

Ана Савић

Светлана Штрбац-Савић

МАТЕМАТИКА 2

прво издање

**Висока школа електротехнике и рачунарства
струковних студија**

Београд, 2015.

Аутори

др Ана Савић, мр Светлана Штрбац - Савић

Математика 2

Рецензенти

Проф. др Хранислав Милошевић, Природно математички факултет

др Слободан Обрадовић, професор, Висока школа електротехнике и рачунарства струковних студија, Београд

Штампа: Школски сервис Гајић, Београд

Издавач: Висока школа електротехнике и рачунарства струковних студија, Београд, Војводе Степе 283

Техничка обрада: др Ана Савић

Корице: Владимир Церић

CIP - Каталогизација у публикацији -
Народна библиотека Србије, Београд
512.64(075.8)
517.91/.95(075.8)
517.52(075.8)
САВИЋ, Ана, 1974-
Математика 2 / Ана Савић, Светлана
Штрбац-Савић. - 1. изд. - Београд :
Висока школа електротехнике и
рачунарства, 2015 (Београд : Школски
сервис
Гајић). - 200 стр. : граф. прикази,
табеле ; 25 cm
Тираж 50. - Регистар. - Библиографија:
стр. [201].
ISBN 978-86-7982-212-3
1. Штрбац-Савић, Светлана, 1972-
[аутор]
а) Линеарна алгебра б) Диференцијалне
једначине с) Теорија низова и
редова
COBISS.SR-ID 214172684

Наставно веће Високе школе електротехнике и рачунарства у Београду одобрило је коришћење овог уџбеника у настави. Забрањено прештампавање и копирање. Сва права задржава издавач.

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник написан првенствено за студенте прве године Високе школе електротехнике и рачунарства у Београду који слушају једносеместрални курс из предмета Математика 2. Прилагођен је плану и програму предмета Математика 2 и подељен је у 15 поглавља. Планирано је да се свако поглавље обради у току једне радне недеље. Свако поглавље садржи циљеве учења, теоријски део, употпуњен примерима као и питања и задатке за проверу знања на крају сваког поглавља, што је стандард у савременој литератури.

Аутори позивају све читаоце и кориснике да дају своје сугестије, да би наредна издања била још квалитетнија и садржајнија.

У Београду,
Аутори
2015.

“Природа је огромна књига у којој је написана наука. Она је стално отворена пред нашим очима, али је човек не може разумети уколико претходно не научи језик и слова којим је написана. А написана је она језиком математике.”

Галилео Галилеј

Садржај

1. Увод.....	1
1.1 Језик математике.....	2
1.2 Основни појмови математичке логике.....	3
1.3 Основни појмови теорије скупова.....	8
1.3.1 Операције са скуповима.....	10
1.3.2 Кардинални број.....	13
Задачи за проверу знања.....	15
 2. Матрице и детерминанте.....	 19
2.1 Матрице.....	20
2.2 Операције са матрицама.....	21
2.3 Детерминанте.....	24
2.4 Израчунавање детерминанти.....	24
2.5 Особине детерминанти.....	27
Задачи.....	29
 3. Инверзна матрица.....	 37
3.1 Адјунгована матрица.....	38
Задачи.....	39
 4. Системи линеарних једначина.....	 45
4.1 Гаусов алгоритам.....	46

4.2	Крамерова метода.....	49
4.3	Хомогени системи линеарних једначина.....	51
4.4	Матрични метод за решавање линеарних једначина.....	52
Задаци.....		53

5. Диференцијалне једначине.....65

5.1	Диференцијалне једначине првог реда.....	68
5.2	Диференцијалне једначине код којих се променљиве могу раздвојити.....	68
Задаци за проверу знања.....		69

6. Линеарна и хомогена диференцијална једначина.....77

6.1	Линеарна диференцијална једначина.....	78
6.2	Хомогена диференцијална једначина.....	79
Задаци.....		80

7. Бернулијева диференцијална једначина.....93

7.1	Бернулијева диференцијална једначина.....	94
7.2	Примери примена диференцијалних једначина првог реда у електротехници.....	94
Задаци.....		96

8. Диференцијалне једначине другог реