x^5 - 10x^4 + 14x - 14.$$

$$3. \text{ а)} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad \text{б)} y = \frac{x^3}{x - 1}; \quad \text{в)} y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; \quad \text{г)} y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2};$$

$$\text{б)} y' = \frac{3x^2(x - 1) - x^3}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x - 1)^2};$$

$$\text{в)} y' = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2};$$

$$\text{г)} y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 - \operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

$$4. \text{ а)} y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}; \quad \text{б)} y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad \text{в)} y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}; \quad \text{г)} y = \frac{x}{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

**Резултат:**

$$\text{а)} y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}; \quad \text{б)} y' = -\frac{\ln x}{x^2}; \quad \text{в)} y' = \frac{1}{\cos x - 1}; \quad \text{г)} y' = -\frac{2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Наћи извод следећих сложених функција:

5. а)  $y = (1-2x)^{13}$ ; б)  $y = 3\sin 4x$ ; в)  $y = \sin^4 x$ .

**Решење:**

а)  $y' = 13(1-2x)^{12} \cdot (1-2x)' = -26(1-2x)^{12}$ ;

б)  $y' = 3\cos 4x \cdot (4x)' = 12\cos 4x$ ;

в)  $y' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cos x$ .

6. а)  $y = e^{x^2-2x+2}$ ; б)  $y = xe^{x^2-2x}$ .

**Решење:**

а)  $y' = e^{x^2-2x+2} \cdot (x^2-2x+2)' = (2x-2)e^{x^2-2x+2}$ .

б)  $y' = e^{x^2-2x} + xe^{x^2-2x} (2x-2) = e^{x^2-2x} (1+2x^2-2x)$ .

7. а)  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ; б)  $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$ ; в)  $y = \ln \frac{x}{1-x^2}$ .

**Решење:**

а)  $y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left( \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{-2x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{x^2-1}$ ;

б)  $y' = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})' = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right)$

в)  $y' = \ln \frac{x}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{(1-x^2) + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}.$$

8. а)  $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ ; б)  $y = \ln \frac{\sin x}{1-\cos x}$ ; в)  $y = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ .

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \left( \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{-\cos x \cdot (1+\sin x) - \cos x \cdot (1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} = -\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{\cos x^2}{(1+\sin x)^4} = -\sqrt{\frac{1}{1-\sin x}} \cdot \frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)^3} \\ &= -\frac{1}{1+\sin x}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } y' = \frac{1}{\frac{\sin x}{1-\cos x}} \cdot \frac{(-1)}{1-\cos x} = -\frac{1}{\sin x};$$

$$\text{в) } y' = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x) + (1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x^2)} = \frac{2}{\cos x}.$$

9. а)  $y = \arcsin \frac{x}{a}$ ; б)  $y = \arcsin \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$ ; в)  $y = \arcsin \frac{1}{x}$ .

**Решење:**

$$\text{а) } y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \cdot \left( \frac{x}{a} \right)' = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2 + a^2) - 2x(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2}} \cdot \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} = \frac{1}{\sqrt{4a^2x^2}} \cdot \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} \\
 &= \frac{1}{2ax} \cdot \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} = \frac{2a}{x^2 + a^2};
 \end{aligned}$$

$$\text{в) } y' = \arcsin \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$10. \quad \text{а) } y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}); \quad \text{б) } y = \ln(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}).$$

**Решење:**

$$\begin{aligned}
 \text{а) } y' &= \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left( 2e^{2x} + \frac{4e^{2x}}{2\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left( 1 + \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) \\
 &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left( \frac{\sqrt{e^{4x} + 1} + e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } y' &= \frac{1}{x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}} \cdot \left( 1 + \frac{2x + 2a}{2\sqrt{x^2 + 2ax}} \right) \\
 &= \frac{1}{x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}} \cdot \left( \frac{\sqrt{x^2 + 2ax} + x + a}{\sqrt{x^2 + 2ax}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2ax}}.
 \end{aligned}$$

$$11. \quad \text{Наћи } f'\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{ где је } f(x) = \ln \frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x}.$$

**Решење:**

Прикажимо функцију  $f$  у облику  $f(x) = \ln(2 + \operatorname{tg} x) - \ln(2 - \operatorname{tg} x)$ .

Њен извод је:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \left( \frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} \right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{4}{4 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4}{4 \cos^2 x - \sin^2 x}. \end{aligned}$$

За  $x = \frac{\pi}{3}$  имамо  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)} = 16$ .

12.  $y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}};$       **Резултат:**  $y' = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \sin 2x}.$

13.  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2};$       **Резултат:**  $y' = \frac{1}{2 \cos^4 \frac{x}{2}}.$

14.  $y = e^{-x} (\sin x + \cos x);$       **Резултат:**  $y' = -2e^{-x} \sin x.$

15.  $y = \arcsin \frac{x^2}{a};$       **Резултат:**  $y' = \frac{2ax}{a^4 + x^4}.$

16.  $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x;$       **Резултат:**  $y' = \cos^3 x.$

17.  $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$       **Резултат:**  $y' = \frac{1}{1-x^2}.$

18.  $y = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln(x^2 + 4);$       **Резултат:**  $y' = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$

19. Наћи логаритамски извод следећих функција:

а)  $y = x^{\frac{1}{x}};$       б)  $y = (2^x)^x.$

**Решење:**

а)  $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$

$$y' = \left( e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \right)' = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

$$6) y' = (2^x)^x \cdot 2 \ln 2^x.$$

20. Дата је парабола  $y = \frac{1}{4}x^2$  и тачка  $A(4, y)$  на њој. Написати једначину тангенте и нормале у датој тачки.

**Решење:**

Како тачка  $A(4, y)$  припада графику функције, заменом координата тачке у једначину функције добијамо  $y = 4$ , па су координате тачке  $A(4, 4)$ .

Извод дате функције је  $y' = \frac{1}{2}x$ . Знајући да је коефицијент правца тангенте једнак вредности првог извода функције у датој тачки добијамо  $k_t = y'(4) = 2$ ,

$$\text{а } k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}.$$

Једначине тангенте и нормале су:

$$t: y - 4 = 2(x - 4) \Leftrightarrow y = 2x - 4,$$

$$n: y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

21. У тачки  $M(1, y)$  криве  $y = x^3 + x + x^{-1}$  написати једначину њене тангенте и нормале.

**Решење:**

За  $x = 1$  је  $y = 3$ , па су координате тачке  $M(1, 3)$ .

Извод дате функције је  $y' = 3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2}$ , па добијамо  $k_t = y'(1) = 3$ , а

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{3}.$$

Једначине тангенте и нормале су:

$$t: y-3=3(x-1) \Rightarrow y=3x,$$

$$n: y-3=-\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}.$$

22. Одредити реалне параметре  $a$  и  $b$  тако да парабола  $y = x^2 + ax + b$  додирује праву  $y = x$  у тачки  $A(1,1)$ .

**Решење:**

Како тачка  $A(1,1)$  припада графику функције заменом координата тачке у једначину функције добијамо везу  $a+b=0$ .

Дата права  $y = x$  је тангента функције са коефицијентом правца  $k=1$ .

Како је  $y' = 2x + a$ , добијамо  $k = y'(1) = 1$ , тј.  $1 = 2 + a \Rightarrow a = -1$  и  $b = 1$ .

Једначина функције дакле гласи  $y = x^2 - x + 1$ .

23. У којој тачки параболе  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$  њена тангента има коефицијент правца 1.

**Решење:**

Како је  $y' = x - 3$ , а коефицијент правца тангенте је 1, добијамо  $1 = x - 3$ , тј.  $x = 4$ . Како је тачка са апсцисом 4, додирна тачка параболе и тангенте, заменом ове вредности у параболу добијамо ординату додирне тачке  $y = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 0$ . Дакле тражена тачка има координате  $(4,0)$ .

24. У којим тачкама параболе  $y = -x^2 + x + 2$  је њена тангента паралелна  $x$  оси.

**Решење:**

Први извод дате функције је  $y' = -2x + 1$ . Како је тангента паралелна  $x$  оси њен коефицијент правца је 0. Из услова де је  $-2x + 1 = 0$ , добијамо  $x = \frac{1}{2}$ , односно тачка има координате  $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ .

25. Одредити једначину тангенте параболе  $y^2 = 20x$  која са осом  $x$  гради угао од  $\frac{\pi}{4}$ .

**Решење:**

Први извод дате функције је  $2yy' = 20 \Leftrightarrow y' = \frac{10}{y}$ . Како тангента са осом  $x$  гради угао од  $\frac{\pi}{4}$  значи да је  $y' = k_t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$  и  $y = 10$ . Заменом ове вредности у задату функцију добијамо  $x = 5$ . Тражена тангента има једначину  $y = x + 5$ .

26. Одредити тачке у којима су тангенте кривих  $y = x^3 - x - 1$  и  $y = 3x^2 - 4x + 1$  паралелне.

**Резултат:**  $(1, -1)$  и  $(1, 0)$ .

27. Применом диференцијала функције приближно израчунати  $\sin 31^\circ$ .

**Решење:**

Користићемо формулу  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ .

Ако је функција  $f(x) = \sin x$ , тада је  $d(\sin x) = \cos x dx = \cos x \Delta x$ , па је  $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x$ .

За  $x = 30^\circ$ ,  $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$  имамо:

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,515.$$

28. Наћи приближну вредност:

а)  $\sqrt[4]{17}$ ;      б)  $\sqrt[3]{1,02}$ ;      в)  $\sin 29^\circ$ ;      г)  $\operatorname{arctg} 1,05$ .

**Решење:**

а) Ако узмемо да је  $x = 16$ ,  $\Delta x = 1$ ,  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$  и

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \quad f'(2) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32} \text{ добијамо}$$

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 \approx 2,031.$$

б) Ако узмемо да је  $x=1$ ,  $\Delta x=0,02$ ,  $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ,  $f(1)=\sqrt[3]{1}=1$  и

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}}, \quad f'(1) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3} \text{ добијамо}$$

$$\sqrt[3]{1,02} = \sqrt[3]{1+0,02} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,02 \approx 1,0066.$$

в)  $\sin 29^\circ = \sin(30^\circ - 1^\circ) \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,484.$

г)  $\arctg 1,05 = \arctg(1+0,05) \approx \arctg 1 + \frac{0,05}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,81.$

29. Доказати да је:

а)  $\ln 1,01 \approx 0,01$ ; б)  $\sqrt[5]{31} \approx 1,9875$ ; в)  $\arctg 0,98 \approx 0,7754$ ; г)  $\cos 62^\circ \approx 0,469.$

30. Израчунати  $f^{(5)}(0)$ , где је  $f(x) = x^2 e^{2x}$ .

**Решење:**

$$f'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} = 2(x^2 + x)e^{2x};$$

$$f''(x) = 2((2x+1)e^{2x} + 2(x^2+x)e^{2x}) = 2(2x^2 + 4x + 1)e^{2x};$$

$$f'''(x) = 2((4x+4)e^{2x} + 2(2x^2 + 4x + 1)e^{2x}) = 4(2x^2 + 6x + 3)e^{2x};$$

$$f^{(4)}(x) = 4((4x+6)e^{2x} + 2(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}) = 16(x^2 + 4x + 3)e^{2x};$$

$$f^{(5)}(x) = 16((2x+4)e^{2x} + 2(x^2 + 4x + 3)e^{2x}) = 32(x^2 + 5x + 5)e^{2x}.$$

На основу добијеног петог извода налазимо да је  $f^{(5)}(0) = 160.$

Задатак се могао решити применом Лајбницевог формуле:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) g^{(i)}(x).$$

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot e^{2x})^{(5)} &= \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} (x^2)^{(5-i)} \cdot (e^{2x})^{(i)} = \binom{5}{0} (x^2)^{(5)} (e^{2x})^{(0)} + \binom{5}{1} (x^2)^{(4)} (e^{2x})^{(1)} + \\ &+ \binom{5}{2} (x^2)^{(3)} (e^{2x})^{(2)} + \binom{5}{3} (x^2)^{(2)} (e^{2x})^{(3)} + \binom{5}{4} (x^2)^{(1)} (e^{2x})^{(4)} + \binom{5}{5} (x^2)^{(0)} (e^{2x})^{(5)} \\ &= 160e^{2x} + 160x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot 32e^{2x} = 32(5 + 5x + x^2)e^{2x}.\end{aligned}$$

## К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И

Извод функције  
Диференцијал функције  
Правила диференцирања



## 7. ГЛАВА

# *ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА*

### 1. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

### 2. МАКЛОРЕНОВИ РАЗВОЈИ

## ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. Тејлоровој формули,
2. Прoцени грешке у Тејлоровој формули,
3. Маклореновом развоју.

## 7.1. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Код проучавања функција често је потребно израчунати вредност функције за неку вредност независно променљиве  $x = a$ . У неким случајевима то је веома сложено, као код тригонометријских, експоненцијалних или логаритамских функција.

Како су полиноми функције које се најлакше израчунавају, вредност неке функције у тачки може се приближно израчунати апроксимацијом дате функције полиномом.

Ако функцију  $f(x)$  апроксимирамо полиномом  $P(x)$  чинимо неку грешку  $R(x)$ , која износи  $R(x) = f(x) - P(x)$ . Циљ апроксимације је да грешка буде минимална. Апроксимација је боља уколико је тачка  $x$  ближа тачки  $a$ .

Постоје различити поступци апроксимације функције полиномом, а један од њих је Тејлоров полином.

### Тејлорова теорема

B. Taylor (1685-1731)

- Ако је функција  $f(x)$  у некој околини тачке  $a$   $n+1$  - пута диференцијабилна тада је:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где је полином  $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$ ,

а грешка је:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (x, a) \text{ или } c \in (a, x).$$

Ако се узме да је  $c = a + \theta(x-a)$ , где је  $0 < \theta < 1$ , грешка има облик

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Ово је **Лагранжеов облик грешке**.

Полином  $P_n(x)$  се назива **Тејлоров полином** у тачки  $a$ .

■ За случај када је тачка  $a = 0$  добија се **Маклоренов развој**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}.$$

**Пример:**

Развити у Тејлорову формулу функцију  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  по степенима  $x+2$ , односно у околини тачке  $a = -2$ , полиномом другог степена.

$$f(-2) = -1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2) = -1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(-2) = -2,$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \Rightarrow f'''(\theta x) = \frac{-6}{(\theta x+1)^4}, 0 < \theta < 1.$$

Тејлорова формула дате функције гласи:

$$\frac{1}{x+1} = -1 - (x+2) - (x+2)^2 - \frac{(x+2)^3}{(\theta(x+2)-2)^4}, 0 < \theta < 1.$$

**Пример:**

Развити функцију  $f(x) = \sqrt{1+x}$  у Маклоренову формулу за  $n = 2$ , тј. закључно са квадратним чланом.

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(\theta x) = \frac{3}{8}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}, 0 < \theta < 1,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}.$$

## 7.2. МАКЛОРЕНОВИ РАЗВОЈИ НЕКИХ ВАЖНИЈИХ ФУНКЦИЈА

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + (-1)^{k+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}.$$

### Пример:

Апроксимирати функцију  $f(x) = e^x$  Маклореновим полиномом и написати грешку апроксимације.

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x;$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1;$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x, R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

### Пример:

Апроксимирати функцију  $f(x) = \sin x$  Маклореновим полиномом и написати грешку апроксимације.

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f'''(0) = -1,$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left((n-1) \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right).$$

Корисно је уочити да је

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x, \quad f^{(2n)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n.$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

### Пример:

Апроксимирати функцију  $f(x) = (1+x)^\alpha$  Маклореновим полиномом и написати грешку апроксимације.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha,$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2),$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

В. Taylor и С. MacLaurin, Њутнов ученик, дали су развоје чији значај није у потпуности схваћен све док их Ојлер није применио у диференцијалном рачуну.

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Развити у Тејлорову формулу функцију  $f(x) = \sqrt{x}$  по степенима  $x-1$ .

**Решење:**

Како је  $a=1$ , добијамо:

$$f(1)=1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2^2},$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8},$$

$$f^{IV}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}x^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow f^{IV}(1) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4},$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}} \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n}$$

па је:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n n!} (x-1)^n + R_n(x),$$

где је

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1} (n+1)!} c^{-\frac{2n+1}{2}} (x-1)^{n+1},$$

где је  $c$  између  $x$  и  $1$ .

2. Развити функцију  $f(x) = xe^x$  у Маклоренову формулу.

**Решење:**

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = (1+x)e^x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = (2+x)e^x \Rightarrow f''(0) = 2,$$

$$f'''(x) = (3+x)e^x \Rightarrow f'''(0) = 3,$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = n,$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = (n+1+\theta x)e^{\theta x},$$

$$\text{добивамо: } xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{n!} (n+1+\theta x)e^{\theta x}.$$

3. Написати Маклоренов полином трећег степена за функцију  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

**Решење:**

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = \cos^{-2} x \sin x, \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = 2 \cos^{-3} x \sin^2 x + \cos^{-1} x, \quad f''(0) = 1;$$

$$f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \sin^3 x + 5 \cos^{-2} x \sin x, \quad f'''(0) = 0.$$

$$P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

4. Доказати формулу  $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots$

**Решење:**

Посматрајмо функцију  $f(x) = e^{\sin x}$ . Тада је:

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \Rightarrow f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = e^{\sin x} (\cos^3 x - 3\sin x \cos x - \cos x) \Rightarrow f'''(0) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = e^{\sin x} (\cos^4 x - 4\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sin x - 6\sin x \cos^2 x) \Rightarrow f^{IV}(0) = -3.$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots$$

5. Функцију  $f(x) = \ln(1 + \sin x)$  развити у Маклоренов полином четвртог степена.

**Решење:**

$$f(0) = \ln 1 = 0;$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-1}{1 + \sin x} \Rightarrow f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \Rightarrow f'''(0) = 1;$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-\sin x - \sin^2 x - 2\cos x}{(1 + \sin x)^3} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -2;$$

$$\ln(1 + \sin x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}.$$

6. Функцију  $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$  развити у Маклоренов полином четвртог степена.

**Резултат:**  $\ln(1 + x + x^2) \approx x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4.$

7. Функцију  $f(x) = x \sin x$  развити у Маклоренов полином четвртог степена.

**Решење:**

Знајући развој функције  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ , добијамо  $x \sin x \approx x \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) = x^2 - \frac{x^4}{3!}.$

## Израчунавање граничних вредности развојем функција у Тејлорове полиноме

8. Развојем функције  $\sin x$  у Маклоренов ред израчунати  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

**Решење:**

Користећи се развојем функције  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$

добиамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

9. Применом Маклореновог развоја функција  $e^x$ ,  $\sin x$  и  $\cos x$  израчунати граничну вредност  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3}$ .

**Решење:**

Користећи се развојем функција:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots;$$

добиамо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots - x - \frac{x^3}{6} + \dots + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots - 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

10. Применом Маклореновог развоја функција  $e^{x^2}$  израчунати

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}.$$

**Решење:**

Користећи се развојем функције  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  добијамо да је

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

11. Применом Маклореновог развоја функција  $e^{2x}$  и  $\sin x$  израчунати граничну вредност  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3}$ .

**Резултат:**  $\frac{3}{2}$ .

## Процена грешке у Тејлоровој формули

Циљ процене грешке је да се нађе горња граница грешке где  $x$  има дату вредност, а  $\theta \in (0, 1)$ . Код процене грешке обично се користе једноставне неједнакости, тражењем “најгорег случаја” у коме оба фактора достижу максималну апсолутну вредност. Због тога, стварна грешка је знатно мања од процењене.

12. Колика је грешка апроксимације  $\sin x \approx x$ , на интервалу  $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$ ?

**Решење:**

$$\sin x = x + R_2, \text{ где је } R_2 = \frac{x^3}{3!} \cos \theta x.$$

$|R_2| = \left| \frac{x^3}{3!} \cos \theta x \right| < \frac{|x|^3}{6} |\cos \theta x| < \frac{1}{10^3 \cdot 6} < \frac{1}{10^3 \cdot 2}$ , што значи да је грешка на трећој децимали.

- 13.** Апроксимирати функцију  $f(x) = \sin x$  у околини тачке  $a = 0$ , полиномом првог степена, на интервалу  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

**Решење:**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Грешка апроксимације је:

$$|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

За  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , тј.  $|x| < \frac{1}{2}$  и  $n=1$ , добијамо  $|R_2| < \frac{|x|^2}{6} < \frac{1}{2^3 \cdot 6} = 0,21$ .

Према томе, ако се функција  $f(x) = \sin x$  на интервалу  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,

апроксимира полиномом првог степена, чини се грешка која није већа од 0,21. Смањивањем интервала грешка се смањује.

- 14.** Функцију  $f(x) = \ln(x+1)$  развити у Маклоренов полином деветог степена, уз процену грешке за рачунање вредности ове функције на интервалу  $[0,1]$ .

**Решење:**

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)}, f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+1)^n},$$

$$f(0) = \ln 1 = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!.$$

$$\ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^9}{9} + R_9.$$

$$R_9(x) = \frac{-x^{10}}{10(\theta x+1)^{10}}.$$

За  $\theta \in (0,1)$  и  $x \in [0,1]$  имамо процену грешке  $|R_9(x)| < \frac{1}{10}$ .

15. Функцију  $f(x) = \ln(x+1)$  развити у Маклоренов полином четвртог степена, приближно израчунати  $\ln 1,5$  уз процену грешке.

**Решење:**

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^5}.$$

$$\ln 1,5 = \ln(1+0,5) \approx \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} \approx 0,4010.$$

$$|R_4| = \left| \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^5} \right| \leq \frac{|x|^5}{5} \cdot \frac{1}{|1+\theta x|^5} \leq \frac{1}{2^5 \cdot 5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^5} < \frac{1}{2^5 \cdot 5} = 0,00625.$$

16. Апроксимирати функцију  $f(x) = e^x$  Маклореновим полиномом и израчунати приближну вредност броја  $e$  за  $n = 10$ .

**Решење:**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Из ове формуле за  $x = 1$ , добијамо

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2,71828176, \text{ а апсолутна вредност грешка је}$$

$$|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{11!} < \frac{3}{3 \cdot 10^7} = 10^{-7}.$$

Како је грешка у збиру мања од јединице седме децимале и могућа грешка је иста, па је грешка приближне вредности броја  $e$  највише две јединице седме децимале.

$$2,71828176 < e < 2,71828196.$$

17. Апроксимирати функцију  $f(x) = e^x$  Маклореновим полиномом и израчунати приближну вредност броја  $e$  са грешком не већом од  $10^{-9}$ .

**Решење:**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n$ , а апсолутна вредност грешке је

$$|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-9} \Rightarrow (n+1)! > 3 \cdot 10^{-9}.$$

Заменом за  $n=1, 2, 3, \dots$  добијамо да је  $13! > 3 \cdot 10^{-9}$ , што значи да је  $n=12$ .

- 18.** Апроксимирати функцију  $f(x) = e^x$  Маклореновим полиномом, израчунати приближну вредност броја  $\sqrt[3]{e}$  за  $n=2$  и оценити грешку.

**Решење:**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Из ове формуле за  $x = \frac{1}{3}$ , добијамо  $\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{25}{18}$ , а апсолутна вредност

$$\text{грешке је } |R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{e^{\frac{\theta}{3}}}{6} \cdot \frac{1}{27} < \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{54} < 0,1.$$

**КЉУЧНЕ РЕЧИ**

Тејлорова формула  
Маклоренова формула



## 8. ГЛАВА

# *ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА*

1. **ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА**
2. **РОЛОВА ТЕОРЕМА**
3. **КОШИЈЕВА ТЕОРЕМА**
4. **ЛАГРАНЖОВА ТЕОРЕМА**
5. **ЛОПИТАЛОВА ТЕОРЕМА**

## ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. Фермаовој теореме,
2. Роловој теореме,
3. Кошијевој теореме,
4. Лагранжовој теореме,
5. Лопиталовој теореме.

## ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

Међу најважније теореме диференцијалног рачуна спадају теореме о **средњој вредности**. Оне показују да се из саме егзистенције извода функције може много закључити о особинама функције.

### 8.1. ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА

P. Fermat (1601-1665)

- Нека функција  $f(x)$  достиже своју екстремну вредност у некој тачки  $c \in (a, b)$  и нека је диференцијабилна у тачки  $c$ , тада је  $f'(c) = 0$ .

**Доказ:**

Претпоставимо да функција достиже своју највећу вредност у тачки  $c$ .

Тада је  $f(c) \geq f(c + \Delta x)$ , па за довољно мало  $\Delta x > 0$  имамо

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_+(c) \leq 0.$$

За довољно мало  $\Delta x < 0$ , имамо

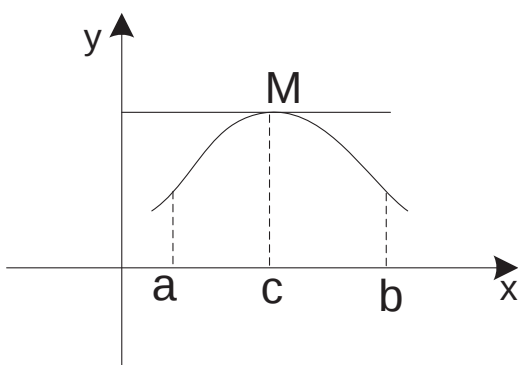
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_-(c) \geq 0, \text{ тј. } f'(c) = 0.$$

Слично се доказује за најмању вредност функције.

- Геометријско тумачење Фермаове теореме:**

Како је  $f'(c) = 0$ , то значи да је  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , тј  $\alpha = 0$ , где је  $\alpha$  угао који тангента у тачки  $M(c, f(c))$  функције заклапа са  $x$  осом.

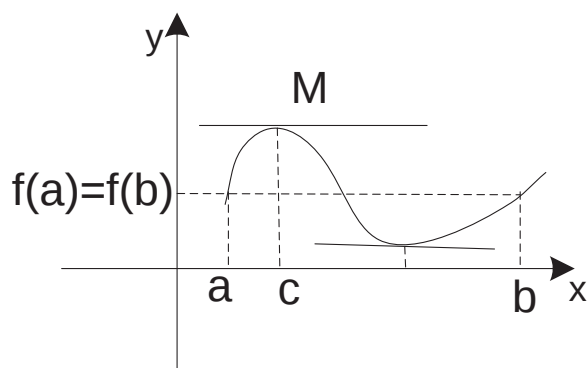
То значи да ако диференцијабилна функција у тачки  $c \in (a, b)$  достиже своју највећу или најмању вредност, онда је тангента на дату криву у тачки  $M(c, f(c))$  паралелна са  $x$  осом.



## 8.2. РОЛОВА ТЕОРЕМА

M. Rolle (1652-1719)

- Нека је функција  $f(x)$  дефинисана на  $[a, b]$ . Ако је  $f(x)$  непрекидна на  $[a, b]$ , диференцијабилна на  $(a, b)$ , и  $f(a) = f(b)$ , тада постоји бар једна тачка  $c \in (a, b)$ , таква да је  $f'(c) = 0$ .



**Доказ:**

Претпоставимо да је  $f(x) \neq \text{const}$ . Пошто је функција  $f(x)$  непрекидна на затвореном интервалу  $[a, b]$ , она мора на том интервалу бити и ограничена и постоје најмања вредност  $m$  и највећа вредност  $M$  функције

$f(x)$  на  $[a, b]$ . Пошто је  $m < M$ , онда мора да се барем једна од вредности  $m$ ,  $M$  може достићи у некој тачки  $c \in (a, b)$ , јер је  $f(a) = f(b)$ , одакле по Фермаовој теореме закључујемо да је  $f'(c) = 0$ .

Тврђење ове теореме је интуитивно јасно, јер ако функција  $f(x)$  има исту вредност на крајевима интервала  $[a, b]$ , тј.  $f(a) = f(b)$ , тада сигурно постоји тачка  $c \in (a, b)$ , таква да је тангента на криву  $f(x)$  у тачки  $c$  паралелна са осом  $Ox$ .

### Пример:

Доказати да функција  $f(x) = x^3 - 4x + 1$  на интервалу  $[-2, 2]$  испуњава услове Ролове теореме и одредити одговарајућу вредност независно променљиве  $c$ .

Дата функција је дефинисана за  $\forall x \in \mathbb{R}$ , па је дефинисана и непрекидна и на интервалу  $[-2, 2]$ .

Како је  $f'(x) = 3x^2 - 4$ , закључујемо да је  $f(x)$  диференцијабилна на интервалу  $(-2, 2)$ .

Како је  $f(-2) = f(2) = 1$  то значи да функција испуњава услове Ролове теореме.

Дакле, постоји бар једна тачка  $c \in (-2, 2)$  такав да је  $f'(c) = 0$ .

Решавањем једначине  $f'(c) = 3c^2 - 4 = 0$  добијамо  $c_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Како обе вредности припадају интервалу  $(-2, 2)$ , закључујемо да постоје две тачке које припадају датом интервалу за које је  $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ .

## 8.3. КОШИЈЕВА ТЕОРЕМА



A. Cauchy (1789-1857)

- Нека су функције  $f(x)$  и  $g(x)$  дефинисане на  $[a, b]$ . Ако су  $f(x)$  и  $g(x)$  непрекидне на  $[a, b]$ ,  
диференцијабилне на  $(a, b)$ , и  
 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ ,  
тада постоји бар једна тачка  $c \in (a, b)$  таква да је  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

**Доказ:**

Уочимо помоћну функцију

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] f(x),$$

која је непрекидна на  $[a, b]$  и диференцијабилна на  $(a, b)$ .

Како је  $F(a) = F(b)$ , по Роловој теореме постоји тачка  $c \in (a, b)$  таква да је

$$F'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c) = 0, \text{ одакле је}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ и } g(b) - g(a) \neq 0.$$

## 8.4. ЛАГРАНЖОВА ТЕОРЕМА



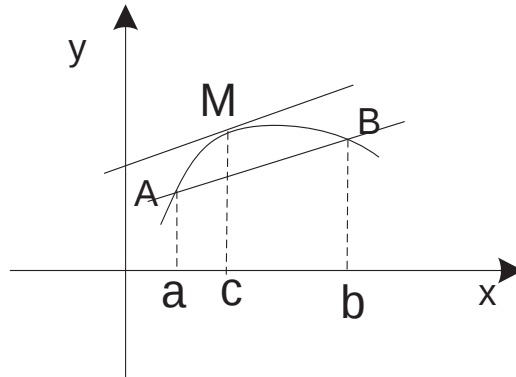
J. Lagrange (1736-1813)

- Нека је функција  $f(x)$  дефинисана на  $[a, b]$ . Ако је:  
непрекидна на  $[a, b]$ ,  
диференцијабилна на  $(a, b)$ ,  
тада постоји бар једна тачка  $c \in (a, b)$  таква да је

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

**Доказ:**

Лагранжева теорема је специјалан случај Кошијеве теореме коју добијамо када ставимо да је функција  $g(x) = x$ .



Геометријско тумачење Лагранжеве теореме је да постоји тачка  $M(c, f(c))$ ,  $c \in (a, b)$  у којој је тангента графика функције паралелна са сечицом  $AB$ , чији је

коэффициент правца  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Пример:**

Одредити тачку  $c$  функције  $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$  која припада интервалу  $(0, 1)$  у којој је тангента паралелна са сечицом која пролази кроз крајеве задатог интервала.

Функција  $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$  је дефинисана и непрекидна за све  $x \in \mathbb{R}$ , па је дефинисана и непрекидна и на интервалу  $[0, 1]$ .

Како је  $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$ , функција је диференцијабилна за свако  $x \in \mathbb{R}$ , па и за  $x \in (0, 1)$ .

На основу Лагранжове теореме имамо

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c), c \in (0,1), \text{ односно } 1=12c^2-24c+9 \text{ или } 3c^2-6c+2=0.$$

Одавде је  $c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$ . Како  $\frac{3-\sqrt{3}}{3} \in (0,1)$ , а  $\frac{3+\sqrt{3}}{3} \notin (0,1)$ , тражена

вредност је  $c = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ .

## 8.5. ЛОПИТАЛОВА ТЕОРЕМА



G. F. A. de l'Hospital (1661-1704)

- Ако су функције  $f(x)$  и  $g(x)$  диференцијабилне у некој околини тачке  $a$ , при чему је  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  или  $(\pm\infty)$  и  $g'(a) \neq 0$ , тада је:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказ:**

Докажимо теорему само у случају “ $\frac{0}{0}$ ”.

Како је  $f(a) = g(a) = 0$ , важи  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ .

На основу Кошијеве теореме тада постоји бар једна тачка  $c$  таква да је

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ тј. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ одакле добијамо } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Ако функције  $f(x)$  и  $g(x)$  имају  $n$ -те изводе који су непрекидни у тачки  $x=a$  и ако је

$$f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0 \text{ и } g^{(n)}(a) \neq 0,$$

онда је 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

**Напомена:** У случају неодређености типа “ $0 \cdot \infty$ ” и “ $\infty - \infty$ ”, функција се мора трансформисати у облик “ $\frac{0}{0}$ ” или “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, па затим применити Лопиталова теорема. У случају неодређености “ $0^0$ ”, “ $1^\infty$ ” или “ $\infty^0$ ”, функција се прво логаритмује чиме се своди на један од поменутих случајева.

**Пример:** Применом Лопиталове теореме одредити граничне вредности:

а) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$$

б) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - 2 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{x}}{2x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$$

в) 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = 0. \end{aligned}$$

г) 
$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

д) 
$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} x} = e^0 = 1.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Испитати да ли функција  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  на интервалу  $[-1, 1]$  испуњава услове Ролове теореме.

**Решење:**

Дата функција је дефинисана и непрекидна за  $\forall x \in \mathbb{R}$ , па према томе и на интервалу  $[-1, 1]$ .

Осим тога испуњено је  $f(-1) = f(1) = 1$ .

Како је  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ , једначина  $f'(x) = 0$  нема решења.

Не постоји вредност  $c \in [-1, 1]$  за које би  $f'(c) = 0$ . Овај закључак није у супротности са Роловом теоремом јер функција није диференцијабилна у тачки  $x = 0$ .

2. Доказати да једначина  $4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$  има бар једно решење на интервалу  $(0, 1)$ .

**Решење:**

Уочимо функцију  $y = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ . Ова функција је дефинисана и непрекидна на  $[0, 1]$ . Поред тога  $f(0) = f(1) = 0$ . Према томе, на основу Ролове теореме постоји тачка  $c \in (0, 1)$  таква да је  $f'(c) = 0$ .

Како је  $y' = 12x^2 - 6x - 2$ ,  $6c^2 - 3c - 1 = 0 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{35}}{12}$ .

Тачка  $c_1 = \frac{3 + \sqrt{35}}{12} \in (0, 1)$  и та вредност је решење једначине.

3. Доказати да важи Лагранжова теорема за функцију  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ,  $x \in [0, 3]$  и одредити одговарајуће  $c$ .

**Решење:**

Дата функција је дефинисана и непрекидна за  $x \neq -1$ , а то значи и за  $x \in [0, 3]$ . Како је  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ , биће  $f(x)$  диференцијабилна за све  $x \neq -1$  па дакле и за  $x \in (0, 3)$ .

На основу Лагранжове теореме постоји  $c \in (0, 3)$ , тако да је

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c), \text{ односно } \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{3} = \frac{2}{(c+1)^2}. \text{ Решења ове једначине су}$$

$c_1 = -3, c_2 = 1$  па како  $-3 \notin (0, 3)$ , биће  $c_2 = 1$  тражена вредност.

4. Написати Лагранжову формулу за функцију  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ , за  $x \in [1, 3]$  и одредити  $c$ .

**Решење:**

Дата функција је непрекидна за све  $x \in \mathbb{R}$  па и на  $[1, 3]$ . Она је диференцијабилна за све  $x \in \mathbb{R}$ , па и на  $(1, 3)$ . Како је  $f(1) = -7, f(3) = -27$ , на основу Лагранжове теореме постоји бар један  $c \in (1, 3)$  такав да је

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c), \text{ односно } \frac{-20}{2} = f'(c).$$

Како је  $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$ , биће  $-10 = 3c^2 - 10c - 3$ , или  $3c^2 - 10c + 7 = 0$ .

Решења ове једначине су  $c_1 = 1, c_2 = \frac{7}{3}$ . Како је  $1 \notin (1, 3), \frac{7}{3} \in (1, 3)$ , тражена вредност је  $c = \frac{7}{3}$ .

5. Написати Лагранжову формулу за функцију  $f(x) = \sqrt{x}$  на одсечку  $[1, 4]$  и одредити  $c$ . Објаснити и геометријски.

**Решење:**

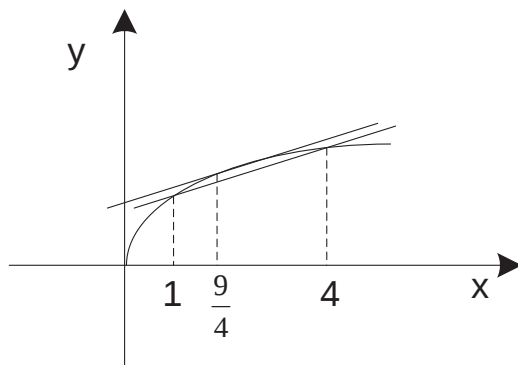
Дата функција је дефинисана и непрекидна  $x \in [1, 4]$ . Извод  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  је такође дефинисан за  $x \in (1, 4)$ .

Значи  $f(x)$  је диференцијабилна на  $(1, 4)$ , па према Лагранжовој теореме

важи једнакост  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c), c \in (1, 4)$ .

$$f(4) = 2, f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ па је } \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \Leftrightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow c = \frac{9}{4}.$$

С обзиром да  $\frac{9}{4} \in (1, 4)$ , то је тражена вредност  $c$ .



Геометријски гледано, постоји тангента која је паралелна са сечицом функције која пролази кроз тачке  $(4, 2)$ ,  $(1, 1)$  и њена додирна тачка има апсцису  $\frac{9}{4}$ .

Применом Лопиталове теореме одредити граничне вредности:

**Неодређеност типа** “ $\frac{0}{0}$ ” или “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”.

$$6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 5}{2x^2 + 6x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 5}{2x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 8}{4x + 6} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot e^{2x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^{2x}}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot e^{2x}}{6} = \infty;$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}}{2x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = -\frac{1}{4}.$$

$$7. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{\cos x} = a - b;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 2e^{2x} - 2 - 4x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 4e^{2x} - 4}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 8e^{2x}}{6} = \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{в)} 2;$$

г)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{6}$$

$$8. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\cos x \cdot \sin 2x}{\sin x \cdot \cos 2x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{2 \cos 2x}{\cos x} = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + \sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + \sin x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + \cos x}{2 \cos 2x} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Неопређеност типа “ $\infty - \infty$ ”.**

$$\begin{aligned} \text{9. а)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right); \\ \text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right); \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right). \end{aligned}$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x^2 \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \cos x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x} = \infty;$$

$$\text{в)} \infty; \quad \text{г)} -1.$$

**Неопређеност типа “ $0 \cdot \infty$ ”.**

$$10. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0;$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2};$$

в)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \sin \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} (1-e^{2x}) \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{2x}}{\sin x} \cdot \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{2x}}{\cos x} = -2.$$

Неопређеност типа “ $0^0$ ”, “ $1^\infty$ ” или “ $\infty^0$ ”.

$$11. \quad \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\sin x}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} x)^x.$$

Решење:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|\cos x|}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1;$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \sin x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\sin^{-1} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin^2 x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} 2 \sin x \cos x} = e^0 = 1;$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\operatorname{arctg} x)^x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(\operatorname{arctg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x^2}{1+x^2}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Фермаова теорема

Ролова теорема

Кошијева теорема

Лагранжова теорема

Лопиталова теорема



## 9. ГЛАВА

# *ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ИЗВОДА*

1. **МОНОТОНОСТ ФУНКЦИЈЕ**
2. **ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ**
3. **КОНВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ  
ФУНКЦИЈЕ**
4. **ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ ФУНКЦИЈЕ**
5. **ИСПИТИВАЊЕ ТОКА ФУНКЦИЈЕ**

### ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. монотоности функције,
2. екстремним вредностима функције,
3. конвексности и конкавности функције,
4. превојним тачкама функције,
5. испитивању тока функције.

# ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ИЗВОДА

## 9.1. МОНОТОНОСТ ФУНКЦИЈЕ

■ Нека је функција  $f(x)$  непрекидна на  $[a, b]$ , а диференцијабилна на  $(a, b)$ .

Тада, ако је за  $\forall x \in (a, b)$ :

$f'(x) \geq 0$ , функција је **растућа**,

$f'(x) \leq 0$ , функција је **опадајућа**,

$f'(x) > 0$ , функција је **строго растућа**,

$f'(x) < 0$ , функција је **строго опадајућа**.

**Доказ:**

Нека је за  $\forall x \in (a, b)$  испуњено  $f'(x) \geq 0$ . Узмемо произвољне вредности  $x_1, x_2$  такве да је  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ .

На основу Лагранжове теореме имамо:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2), \text{ за неко } x_1 < x_0 < x_2.$$

Знајући да је  $x_1 - x_2 < 0$  и  $f'(x) \geq 0$ , добијамо да је  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , тј. функција  $f(x)$  је растућа.

Доказ у преосталим случајевима је идентичан.

**Пример:** Испитати монотоност следећих функција:

**а)**  $f(x) = x^3$ ;    **б)**  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;    **в)**  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .

**а)** Извод функције  $f(x) = x^3$  је  $f'(x) = 3x^2$ . Како је  $f'(x) \geq 0$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$ , функција је растућа.

б) Извод функције  $f(x) = \frac{1}{x}$  је  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Како је  $f'(x) < 0$  за  $\forall x \in D_x$ , функција је опадајућа.

в) Извод функције  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  је  $f'(x) = 2x - 2$ . Како је  $f'(x) \geq 0$  за  $x > 1$ , а  $f'(x) < 0$  за  $x < 1$ , закључујемо да је функција је растућа за  $x > 1$ , а опадајућа за  $x < 1$ .

**Пример:** Доказати да функција  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  опада на интервалу  $(-2, 1)$ .

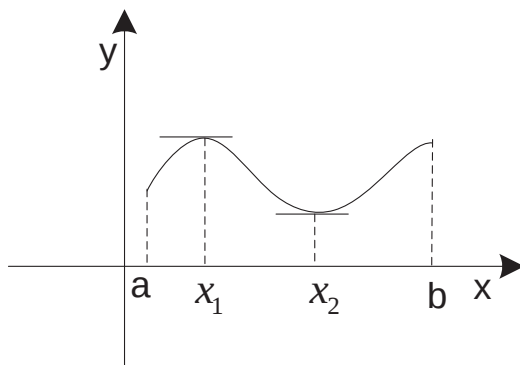
$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x - 1)(x + 2).$$

Нуле првог извода су  $x = -2$ ,  $x = 1$ .

За  $x = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$  добијамо  $y' > 0$  и функција расте, а за  $x = (-2, 1)$   $y' < 0$  и функција опада.

## 9.2. ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

- Функција  $f(x)$  дефинисана на  $(a, b)$  имаће максимум у тачки  $x_1 \in (a, b)$  ако и само ако је  $f(x) < f(x_1)$  за свако  $x$  које припада некој околини тачке  $x_1$ , а имаће **минимум** у тачки  $x_2 \in (a, b)$  ако и само ако је  $f(x) > f(x_2)$  за свако  $x$  које припада некој околини тачке  $x_2$ .



- Максимум и минимум функције  $f(x)$  називају се **екстремним вредностима** дате функције.

**Напомена:** Претходне две дефиниције односе се на тзв. **локални максимум** и **минимум**, који су везани за неку довољно малу околину датих тачака. Овако дефинисани максимум и минимум, не морају истовремено представљати највећу или најмању вредност дате функције на целом интервалу  $[a, b]$ .

- **Потребан услов за екстрем:**

Ако диференцијабилна функција  $f(x)$  има у тачки  $x = x_1$  екстрем (максимум или минимум), тада је у тој тачки  $f'(x_1) = 0$ .

Из наведеног услова следи да, ако је функција  $f(x)$  диференцијабилна, тада она може имати екстремум само у тачкама у којима је њен извод једнак нули; обратан закључак не важи. Наиме, ако је  $f'(x) = 0$ , не мора значити да та тачка представља екстрем функције.

С друге стране функција може имати екстремум и у тачкама у којима не постоји њен извод (тј. у тачкама у којима изводна функција има прекид).

- Тачке у којима функција  $f(x)$  нема извод, као и тачке у којима је  $f'(x) = 0$ , називају се **критичне тачке** функције  $f(x)$ .
- **Функција може имати екстрем само у својим критичним тачкама**, док свака критична тачка не мора бити тачка екстрема функције.

**Пример:** Одредити екстреме функције  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ .

Извод функције је  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ . Мада је  $f'(x) \neq 0$ , а  $f'(x) > 0$  за  $x > 0$  и  $f'(x) < 0$  за  $x < 0$ , закључујемо да функција има минимум у тачки  $x = 0$ .

- Тачке у којима је  $f'(x) = 0$  називају се **стационарним тачкама**.
- **Довољан услов за екстрем:** Нека је функција  $f(x)$  непрекидна у неком интервалу који садржи критичну тачку  $x_1$  тог интервала и диференцијабилна у том интервалу. Ако је:

$f'(x) > 0$  за  $x < x_1$  и  $f'(x) < 0$  за  $x > x_1$ , тада је  $f(x_1) = \max f(x)$ ;

$f'(x) < 0$  за  $x < x_1$  и  $f'(x) > 0$  за  $x > x_1$ , тада је  $f(x_1) = \min f(x)$ .

**Напомена:** Предходна теорема каже да ако изводна функција  $f'(x)$  мења знак при проласку кроз тачку  $x_1$  тада функција  $f(x)$  има екстрем у тачки  $x_1$ .

**При испитивању екстрема функције  $f(x)$  помоћу првог извода одређујемо:**

1.  $f'(x)$ ,
2. стационарне тачке  $f'(x) = 0$  и тачке прекида изводне функције  $f'(x)$ ,
3. знак извода  $f'(x)$  са обе стране критичних тачака,
4. вредност функције  $f(x)$  за сваку од критичних тачака.

### 9.3. ОДРЕЂИВАЊЕ ЕКСТРЕМА ФУНКЦИЈЕ ПОМОЋУ ИЗВОДА ВИШЕГ РЕДА

- Претпоставимо да је  $f'(x_1) = 0$  и да је  $f''(x)$  непрекидна функција у некој околини тачке  $x_1$ . Ако је:

$f''(x_1) < 0$  тада функција  $f(x)$  има максимум у тачки  $x_1$ ,  $f(x_1) = \max f(x)$ ;

$f''(x_1) > 0$ , тада функција  $f(x)$  има минимум у тачки  $x_1$ ,  $f(x_1) = \min f(x)$ .

**Пример:** Одредити екстреме функције  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ .

Први извод функције је  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ . Нуле извода су  $x = 3$ ,  $x = -1$ .

Други извод функције је  $f''(x) = 6x - 6$ .

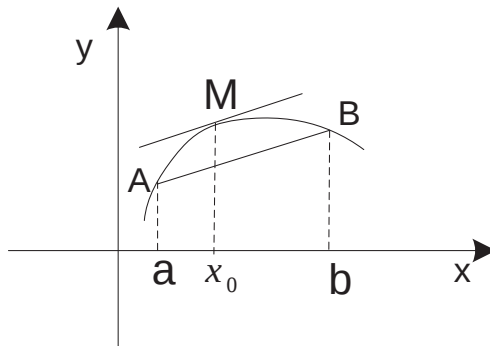
Како је  $f''(3) = 12 > 0$ , а  $f''(-1) = -12 < 0$ , функција за  $x = 3$  има минимум

$f_{\min} = f(3) = -22$ , а за  $x = -1$  има максимум  $f_{\max} = f(-1) = 10$ .

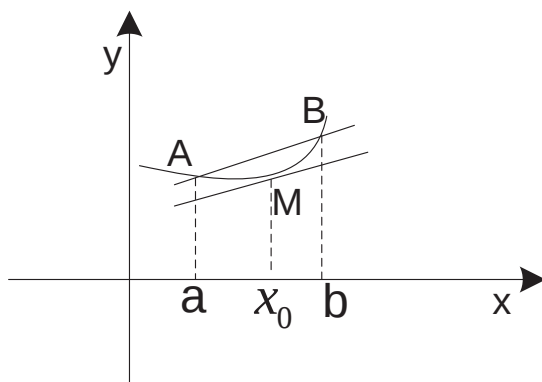
- Претпоставимо да је функција  $f(x)$   $(n+1)$  пута диференцијабилна у некој околини своје стационарне тачке и нека је  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ , а  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ . Тада:
  1. ако је  $n$  непаран број и  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ , функција  $f$  има у тачки  $x_0$  **максимум**;
  2. ако је  $n$  непаран број и  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ , функција  $f$  има у тачки  $x_0$  **минимум**;
  3. ако је  $n$  паран број функција  $f$  **нема** у тачки  $x_0$  **екстрем**.

## 9.4. КОНВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- За функцију  $f(x)$  се каже да је **конкавна** на  $(a, b)$  ако све тачке функција леже испод било које њене тангенте на том интервалу.



- Крива  $f(x)$  је **конвексна** на  $(a, b)$  ако све њене тачке леже изнад произвољне тангенте на интервалу.



- Нека је функција  $f(x)$  два пута диференцијабилна на  $(a, b)$ .  
Ако је за  $\forall x \in (a, b)$ ,  $f''(x) \geq 0$ , тада је функција **конвексна** на  $(a, b)$ .  
Ако је  $\forall x \in (a, b)$ ,  $f''(x) \leq 0$ , тада је функција **конкавна** на  $(a, b)$ .

## 9.5. ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

- **Преводна тачка** криве  $f(x)$  назива се тачка која раздваја конвексни и конкавни део криве. (тангента у тој тачки постоји и пресеца дату криву јер је са једне стране преводне тачке изнад, а са друге стране испод дате криве).
- **Потребан услов за постојање преводне тачке:**  
Ако је  $x = x_0$  преводна тачка функције  $f(x)$ , онда или  $f''(x_0)$  не постоји или је  $f''(x_0) = 0$ .
- **Довољан услов за постојање преводне тачке:**  
Ако је функција  $f(x)$  два пута диференцијабилна на  $(a, b)$ , а при проласку кроз тачку  $x_0 \in (a, b)$  други извод  $f''(x)$  мења знак, тада је тачка  $(x_0, f(x_0))$  **преводна тачка**.

**Пример:** Одредити преводне тачке функције  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ .

Први звод функције је  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ . Други извод функције је  $f''(x) = 6x - 6$ .

$f''(x) = 0$  за  $x = 1$ . За  $x > 1$ ,  $f''(x) > 0$  и у тој области функција је конвексна, а за  $x < 1$ ,  $f''(x) < 0$  и у тој области функција је конкавна. Превојна тачка је  $(1, -6)$ .

## 9.6. ИСПИТИВАЊЕ ТОКА ФУНКЦИЈЕ

Користећи изложену теорију можемо једноставније и потпуније да испитамо особине и нацртамо график функције.

Испитивање функција обављаћемо кроз следеће кораке:

1. Одређивање домена функције;
2. Одређивање нула и испитивање знака функције;
3. Испитивање парности односно непарности и периодичности функције;
4. Испитивање понашања функције на крајевима области дефинисаности и одређивање асимптота функције;
5. Испитивање монотоности и одређивање екстрема функције применом првог извода функције;
6. Испитивање конвексности и одређивање превоја функције применом другог извода функције;
7. Скицирање графика функције.

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Испитати и графички приказати следеће функције:

1. а)  $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ ;      б)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ ;  
     в)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ ;    г)  $y = x^2(3 - x)$ .

**Решење:**

а)

Домен:  $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$ .

Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$ .

**Пресек са у осом:** Функција сече  $y$  - осу у координатном почетку.

**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y < 0$ , за  $x \in (0, \infty)$ ,  $y > 0$ .

**Асимптоте:** Функција нема асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = 3x^2 + 12x + 9$  за  $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$ .

|                                      | $(-\infty, -3)$ | $(-3, -1)$ | $(-1, \infty)$ |
|--------------------------------------|-----------------|------------|----------------|
| $\operatorname{sgn}(3x^2 + 12x + 9)$ | -               | +          | -              |
| $\operatorname{sgn} y'$              | -               | +          | -              |
| $y$                                  | $\searrow$      | $\nearrow$ | $\searrow$     |

За  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$   $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

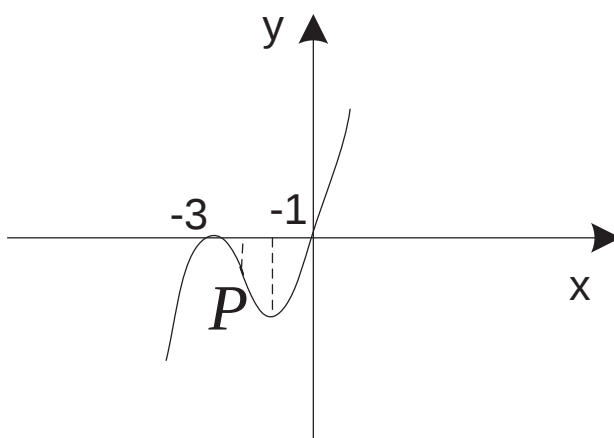
За  $x \in (-3, -1)$   $y' > 0$  и  $y \nearrow$ .

$$y_{\min}(-3) = 0, y_{\max}(-1) = -4.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = 6x + 12$ .  $y'' = 0$  за  $x = -2$ .

За  $x \in (-\infty, -2)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in (-2, \infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ .

$y(-2) = -2$ , функција има превојну тачку  $P(-2, -2)$ .



б)

**Домен:**  $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Нуле функције:** Функција нема реалних нула.

**Пресек са у осом:** Функција сече  $y$  - осу у тачки  $(0, 3)$ .

**Знак функције:**  $y > 0$  за  $\forall x \in D_x$ .

**Парност, непарност:**  $y(x) = y(-x)$  функција је парна.

**Асимптоте:** Функција нема асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

за  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$ .

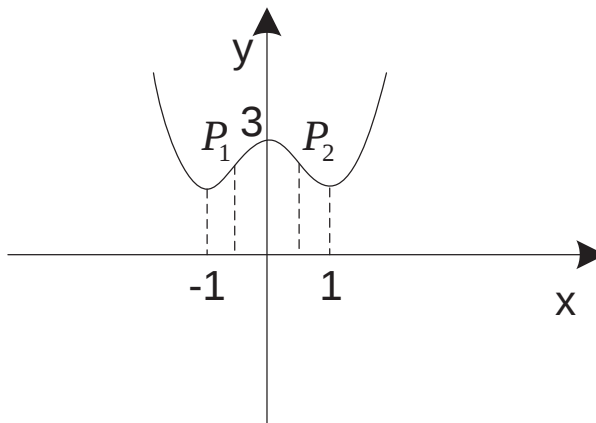
|                               | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$  | $(0, 1)$   | $(1, \infty)$ |
|-------------------------------|-----------------|------------|------------|---------------|
| $\operatorname{sgn}(x^2 - 1)$ | +               | -          | -          | +             |
| $\operatorname{sgn}(x)$       | -               | -          | +          | +             |
| $\operatorname{sgn} y'$       | -               | +          | -          | +             |
| $y$                           | $\searrow$      | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$    |

$$y_{\max}(0) = 3, y_{\min}(\pm 1) = 2.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = 12x^2 - 4$ .  $y'' = 0$  за  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

|                                 | $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ |
|---------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\operatorname{sgn}(12x^2 - 4)$ | +                                           | -                                                      | +                                         |
| $\operatorname{sgn} y''$        | +                                           | -                                                      | +                                         |
| $y$                             | $\cup$                                      | $\cap$                                                 | $\cup$                                    |

$$y\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{22}{9}, \text{ функција има две превојне тачке } P_{1/2}\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9}\right).$$



в)

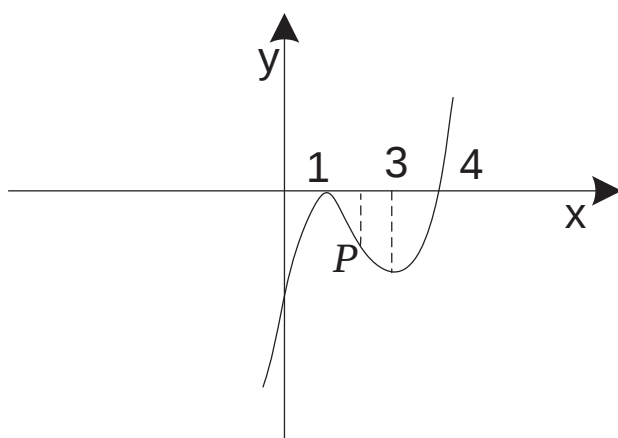
Домен:  $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$ .Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$ .Пресек са  $y$  осом: Функција сече  $y$  - осу у тачки  $(0, -4)$ .Знак функције: За  $x \in (-\infty, 4)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (4, \infty)$ ,  $y > 0$ .Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$  функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

 $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$  за  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$ .

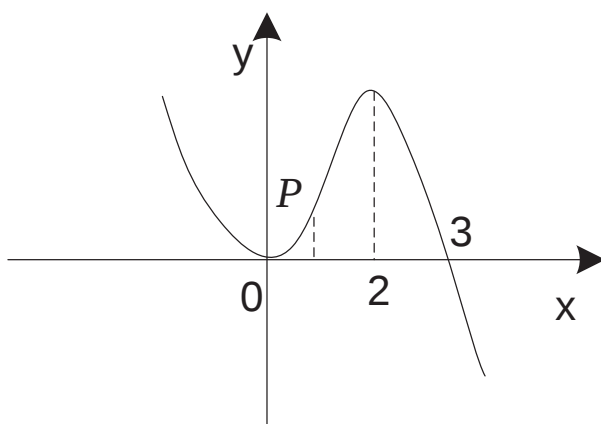
|                            | $(-\infty, 1)$ | $(1, 3)$   | $(3, \infty)$ |
|----------------------------|----------------|------------|---------------|
| $\text{sgn}(x^2 - 4x + 3)$ | +              | -          | +             |
| $\text{sgn } y'$           | +              | -          | +             |
| $y$                        | $\nearrow$     | $\searrow$ | $\nearrow$    |

 $y_{\max}(1) = 0$ ,  $y_{\min}(3) = -4$ .Конвексност, конкавност и превојне тачке:  $y'' = 6x - 12$ .  $y'' = 0$  за  $x = 2$ .За  $x \in (-\infty, 2)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in (2, \infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ . $y(2) = -2$ , функција има превојну тачку  $P(2, -2)$ .



г)

Домен:  $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$ .Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$ .Пресек са  $y$  осом: Функција сече  $y$  - осу у тачки  $(0, 0)$ .Знак функције: За  $x \in (-\infty, 3)$   $y > 0$ , а за  $x \in (3, \infty)$   $y < 0$ .Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$  функција нема асимптота.Интервали монотоности и екстремне вредности:  $y' = 6x - 3x^2$  за  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ .За  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in (0, 2)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$   
 $y_{\max}(2) = 4$ ,  $y_{\min}(0) = 0$ .Конвексност, конкавност и превојне тачке:  $y'' = 6 - 12x$ .  $y'' = 0$  за  $x = \frac{1}{2}$ .За  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ . $y(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$ , функција има превојну тачку  $P(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ .



2. а)  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ ;      б)  $y = \frac{3}{x^2-1}$ ;      в)  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ ;  
 г)  $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ ;      д)  $y = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$ .

**Решење:**

**а)**

**Домен:**  $1+x^2 > 0$ ,  $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Парност, непарност:**  $y(x) = -y(-x)$  функција је непарна.

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

**Пресек са у осом:** Функција сече  $y$  - осу у координатном почетку.

**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (0, \infty)$ ,  $y > 0$ .

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$  па је  $y = 0$  ( $x$ -оса) хоризонтална асимптота функције.

Других асимптота функција нема.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1.$$

|                             | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$  | $(1, \infty)$ |
|-----------------------------|-----------------|------------|---------------|
| $\operatorname{sgn}(1-x^2)$ | -               | +          | -             |
| $\operatorname{sgn} y'$     | -               | +          | -             |
| $y$                         | $\searrow$      | $\nearrow$ | $\searrow$    |

$$y_{\min}(-1) = -1, y_{\max}(1) = 1.$$

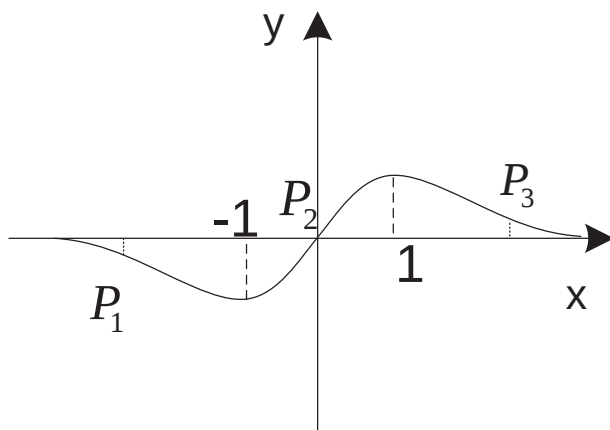
**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3},$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}.$$

|                               | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3}, 0)$ | $(0, \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3}, \infty)$ |
|-------------------------------|------------------------|------------------|-----------------|----------------------|
| $\operatorname{sgn}(x)$       | -                      | -                | +               | +                    |
| $\operatorname{sgn}(x^2 - 3)$ | +                      | -                | -               | +                    |
| $\operatorname{sgn} y''$      | -                      | +                | -               | +                    |
| $y$                           | $\cap$                 | $\cup$           | $\cap$          | $\cup$               |

$y(0) = 0, y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, y(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$  Функција има три превојне тачке

$$P_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0, 0), P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



**б)**

**Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$

**Парност, непарност:**  $y(x) = y(-x)$  функција је парна.

**Нуле функције:** Функција нема нуле.

**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), y > 0$ , а за  $x \in (-1, 1)$   $y < 0$ .

**Парност, непарност:**  $y(x) = y(-x)$ , функција је парна.

**Асимптоте функције:**

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3}{x^2-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3}{x^2-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{3}{x^2-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{3}{x^2-1} = +\infty.$$

Праве  $x = \pm 1$  су вертикалне асимптоте функције.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , па је права  $y = 0$ , тј.  $x$  - оса хоризонтална асимптота функције.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

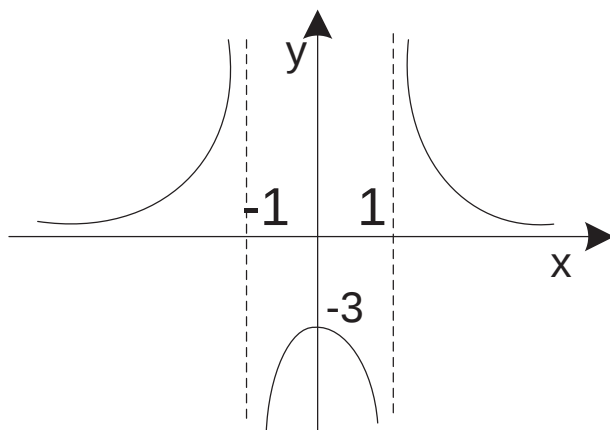
За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in (0, +\infty)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

$$y_{\max}(0) = -3$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$

За  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (-1, 1)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

Функција нема превојне тачке.



**в)**

**Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

**Пресек са осом:**  $y(0) = -1.$

**Знак функције:** За  $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,  $y > 0$ , а за  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ,  $y < 0$ .

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$  па је права  $y = 0$  хоризонтална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow 1\pm} y = +\infty$ , па је права  $x = 1$  вертикална асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

За  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in (0, 1)$ ,  $y' < 0$  и  $y \nearrow$ .

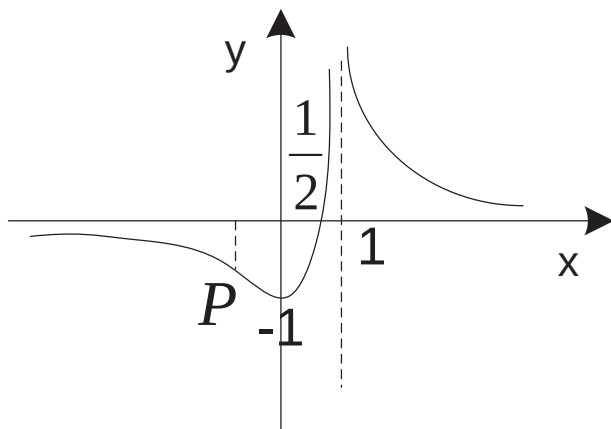
$$y_{\min}(0) = -1.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ .

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

За  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ .  $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$ .

Превојна тачка функције је тачка  $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$ .



г)

**Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**Парност, непарност:**  $y(x) = y(-x)$  функција је парна.

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ .

**Пресек са у осом:**  $y(0) = 4$ .

**Знак функције:**

|                       | $(-\infty, -2)$ | $(-2, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|-----------------------|-----------------|------------|-----------|----------|---------------|
| $\text{sgn}(x^2 - 4)$ | -               | +          | +         | +        | -             |
| $\text{sgn}(x^2 - 1)$ | -               | -          | +         | -        | -             |
| $y$                   | +               | -          | +         | -        | +             |

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$  па је права  $y = 1$  хоризонтална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = -\infty$  па су праве  $x = \pm 1$  вертикалне асимптоте.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

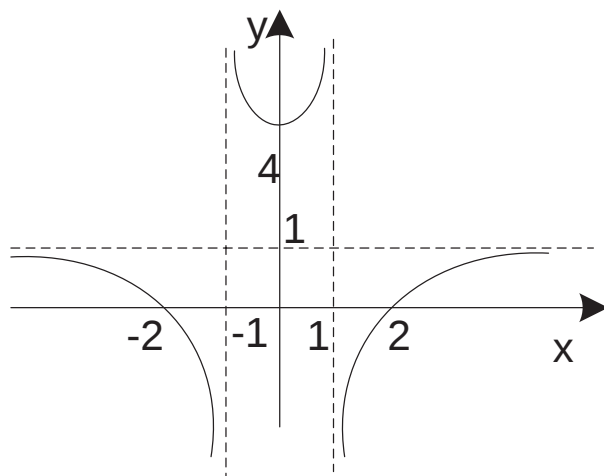
За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in (0, +\infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ .

$$y_{\min}(0) = 4.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{-6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$ .

За  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in (-1, 1)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ .

Функција нема превојне тачке.



д)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ .Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$ .Пресек са  $y$  осом: Функција не сече  $y$  - осу.Знак функције: За  $x \in (-1, 0) \cup (2, 3)$ ,  $y > 0$ , за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$ ,  $y < 0$ .Парност непарност:  $y(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) - 3}{2(-x) - (-x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{-2x - x^2} \neq y(x) \neq -y(x)$ .

Функција није ни парна ни непарна.

Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -1$  па је  $y = -1$  хоризонтална асимптота. $\lim_{x \rightarrow 0-} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2-} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+} y = +\infty$  па су  $x = 0$  и  $x = 2$  вертикалне асимптоте.Интервали монотоности и екстремне вредности:  $y' = \frac{6(1-x)}{(2x-x^2)^2}$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

За  $x \in (-\infty, 1)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in (1, +\infty)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

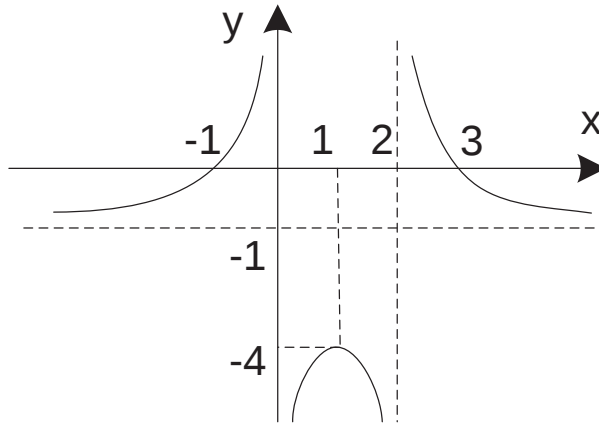
$$y_{\max}(1) = -4.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке:  $y'' = \frac{-6(3x^2 - 6x + 4)}{(2x - x^2)^3}$

За  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (0, 2)$ ,  $y' < 0$  и  $y \cap$ .

Функција нема превојне тачке.

На основу добијених података график дате функције је:



3. а)  $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3};$

б)  $y = \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2};$

в)  $y = \frac{x+1}{x^3};$

г)  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$

**Решење:**

а)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty).$

Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 - \sqrt{6} \vee x_2 = 3 + \sqrt{6}.$

Знак функције:

|                            | $(-\infty, 3 - \sqrt{6})$ | $(3 - \sqrt{6}, 3)$ | $(3, 3 + \sqrt{6})$ | $(3 + \sqrt{6}, \infty)$ |
|----------------------------|---------------------------|---------------------|---------------------|--------------------------|
| $\text{sgn}(x^2 - 6x + 3)$ | +                         | -                   | -                   | +                        |
| $\text{sgn}(x - 3)$        | -                         | -                   | +                   | +                        |
| $\text{sgn } y$            | -                         | +                   | -                   | +                        |

Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty$ , права  $x = 3$  је вертикална асимптота функције.

Коса асимптота функције је права  $y = kx + n$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 3}{x - 3} = -3,$$

па је права  $y = x - 3$  коса асимптота функције.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{x^2 - 6x + 15}{(x - 3)^2} > 0$  па је

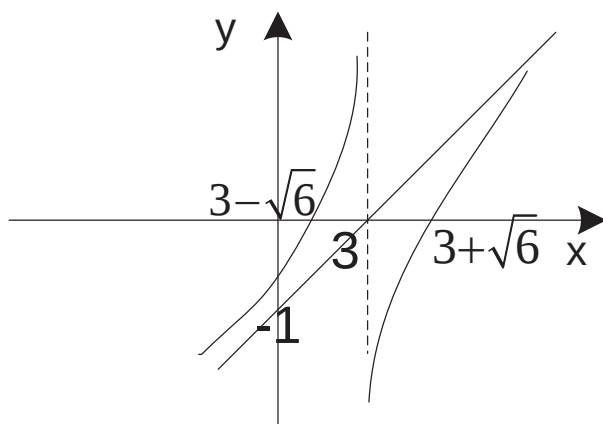
функција је стално растућа.

Функција нема екстремних вредности.

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{-12}{(x - 3)^3}$ .

За  $x \in (-\infty, 3)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (3, \infty)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

Функција нема превојних тачака.



б)

**Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ .

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

**Пресек са у осом:**  $y(0) = -\frac{1}{2}$ .

**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, 1)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (1, \infty)$ ,  $y > 0$ .

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$  па функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow 1+} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-} y = \infty$ , па је права  $x = 1$  је вертикална асимптота функције.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 2} = -\frac{5}{2},$$

права  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$  коса асимптота функције.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{2(x+1)^3}$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$$

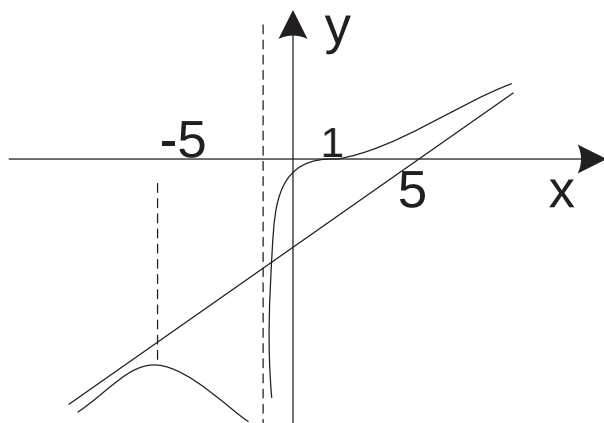
|                   | $(-\infty, -5)$ | $(-5, -1)$ | $(-1, 1)$  | $(1, \infty)$ |
|-------------------|-----------------|------------|------------|---------------|
| $\text{sgn}(x+5)$ | -               | +          | +          | +             |
| $\text{sgn}(x+1)$ | -               | -          | +          | +             |
| $\text{sgn } y'$  | +               | -          | +          | +             |
| $y$               | $\nearrow$      | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$    |

$$y_{\max}(-5) = -\frac{27}{4}.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{12(x-1)}{(x+1)^4}$ .  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

За  $x \in (-\infty, 1)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in (1, \infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ .

$y(1) = 0$ . Превојна тачка функције је  $P(1, 0)$ .



в)

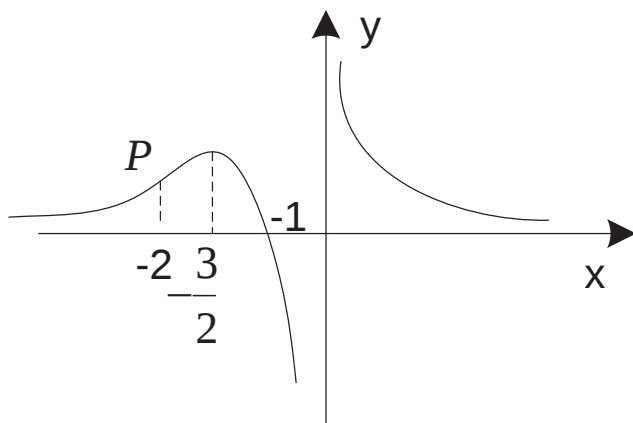
Домен:  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .Знак функције: За  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ,  $y > 0$ , а за  $x \in (-1, 0)$ ,  $y < 0$ .Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{3x^2} = 0$ , па је права  $y = 0$  хоризонтална асимптота. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^3} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^3} = +\infty$ , па је права  $x = 0$  вертикална асимптота.Интервали монотоности и екстремне вредности:  $y' = -\frac{2x+3}{x^4}$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

За  $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

$$y_{\max} \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{27}.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке:  $y'' = \frac{6(x+2)}{x^5}$ .  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .За  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (-2, 0)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ . $y(-2) = -\frac{1}{8}$ . Превојна тачка функције је  $P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$ .



г)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ .Нуле функције:  $y = 0$  за  $x = 0$ .Знак функције:  $y < 0$  за  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ,  $y > 0$  за  $x \in (0, +\infty)$ .Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту. $\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = -\infty$ , па је права  $x = -1$  вертикална асимптота функције.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1,$$

права  $y = \frac{1}{2}x - 1$  је коса асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

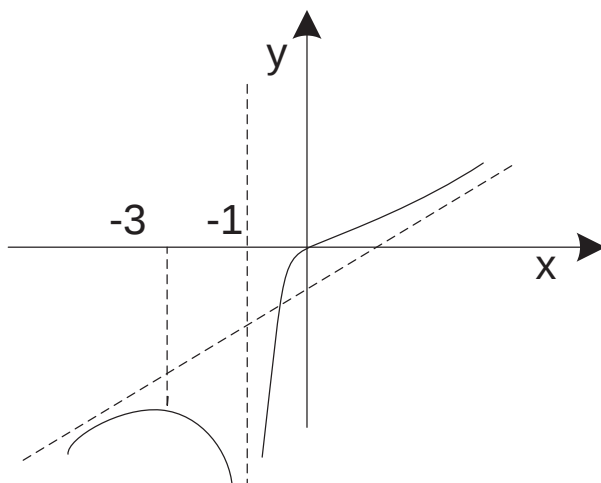
$$y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}. y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3.$$

За  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in (-3, -1)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

$$y_{\max}(-3) = -\frac{27}{8}.$$

Конвексност, конкавност и превојне тачке:  $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$ .  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in (0, +\infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ .  
 $y(0) = 0$ . Превојна тачка функције је  $P(0, 0)$ .



4. а)  $y = x^2 e^{-x}$ ; б)  $y = x^3 e^x$ ; в)  $y = e^{-x} (2 - x^2)$ ; г)  $y = x e^{-x^2}$ .

**Решење:**

а)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, +\infty)$ .

Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Знак функције:  $y \geq 0$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = +0$ ,

па је  $y = 0$  ( $x$ -оса) хоризонтална асимптота функције кад  $x \rightarrow +\infty$ .

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$y' = e^{-x} (2x - x^2) = e^{-x} x(2 - x)$ ,  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ .

|                     | $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$   | $(2, \infty)$ |
|---------------------|----------------|------------|---------------|
| $\text{sgn}(2 - x)$ | +              | +          | -             |
| $\text{sgn}(x)$     | -              | +          | +             |
| $\text{sgn } y'$    | -              | +          | -             |
| $y$                 | $\searrow$     | $\nearrow$ | $\searrow$    |

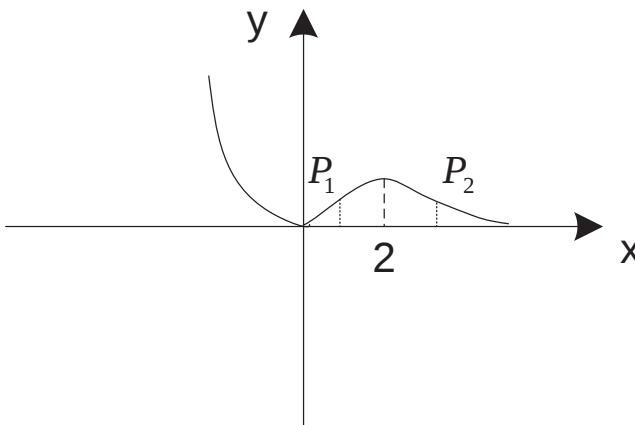
$y_{\min}(0) = 0$ ,  $y_{\max}(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$ .

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**

$$y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2), \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

|                                    | $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ | $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ | $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ |
|------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| $\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 2)$ | +                         | -                              | +                        |
| $\operatorname{sgn} y''$           | +                         | -                              | +                        |
| $y$                                | $\cup$                    | $\cap$                         | $\cup$                   |

$y(2 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^2 e^{-(2 - \sqrt{2})}$  и  $y(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})^2 e^{-(2 + \sqrt{2})}$ . Превојне тачке дате функције, тј. њихове приближне координате су  $P_1(0,59;0,19)$  и  $P_2(2,41;0,52)$ .



б)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, +\infty)$ .

Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x^3 e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (трострука нула).

Знак функције:  $y < 0$  за  $x < 0$ ,  $y > 0$  за  $x > 0$ .

Асимптоте:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{-e^{-x}} = -0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

па је  $y = 0$  ( $x$ -оса) хоризонтална асимптота функције кад  $x \rightarrow -\infty$ .

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = x^2(x+3)e^x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3.$$

За  $x \in (-\infty, -3)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in (-3, +\infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ .

$$y_{\min}(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,34.$$

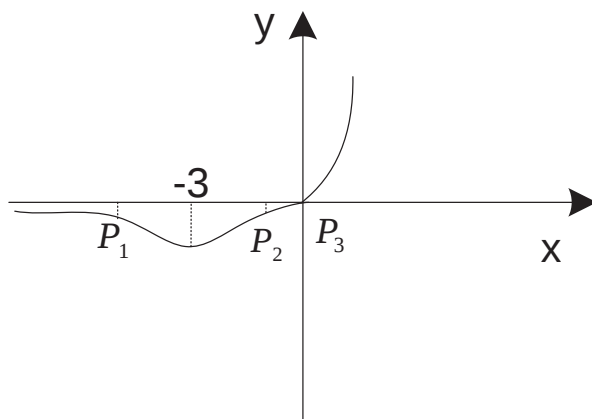
**Конвексност, конкавност и превојне тачке :**

$$y'' = x(x^2 + 6x + 6)e^x.$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -3 - \sqrt{3} \approx -4,73 \vee x_3 = -3 + \sqrt{3} \approx -1,27.$$

|                            | $(-\infty, -3 - \sqrt{3})$ | $(-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3})$ | $(-3 + \sqrt{3}, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------------|----------------------|---------------|
| $\text{sgn}(x^2 + 6x + 6)$ | +                          | -                                | +                    | +             |
| $\text{sgn}(x)$            | -                          | -                                | -                    | +             |
| $\text{sgn } y''$          | -                          | +                                | -                    | +             |
| $y$                        | $\cap$                     | $\cup$                           | $\cap$               | $\cup$        |

$y(-3 - \sqrt{3}) \approx -0,73$ ,  $y(-3 + \sqrt{3}) \approx -0,8$ ,  $y(0) = 0$ . Превојне тачке функције су  $P_1(-3 - \sqrt{3}, -0,73)$ ,  $P_2(-3 + \sqrt{3}, -0,8)$ ,  $P_3(0, 0)$ .



**в)**

**Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, +\infty)$ .

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ .

**Пресек са у осом:**  $y(0) = 2$ , па је тачка  $A(0, 2)$  пресек графика функције са у-осом.

**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$   $y > 0$ .

**Асимптоте:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x} = -0,$$

па је ( $y=0$ ) хоризонтална асимптота функције кад  $x \rightarrow +\infty$ .

Како је  $(-\infty, +\infty)$  домен функције, она нема вертикалну асимптоту.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(2-x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left( \frac{2}{x} - x \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

па функција нема ни косу асимптоту.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = e^{-x}(x^2 - 2x - 2),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

$$y \nearrow \text{ за } x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty), \quad y \searrow \text{ за } x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}).$$

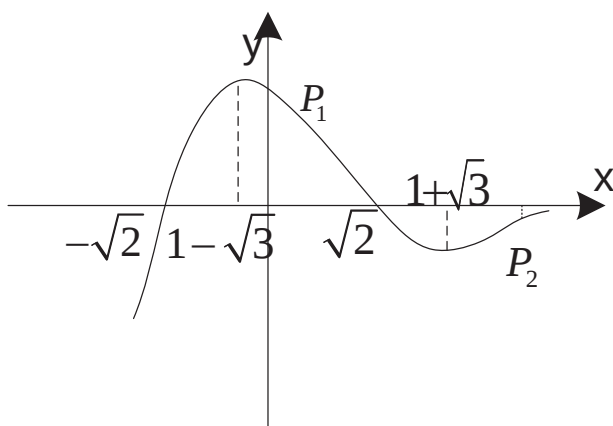
$$y_{\max} = y(x_1) = y_1 \approx 2,3; \quad y_{\min} = y(x_2) = y_2 \approx 0,9.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**

$$y'' = e^{-x}(4x - x^2) \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

За  $x \in (0, 4)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

$y(0) = 2$ ,  $y(4) = e^{-4} \cdot (-14) = -14e^{-4} \approx 0,26$  су превојне тачке функције.



г)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, +\infty)$ .

Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Знак функције: За  $x \in (-\infty, 0)$   $y < 0$ , а за  $x \in (0, \infty)$   $y > 0$ .

**Парност, непарност:**  $-f(x) = f(-x)$ , функција је непарна.

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$  па је  $(y = 0)$  хоризонтална асимптота функције.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

За  $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

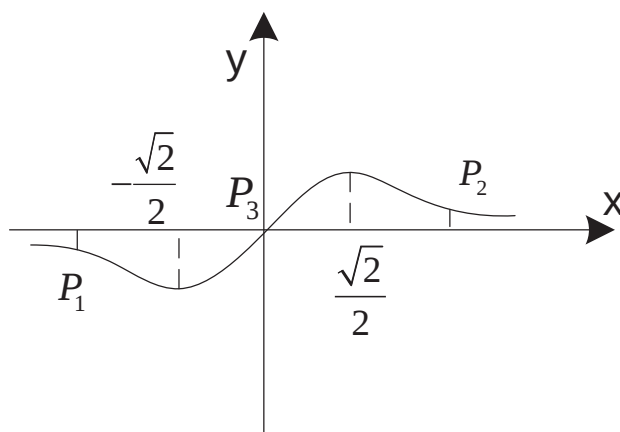
$$y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e}; \quad y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**

$$y'' = \frac{2x(2x^2-3)}{e^{x^2}} \quad y'' = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

За  $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

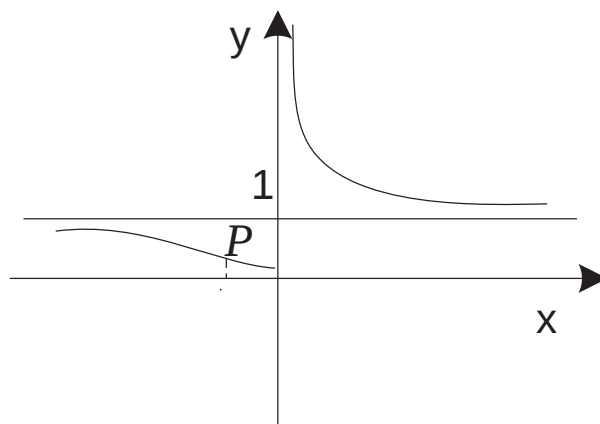
$y(0) = 0$ ,  $y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$ ,  $y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$  су превојне тачке функције.



5. а)  $y = e^{\frac{1}{x}}$ ; б)  $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$ ; в)  $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$ ; г)  $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ ; д)  $y = xe^{\frac{1}{x}}$ .

**Решење:****а)****Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .**Нуле функције:** Функција нема нула.**Знак функције:**  $y > 0$  за  $\forall x \in D_x$ .**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ , функција има хоризонталну асимптоту  $y = 1$ . $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ , функција има вертикалну асимптоту  $x = 0$ , када  $x \rightarrow 0_+$ .**Интервали монотоности и екстремне вредности:** $y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$ . То значи да функција опада за  $\forall x \in D_x$ .

Функција нема екстремних вредности.

**Конвексност, конкавност и превојне тачке :** $y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$ ,  $y'' = 0 \Leftrightarrow 1+2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .За  $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cup$ . $y\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$ . Превојна тачке функције је  $P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$ .**б)****Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .**Нуле функције:** Функција нема нула.**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (0, +\infty)$   $y > 0$ .

**Парност, непарност:**  $y(-x) = -y(x)$ , функција је непарна.

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x e^{-\frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left( -\frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0,$$

па је  $y = x$  коса асимптота функције.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +0$ , па функција нема вертикалних асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = e^{-\frac{1}{x^2}} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right) > 0. \text{ То значи да функција расте за } \forall x \in D_x.$$

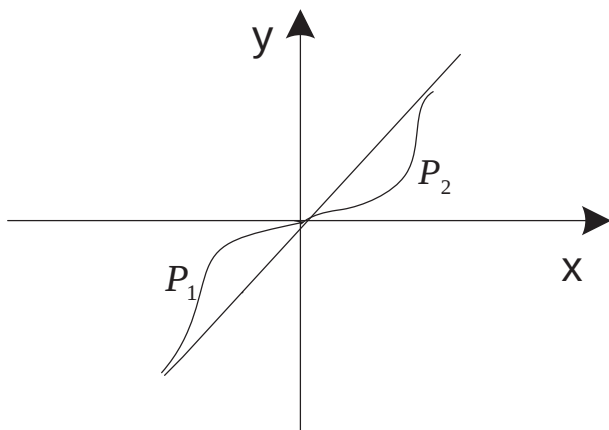
Функција нема екстремних вредности.

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**

$$y'' = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{x^5}, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow 2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

|                     | $(-\infty, -\sqrt{2})$ | $(-\sqrt{2}, 0)$ | $(0, \sqrt{2})$ | $(\sqrt{2}, \infty)$ |
|---------------------|------------------------|------------------|-----------------|----------------------|
| $\text{sgn}(2-x^2)$ | -                      | +                | +               | -                    |
| $\text{sgn}(x)$     | -                      | -                | +               | +                    |
| $\text{sgn } y''$   | +                      | -                | +               | -                    |
| $y$                 | $\cup$                 | $\cap$           | $\cup$          | $\cap$               |

$y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,86$ ;  $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,86$  су превојне тачке функције.



в)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ .

Нуле функције: функције нема нула.

Знак функције:  $y > 0$  за  $\forall x \in D_x$ ,Пресек са  $y$  осом:  $y(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Асимптоте:

 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{+0} = 1$ , права  $y = 1$  је хоризонтална асимптота функције.

 $\lim_{x \rightarrow -1-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = +0$ , права  $x = -1$  је вертикална асимптота функције.

Интервали монотоности и екстремне вредности:

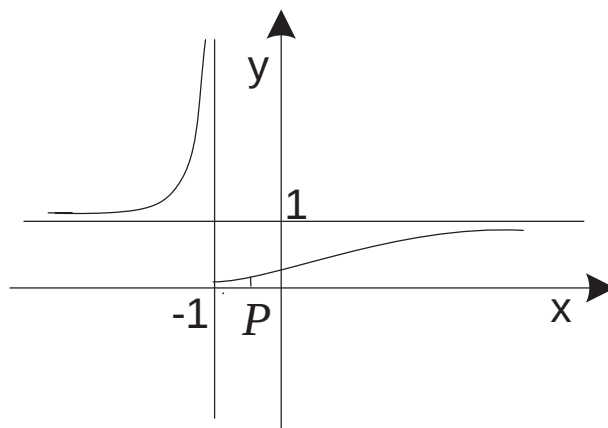
 $y' = (x+1)^{-2} e^{\frac{1}{x+1}}$ ; значи,  $y' > 0$  за  $\forall x \in D_x$  функција је она растућа и нема екстремних вредности.

Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$y'' = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{1}{x+1}}; y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

За  $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

 $y\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$ . Превојна тачке функције је  $P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$ .



г)

Домен:  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .Нуле функције:  $y = 0$  за  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .Знак функције: За  $x \in (-\infty, -2)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (-2, +\infty)$ ,  $y > 0$ .Асимптоте:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + 2e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 = 3,$$

па је  $y = x + 3$  коса асимптота функције.  $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$ , функција има вертикалну асимптоту када  $x \rightarrow 0_+$ .

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}, \quad y' = 0 \text{ за } x = -1 \vee x = 3.$$

За  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in (-1, 2)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .

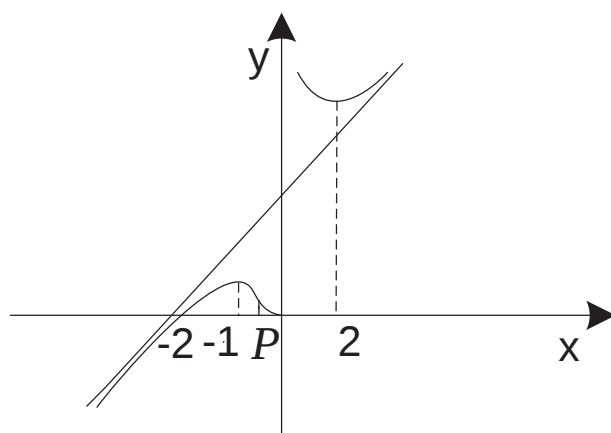
$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{e}; \quad y_{\min} = y(2) = 3\sqrt[3]{e}$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x+2}{x^4},$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

За  $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ , а за  $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ .

$y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}}$  је превојна тачка функције.



д)

**Домен:**  $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

**Знак функције:** За  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (0, +\infty)$ ,  $y > 0$ .

**Парност непарност:**  $y(-x) = -xe^{-\frac{1}{x}} \neq y(x) \neq -y(x)$ . Функција није ни парна ни непарна.

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ , док је  $x = 0$  ( $y$ -оса) вертикална асимптота кад  $x \rightarrow +0$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1,$$

па је  $y = x + 1$  коса асимптота функције.

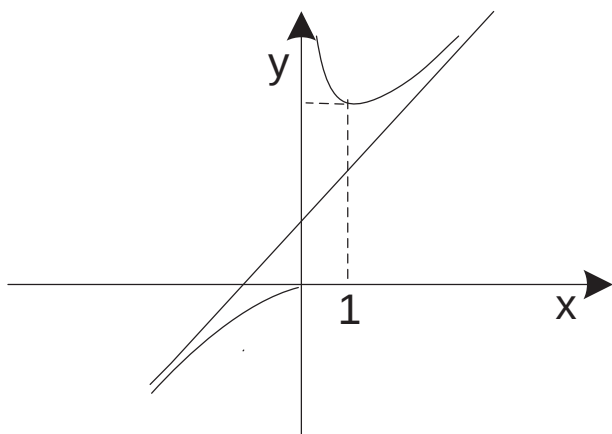
**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

За  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ . а за  $x \in (0, 1)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .  $y_{\min}(1) = e$ .

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ ,

За  $x \in (-\infty, 0)$   $y'' < 0$  и  $y \cap$ . а за  $x \in (0, +\infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ . Нема превојне тачке.



8. а)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ; б)  $y = x^2 \ln^2 x$ ; в)  $y = x^2 (1 - 2 \ln x)$ ; г)  $y = x^3 \ln x$ .

**Решење:**

**а)**

**Домен:**  $D_x : x \in (0, +\infty)$ .

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

**Знак функције:** За  $x \in (0, 1)$   $y < 0$ , а за  $x \in (1, +\infty)$   $y > 0$ .

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$ , па је  $x = 0$  ( $y$  - оса) вертикална асимптота функције.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$ , па је  $y = 0$  ( $x$  - оса) хоризонтална асимптота функције.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

|                                 | $(0, e)$   | $(e, \infty)$ |
|---------------------------------|------------|---------------|
| $\operatorname{sgn}(1 - \ln x)$ | +          | -             |
| $\operatorname{sgn} y'$         | +          | -             |
| $y$                             | $\nearrow$ | $\searrow$    |

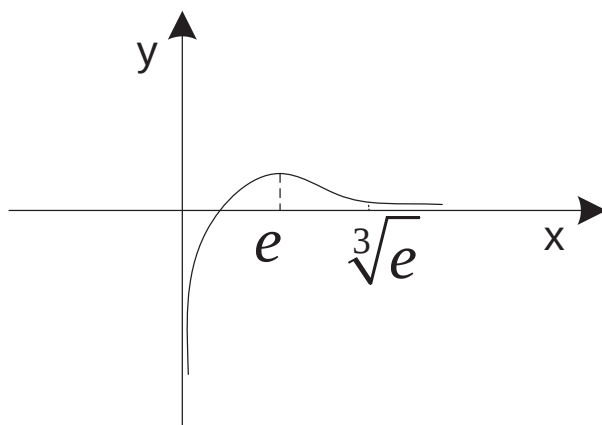
$$y_{\max}(e) = \frac{1}{e}.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

|                                   | $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ | $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| $\operatorname{sgn}(2 \ln x - 3)$ | -                                 | +                                       |
| $\operatorname{sgn} y''$          | -                                 | +                                       |
| $y$                               | $\cap$                            | $\cup$                                  |

$y\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$  је превојна тачка функције.



б)

**Домен:**  $D_x : x \in (0, +\infty).$

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

**Знак функције:**  $y \geq 0, \forall x \in D_x.$

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow +0} y = +0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ , функција нема асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = 2x(\ln^2 x + \ln x) = 2x(\ln x + 1)\ln x,$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-1}.$$

|                                 | $(0, e^{-1})$ | $(e^{-1}, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---------------------------------|---------------|---------------|----------------|
| $\operatorname{sgn}(\ln x + 1)$ | -             | +             | +              |
| $\operatorname{sgn}(\ln x)$     | -             | -             | +              |
| $\operatorname{sgn} y'$         | +             | -             | +              |
| $y$                             | $\nearrow$    | $\searrow$    | $\nearrow$     |

$$y_{\max}(e^{-1}) = e^{-2} \approx 0,14, \quad y_{\min}(1) = 0.$$

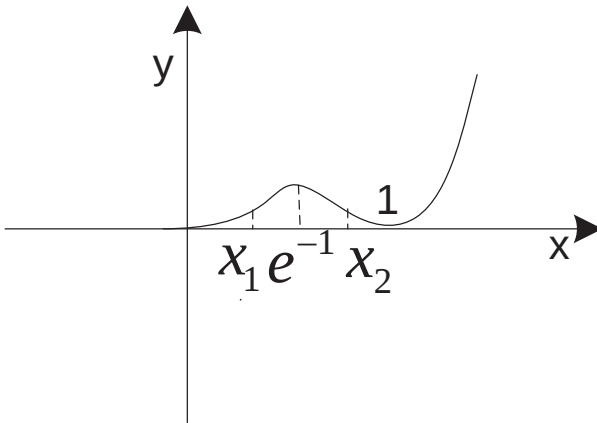
**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = 2(\ln^2 x + 3\ln x + 1)$ ,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x_1 = e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0,07 \vee x_2 = e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0,68.$$

|                                            | $\left(0, e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}\right)$ | $\left(e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\right)$ | $\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right)$ |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\operatorname{sgn}(\ln^2 x + 3\ln x + 1)$ | +                                           | -                                                                   | +                                                 |
| $\operatorname{sgn} y''$                   | +                                           | -                                                                   | +                                                 |
| $y$                                        | $\cup$                                      | $\cap$                                                              | $\cup$                                            |

$$y\left(e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}\right) \approx 0,03, \quad y\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\right) \approx 0,07.$$

Функција има две превојне тачке:  $P_1\left(e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}, 0,03\right), P_2\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}, 0,07\right)$ .



**в)**

**Домен :**  $D_x : x \in (0, +\infty)$ .

**Нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - 2 \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$ .

**Знак функције:** За  $x \in (0, \sqrt{e})$ ,  $y > 0$ , а за  $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ ,  $y < 0$ .

**Асимптоте:**

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2(1 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1 - 2 \ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = +0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - 2 \ln x) = +\infty.$$

Значи, функција нема асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = -4 \ln x, \text{ па је } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

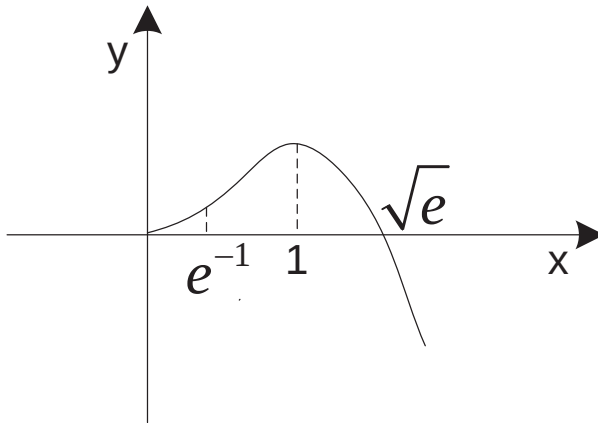
За  $x \in (0, 1)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ , а за  $x \in (1, +\infty)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ .  $y_{\max} = y(1) = 1$ .

**Конвексност, конкавност и превојне тачке**

$$y'' = -4(\ln x + 1), \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

За  $x \in (0, e^{-1})$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (e^{-1}, +\infty)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

$y(e^{-1}) = 3e^{-2}$  је превојна тачка.



г)

Домен  $D_x : x \in (0, +\infty)$ .Нуле функције:  $y = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .Знак функције: За  $x \in (0, 1)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (1, +\infty)$ ,  $y > 0$ .

Асимптоте:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \left(-\frac{1}{3}\right) \lim_{x \rightarrow +0} x^3 = -0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty,$$

па функција нема асимптота.

Интервали монотоности и екстремне вредности:  $y' = x^2 (3 \ln x + 1)$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,7.$$

за  $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in \left(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ .

$$\text{Екстрем (минимум) је: } y_{\min} = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3e} \approx 0,1.$$

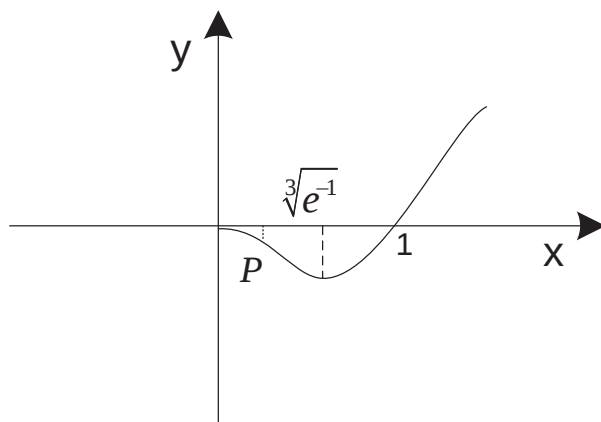
Конвексност, конкавност и превојне тачке:  $y'' = x(6 \ln x + 5)$ 

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6 \ln x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{5}{6}} \approx 0,2.$$

за  $x \in \left(0, e^{-\frac{5}{6}}\right)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$  а за  $x \in \left(e^{-\frac{5}{6}}, +\infty\right)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$

$$y\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = e^{-\frac{5}{2}} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}} \approx -0,07, \quad P\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right) \text{ превојна тачка}$$

функције.



9. а)  $y = \frac{1}{\ln x - 1}$ ; б)  $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ ; в)  $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ ; г)  $y = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$ .

**Решење:**

**а)**

**Домен:**  $x > 0 \wedge \ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq e \Leftrightarrow D_x : x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ .

**Нуле функције:** Функција нема нула.

**Знак функције:** За  $x \in (0, e)$   $y < 0$ , а за  $x \in (e, +\infty)$   $y > 0$ .

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow 0+} y = -0$ ,  $\lim_{x \rightarrow e-} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow e+} y = +\infty$ , па је права  $x = e$  вертикална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$ , па је  $y = 0$  ( $x$ -оса) хоризонтална асимптота функције.

**Интервали монотоности: и екстремне вредности:**  $y' = -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2} < 0$  и

$y \searrow$  за  $\forall x \in D_x$ .

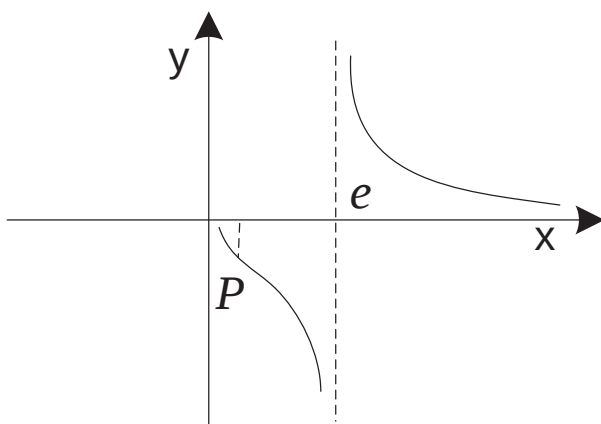
Функција нема екстремних вредности.

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**  $y'' = \frac{\ln x + 1}{x(\ln x - 1)^3}$ ,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

|                                 | $(0, e^{-1})$ | $(e^{-1}, e)$ | $(e, +\infty)$ |
|---------------------------------|---------------|---------------|----------------|
| $\operatorname{sgn}(\ln x + 1)$ | -             | +             | +              |
| $\operatorname{sgn}(\ln x - 1)$ | -             | -             | +              |
| $\operatorname{sgn} y''$        | +             | -             | +              |
| $y$                             | $\cup$        | $\cap$        | $\cup$         |

$y(e^{-1}) = \frac{1}{\ln e^{-1} - 1} = -\frac{1}{2}$ , па је  $P(e^{-1}, -\frac{1}{2})$  превојна тачка функције.



б)

**Домен:**  $D_x : x \in (0, +\infty)$ .

**Нуле функције:**  $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ .

**Знак функције:** За  $x \in (0, e^{-1})$   $y < 0$ , а за  $x \in (e^{-1}, +\infty)$ ,  $y > 0$ .

**Асимптоте:**  $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$ , па су  $x = 0$ , односно  $y = 0$  вертикална односно хоризонтална асимптота.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = -\frac{\ln x}{x^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

За  $x \in (0, 1)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in (1, \infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ .

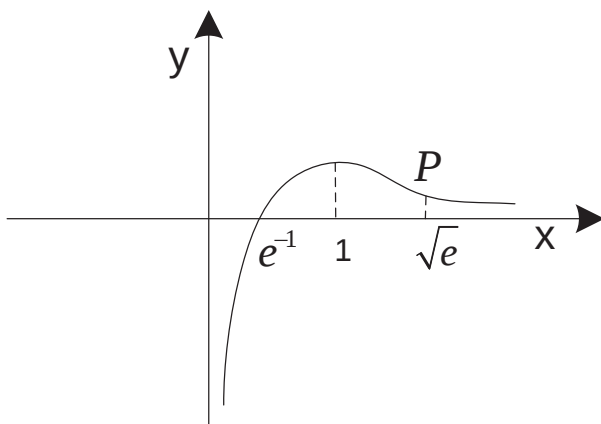
$$y_{\max} = y(1) = 1.$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке**

$$y'' = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}, \text{ па је } y'' = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

За  $x \in (0, \sqrt{e})$ ,  $y'' < 0 \Leftrightarrow y \cap$ , а за  $x \in (\sqrt{e}, \infty)$ ,  $y'' > 0 \Leftrightarrow y \cup$

$$y(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}}. \text{ Превојна тачка је } y\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right).$$



**в)**

**Домен:** Функција је дефинисана за  $x > 0$  и  $1 + \ln x \neq 0$ , односно

$$D_x : x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty).$$

**Нуле функције:**  $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$ .

**Знак функције:**

За  $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$ ,  $y < 0$  а за  $x \in (e^{-1}, e)$   $y > 0$ .

**Асимптоте:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \ln x)'}{(1 + \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow e^{-1}-} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow e^{-1}+} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1.$$

Значи,  $x = e^{-1}$  је вертикална, а  $y = -1$  хоризонтална асимптота.

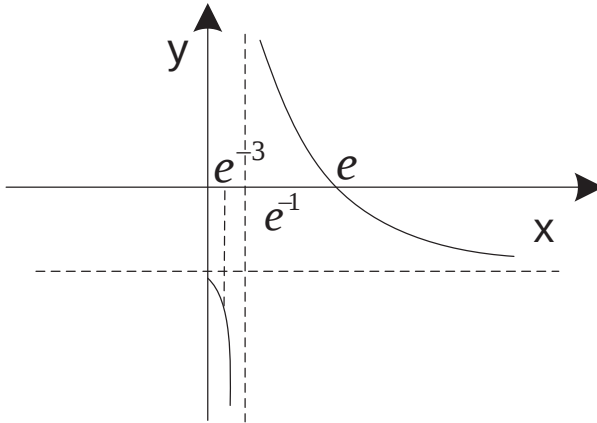
**Интервали монотоности и екстремне вредности:**

$$y' = \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2} < 0, \quad y \searrow \text{ и нема екстрема.}$$

**Конвексност, конкавност и превојне тачке:**

$$y'' = \frac{2(3 + \ln x)}{x^2(1 + \ln x)^3}, \text{ па је } y'' = 0 \Leftrightarrow 3 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-3}.$$

За  $x \in (0, e^{-3}) \cup (e^{-1}, +\infty)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (e^{-3}, e^{-1})$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .  
 $y(e^{-3}) = -2$ . Превојна тачка је  $P(e^{-3}, -2)$ .

**г)**

**Домен:** Функција је дефинисана за  $x > 0$ , тј. за  $x \in (0, +\infty)$ .

**Нуле функције:**

$$y = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 4 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \vee \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^3 \vee x = e.$$

**Знак функције:** За  $x \in (e, e^3)$ ,  $y < 0$ , а за  $x \in (0, e) \cup (e^3, +\infty)$ ,  $y > 0$ .

**Асимптоте:**

$\lim_{x \rightarrow 0+} y = +\infty$ , док је  $x = 0$  ( $y$ -оса) вертикална асимптота кад  $x \rightarrow +0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ , функција нема хоризонталну асимптоту.

Коса асимптота:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x - 4 \ln x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 0,$$

функција нема косу асимптоту.

**Интервали монотоности и екстремне вредности:**  $y' = \frac{2 \ln x - 4}{x}$ ,

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 4 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2.$$

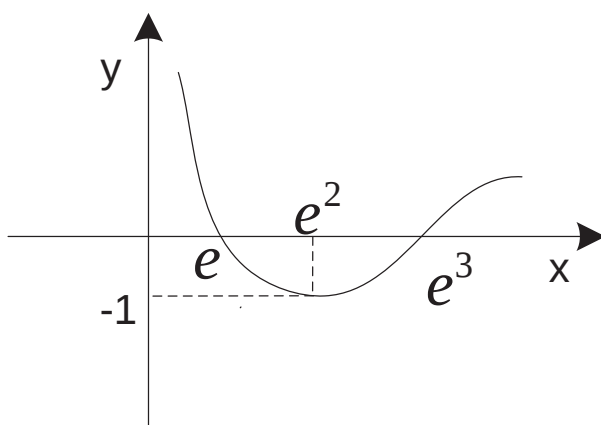
За  $x \in (0, e^2)$ ,  $y' < 0$  и  $y \searrow$ , а за  $x \in (e^2, \infty)$ ,  $y' > 0$  и  $y \nearrow$ .  $y_{\min}(e^2) = -1$ .

**Конвексност, конкавност и превојне тачке :**  $y'' = \frac{6 - 2\ln x}{x^2}$ ,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3.$$

За  $x \in (0, e^3)$ ,  $y'' > 0$  и  $y \cup$ , а за  $x \in (e^3, +\infty)$ ,  $y'' < 0$  и  $y \cap$ .

$y(e^3) = 0$  је превојна тачка функције.



## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Испитивање функције  
 Монотоност функције  
 Екстремне вредности функције  
 Конвексност функције  
 Конкавност функције  
 Превојне тачке функције



## 10. ГЛАВА

# ***НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ***

### **1. ДЕФИНИЦИЈА НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА**

### **2. ОСОБИНЕ НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА**

### **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију неодређеног интеграла,
2. особине неодређеног интеграла,
3. таблицу основних интеграла функције,
4. основна правила интеграљења.

# ИНТЕГРАЛ

Геометријски проблеми квадратуре, кубатуре и ректификације решавани су од Аристотела до Лајбница и Њутна углавном методом есхаустије (исцрпљивања) и методом недељивих делова (математички атомизам). Обе методе базирале су се на бесконачним сумама и као такве представљале надахнуће у постепеном и дуготрајном настајању појма интеграла. Њутн и Лајбниц, уз помоћ Декартових координата, учинили су онај квалитативни скок који се зове откриће интегралног рачуна.



Аристотел (287-212)

Током 18. и прве половине 19. века интегрални рачун се развијао под доминантним утицајем примена у геометрији, механици и физици. У тој етапи развоја интегрални рачун је добијао подстицаје за развитак апстрактних теорија пратећи природне феномене.

## 10.1. НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Један од основних задатака диференцијалног рачуна је одређивање извода или диференцијала дате функције. Ако се постави обрнути проблем, одређивање функције којој је познат извод или диференцијал, онда долазимо до интегралног рачуна.

Проблеми са којим се сада срећемо су следећи:

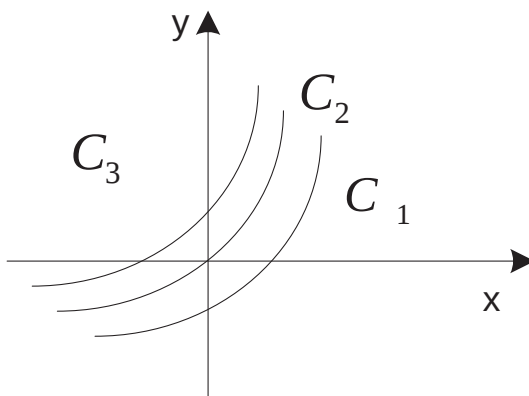
Прво, да ли свака функција може бити извод неке друге функције, друго, ако та функција постоји да ли је једнозначна и треће, ако та функција постоји, како да је одредимо.

- Нека је функција  $f(x)$  дефинисана на интервалу  $(a,b)$ . Функција  $F(x)$  зове се **примитивна** или **првобитна** функција функције  $f(x)$  акко је

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

- Ако је  $F(x)$  примитивна функција функције  $f(x)$  на интервалу  $(a, b)$ , тада је и било која функција облика  $F(x) + C$  такође примитивна функција функције  $f(x)$ , при чему је  $C$  произвољна константа.

$$(F(x) + C)' = f(x).$$



**Напомена:** Примитивна функција није једнозначно одређена већ је у питању фамилија кривих које се међусобом разликују за константу  $C$ .

**Пример:**

$F(x) = \arcsin x$  је примитивна функција функције  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  јер је

$$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- Скуп свих примитивних функција функције  $f(x)$  на интервалу  $(a, b)$  зове се **неодређени интеграл** и обележава се:

$$\int f(x)dx \text{ односно } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функција  $f(x)$  зове се **подинтегрална функција**, а сам поступак **интеграљење**.

Ознаку  $\int$  за интеграл, као скраћеницу од латинске речи **integralis** која значи потпун, увео је Лајбниц. Ознака представља модификовано слово S које представља збир и потиче из дефиниције одређеног интеграла.

**Пример:**  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

## 10.2. ОСОБИНЕ НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- Свака примитивна функција  $F(x)$  на интервалу  $(a,b)$  је непрекидна функција на том интервалу.

**Доказ:**

Како је  $F(x)$  примитивна функција, онда је она диференцијабилна јер је  $F'(x) = f(x)$ , а ако је функција диференцијабилна она је непрекидна.

- Свака непрекидна функција  $f(x)$  на интервалу  $(a,b)$  има на том интервалу примитивну функцију  $F(x)$ ; (довољан услов).

Другим речима исказано, свака непрекидна функција је извод неке функције.

- Диференцијал неодређеног интеграла једнак је диференцијалу примитивне функције.

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

**Доказ:**

$$d \int f(x) dx = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx$$

- Неодређени интеграл диференцијала једнак је подинтегралној функцији.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

**Доказ:**

$$\int d(F(x)) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Насупрот израчунавању извода које није представљало проблем ни код веома сложених функција, не постоји општи поступак за израчунавање примитивне функције, односно рачунање неодређеног интеграла. На основу уведених правила, таблице интеграла и дефинисањем неких метода могу се израчунати неки типови неодређених интеграла.

Међутим, постоје релативно једноставне функције чију је примитивну функцију немогуће одредити помоћу елементарних функција, мада постоје (на пример  $y = e^{-x^2}$ ,  $y = \frac{\sin x}{x}$ ,  $y = \frac{1}{\ln x}$ ).

### 10.3. ТАБЛИЦА ОСНОВНИХ ИНТЕГРАЛА

- |                                                             |                                                               |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. $\int dx = x + C$                                        | 2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1)$ |
| 3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$                       | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$       |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$                                  | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$                             |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$                            | 8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$     |
| 9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ | 10. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$  |
| 11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$        |                                                               |

Таблица основних интеграла добија се из таблице основних извода.

**Пример:**  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ , зато што је  $\left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = x^n$  за  $n \neq -1$ .

## 10.4. ОСНОВНА ПРАВИЛА ИНТЕГРАЦИЈЕ

Ако су  $f(x)$  и  $g(x)$  интеграбилне функције онда важи:

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$
- $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx, C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$

### ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

На основу таблице интеграла и датих правила израчунати интеграле:

1. а)  $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$

б)  $I = \int (5x^3 + 3x^2 - 5\sqrt{x} + 9) dx;$

в)  $I = \int \left( \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} \right) dx;$

г)  $I = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

**Решење:**

а)  $I = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2} + C;$

б)  $I = \int 5x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 5\sqrt{x} dx + \int 9 dx = 5 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 9 \int dx$   
 $= 5 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 9x + C = \frac{5}{4}x^4 + x^3 - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + 9x + C;$

$$\text{в)} I = \int \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \arctg x + C.$$

$$2. \text{ а)} I = \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx;$$

$$\text{г)} \int \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C;$$

$$\text{г)} I = \int \left( \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C.$$

$$3. \text{ а)} I = \int \left( \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \sin x - 2e^x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$$

$$\text{б)} I = \int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{x} \right) dx;$$

$$\text{в)} I = \int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx;$$

$$\text{г)} I = \int \left( 4 \cos x - \frac{5}{\sqrt{9-9x^2}} \right) dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \int \left( 2x^{\frac{1}{3}} + \sin x - 2e^x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 3x^{\frac{2}{3}} - \cos x - 2e^x - 3 \arcsin x + C;$$

$$\text{б)} I = 2 \arctg x - 3 \arcsin x + 4 \ln|x| + C;$$

$$\text{в)} I = \int \left( e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = e^x + \operatorname{tg} x + C;$$

$$\text{г)} I = \int \left( 4 \cos x - \frac{5}{3\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 4 \sin x - \frac{5}{3} \arcsin x + C.$$

$$4. \text{ а)} I = \int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x} dx;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{18x^2-2}{3x-1} dx;$$

$$\text{г)} I = \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx.$$

**Резултат:**

$$\text{а)} I = e^x - \cos x + C;$$

$$\text{б)} I = 2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C ;$$

$$\text{в)} I = 3x^2 + 2x + C ;$$

$$\text{г)} I = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + C .$$

## К Л Ю Ч Н Е Р Е Ч И

Неодређени интеграл  
Правила интеграљења



# 11. ГЛАВА

## ***МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ***

- 1. МЕТОДА СМЕНЕ**
- 2. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА**
- 3. ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ  
ФУНКЦИЈА**
- 4. ИНТЕГРАЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ  
ФУНКЦИЈА**

### **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. методу смене приликом интегралнења,
2. парцијалну интеграцију.
3. интеграцију рационалних функција,
4. интеграцију ирационалних функција.

## МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

### 11.1. МЕТОДА СМЕНЕ

У неким случајевима и поред тога што знамо да постоји примитивна функција функције  $f(x)$  не можемо методом непосредне интеграције, израчунати њен неодређени интеграл. У оваквим случајевима се често користи метода смене.

- Нека је  $f(x)$  сложена функција променљиве  $t$ , тј.  $f(x) = f(g(t))$ . Сменом  $x = g(t)$  где је функција  $g(t)$  непрекидна са непрекидним изводом и инверзном функцијом  $t = g^{-1}(x)$ , добијамо

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

**Доказ:**

Претпоставимо да је  $F(x) + C$  примитивна функција функције  $f(x)$ .

Како је  $F(x) = F(g(t))$ , диференцијал ове функције је:

$$F'(x) dx = F'(g(t)) g'(t) dt = f(g(t)) g'(t) dt.$$

Интеграцијом ове релације добијамо  $\int F'(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$ , односно

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

После интеграције нову променљиву  $t$ , треба помоћу смене  $t = g^{-1}(x)$  вратити на стару променљиву  $x$ .

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Израчунати следеће интеграле:

1. а)  $I = \int (4-2x)^7 dx$ ;      б)  $I = \int (ax+b)^n dx$ ,  $a \neq 0 \wedge n \neq -1$ ;

в)  $I = \int \frac{dx}{3x+2}$ ;      г)  $I = \int x^2(x^3+3)^2 dx$ .

**Решење:**

а)  $I = \left\{ \begin{array}{l} 4-2x=t \\ -2dx=dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^7 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^8}{8} + C = -\frac{1}{16} (4-2x)^8 + C$ ;

б)  $I = \left\{ \begin{array}{l} ax+b=t \\ adx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ ;

в)  $I = \left\{ \begin{array}{l} 3x+2=t \\ 3dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C$ ;

г)  $I = \left\{ \begin{array}{l} x^3+3=t \\ 3x^2dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9} (x^3+3)^3 + C$ .

2. а)  $I = \int \frac{x}{1+x^2} dx$ ;      б)  $I = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ ;      в)  $I = \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx$ .

**Решење:**

а)  $I = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$ ;

б)  $I = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$ ;

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3x - 10 = t \\ (2x + 3)dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 3x - 10| + C.$$

$$3. \text{ а)} I = \int x^2 \sqrt{x^3 - 9} dx; \quad \text{б)} I = \int x \sqrt[3]{x-2} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \sqrt{x^2 - 3x^4} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{(2 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 9 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3 - 9})^3 + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int (t^3 + 2) \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^6 + 2t^3) dt;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} I &= \int x \sqrt{1 - 3x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3x^2 = t^2 \\ -6x dx = 2t dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int t^2 dt = -\frac{1}{9} t^3 + C = -\frac{1}{9} (1 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= 3 \left( \frac{t^7}{7} + 2 \cdot \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{3}{7} (\sqrt[3]{x-2})^7 + \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x-2})^4 + C; \end{aligned}$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = 2 \int t^3 dx = \frac{2}{4} t^4 + C = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{x})^4 + C.$$

$$4. \text{ а)} I = \int e^{2x} dx; \quad \text{б)} I = \int e^{-x^3} x^2 dx; \quad \text{в)} I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C;$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C.$$

$$5. \text{ а)} I = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

**б)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t \ln t} = \left\{ \begin{array}{l} \ln t = s \\ \frac{dt}{t} = ds \end{array} \right\} = \int \frac{ds}{s} = \ln|s| + C = \ln|\ln t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

**Доказати**

$$\text{а)} \int \frac{dx}{bx+a} = \frac{1}{b} \ln|x+a| + C, b \neq 0; \quad \text{б)} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0;$$

$$\text{в)} \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0; \quad \text{г)} \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0.$$

**Решење**

$$\text{а)} \int \frac{dx}{bx+a} = \left\{ \begin{array}{l} bx+a=t \\ dx=\frac{1}{b}dt \end{array} \right\} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{b} \ln|t| + C = \frac{1}{b} \ln|x+a| + C, b \neq 0;$$

$$\text{б)} \int e^{ax} dx = \left\{ \begin{array}{l} ax = t \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

примери под **в)** и **г)** доказују се истом сменом као у предходном случају.

**Напомена:** Резултате ових интеграла корисно је знати и користи у решавању сложенијих интеграла.

$$6. \text{ а)} I = \int (e^{-x} + 1) dx; \quad \text{б)} I = \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx; \quad \text{в)} I = \int (\sin 2x + \cos 3x) dx.$$

**Решење**

$$\text{а)} I = -e^{-x} + x + C;$$

$$\text{б)} I = -e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C;$$

$$\text{в)} I = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + C;$$

$$7. \text{ а)} I = \int \sin^3 x \cos x dx; \quad \text{б)} I = \int \operatorname{tg} x dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{x}{\sin^2 2x^2} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{t}$$

$$= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = t \\ 4x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \operatorname{ctgt} + C = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 2x^2 + C;$$

$$\text{г) } I = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3 \cos x = t \\ -3 \sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln |t| + C = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C ;$$

$$\text{8. а) } I = \int \sin^2 x dx ; \quad \text{б) } I = \int \sin^4 x dx ; \quad \text{в) } I = \int \operatorname{tg}^4 x dx .$$

**Решење**

$$\text{а) } I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C ;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left( 1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \left( x - \sin 2x + \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \right) + C \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I &= \int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right) dx \\ &= \int \left( \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left( \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right\} \\ &= \int t^2 dt - \operatorname{tg} x + x + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C . \end{aligned}$$

$$\text{9. а) } I = \int \sin^3 x dx ; \quad \text{б) } I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx .$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} \\ &= -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad I &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int t^3 (1 - t^2) \, dt \\ &= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad \text{а)} \quad I &= \int \frac{dx}{\sin x}; & \text{б)} \quad I &= \int \sin 4x \cos 2x \, dx; \\ \text{в)} \quad I &= \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}; & \text{г)} \quad I &= \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx. \end{aligned}$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad I &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad I = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) \, dx = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 4x + C;$$

$$\text{в)} \quad I = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\arcsin x| + C;$$

$$\text{г)} \quad I = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln \frac{1+x}{1-x} \\ dt = \frac{2}{1-x^2} \, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int t \, dt = \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

$$\begin{aligned} 11. \quad \text{а)} \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; & \text{б)} \quad I &= \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx; \end{aligned}$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, x > 1; \quad \text{г)} I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt, dx = \frac{2t dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt, dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} t = s \\ \frac{dt}{1+t^2} = ds \end{array} \right\} \\ = 2 \int s ds = s^2 + C = \operatorname{arctg}^2 t + C = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2} dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \\ = \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{t} \\ du = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right\} = - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C \\ = -\arcsin \frac{1}{t} + C = -\arcsin \frac{1}{x-1} + C.$$

$$\text{Доказати } \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad a \neq 0.$$

**Решење:**

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{7+5x^2}; \quad \text{б)} I = \int \frac{x}{x^4+1} dx; \quad \text{в)} I = \int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} =;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{д)} I = \int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \int \frac{dx}{7+5x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{7}{5} + x^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{5}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{7}{5}}} + C = \frac{1}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot x + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2} + C;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C;$$

$$\text{д)} I = \int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2t+5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2+4}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{2} + C.$$

$$\text{Доказати } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad a > 0.$$

**Решење:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$13. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}; \quad \text{б)} I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} dx; \quad \text{в)} I = \int \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin x^3 + C.$$

$$\text{Доказати } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

**Решење:**

Оба интеграла решавамо Ојлеровим сменама.

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x \Leftrightarrow x = \frac{t^2 - a^2}{2t}, dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt, \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{t^2 + a^2}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{1}{\frac{t^2 + a^2}{2t}} \cdot \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C.$$

14. а)  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}$ ; б)  $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$ ; в)  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$ .

**Решење:**

а)  $I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{\frac{9}{4}+x^2} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| x + \frac{1}{2} \sqrt{9+4x^2} \right| + C$ ;

б)  $I = \int \left( \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| = \left\{ \begin{array}{l} x^2-4=t^2 \\ x dx = t dt \end{array} \right\}$   
 $\int dt + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| = t + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C = \sqrt{x^2-4} + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C$ ;

в)  $I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{5}} \right| + C$ .

15. **Доказати:**

а)  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ ; б)  $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C, a \neq 0$ .

**Решење:**

а)  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$   
 $= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ ;

б) Доказује се на исти начин.

16. а)  $I = \int \frac{dx}{5-4x^2}$ ; б)  $I = \int \frac{dx}{x^2-7}$ .

**Решење:**

а)  $I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{5}{4}-x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{2x + \sqrt{5}}{2x - \sqrt{5}} \right| + C$ ;

$$\text{б)} I = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} \right| + C.$$

$$17. \quad \text{Изрaчунати а)} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x + \alpha)^2 \pm \beta};$$

смена је  $x + \alpha = t$ ;

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a \left( \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a((x + \alpha)^2 \pm \beta)}};$$

смена је  $x + \alpha = \frac{\beta t}{|a|}$ .

Интеграли се овим сменама своде се на предходно доказане случајеве.

$$18. \quad \text{а)} I = \int \frac{dx}{17 + 2x + x^2}; \quad \text{б)} I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3};$$

$$\text{в)} I = \int \frac{dx}{1 + 5x - 5x^2}; \quad \text{г)} I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 16} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4^2} = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{4} + C;$$

$$\text{б)} I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} I &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{1}{5} + x - x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{9}{20} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left\{ x - \frac{1}{2} = t \right\} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\frac{9}{20} - t^2} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{9}{20}}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{\frac{9}{20}}}{t - \sqrt{\frac{9}{20}}} \right| + C = \frac{\sqrt{5}}{15} \ln \left| \frac{2\sqrt{5}x - \sqrt{5} + 3}{2\sqrt{5}x - \sqrt{5} - 3} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\text{г)} I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} 19. \quad \text{а)} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{27 - x^2 + 6x}}; & \text{б)} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}; \\ \text{в)} I &= \int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}} dx; & \text{г)} I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}}. \end{aligned}$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \int \frac{dx}{\sqrt{36 - (x-3)^2}} = \left\{ x-3=t \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{36-t^2}} = \arcsin \frac{t}{6} + C = \arcsin \frac{x-3}{6} + C;$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{2x^2 - 6x + 5}{2}} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} I &= \left\{ \frac{e^x}{e^x dx} = dt \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \left\{ t + \frac{1}{2} = u \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} = \\ &\ln \left| u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1} \right| + C; \end{aligned}$$

г)

$$I = \left\{ \frac{\ln x}{x} = dt \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{5-(t+2)^2}} = \arcsin \frac{t+2}{\sqrt{5}} + C = \arcsin \frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}} + C.$$

$$20. \quad \text{a)} I = \int \frac{x}{x^4 + 2x^2 - 3} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} dx;$$

$$\text{в)} I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \cdot \ln x} dx.$$

**Решење:**

**а)**

$$I = \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2 - 4} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} I &= \int \frac{x+3}{(x-1)^2 - 6} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{t+4}{t^2-6} dt = \int \left( \frac{t}{t^2-6} + \frac{4}{t^2-6} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t^2 - 6| + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} I &= \int \frac{x+3}{\sqrt{(x+2)^2 + 2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+2=\sqrt{2}t \\ dx=\sqrt{2}dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2t^2+2}} dt \\ &= \sqrt{2} \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{x^2+4x+6} + \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+6}}{\sqrt{2}} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} I &= \left\{ \begin{array}{l} 1 + \ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = 2 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = 2 \int \left( 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt \\ &= 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\sqrt{1 + \ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{\ln x + 1} - 1}{\sqrt{\ln x + 1} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

## 11.2. МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

- Нека су  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  диференцијабилне функције. Израз:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

називамо **формулом парцијалне интеграције**.

**Доказ:**

На основу формуле за диференцијал производа функција добијамо да је

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' \, dx = (u \cdot v' + u' \cdot v) \, dx = u \cdot (v' \, dx) + v(u' \, dx) = u \, dv + v \, du.$$

Интеграцијом ове везе добијамо  $\int d(u \cdot v) = \int (u \, dv + v \, du)$  одакле је:

$$(u \cdot v) = \int (u \, dv + v \, du) \text{ или } \int u \, dv = uv - \int v \, du, \text{ под условом да постоји } \int v \, du.$$

**Напомена:** Код парцијалне интеграције највећи проблем је одредити шта је функција  $u$ , а шта је диференцијал  $dv$ . У раду корисно је држати се следећих правила :

**а)** Код производа полинома и експоненцијалне функције или полинома и тригонометријске функције,  $u$  је увек полином.

**б)** Код производа полинома и логаритамске функције или полинома и инверзне тригонометријске функције  $u$  је увек логаритамска функција, односно инверзна тригонометријска функција.

**в)** Код производа инверзне тригонометријске и експоненцијалне функције свеједно је шта је  $u$ .

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Решити интеграле:

1. **а)**  $I = \int x e^x \, dx;$       **б)**  $I = \int x \sin x \, dx;$

**в)**  $I = \int x \cdot 2^{-x} \, dx;$       **г)**  $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx.$

**Решење:**

$$\text{а) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C;$$

$$\text{б) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \cos x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x - \int \cos x dx = x \cdot \sin x - \sin x + C;$$

$$\text{в) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 2^{-x} dx, \quad v = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-x} \end{array} \right\} = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} dx = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } I &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx, \quad v = -\operatorname{ctgx} \end{array} \right\} = -x \cdot \operatorname{ctgx} + \int \operatorname{ctgx} dx = -x \cdot \operatorname{ctgx} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= -x \cdot \operatorname{ctgx} + \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

**Напомена:** Константа интеграције за функцију  $v$  може се изоставити, и произвољну константу додајемо на крају поступка интеграције.

$$2. \text{ а) } I = \int x^2 \cos x dx;$$

$$\text{б) } I = \int x^2 e^x dx;$$

$$\text{в) } I = \int (x^2 + x + 2) e^{2x} dx;$$

$$\text{г) } I = \int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

**Решење:**

$$\text{а) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

**Напомена:** У оваквим примерима парцијална интеграција се понавља онолико пута колики је степен полинома.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad I &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \, du = 2x \, dx \\ dv = \cos x \, dx, \, v = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2J \\ J &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \sin x \, dx, \, v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x \\ I &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad I &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + x + 2, \, du = (2x+1) \, dx \\ dv = e^{2x} \, dx, \, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x+1) e^{2x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{2} J; \\ J &= \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = u, \, du = 2 \, dx \\ dv = e^{2x} \, dx, \, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (2x+1) e^{2x} - \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} (2x+1) e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \\ I &= \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x+1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} (x^2 + 2) e^{2x} + C; \end{aligned}$$

$$\text{г)} \quad I = \frac{1}{4} (2x^2 + 10x + 11) \sin 2x + \frac{1}{4} (2x + 5) \cos 2x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{3. а)} \quad I &= \int \ln x \, dx; & \text{б)} \quad I &= \int \operatorname{arctg} x \, dx; \\ \text{в)} \quad I &= \int \arcsin x \, dx; & \text{г)} \quad I &= \int \ln(x^2 + 1) \, dx. \end{aligned}$$

**Решење:**

$$\text{а)} \quad I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \, du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C;$$

$$\text{б)} \quad I = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x - J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$I = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C;$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsin x - J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2=t \\ -2x dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$I = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\text{г)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x^2+1), du = \frac{2x}{x^2+1} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2 \int \left( 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

$$4. \text{ а)} I = \int e^x \sin x dx; \quad \text{б)} I = \int e^x \cos x dx;$$

$$\text{в)} \int \sin(\ln x) dx; \quad \text{г)} I = \int e^x \sin x^2 dx.$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} (e^x (\sin x - \cos x)) + C;$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{2} (e^x (\sin x + \cos x)) + C.$$

**в)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(\ln x), \, du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x \sin(\ln x) - \int x \frac{\cos(\ln x)}{x} dx =$$

$$x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(\ln x), \, du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\}$$

$$= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin x(\ln x) dx.$$

$$2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} (x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)) + C$$

$$\text{г) } I = \frac{e^x}{5} (\sin^2 x - \sin 2x + 2) + C.$$

$$5. \text{ а) } I = \int x \cdot \arctg x \, dx; \quad \text{б) } I = \int \frac{\arctg x}{x^2} dx;$$

$$\text{в) } I = \int x \cdot \arcsin x \, dx; \quad \text{г) } I = \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

**Решење:**

**а)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x \, dx, \, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C$$

$$= \frac{1}{2} ((x^2 + 1) \arctg x - x) + C$$

**б)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{dx}{x^2}, \, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= -\frac{\arctg x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = -\frac{\arctg x}{x} + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C;$$

**в)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{2} J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - J;$$

$$J = \frac{1}{2}(-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{4}(-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C = \frac{1}{4}((2x^2-1)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$$

$$\text{г)} -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C.$$

$$6. \text{ а)} I = \int \sqrt{1+x^2} dx;$$

$$\text{б)} I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx;$$

$$\text{в)} I = \int x \ln(x^2-1) dx;$$

$$\text{г)} I = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$$

**Решение:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{1+x^2}, du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \left( \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| = x\sqrt{1+x^2} - I + \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$$

$$2I = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| \Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C;$$

б)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 \pm a^2}, du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \left( \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) dx =$$

$$x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx + a^2 \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I + a^2 \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

$$2I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| \Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\text{в)} I = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2 + C;$$

$$\text{г)} I = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$$

$$7. \text{ а)} I = \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б)} I = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \text{г)} I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а)} I &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int te^t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t, du = dt \\ dv = e^t dt, v = e^t \end{array} \right\} = 2(te^t - \int e^t dt) \\ &= 2(te^t - e^t) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C; \end{aligned}$$

б)

$$I = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left\{ \frac{1}{x} = t, -\frac{dx}{x^2} = dt \right\} = -e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}} + C;$$

$$\text{в) } I = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C;$$

г)

$$I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int dx =$$

$$= \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + C.$$

### 11.3. ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  рационална функција, где су  $n$  и  $m$  степени датих полинома  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$ .

- Ако је  $n \geq m$ , тј функција  $f(x)$  неправа рационална функција, тада дељењем полинома  $P_n(x)$  са полиномом  $Q_m(x)$ , функцију  $f(x)$  можемо приказати као збир полинома и праве рационалне функције у облику

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

### ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Израчунати интеграле:

1. а)  $I = \int \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1} dx;$

б)  $I = \int \frac{x^3}{x+3} dx.$

**Решење:**

**а)**

$$(x^4 + 2) : (x^2 + 1) = x^2 - 1 + \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$I = \int \left( x^2 - 1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x + 3 \arctg x + C;$$

б)  $I = \int \left( x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x - 27 \ln|x+3| + C.$

- Ако је  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  права рационална функција ( $n < m$ )

тада се она може раставити на збир парцијалних разломака облика

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

при чему први тип разломка потиче од реалних, а други тип од комплексних нула полинома  $Q_m(x)$  у имениоцу функције  $f(x)$ .

Према томе, проблем се своди на решавање интеграла облика

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx \text{ и } \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k} dx$$

где су  $A$  и  $B$  реалне константе које треба одредити,  $k \in \mathbb{N}$ , а квадратни трином  $x^2+bx+c$  има конјуговано комплексне нуле.

### 11.3.1. СЛУЧАЈ КАДА ПОЛИНОМ У ИМЕНИОЦУ ИМА РЕАЛНЕ И ЈЕДНОСТРУКЕ НУЛЕ

- Ако су код функције  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  реални међусобно различити бројеви

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  нуле полинома  $Q_m(x)$ , онда се функција  $f(x)$  може написати у облику

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}.$$

Овај израз се може раставити као

$$\frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m}$$

где се после израчунавања коефицијената  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , израчунавање интеграла своди на збир интеграла облика  $\int \frac{A_k}{x - x_k} dx$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Израчунати интеграле:

1. а)  $I = \int \frac{x-3}{x^3-x} dx$ ;

б)  $I = \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} dx$ ;

в)  $I = \int \frac{x+1}{x(x-3)(x+2)} dx$ ;

г)  $I = \int \frac{x}{(x+2)(x+3)} dx$ .

**Решење:**

а) Раставимо подинтегралну функцију на парцијалне разломке

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Методом неодређених коефицијената одређујемо непознате коефицијенте  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

$$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x-3 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A$$

Упоређујући коефицијенте уз променљиве добијамо систем једначина

$$A+B+C=0$$

$$B-C=1$$

$$A=3$$

Решавањем овог система једначина добијамо жељене коефицијенте.

$$A=3, \quad B=-1, \quad C=-2.$$

$$I = \int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \left[ \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right] dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+1} dx =$$

$$3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C.$$

**Напомена:** Коефицијенте  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , могли смо израчунати ако редом заменимо вредности  $x=0$ ,  $x=-1$ ,  $x=1$  у израз  $x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$ .

б)

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$x+2 = A \cdot (x^2-1) + B \cdot x(x+1) + C \cdot x(x-1)$$

$$x+2 = x^2 \cdot \underbrace{(A+B+C)}_0 + x \cdot \underbrace{(B-C)}_1 - \underbrace{A}_2$$

$$A=-2, \quad B=\frac{3}{2}, \quad C=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$I = -2 \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{|x+1| \cdot |x-1|^3}}{x^2} + C;$$

$$\text{в)} \quad I = -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{4}{15}\ln|x-3| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C;$$

$$\text{г)} \quad I = -2\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + C.$$

$$2. \text{ а) } I = \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx;$$

$$\text{б) } I = \int \frac{dx}{x^2-6x+5};$$

$$\text{в) } I = \int \frac{dx}{x^2-6x+13}.$$

**Резултат:**

$$\text{а) } I = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C;$$

$$\text{б) } I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C;$$

$$\text{в) } I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C;$$

$$3. \text{ а) } I = \int \frac{x}{x^4+2x^2-3} dx; \quad \text{б) } I = \int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-1}}.$$

**Решење:**

**а)**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2-4} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1=t \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t-2)(t+2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} \right) dt = \left\{ A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+3} \right| + C; \end{aligned}$$

**б)**

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int \frac{3t^2}{2+t} dt = 3 \int \left( t-2 + \frac{4}{2+t} \right) dt = \\ &= 3 \left( \frac{t^2}{2} - 2t \right) + 12 \ln |2+t| + C = 3 \left( \frac{(\sqrt[3]{x-1})^2}{2} - 2\sqrt[3]{x-1} \right) + 12 \ln |2+\sqrt[3]{x-1}| + C. \end{aligned}$$

### 11.3.2. СЛУЧАЈ КАДА ПОЛИНОМ У ИМЕНИОЦУ ИМА И ВИШЕСТРУКЕ НУЛЕ

- Ако су код функције  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  нуле полинома  $Q_m(x)$   $x = x_1$  реда  $k_1$ ,  $x = x_2$  реда  $k_2$  ...  $x = x_m$  реда  $k_m$ , онда се функција  $f(x)$  може написати у облику:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{C_1}{x-x_1} + \\ & + \frac{A_2}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{C_2}{x-x_2} + \dots \\ & + \frac{A_m}{(x-x_m)^{k_m}} + \frac{B_m}{(x-x_m)^{k_m-1}} + \dots + \frac{C_m}{x-x_m} \end{aligned}$$

Интеграл се своди на израчунавање збира интеграла

4. а)  $I = \int \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} dx;$

б)  $I = \int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} dx;$

в)  $I = \int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx;$

г)  $I = \int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}.$

**Решење:**

а)

$$\frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2x+1}{x(x+2)^2} = \frac{2x+1}{x \cdot (x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$2x+1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$2x+1 = x^2 \underbrace{(A+B)}_0 + x \underbrace{(4A+2B+C)}_2 + \underbrace{4A}_1$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{3}{2}$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} (\ln|x| - \ln|x+2|) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| - \frac{3}{2(x+2)} + C;$$

$$\text{б)} \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

$$x^2+2 = A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)$$

$$x^2+2 = x^3 \underbrace{(A+B)}_0 + x^2 \underbrace{(3A+C)}_1 + x \underbrace{(3A-3B-C+D)}_0 + \underbrace{(A-2B-2C-2D)}_2$$

$$A = -\frac{2}{9}, B = \frac{2}{9}, C = \frac{5}{3}, D = -3$$

$$I = -\frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2}{9} (\ln|x+1| - \ln|x-2|) - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

$$= \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - \frac{5}{3(x+1)} + \frac{3}{2(x+1)^2} + C;$$

$$\text{в)} I = 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + C;$$

$$\text{г)} I = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + 3 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C.$$

### 11.3.3. СЛУЧАЈ КАДА ПОЛИНОМ У ИМЕНИОЦУ ИМА И КОМПЛЕКСНЕ НУЛЕ

- Ако су код функције  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  нуле полинома  $Q_m(x)$  комплексне без вишеструкости, онда се функција  $f(x)$  може написати у облику

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) \cdots (x^2 + a_mx + b_m)}.$$

Овај израз се може раставити као

$$f(x) = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{x^2 + a_mx + b_m},$$

Интеграли облика  $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)} dx$  се решавају методом смене.

### ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. а)  $I = \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)};$

б)  $I = \int \frac{dx}{x^3+1};$

в)  $I = \int \frac{dx}{1+x^4};$

г)  $I = \int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)x^2(x^2+1)} dx.$

**Решење:**

а)

$$\frac{1}{(1+x) \cdot (1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+x)$$

$$1 = x^2 \underbrace{(A+B)}_0 + x \underbrace{(B+C)}_0 + \underbrace{A+C}_1$$

$$A = C = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

6)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C) \cdot (x+1)$$

$$1 = x^2 \underbrace{(A+B)}_0 + x \underbrace{(-A+B+C)}_0 + \underbrace{A+C}_1$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+3| - \frac{1}{3} I_1 =$$

$$I_1 = \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$I = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{в) } x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1) \cdot (x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B=D=\frac{1}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \arctg(x\sqrt{2}+1) + \arctg(x\sqrt{2}-1) \right) + C;$$

г)

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$A=-1, B=3, C=1, D=-2, E=0$$

$$I = -\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$= -\ln|x-1| + 3\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x^2+1| + C.$$

$$2. \text{ а) } I = \int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} dx;$$

$$\text{б) } I = \int \frac{3x}{x^3+1} dx;$$

$$\text{в) } I = \int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx;$$

$$\text{г) } I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

**Решење:**

$$\text{а) } I = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\arctg x + C;$$

$$\text{б) } I = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{в)} I = \ln|x-1| - \frac{2x-1}{(x-1)^2} + C;$$

$$\text{г)} I = -\frac{x}{(x^2-1)^2} + C.$$

## 11.4. ИНТЕГРАЦИЈА НЕКИХ ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

У поглављу методе смене обрадили смо неке једноставније типове ирационалних интеграла. Сада ћемо урадити још неке типове ирационалних интеграла који се после одговарајућих смена свode на интеграле рационалних функција.

$$\blacksquare \text{ Интеграли облика } \int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx, \frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$$

своде се на интеграле рационалне функције по променљивој  $t$  увођењем смене

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k \Rightarrow x = \frac{t^k d - b}{a - t^k c}, \quad dx = \left( \frac{t^k d - b}{a - t^k c} \right)' dt$$

при чему је број  $k$  најмањи заједнички именилац разломака  $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ .

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Израчунати интеграле:

$$1. \text{ а)} I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt[4]{\left( \frac{x-3}{x+1} \right)^3}}$$

$$\text{б)} I = \int \frac{\sqrt{2x+3}}{x} dx$$

$$\text{в)} I = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx$$

$$\text{г)} I = \int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}} dx$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{x+1} = t \\ \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{3}{4}} dt = t^{\frac{1}{4}} + C = \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}} + C$$

**б)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x+3} = t, \quad x = \frac{t^2-3}{2} \\ dx = t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{t^2}{t^2-3} dt = 2 \int \frac{t^2-3+3}{t^2-3} dt = 2 \int \left( 1 + \frac{3}{t^2-3} \right) dt$$

$$2 \left( t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = 2\sqrt{2x+3} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}} \right| + C$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = t^2, \quad x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} \right\} = 4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2}{(t+1)^2(t-1)^2} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{t-1}$$

$$A = C = D = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$$

$$I = \int \left( \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -\frac{1}{t+1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t-1| + C =$$

$$= -\frac{2t}{t^2-1} + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{\sqrt{2x+1}}{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C$$

г)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^3 \\ dx=3t^2 dt \end{array} \right\} = 3 \int \frac{(1+t)t^2}{1-t} dt = -3 \int \frac{t^3+t^2}{t-1} dt = -3 \int \left( t^2 + 2t + 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt =$$

$$-3 \left( \frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2 \ln|t-1| \right) + C = (1-x) - 3(\sqrt[3]{x-1})^2 - 6 \cdot \sqrt[3]{x-1} - 6 \ln|\sqrt[3]{x-1}-1| + C$$

$$2. \text{ а) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

$$\text{б) } I = \int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx$$

**Решење:**

$$\text{а) } I = \left\{ \begin{array}{l} x=t^6, t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6 \int \left( 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$6(t - \arctgt) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctg\sqrt[6]{x}) + C$$

$$\text{б) } I = \left\{ \begin{array}{l} x=t^6, t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{t^3-1}{t(t^2+1)} dt = 6 \int \frac{t^3-1}{t^3+t} dt = 6 \int \left( 1 - \frac{t+1}{t(t^2+1)} \right) dt$$

$$\frac{t+1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

$$A=1, B=-1, C=1$$

**К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И**

Метода смене

Парцијална интеграција

Интеграција рационалних функција

Интеграција ирационалних функција

## 12. ГЛАВА

# ***ОДРЕЂЕНИ И НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ***

### **1. ДЕФИНИЦИЈА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА**

### **2. ОСОБИНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА**

### **3. ДЕФИНИЦИЈА НЕСВОЈСТВЕНОГ ИНТЕГРАЛА**

### **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

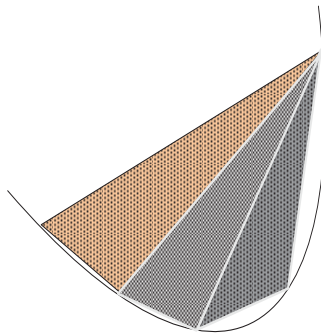
1. дефиницију одређеног интеграла,
2. особине одређеног интеграла,
3. методу смене за одређене интеграле,
4. парцијалну интеграцију за одређене интеграле,
5. несвојствене интеграле.

## 12.1. ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Један од проблема које је пракса наметнула математици је било је израчунавање површине равних фигура. Израчунавање површина полигона (троуглова, четвороуглова итд.) у елементарној геометрији изводи се веома једноставно. Насупрот томе, велики проблем представљало је израчунавање површина криволинијских фигура.

Још у 3 веку пре нове ере Архимед је израчунао површине сегмената параболе и круга, уписујући у ове фигуре полигоне са све већим бројем страница, исцрпљујући на тај начин површину сегмента површинама полигона. Метода је позната под називом метода исцрпљивања или метода есхаустије. Ову методу користили су касније и многи други математичари, решавајући проблеме за неке конкретне фамилије кривих не доводећи у питање саму дефиницију површине. Ова метода у суштини је довела до дефиниције одређеног интеграла

У 18 веку Њутн и Лајбниц дефинишу одређени интеграл и на тај начин успевају да реше проблем површине за било коју криву.



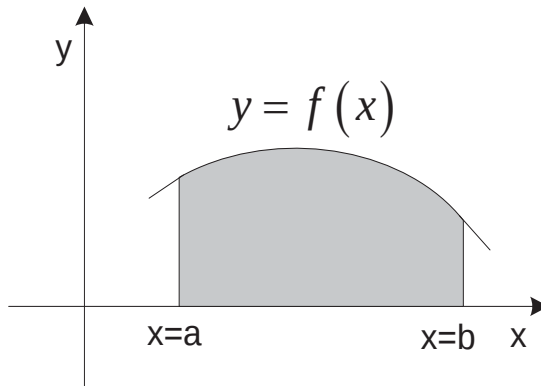
Дефинисање одређеног интеграла омогућио је решавање најразличитијих проблема као што су површине и запремине тела у простору, дужине лукова кривих, дужине пута ако је позната брзина, рада силе, момента инерције, количине наелектрисања и многи други.

## 12.2. ПОЈАМ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- Нека је функција  $f(x)$  дефинисана и ограничена на интервалу  $[a, b]$ .

**Криволинијски трапез** представља фигуру ограничену осом  $Ox$ , непрекидном ненегативном функцијом  $f(x)$ , правама  $x = a$  и  $x = b$ .

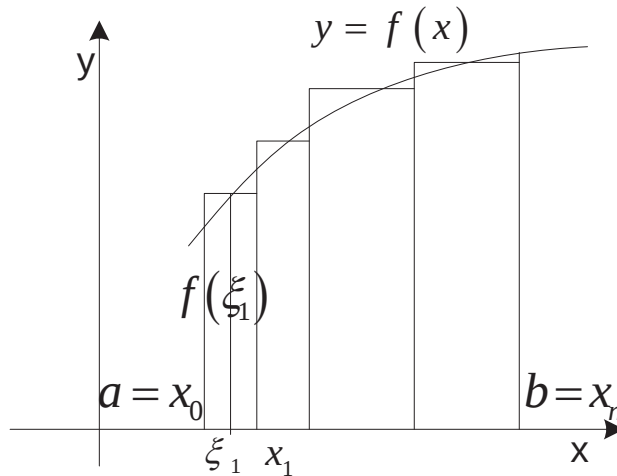
Основица криволинијског трапеза је интервал  $[a, b]$ .



- Поделимо интервал  $[a, b]$  на  $n$  произвољних делова тачкама  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Нека је  $x_1 - x_0 = \Delta x_1$ ,  $x_2 - x_1 = \Delta x_2$ , ...,  $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$

У сваком интервалу  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  изаберимо произвољну тачку  $\xi_i$  и формирајмо производе  $\Delta x_i f(\xi_i)$ . Овај производ представља површину било ког правоугаоника страница  $\Delta x_i$  и  $f(\xi_i)$ .



Уочимо збир површина свих овако добијених правоугаоника.

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

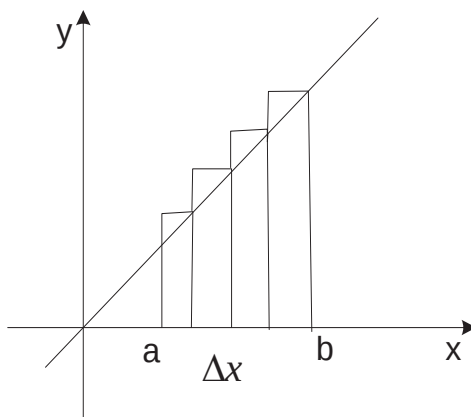
независно од поделе интервала  $[a, b]$  на  $n$  делова и избора тачака  $\xi_i$ , број  $I$ , границу интегралних сума, називамо **одређеним интегралом** функције  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$  и симболички га обележавамо:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

- Функцију  $f(x)$  зовео **подинтегралном функцијом** или **интеграндом**.
- Број  $a$  зовео **доњом**, а број  $b$  **горњом** границом интеграла.

**Пример:**

Израчунати повшину ограничену графиком функције  $f(x) = x$ , одсечком  $[a, b]$   $x$  осе и ординатама  $f(a)$  и  $f(b)$ .



### Решење:

Поделимо одсечак  $[a, b]$  на  $n$  једнаких делова  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

Нађимо збир површина свих описаних правоугаоника чије су основице  $\Delta x$ , а висине редом  $a + \Delta x$ ,  $a + 2\Delta x$ , ...,  $a + n\Delta x$ .

$$S_n = \Delta x \cdot (a + \Delta x) + \Delta x \cdot (a + 2\Delta x) + \dots + \Delta x \cdot (a + n\Delta x)$$

$$S_n = \Delta x (na + \Delta x (1 + 2 + 3 + \dots + n))$$

$$S_n = \Delta x \left( na + \Delta x \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$S_n = \Delta x na + (\Delta x)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b-a}{n} na + \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = (b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2n}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2n} \right) = (b-a) \cdot a + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$I = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

**Напомена:** Овај пример показује колико је сложено израчунавати одређени интеграл користећи појам интегралне суме чак и код најједноставнијих функција.

## 12.3. УСЛОВИ ПОСТОЈАЊА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- **Потребан услов:** Да би функција на интервалу  $[a, b]$  била интеграбилна мора да буде ограничена на том интервалу. (Обратно не важи).

**Пример:** 
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$$

Функција је ограничена али није интеграбилна зато што  $I = \int_a^b f(x) dx = 0$  за

$$x \in I, \quad I = \int_a^b f(x) dx = b - a \quad \text{за } x \in Q.$$

- **Довољан услов:** Непрекидна функција  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$  је интеграбилна на том интервалу.
- Ограничена функција  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$  са коначним бројем прекида је интеграбилна на том интервалу.

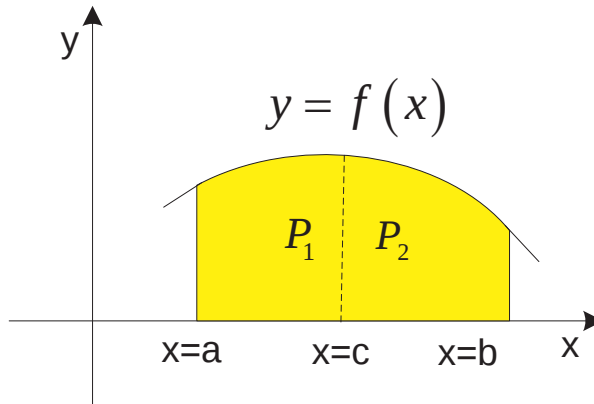
## 12.4. ОСОБИНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Из дефиниције одређеног интеграла произилазе се следеће особине:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad c \in \text{const.} \quad c \neq 0$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- Ако тачка  $c$  дели интервал  $[a, b]$  на два дела, тј.  $a < c < b$ , тада важи

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Ова особина геометријски представља сабирање површина.



где је  $P_1 = \int_a^c f(x) dx$ ,  $P_2 = \int_c^b f(x) dx$ ,  $P = \int_a^b f(x) dx$ ,  $P = P_1 + P_2$

## 12.5. ВЕЗА ОДРЕЂЕНОГ И НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

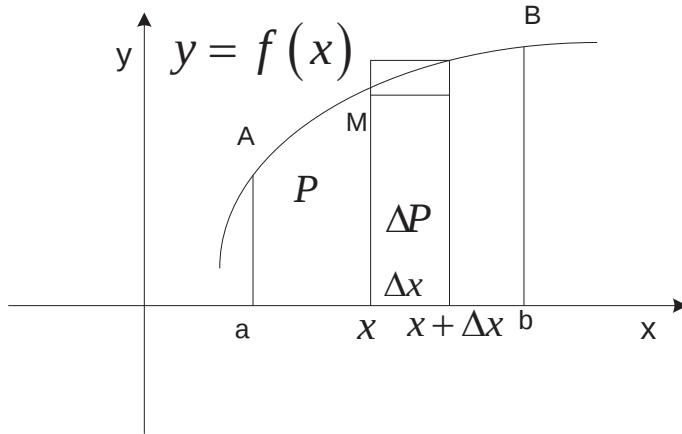
### ЊУТН-ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

Њутн и Лајбниц су доказали да постоји веза између одређеног и неодређеног интеграла. На тај начин добила се општа метода за решавање одређених интеграла и могућност њихове примене у различитим областима науке и праксе.

- Ако је функција  $f(x)$  непрекидна на интервалу  $[a, b]$ , а  $F(x)$  је примитивна функција функције  $f(x)$ , тј  $F'(x) = f(x)$  тада је

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказ:



Површина криволинијског трапеза који одговара луку  $AM$  износи

$$P(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Ако се независно променљива  $x$  промени за  $\Delta x$ , површина  $P$  промениће се за  $\Delta P$ .

Како је

$$f(x)\Delta x < \Delta P < f(x + \Delta x)\Delta x$$

$$f(x) < \frac{\Delta P}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = P'(x) = f(x)$$

Према томе функција  $P(x)$ , функција површине, је примитивна функција функције  $f(x)$ .

По претпоставци и функција  $F(x)$  је примитивна функција функције  $f(x)$ .

Две примитивне функције исте функције  $f(x)$  разликују се за константу  $C$ , тј.

$$F(x) = P(x) + C \quad x \in [a, b]$$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C.$$

за  $x = a$  добијамо

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx + C = 0 + C = C,$$

чиме је одређена константа  $C$ .

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a)$$

Узмимо сада да је  $x = b > a$ . Из предходне релације излази

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a), \text{ односно}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Применом Њутн – Лајбницевог формуле израчунати следеће интеграле:

$$1. \text{ а) } I = \int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{б) } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx$$

$$\text{в) } I = \int_0^1 \frac{dx}{x+2} \quad \text{г) } I = \int_0^4 \left( 1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx$$

**Решење:**

$$\text{а) } I = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_8^{27} = \frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 \Big|_8^{27} = \frac{3}{2} \left( \left( \sqrt[3]{27} \right)^2 - \left( \sqrt[3]{8} \right)^2 \right) = \frac{15}{2}$$

$$\text{б) } I = \operatorname{tg} x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2$$

$$\text{в) } I = \ln \frac{3}{2} \quad \text{г) } I = 4e$$

## 12.6. МЕТОДА СМЕНЕ КОД ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- Нека је  $f(x)$  непрекидна функција на интервалу  $[a, b]$ .

Уведимо смену  $x = g(t)$ .

Ако је функција  $g(t)$  има непрекидан извод на интервалу  $[\alpha, \beta]$  где је  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$ , тада је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

Увођењем смене  $x = g(t)$  мењају се границе интеграције.

Ако су полазне границе интеграције биле  $a$  и  $b$ , онда су нове границе  $\alpha = g^{-1}(a)$  и  $\beta = g^{-1}(b)$ .

**Доказ:**

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ , где је  $F(x)$  примитивна функција функције  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$ .

Како је

$d(F(g(t))) = F'(g(t)) g'(t) dt = f(g(t)) g'(t) dt$ , добијамо

$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a)$ , па је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Решити одређене интеграле:

$$2. \text{ а) } I = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx \quad \text{б) } I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} \quad \text{в) } I = \int_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$$

**Решење:**

а) Ако уведемо смену  $\sqrt{1+x} = t$ , добијамо  $x = t^2 - 1$ ,  $dx = 2t \, dt$ .

Новe границе интеграције су за  $x = 0$ ,  $t = 1$ , а за  $x = 3$ ,  $t = 2$  и добијамо:

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = 2 \int_1^2 t^2 \, dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}$$

$$\text{б) } I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^2 \\ dx=2t \, dt \\ x=1, t=0; x=2, t=1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} \, dt = \int_0^1 \frac{2t \pm 2}{t^2+1+2t} \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t+2}{t^2+1+2t} \, dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \ln(t^2+1+2t) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1$$

в)  $I = 7$ .

$$3. \text{ а) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx \quad \text{б) } I = \int_2^e \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{в) } I = \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$$

**Решење**

$$\text{а) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x \, dx = dt \\ x=0, t=\cos 0=1 \\ x=\frac{\pi}{2}, t=\cos \frac{\pi}{2}=0 \end{array} \right\} =$$

$$= - \int_1^0 (1-t^2) \, dt = \int_0^1 (1-t^2) \, dt = t \Big|_0^1 - \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{б) } I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x=2, t=\ln 2 \\ x=e, t=1 \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^1 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^1 = \ln 1 - \ln \ln 2 = -\ln \ln 2$$

в)  $I = \frac{\pi}{8}$

4. а)  $I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$  б)  $\int_0^{\sqrt{a}} x^2 \cdot \sqrt{a - x^2} dx$

**Решение**

а) 
$$I = \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x = 0, t = 0; x = r, t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$\frac{r^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

б) 
$$I = \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{a} \sin t, \\ dx = \sqrt{a} \cos t dt \\ x = 0, t = 0; x = \sqrt{a}, t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = a \sqrt{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{a - a \sin^2 t} \cos t dt =$$

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^2}{8} \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{16}$$

5. а)  $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$  б)  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)^2}$  в)  $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$

**Решение:**

а) 
$$I = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t, e^x dx = dt \\ x = \ln 2, t = 2 \\ x = \ln 3, t = 3 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{б) } I = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ x = \frac{\pi}{4}, t = 1 \\ x = \frac{\pi}{3}, t = \sqrt{3} \end{array} \right\} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} \Big|_1^{\sqrt{3}} = -\left( \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{в) } I = \frac{\pi^2}{32}$$

$$6. \text{ а) } I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx \quad \text{б) } I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx \quad \text{в) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$$

**Резултат:**

$$\text{а) } I = 4 - \pi \quad \text{б) } I = 2 - \frac{\pi}{4} \quad \text{в) } I = \frac{\pi}{16}$$

## 12.7. МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ КОД ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

- Ако су  $u(x)$  и  $v(x)$  диференцијабилне функције на интервалу  $[a, b]$ , а  $vdu$  је интеграбилна, тада је

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

**Доказ:**

Нека је  $F(x) = u(x)v(x)$ , тада је

$$dF(x) = F'(x)dx = u(x)dv(x) + du(x)v(x)$$

$$\int_a^b F'(x) dx = \int_a^b (u(x) dv(x) + du(x) v(x))$$

$$F(x) \Big|_a^b = u(x) v(x) \Big|_a^b = \int_a^b u(x) dv(x) + \int_a^b v(x) du(x)$$

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

### ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

7. а)  $I = \int_0^1 x e^x dx$       б)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$       в)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(3x) dx$

**Решење:**

а)  $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right\} = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1$

б)  $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$

$$= x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \sin 3x dx, v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx =$$

$$\text{в)} \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos 3x dx, v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} = \frac{1}{3} x \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx =$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$$

$$8. \text{ а)} I = \int_1^e \ln x dx \quad \text{б)} I = \int_1^e x^3 \ln x dx$$

$$\text{в)} I = \int_0^1 x^3 \arctg x dx \quad \text{г)} I = \int_0^1 \arcsin x dx$$

**Решење:**

$$\text{а)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e \ln e - \ln 1 - e + 1 = 1$$

$$\text{б)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx =$$

$$\frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

$$\text{в)} I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x^3 dx, v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_2^4 \frac{x^4}{1+x^2} dx =$$

$$\frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \int_2^4 \left( x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctg x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{г)} I = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$9. \text{ а)} I = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx. \quad \text{б)} I = \int_0^1 x \arctg x dx$$

$$\text{в)} I = \int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx \quad \text{г)} I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$$

**Решење:**

а) Како је подинтегрална функција парна можемо да напишемо

$$I = 2 \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = 2I_1$$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = u, \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = du \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$\sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - I_1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$2I_1 = \sqrt{2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1, I_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

$$I = \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

$$\text{б)} I = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad \text{в)} I = \frac{2}{5} (1 - e^{\pi}) \quad \text{г)} I = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

## 12.8. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

- Интеграли код којих границе интеграције нису коначне или подинтегрална функција није ограничена називају се **несвојствени интеграли**.

## 12.9. ИНТЕГРАЛИ СА БЕСКОНАЧНИМ ГРАНИЦАМА

- Нека је функција  $f(x)$  непрекидна на интервалу  $[a, +\infty)$ .

Ако постоји гранична вредност  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ , онда се она назива

**несвојственим интегралом** функције  $f(x)$  на интервалу  $[a, +\infty)$ , тј.

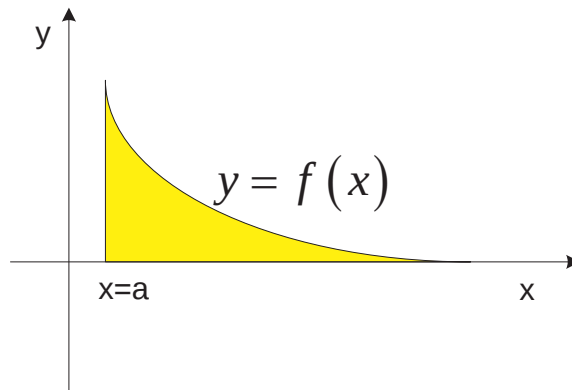
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

Ако је ова гранична вредност коначна несвојствени интеграл **конвергира**, иначе **дивергира**.

- Аналогно се дефинише **несвојствени интеграл** функције  $f(x)$  на интервалу  $(-\infty, b]$ , тј

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

- Геометријски несвојствени интеграл дефинише неограничену површину оивичену луком криве  $f(x)$ , правом  $x=a$  и  $x$  осом.



- Ако су обе границе интеграције бесконачне тада је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Решити интеграле:

$$1. \text{ а) } I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{б) } I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

$$\text{в) } I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{г) } I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

**Решење**

$$\text{а) } I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^t = \lim_{a \rightarrow +\infty} (\arctg t - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

**б)**

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^2; dx=2tdt \\ x=2, t=1; x=a, t=\sqrt{a-1} \end{array} \right\} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \arctg t \Big|_1^{\sqrt{a-1}} = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} (\arctg \sqrt{a-1} - \arctg 1) = 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

**в)**

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, -\frac{1}{x^2} dx = dt \\ x=2, t=\frac{1}{2}; x=a, t=\frac{1}{a} \end{array} \right\} = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$- \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} \right) = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1}{a} + \arcsin \frac{1}{2} = \arcsin 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{г) } I = \frac{1}{\ln 2}$$

$$2. \text{ а) } I = \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \qquad \text{б) } I = \int_1^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t, x dx = \frac{dt}{2} \\ x = 0, t = 0 \\ x = a, t = a^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{a^2} e^{-t} dt = -\frac{1}{2} e^{-t} \Big|_0^{a^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} - 1 \right) = \frac{1}{2}. \\ \text{б) } I &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 12.10. ИНТЕГРАЛИ НЕОГРАНИЧЕНИХ ФУНКЦИЈА

- Нека је  $y = f(x)$  непрекидна функција на интервалу  $(a, b]$  и  $f(x) \rightarrow \infty$  за  $x \rightarrow a$ .

Ако постоји гранична вредност  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \varepsilon > 0$ , онда се она назива **несвојственим интегралом** функције  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$ , тј

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

- Нека је  $y = f(x)$  непрекидна функција на интервалу  $[a, b)$  и  $f(x) \rightarrow \infty$  за  $x \rightarrow b$ .

Ако постоји гранична вредност  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \varepsilon > 0$ , онда се она назива **несвојственим интегралом** функције  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$ , тј

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

- Нека је функција  $y = f(x)$  неограничена у околини тачке  $c \in [a, b]$  тада се несвојствени интеграл дефинише са

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx, \varepsilon > 0.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Решити интеграле:

3. а)  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$       б)  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

в)  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$       г)  $I = \int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^3} dx$

**Решење**

а)  $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2$

б)  $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 =$   
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty$

што значи да овај интеграл дивергира.

в)  $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x = 1, t = 0; x = 2, t = \ln 2 \end{array} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\ln 2} \frac{dt}{t} =$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln t \Big|_{\varepsilon}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln \ln 2 - \ln \varepsilon) = +\infty,$

што значи да овај интеграл дивергира.

г)

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ x = -1, t = -1; x = \varepsilon, t = \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right\} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\frac{1}{\varepsilon}} te^t dt = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( te^t - e^t \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$-\left( \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = -\frac{2}{e}$$

зато што је

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^{-t}} = 0 \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0$$

$$4. \text{ а) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx \quad \text{б) } I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

**Резултат:**

а)  $I = \infty$

б)  $I = 2$

**К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И**

Одређени интеграл

Правила интеграљења одређених интеграла

Несвојствени интеграли



## 13. ГЛАВА

# ***ПРИМЕНА ИНТЕГРАЛА***

### **1. ДУЖИНА ЛУКА КРИВЕ**

### **2. ПОВРШИНА РАВНЕ ФИГУРЕ**

### **3. ЗАПРЕМИНА ОБРТНИХ ТЕЛА**

## **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. интеграљењем да одредите дужину лука криве,
2. интеграљењем да одредите површину равне фигуре,
3. интеграљењем да одредите запремину обртних тела.

# ПРИМЕНЕ ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА

## 13.1. ДУЖИНА ЛУКА КРИВЕ

- Непрекидну функцију  $y = f(x)$ , са непрекиданим изводом  $f'(x)$ , на интервалу  $[a, b]$  називамо *глатком функцијом*.
- Нека је  $f(x)$  глатка крива. *Дужина лука криве је:*

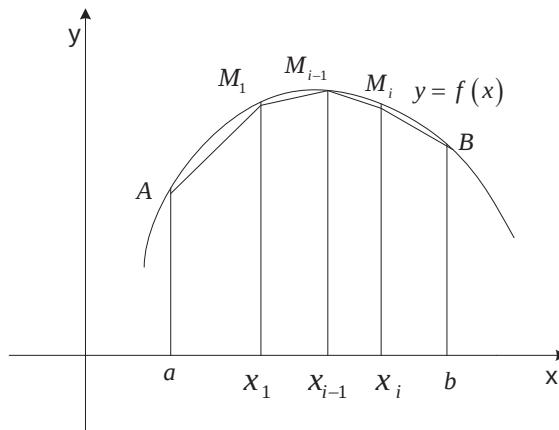
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Доказ:**

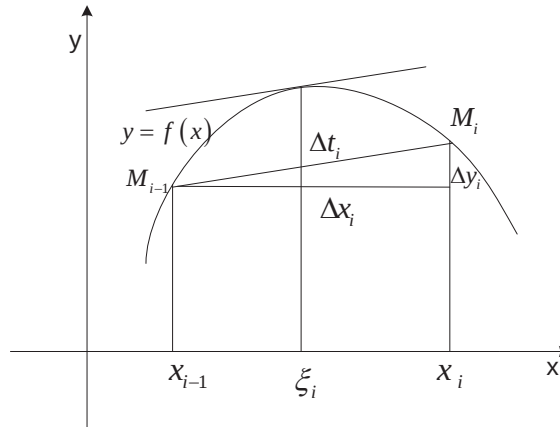
Поделимо лук  $AB$  криве  $y = f(x)$  тачкама  $M_i$   $i=1, \dots, n$  на  $n$  делова.

Тетиве  $\Delta t_i = M_{i-1}M_i$  које одговарају парцијалним луковима образују

полигоналну линију  $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$  чија је дужина  $l_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ .



Одредимо дужину тетиве  $M_{i-1}M_i$



На основу Питагорине имамо

$$\Delta t_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2},$$

а на основу Лагранжове теореме постоји тачка  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  за коју је

$$f'(\xi) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Према томе  $\Delta t_i = \Delta x_i \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}$ .

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = l.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Израчунати дужину лука следећих кривих на задатом интервалу.

1.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ , за  $x \in [1, e]$

**Решење:**

$$f'(x) = y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}} = \frac{x^2+1}{2x},$$

$$l = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right) \Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

2.  $y = \frac{x\sqrt{5x}}{3}, x \in [0,1].$

**Решење:**

$$y = \frac{x\sqrt{5x}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{x},$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{5}{4}x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4+5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} 4+5x = t^2 \\ dx = \frac{2}{5} t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \int_2^3 t^2 dt = \frac{1}{15} t^3 \Big|_2^3 = \frac{19}{15}.$$

3. Израчунати обим круга  $x^2 + y^2 = r^2$ .

**Решење**

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$l = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = 2r\pi.$$

4.  $y = \ln(\sin x), x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

5.  $y = 1 - \ln \cos x$ , за  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ .

**Решење:**

$$y' = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \operatorname{tg} x, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right\} = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} \frac{2dt}{1+t^2} = -2 \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} \frac{dt}{t^2-1} = -2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + 1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - 1}.$$

6.  $y = 2 \ln(4 - x^2)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

**Решење:**

$$y' = \frac{4x}{x^2 - 4}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \left( \frac{4x}{x^2 - 4} \right)^2 = \left( \frac{4 + x^2}{x^2 - 4} \right)^2,$$

$$l = \int_0^1 \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} dx = \int_0^1 \left( 1 + \frac{8}{x^2 - 4} \right) dx = \left( x + 8 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right) \Big|_0^1 = 1 + \ln 3.$$

7.  $y = 2 \left( \sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} \right)$  за  $x \in [0, \alpha]$ .

**Решење:**

$$y' = 2 \left( \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} - \frac{1}{1 + (\sqrt{e^x - 1})^2} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \right) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - 1}} = \sqrt{e^x - 1},$$

$$l = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (\sqrt{e^x - 1})^2} dx = \int_0^\alpha e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^\alpha = 2e^{\frac{\alpha}{2}} - 2.$$

8.  $y = \sqrt{e^{2x} + 2e^x} + \ln(e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 2e^x})$ ,  $x \in [0, \alpha]$

**Решење**

$$y' = \frac{e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x}} + \frac{1}{e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 2e^x}} \left( e^x + \frac{e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x}} \right) = \sqrt{e^{2x} + 2e^x},$$

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (e^{2x} + 2e^x)} dx = \int_0^\alpha (1 + e^x) dx = (x + e^x) \Big|_0^\alpha = e^\alpha + \alpha - 1.$$

9.  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad x \in [a, b], \quad a, b \neq 0.$

**Решење**

$$y' = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1},$$

$$I = \int_a^b \left( \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right) dx = \int_a^b \left( 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} \right) dx = x \Big|_a^b + 2 \int_a^b \frac{dx}{e^{2x} - 1} = (b - a) + 2I.$$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} e^{2x} = t, \quad 2x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{2t} \\ x = a, t = e^{2a}; \quad x = b, t = e^{2b} \end{array} \right\} = \int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln \frac{t-1}{t} \Big|_{e^{2a}}^{e^{2b}} =$$

$$\ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2b}} - \ln \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a}} = \ln(e^{2b} - 1) - 2b - \ln(e^{2a} - 1) + 2a = \ln \frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}.$$

10.  $y = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right), \quad x \in [1, a+1], \quad a > 0$

**Решење:**

$$y' = \frac{1}{2} \left( \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$I = \int_1^{a+1} \sqrt{1 + x^2 - 1} dx = \int_1^{a+1} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^{a+1} = \frac{a(a+2)}{2}.$$

11.  $y = \ln x$ ,  $x \in [\frac{3}{4}, \frac{12}{5}]$ .

**Решење:**

$$y' = \frac{1}{x}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$l = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1=t^2, 2xdx=2tdt \\ x=\frac{3}{4}, t=\frac{5}{4}; x=\frac{12}{5}, t=\frac{13}{5} \end{array} \right\} = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} dt = t \Big|_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} = \frac{27}{20}$$

$$I_2 = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, -\frac{dx}{x^2} = dt \\ x=\frac{3}{4}, t=\frac{4}{3}; x=\frac{12}{5}, t=\frac{5}{12} \end{array} \right\} = -\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{12}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$-\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{12}} = \ln 3 - \ln \frac{3}{2} = \ln 2$$

$$l = \frac{27}{20} + \ln 2.$$

12.  $y = \frac{2}{\sin x}$ ,  $x \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ .

**Решење:**

$$y' = -\frac{2 \cos x}{\sin^2 x},$$

$$1+y'^2 = 1 + \frac{4 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{\sin^4 x + 4 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{(1-\cos^2 x)^2 + 4 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{(1+\cos^2 x)^2}{\sin^4 x},$$

$$l = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{(1 + \cos^2 x)^2}{\sin^4 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left( \frac{2}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = (-2 \operatorname{ctg} x - x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

**13.** Израчунати дужину лука криве  $y = \ln(2 \cos x)$  између пресечних тачака са координатним осама

### Решење

$$\ln(2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = 0, y = 0.$$

$$y' = \frac{-2 \sin x}{2 \cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right\} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2dt}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$-2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{t^2 - 1} = -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \ln(\sqrt{3}+2).$$

У наредним примерима функција или њен извод у крајевима интервала дефинисаности има прекиде. Из тих разлога израчунавање лука своди се на несвојствени интеграл.

**14.**  $y = \frac{\sqrt{x}}{3} - x\sqrt{x}, \quad x \in [0, 9].$

**Решење**

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{1-9x}{6\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1-9x}{6\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+18x+81x^2}{36x}} = \sqrt{\frac{(1+9x)^2}{36x}} = \frac{1+9x}{6\sqrt{x}},$$

$$l = \int_0^9 \frac{1+9x}{6\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^9 \left( x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{6} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{\varepsilon}^9 = 28.$$

$$15. y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, 2].$$

**Решење**

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$l = \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\varepsilon}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 = t^2, \quad xdx = \frac{dt}{2} \\ x = \varepsilon, \quad t = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \\ x = 2, \quad t = \sqrt{3} \end{array} \right\} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}^{\sqrt{3}} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left( t \Big|_{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}^{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{3}$$

$$16. y = \arcsin e^{-x}, \quad x \in [0, 1].$$

**Решење**

$$y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1 + \frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1},$$

$$l = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1$$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t, e^x dx = dt \\ x = 0, t = 1 \\ x =, t = e \end{array} \right\} = \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln \left( t + \sqrt{t^2-1} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^e =$$

$$\ln \left( e + \sqrt{e^2-1} \right) - \ln \left( 1 + \varepsilon + \sqrt{(1+\varepsilon)^2-1} \right),$$

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \ln \left( e + \sqrt{e^2-1} \right)$$

$$17. y = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2}.$$

**Решење:**

Дата крива је дефинисана за  $x \in [0,1]$ .

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}, \quad 1+y'^2 = \frac{1}{1-x},$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 1-0} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = - \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^t = -2 \left( \lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} - 1 \right) = 2.$$

$$18. \text{ а) } y = 2x^2 - \frac{1}{16} \ln x, \quad x \in [1,2],$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad x \in [0,1],$$

$$\text{в) } y = \ln(1-x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$\text{г) } y = \frac{2}{\cos x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\text{д) } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \in [1,4].$$

**Решење:**

$$\text{а) } l = 6 + \frac{1}{16} \ln 2, \quad \text{б) } l = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right),$$

$$\text{в) } l = \ln 3 - \frac{1}{2},$$

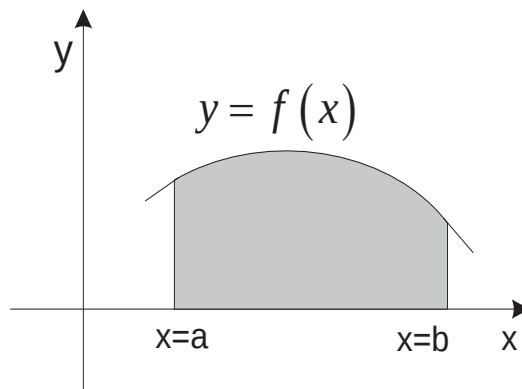
$$\text{г) } l = 2 - \frac{\pi}{4},$$

$$\text{д) } l = \frac{20}{9}.$$

# ПРИМЕНЕ ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА

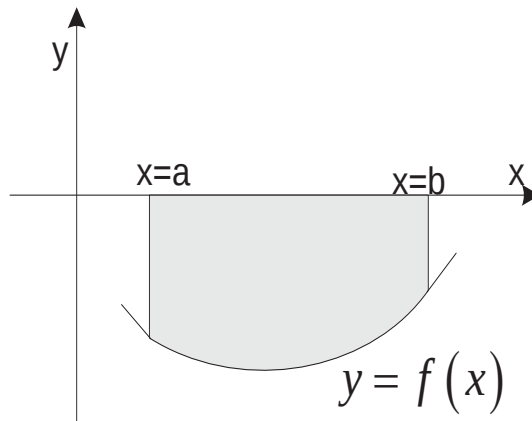
## 13.2. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНА РАВНЕ ФИГУРЕ

- Ако је  $f(x)$  непрекидна и ненегативна функција на интервалу  $[a, b]$ , онда површина ограничена осом  $x$ , графиком функције  $f(x)$ , правама  $x = a$  и  $x = b$  износи  $P = \int_a^b f(x) dx$ .



- Ако је функција  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$  негативна онда је

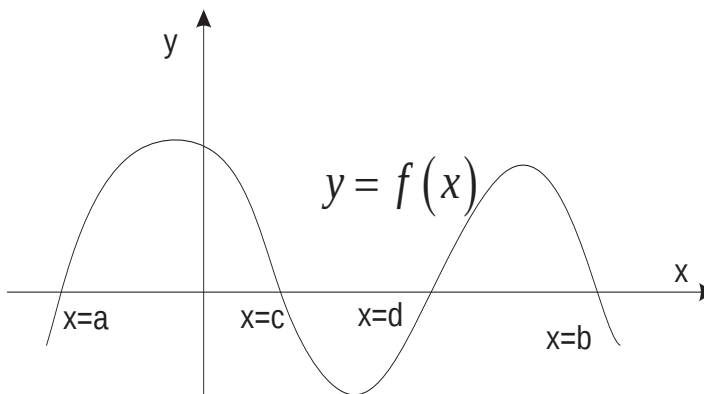
$$P = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



- Ако функција  $f(x)$  на интервалу  $[a, b]$  мења знак онда се површина коју ова функција образује са  $x$  осом и правима  $x = a$  и  $x = b$  добија тако што се интервал подели на подинтервале у којима је  $f(x) \geq 0$  и на подинтервале у којима је  $f(x) \leq 0$ . Површина ће бити збир вредности

интеграла  $P = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \int_d^b f(x)dx$  или

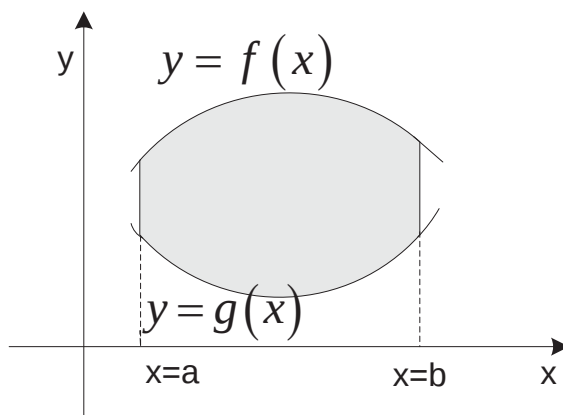
$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$



- Ако је област ограничена графицима непрекидних функција  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $f(x) \geq g(x)$  на интервалу  $[a, b]$  и правима  $x = a$  и  $x = b$ , тада је површина

разлика површина два криволинијска трапеза, тј

$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

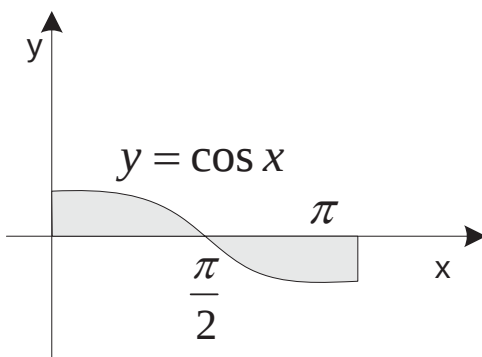


## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Израчунати површину ограничену линијама:

1.  $y = \cos x$  и правама  $x = 0$  и  $x = \pi$ .

**Решење:**



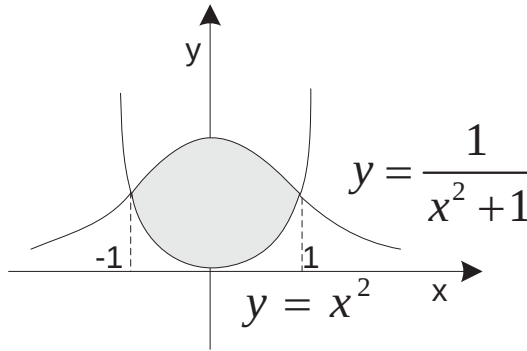
$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

2.  $y = \frac{x^2}{2}$  и  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

**Решење**

Пресечне тачке функција се добијају решавањем система једначина:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$



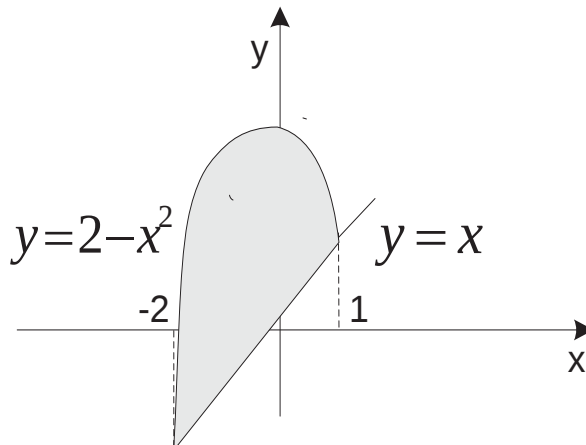
Тражена површина износи:

$$P = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left( \arctg x - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

3.  $y = -x^2 + 2$  и  $y = x$

**Решење**

Пресечне тачке функција су  $-x^2 - x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$ .



Тражена површина износи:

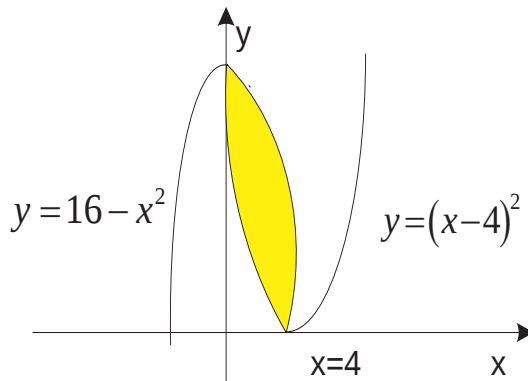
$$P = \int_{-2}^1 (-x^2 + 2) dx - \int_{-2}^1 x dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

4.  $y = (x-4)^2$  и  $y = 16 - x^2$ .

### Решење

Пресечне тачке кривих су:

$$(x-4)^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$



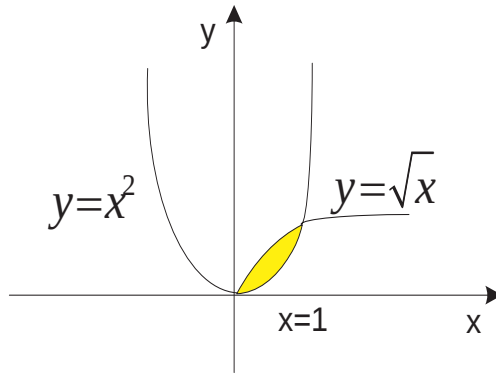
Тражена површина износи:

$$P = \int_0^4 (16 - x^2 - (x-4)^2) dx = 2 \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2 \left( 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 2 \left( 32 - \frac{64}{3} \right) = \frac{64}{3}.$$

5.  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$

### Решење

Пресечне тачке функција, уз услов  $x > 0$ , су:  $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ .



$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx = \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

6.  $y = x^2$  и  $y = 2 - x^2$ .

**Решење**

Пресечне тачке функција су:  $x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

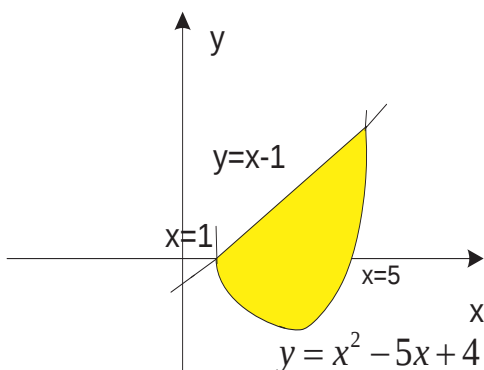
$$P = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{8}{3}$$

7.  $y = x^2 - 5x + 4$  и  $y = x - 1$

**Решење**

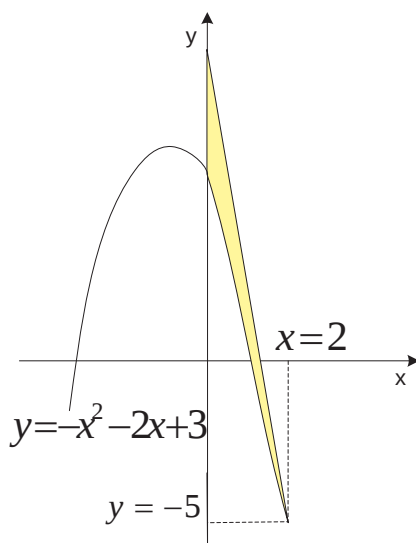
Пресечне тачке функција су:  $x^2 - 5x + 4 = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$ .

$$P = \int_1^5 ((x-1) - (x^2 - 5x + 4)) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx = \frac{32}{3}$$



8. Одредити површину ограничену параболом  $y = -x^2 - 2x + 3$ , њеном тангентом у тачки  $M(2, y)$  и  $y$ -осом.

**Решење**



Како тачка  $M(2, y)$  припада параболи, биће  $y = -5$ .

$y' = -2x - 2$ , па је  $k = y'(2) = -6$ . Једначина тангенте параболе у тачки  $M(2, -5)$  гласи  $y + 5 = -6 \cdot (x - 2)$  или  $y = 7 - 6x$ .

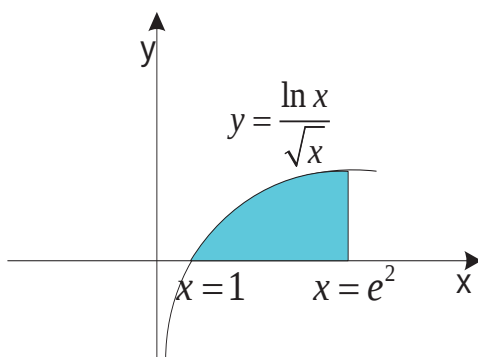
Тражена површина износи:

$$P = \int_0^2 (7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3)) dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \left. \frac{(x - 2)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

9. Израчунати површину фигуре ограничене графиком функције

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ над одсечком } [1, e^2]$$

**Решење:**



Тражена површина износи

$$P = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} = 2 \left( x^{\frac{1}{2}} \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx \right) = 4e - 4x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{e^2} = 4$$

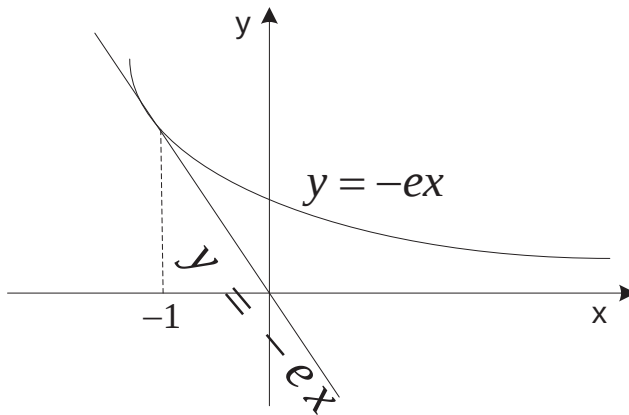
10. Одредити површину која је ограничена луком криве  $y = e^{-x}$ , њеном асимптомом и тангентом у тачки  $M(-1, y_0)$ .

**Решење:**

Координата  $y_0$  тачке  $M$  је  $y_0 = e^{-(-1)} = e$ , па једначина тангенте дате криве у тачки  $M(-1, e)$  гласи

$$y - e = y'(-1)(x + 1).$$

Како је  $y' = -e^{-x}$ ,  $y'(-1) = -e$ , па је  $y - e = -e(x + 1)$ , или  $y = -ex$  тражена једначина тангенте. Асимптота је  $x$  оса.



$$P = \int_{-1}^{+\infty} e^{-x} dx - \int_{-1}^0 (-ex) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-1}^a e^{-x} dx - \int_{-1}^0 (-ex) dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left( -e^{-x} \right) \Big|_{-1}^a + e \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 = - \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-a} - e) - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}$$

Израчунати површину ограничену кривим линијама :

11.  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ ,  $x = e$  и  $y = 0$

Резултат:  $P = \frac{1}{3}$ .

12.  $y^2 = 2x + 1$  и  $x - y - 1 = 0$ .

Резултат:  $P = \frac{16}{3}$ .

13.  $y^2 + y + x = 6$  и  $x = 0$ .

Резултат:  $P = \frac{125}{6}$ .

14.  $y = 2 - x^2$  и  $y = |x|$ .

Резултат:  $P = \frac{7}{3}$ .

15.  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $y = 0$  и  $x = 1$ .

**Резултат:**  $P = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}.$

**16.**  $y = \frac{x^2 - 1}{2}, y = x + 1$

**Резултат:**  $P = \frac{16}{3}.$

**17.** Израчунати површину ограничену кривом  $y = x^2 - 2x + 2$ , њеном тангентом у тачки  $M(3, y)$  и  $y$  - осом.

**Резултат:**  $P = 9.$

## ПРИМЕНЕ ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА

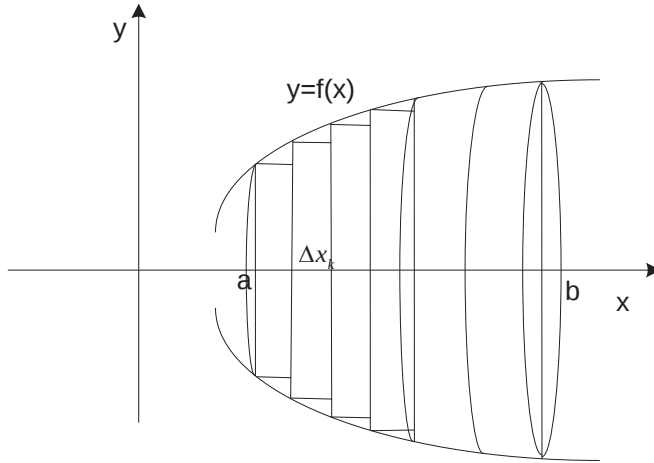
### 13.3. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЗАПРЕМИНА ОБРТНИХ ТЕЛА

- Нека је функција  $f(x)$  непрекидна и сталног знака на интервалу  $[a, b]$ .
- Зап्रेмини обртног тела једнака је:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Доказ:**

Када се део функције ограничен луком криве  $f(x)$ , одсечком  $[a, b]$  и правама  $x = a$  и  $x = b$  обрће око  $x$  осе настаје обртно тело.



Ако одсечак  $[a, b]$  поделимо тачкама  $a = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$  на  $n$  делова, тада сваки од уписаних правоугаоника има основицу  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  и висину  $y_k, k = 1, 2, \dots, n$ .

При обртању правоугаоника око  $x$  осе образује по један ваљак запремине

$$V_k = y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k$$

где је  $y_k$  полупречник основе ваљка,  $\Delta x_k$  његова висина.

Збир запремина свих тих ваљака је

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k.$$

- **Запремини обртног тела** једнака је граничној вредности тога збира (ако постоји), када се број деобених тачака бескобачно увећава, тј.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

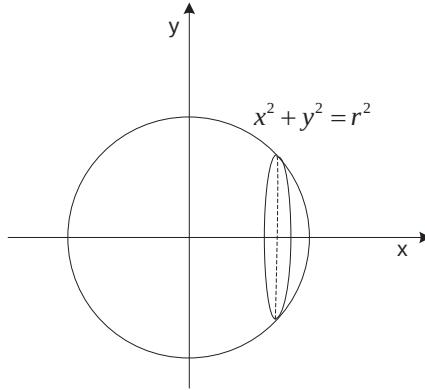
- **Запремина обртног тела** које се добије ротацијом задате функције око  $y$  осе добија се по обрасцу

$$V = \pi \int_c^d x^2(y) dy.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Израчунати запремину лопте полупречника  $r$ .

**Решење:**



Лопта се добија ротацијом круга једначине  $x^2 + y^2 = r^2$  око  $x$ -осе.

$$V = 2\pi \int_0^r y^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

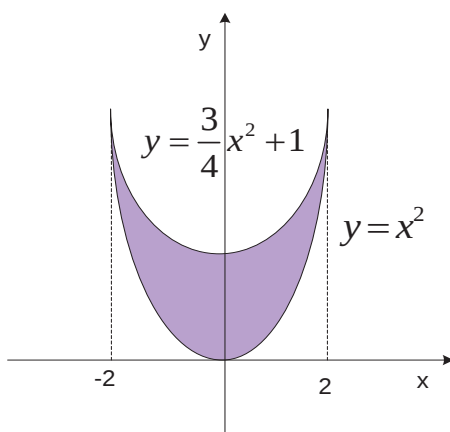
2. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око  $x$ -осе површи ограничене линијама  $y = x^2$  и  $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ .

**Решење:**

Пресечне тачке функција су решења система  $y = x^2$  и  $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ . Добијамо

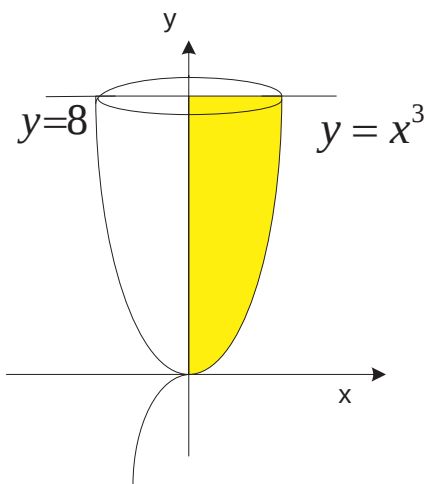
$$x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ и } y = 4, \text{ па се дате криве секу у тачкама}$$

$$A(-2, 4) \text{ и } B(2, 4).$$



$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^2 \left( \left( \frac{3}{4}x^2 + 1 \right)^2 - (x^2)^2 \right) dx = 2\pi \int_0^2 \left( \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 - x^4 \right) dx = \\
 &= 2\pi \int_0^2 \left( -\frac{7}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \right) dx = 2\pi \left( -\frac{7}{16} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.
 \end{aligned}$$

3. Израчунати запремину обртног тела које се добија када површина коју чине криве  $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 0$ , ротира око  $y$  осе



**Решење**

$$V = \pi \int_0^8 x(y)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3\pi}{5} \left( \sqrt[3]{y} \right)^5 \Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

4. Израчунати запремину обртног тела које се добија када површина коју чине криве  $xy = 4$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ , ротира око  $x$  осе

**Решење**

$$V = \pi \int_2^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_2^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x} \Big|_2^4 = 4\pi$$

5. Израчунати запремину обртног тела које се добија када површина коју чине криве  $xy = 3$ ,  $x + y = 4$ , ротира око  $x$  осе

**Решење**

Пресечне тачке функција су:

$$x + y = 4 \wedge xy = 3 \Leftrightarrow y = 4 - x, x(4 - x) = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1.$$

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi \int_1^3 (4 - x)^2 dx = \pi \int_1^3 (16 - 8x + x^2) dx = \frac{26}{3} \pi$$

$$V_2 = \pi \int_1^3 \left(\frac{3}{x}\right)^2 dx = 9\pi \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = 6\pi$$

$$V = \frac{8}{3} \pi$$

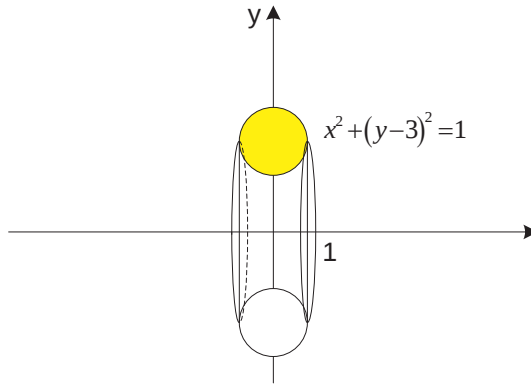
6. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око  $x$  - осе криве

$$\text{линије } x^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

**Решење:**

Дата једначина представља круг са центром  $S(0, 3)$  и полупречником  $r = 1$ .

Из ње је  $y = 3 \pm \sqrt{1 - x^2}$ , па су  $y_1 = 3 + \sqrt{1 - x^2}$  и  $y_2 = 3 - \sqrt{1 - x^2}$  једначине горњег и доњег полукруга тог круга.



Тело које настаје ротацијом дате криве је торус чија је запремина

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 \left( (3 + \sqrt{1-x^2})^2 - (3 - \sqrt{1-x^2})^2 \right) dx \\
 &= 24\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 24\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 6\pi^2.
 \end{aligned}$$

7.  $y = \sin x$ ,  $x=0$  и  $x=\pi$  око  $x$  осе.

**Резултат:**  $V = \frac{\pi^2}{2}$

8.  $x^2 + y^2 = 4$  и  $y^2 - 3x = 0$  око  $x$  осе.

**Резултат:**  $V = \frac{19}{6}\pi$

9.  $x^2 - y^2 = 4$  и  $y^2 - 3x = 0$  око  $x$  осе.

**Резултат:**  $V = \frac{40}{3}\pi$ .

10.  $y = 5^x$ ,  $y = 3^{-x}$  и  $x=2$  око  $x$  осе.

**Резултат:**  $V = \pi \left( \frac{312}{\ln 5} - \frac{40}{81 \cdot \ln 3} \right)$ .

11.  $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$  ,  $x=0$  ,  $x=1$  и  $y=0$  око  $x$  осе.

**Резултат:**  $V = \pi \left( 1 + 2 \ln \frac{4}{5} \right)$ .

12. Површина ограничена кривом  $x^2 + y^2 = 16$  ,правом  $x = 2$  и тангентома у пресечним тачкама дате праве и криве ротира око  $x$  осе. Наћи запремину обртног тела.

**Резултат:**  $V = \frac{32}{3} \pi$ .

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Дужина лука криве  
Површина равне фигуре  
Запремина обртног тела

## 14. ГЛАВА

# ***ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ***

- 1. ФУНКЦИЈЕ ДВЕ НЕЗАВИСНО  
ПРОМЕНЉИВЕ**
- 2. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ПРВОГ РЕДА**
- 3. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ДРУГОГ РЕДА**
- 4. ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ**
- 5. ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈА  
ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ**

## **ЦИЉЕВИ УЧЕЊА**

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију и особине функције две независно променљиве,
2. одређивање парцијалних извода првог и другог реда
3. одређивање тоталног диференцијала функције
4. одређивање екстремних вредности функција две променљиве

## 14.1. ФУНКЦИЈЕ ДВЕ НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВЕ

**Дефиниција:** Величина  $z$  назива се функцијом променљивих величина  $x$  и  $y$  на скупу  $D \subset R \times R$ , ако сваком уређеном пару  $(x, y) \in D$  по неком закону кореспонденције  $f$  одговара нека одређена вредност променљиве  $z$ :

$$z = f(x, y).$$

## 14.2. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ПРВОГ РЕДА

Парцијални изводи функције  $z = f(x, y)$  по променљивим  $x$  и  $y$  су  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

**Напомена:** Ознаке  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  треба узимати као симболе, а не као разломке.

## 14.3. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ДРУГОГ РЕДА

Парцијални изводи парцијалних извода  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  по променљивима  $x$  и  $y$  су парцијални изводи *другог реда* по  $x$  и  $y$  респективно.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  - парцијални извод другог реда функције  $z$  по  $x$ ,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  - парцијални извод другог реда функције  $z$  по  $y$ ,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  - мешовито парцијални извод другог реда функције  $z$  по  $x$  и  $y$ .

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Наћи прве парцијалне изводе функције:

1.  $z = x^2 + y^2$ .    **Решење:**  $z'_x = 2x$ ,  $z'_y = 2y$ .

2.  $z = \frac{x}{y}$ .    **Решење:**  $z'_x = \frac{1}{y}$ ,  $z'_y = -\frac{x}{y^2}$ .

3.  $z = e^{\sin xy}$ .    **Решење:**  $z'_x = ye^{\sin xy} \cos xy$ ,  $z'_y = xe^{\sin xy} \cos xy$ .

4. Наћи парцијалне изводе првог и другог реда  $z = x^3 + xy + y^3$ .

**Решење:**  $z'_x = 3x^2 + y$ ,  $z'_y = 3y^2 + x$ ,  $z''_{xx} = 6x$ ,  $z''_{xy} = 1$ ,  $z''_{yx} = 1$ ,  $z''_{yy} = 6y$ .

5. Доказати да функција  $z = xe^{-\frac{y}{x}}$  задовољава једначину  $xz''_{xy} + 2(z'_x + z'_y) = yz''_{yy}$ .

**Решење:** Како је  $z'_x = e^{-\frac{y}{x}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)$ ,  $z'_y = -e^{-\frac{y}{x}}$ ,  $z''_{xy} = -\frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}$ ,  $z''_{yy} = \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}}$ , биће:

$$xz''_{xy} + 2(z'_x + z'_y) = e^{-\frac{y}{x}} \left( -\frac{y}{x} + 2 \left( -1 + 1 + \frac{y}{x} \right) \right) = \frac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}} = yz''_{yy}.$$

6. Дата је функција  $z = \frac{xy}{x-y}$ . Израчунати  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

**Решење:**

Имамо:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$  па је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}. \text{ Стога је}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 4xy + 2x^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y}, \quad x \neq y.$$

7. Дата је функција  $z = e^{\frac{x}{y}}$ . Доказати да је  $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$ .

**Решење:** Како је  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left( -\frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^3} \right) e^{\frac{x}{y}}$  биће:

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

8. Проверити да ли функција  $z = \ln(x^2 + y^2)$  задовољава једначину  $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ .

**Решење:**

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}, z''_{xx} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Сада је очигледно  $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ .

9. Дата је функција  $z = \frac{xy}{x-y}$ . Доказати:  $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \frac{2}{x-y}$ .

**Решење:**

$$z'_x = \frac{-y^2}{(x-y)^2} \Rightarrow z''_{xx} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}, z''_{xy} = \frac{-2xy}{(x-y)^3};$$

$$z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2} \Rightarrow z''_{yy} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}.$$

$$\text{Сада је } z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \frac{2y^2 - 4xy + 2x^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y}, \quad x \neq y.$$

## 14.4. ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Тотални диференцијал првог реда дефинише се као:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Тотални диференцијал другог реда дефинише се као:

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Наћи тотални диференцијал првог и другог реда за функцију  $z = x^2 - xy + y^2$ .

**Решење:**

$$z'_x = 2x - y, z'_y = 2y - x.$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \Rightarrow dz = (2x - y) dx + (2y - x) dy.$$

$$z''_{xx} = 2, z''_{xy} = -1, z''_{yy} = 2,$$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 \Rightarrow d^2 z = 2 dx^2 - 2z''_{xy} dx dy + 2 dy^2.$$

## 14.5. ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Функција  $z = f(x, y)$  има у тачки  $M(x_0, y_0)$  **локални максимум (минимум)** ако постоји околина тачке  $M$  која цела припада области дефинисаности  $D$  таква да за било које  $M(x, y)$  из те околине важи  $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ,  $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$ .

Тачке локалног максимума и минимума називамо **екстремима** функције. Да би функција  $z = f(x, y)$  у некој тачки имала екстремну вредност, треба да буде диференцијабилна у околини те тачке и да буде  $z'_x = 0$  и  $z'_y = 0$  у тој тачки.

Тачка  $M(x_0, y_0)$  назива се **стационарном тачком** диференцијабилне функције  $z = f(x, y)$  ако су први парцијални изводи у тој тачки једнаки нули  $z'_x(x_0, y_0) = 0$  и  $z'_y(x_0, y_0) = 0$ .

Нека функција  $z = f(x, y)$  има непрекидне парцијалне изводе другог реда у околини тачке  $M(x_0, y_0)$  и нека је  $M(x_0, y_0)$  стационарна тачка.

Означимо са:

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = z''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = z''_{yy}(x_0, y_0),$$

$$\Delta = B^2 - AC.$$

Функција  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(x_0, y_0)$  има:

- локални максимум ако је  $\Delta < 0$  и  $A < 0$  ( $C < 0$ ),
- локални минимум ако је  $\Delta < 0$  и  $A > 0$  ( $C > 0$ ),
- нема екстремне вредности ако је  $\Delta > 0$ ,
- за  $\Delta = 0$  проблем треба даље испитати.

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Наћи екстремне вредности функције  $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$ .

**Решење:**

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$ . Решавамо систем једначина:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ односно}$$

$$\left. \begin{aligned} 6x^2 - 36y &= 0 \\ 6y^2 - 36x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 - 6y &= 0 \\ y^2 - 6x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Из прве једначине имамо да је  $y = \frac{6}{x^2}$ .

Замењујући  $y$  у другу једначину добијамо:

$$\frac{x^4}{36} - 6x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 216) = 0 \Rightarrow x(x - 6)(x^2 + 6x + 36) = 0.$$

Одавде следи да је  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 6$ , а остала два корена су комплексна (добијају се као комплексни корени једначине  $x^2 + 6x + 36 = 0$ ).

Замењујући  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 6$  у једначину  $y = \frac{6}{x^2}$  добијамо  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 6$ .

Критичне тачке за функцију  $z = f(x, y)$  су  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(6, 6)$ .

Нађимо сада парцијалне изводе другог реда.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

Одредимо вредности  $A, B, C$  и  $\Delta$  за прву критичну тачку  $M_1(0, 0)$ .

$$A = 0, B = -36, C = 0.$$

$$\Delta = B^2 - AC = (-36)^2 = 36^2 > 0.$$

Како је за  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$   $\Delta > 0$  функција нема екстремну вредност у тој тачки.

За другу критичну тачку  $M_2(6, 6)$  добијамо:

$$A = 72, B = -36, C = 72.$$

$$\Delta = B^2 - AC = (-36)^2 - 72 \cdot 72 = 36^2 - 72^2 < 0.$$

Како је  $\Delta < 0$  то функција има екстремну вредност у тачки  $M_2(6, 6)$ , а како је  $A=72 > 0$  следи да функција за  $x_2=6$ ,  $y_2=6$  има минимум.  $z_{\min} = z(6, 6) = -2$ .

2. Наћи екстремуме функције  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .

**Решење:**

Потребни услови за егзистенцију екстремума су:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 2y = 2y(1-x) = 0.$$

Дуги услов је задовољен за  $y = 0$  или  $x = 1$ .

1) Заменом  $y = 0$  из првог услова добијамо  $6x^2 + 10x = 0$ , одакле налазимо  $x = 0$  или  $x = -5/3$ . Према томе, добили смо две стационарне тачке:  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(-5/3, 0)$ .

2) За  $x = 1$  први услов постаје  $y^2 = 16$ . Налазимо  $y = \pm 2$ , па имамо још две стационарне тачке:  $M_3(1, 4)$  и  $M_4(1, -4)$ .

Парцијални изводи другог реда су:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x + 2.$$

Природа стационарних тачака:

$$M_1(0, 0): A = 10, B = 0, C = 2, AC - B^2 = 20 > 0.$$

Минимум  $z_{\min} = 0$ .

$$M_2(-5/3, 0): A = -10, B = 0, C = 16/3, AC - B^2 < 0.$$

Седласта тачка.

$$M_3(1, 4): A = 22, B = -8, C = 0, AC - B^2 < 0. \text{ Седласта тачка.}$$

$$M_4(1, -4): A = 22, B = 8, C = 0, AC - B^2 < 0. \text{ Седласта тачка.}$$

3. Наћи локалне екстреме функције  $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .

**Решење:**

Стационарне тачке су:

$$M_1(1, 2), M_2(-1, -2), M_3(-2, -1), M_4(2, 1).$$

За  $M_1(1, 2)$  имамо:

$$A = 6, B = 12, C = 6;$$

$$\Delta = 108 > 0.$$

Функција нема екстремну вредност.

За  $M_2(-1, -2)$  имамо:

$$A = -6, B = -12, C = -6;$$

$$\Delta = 108 > 0.$$

Функција нема екстремну вредност.

За  $M_3(-2, -1)$  имамо:

$$A = -12 < 0, B = -6, C = -12;$$

$$\Delta = -108 < 0.$$

Функција има локални максимум.

$$z_{\max} = 28.$$

За  $M_4(2, 1)$  имамо:

$$A = 12 > 0, B = 6, C = 12;$$

$$\Delta = -108 < 0.$$

Функција има локални минимум.

$$z_{\min} = -28.$$

**Наћи локалне екстремне вредности следећих функција:**

1.  $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

2.  $z = e^{y-x} (x^2 - 2y^2).$

3.  $z = -x^3 - 8y^3 + 6xy - 5.$

4.  $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y.$

5. Одредити домен функције  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

6. Наћи парцијалне изводе функције  $z = x^2 + y^2.$

7. Испитати непрекидност функције  $z = \begin{cases} 5 - x - y & (x, y) \neq (2, 1), \\ 1 & (x, y) = (2, 1). \end{cases}$

8. Наћи тотални диференцијал првог и другог реда за функцију  $z = \ln(x + y^2)$ .
9. Наћи локалне екстреме функције  $z = xy(6 - x - y)$ .
10. Наћи условне екстреме функције  $z = xy$  при услову  $x - y = 2$ .

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Функција две променљиве  
Парцијални извод првог реда  
Парцијални извод другог реда  
Екстремне вредности  
Тотални диференцијал  
Функција Лагранжа



## 15. ГЛАВА

# ***БЕТА И ГАМА ФУНКЦИЈА***

1. БЕТА ФУНКЦИЈА
2. ГАМА ФУНКЦИЈА
3. ВЕЗА ИЗМЕЂУ БЕТА И ГАМА ФУНКЦИЈЕ

### ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. дефиницију и особине Бета функције
2. дефиницију и особине Гама функције

# БЕТА И ГАМА ФУНКЦИЈА

## 15.1. БЕТА ФУНКЦИЈА

Бета функција је дефинисана интегралом:

$$B:(p, q) \rightarrow \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0 \wedge q > 0.$$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}} dz.$$

**Пример:**

Решити интеграл  $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{3}} dx$ .

$$p-1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}, \quad p > 0,$$

$$q-1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow q = \frac{4}{3}, \quad q > 0.$$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{3}} dx = B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

## 15.2. ГАМА ФУНКЦИЈА

Гама функција је дефинисана интегралом

$$\Gamma: p \rightarrow \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad 0 < p < +\infty.$$

Особине Гама функције:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0;$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\Gamma(p)(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1.$$

**Пример:**

Решити интеграл  $\int_1^{+\infty} (x-1)^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx$ .

**Решење:**

Увођењем смене  $x-1=t$ , добијамо:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} (x-1)^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-(t+1)} dt = \frac{1}{e} \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{e} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{e} \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e} \cdot \frac{3!!}{2^4} \sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{16e}. \end{aligned}$$

$$p-1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = \frac{5}{2}.$$

## 15.3. ВЕЗА ИЗМЕЂУ БЕТА И ГАМА ФУНКЦИЈЕ

В- и Г- функцију можемо повезати формулом:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

**Пример:**

Решити интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$ .

**Решење:**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2} = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2} = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

## ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Решити интеграле:

$$1. \int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x^2 = t$ , добијамо:

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{2^6}.$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{5!!}{2^5} \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^5} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{2^5}.$$

$$2. \int_0^1 x^6 (1-x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x^3 = t$ , добијамо:

$$\int_0^1 x^6 (1-x^3)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{\frac{4}{3}} (1-t)^{\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3^6}.$$

$$p-1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow p = \frac{7}{3}, p > 0,$$

$$q-1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow q = \frac{5}{3}, q > 0.$$

$$\Gamma(4) = 3! = 6,$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Gamma(p)(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, \quad n > 0 \quad \left( \text{смена } x = t^{\frac{1}{n}} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p} dx, \quad a > 0, b > 0, n > 0 \quad \left( \text{смена } x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

$$3. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2} dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x = t^{\frac{1}{3}}$ , добијамо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{9}{15}}}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{6}{15}, \frac{24}{15}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{6}{15}\right)\Gamma\left(\frac{24}{15}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{9\pi}{45 \sin \frac{3\pi}{5}}.$$

$$p-1 = -\frac{9}{15} \Leftrightarrow p = \frac{6}{15}, p > 0,$$

$$q + \frac{6}{15} = \frac{30}{15} \Leftrightarrow q = \frac{24}{15}, q > 0.$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{24}{15}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{9}{15}\right) = \frac{9}{15} \Gamma\left(\frac{9}{15}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{15}\right) \Gamma\left(\frac{6}{15}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{9\pi}{15}} = \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{5}}.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x^3 = t$ , добијамо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(1+t)} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x = t^{\frac{1}{4}}$ , добијамо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

$$p-1 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}, p > 0,$$

$$q + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{3}{4}, q > 0.$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi.$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^6}.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x = t^{\frac{1}{2}}$ , добијамо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^6} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-6} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^6} dt.$$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad p > 0 \wedge q > 0.$$

$$p-1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}, p > 0,$$

$$p+q = 6 \Leftrightarrow q = \frac{11}{2}, q > 0.$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^6} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{63\pi}{32}.$$

$$\Gamma(6) = 5! = 120,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \Gamma\left(5 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(9)!!}{2^5} \sqrt{\pi} = \frac{945\sqrt{\pi}}{32}.$$

$$7. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x = t^{\frac{1}{5}}$ , добијамо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{4}{5}}}{(1-t)^{\frac{1}{5}}} dt = \frac{1}{5} \int_0^1 t^{-\frac{4}{5}} (1-t)^{-\frac{1}{5}} dt$$

$$p-1 = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow p = \frac{1}{5}, p > 0,$$

$$q-1 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow q = \frac{4}{5}, q > 0.$$

$$\frac{1}{5} \int_0^1 t^{-\frac{4}{5}} (1-t)^{-\frac{1}{5}} dt = \frac{1}{5} B\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}}.$$

$$8. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $x = a\sqrt{t}$ ,  $t > 0$ , добијамо:

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4 \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

$$I_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx, \quad (\text{смена } \sin x = \sqrt{t}, t > 0)$$

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^6 x dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $\sin(x) = \sqrt{t}$ , добијамо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^6 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^4 (1-t)^3 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{7}{2}} (1-t)^{\frac{5}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma(8)}. \end{aligned}$$

$$\Gamma(8) = 7! = 5040,$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{7!!}{2^4} \sqrt{\pi} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5!!}{2^3} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma(8)} = \frac{35\pi}{28672}.$$

$$10. \int_0^1 tg^{\frac{1}{3}} x dx.$$

**Решење:**

$$\int_0^1 tg^{\frac{1}{3}} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} dx. \text{ Увођењем смене } \cos x = t, \text{ добијамо:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} dx = \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t^2)^{-\frac{2}{6}} dt, \text{ увођењем нове смене } t^2 = s \text{ добијамо:}$$

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t^2)^{-\frac{2}{6}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 s^{-\frac{4}{6}} (1-s)^{-\frac{2}{6}} ds = \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right).$$

$$p-1 = -\frac{4}{6} \Leftrightarrow p = \frac{2}{6}, p > 0,$$

$$q-1 = -\frac{2}{6} \Leftrightarrow q = \frac{4}{6}, q > 0.$$

$$\frac{1}{2} B\left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{6}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$11. \int_0^1 x^3 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^6 dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $\ln \frac{1}{x} = t$ , добијамо:

$$\int_0^1 x^3 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^6 dx = \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt, \text{ увођењем нове смене } 2t = s \text{ добијамо:}$$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{s}{2} \cdot e^{-s} ds = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} s \cdot e^{-s} ds = \frac{1}{4}.$$

$$p=1 \Rightarrow \Gamma(1) = 0! = 1.$$

$$12. \int_0^1 x \sqrt{-\ln x} dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $\ln \frac{1}{x} = t$ , добијамо:

$$\int_0^1 x \sqrt{-\ln x} dx = \int_0^1 x \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2t} dt, \text{ увођењем нове смене } 2t = s$$

добијамо:

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{s}{2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}.$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1!!}{2} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$13. \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^p dx.$$

**Решење:**

Увођењем смене  $\ln \frac{1}{x} = t$ , добијамо:

$$\int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^p dx = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1), \quad p > -1.$$

$$14. \int_0^1 x^3 (1-x^3)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Смена  $x^3 = t$ .

$$15. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Смена  $x = \sqrt{t}$ ,  $t > 0$ .

$$16. \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$$

Смена  $x = t^{\frac{1}{4}}$ ,  $t > 0$ .

$$17. \int_0^1 x^3 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^5 dx.$$

$$18. \int_0^1 \frac{x(1-x)^6}{(1-3x+3x^2)^3} dx.$$

## КЉУЧНЕ РЕЧИ

Бета функција

Гама функција

# Индекс појмова

## А

асимптоте, 92

## Б

Бета функција, 310

бројеви,

ирационални, 22

комплексни, 28

природни, 18

рационални, 22

реални, 23

цели, 21

## Г

гранична вредност, 86

Гама функција, 311

## Д

Декартов производ, 11

дисјункција, 4

диференцијал функције, 116

## Е

е број, 78

еквиваленција, 4

екстремуми функције, 163

## И

извод, 106

импликација, 4

интеграл,

неодређени, 206

несвојствени, 266

одређени, 252

исказ, 3

## **К**

конвексност функције, 166

конјункција, 4

конкавност функције, 166

## **М**

Маклоренов развој, 134

монотоност функције, 162

## **Н**

негација, 4

низ, 74

## **П**

парцијална интеграција, 230

превојне тачке, 167

пресек, 10

## **С**

скуп, 8

## **Т**

Тејлорова формула, 132

теорема,

Кошијева, 148

Лагранжова, 149

Лопиталова, 151

Ролова, 147

Фермаова, 146

## **У**

унија, 9

## **Ф**

функција,

инверзна, 53

периодична, 58

реална, 52

# Литература

- [1] Б. Боричић, М. Ивовић, *Математика*, Економски факултет, Београд, 2003.
- [2] Б. Боричић, М. Ивовић, Д. Аздељковић, И. Спасић, *Збирка задатака из математике*, Економски факултет, Београд, 2003.
- [3] И. Ковачевић, З. Мишковић, А. Савић, *Математика за инжењере*, Висока школа електротехнике и рачунарства, Београд, 2008.
- [4] М. Меркле, *Математичка анализа*, Академска мисао, Београд, 2008.
- [5] Група аутора, *Математика за више техничке школе*, Савремена администрација, Београд, 1990.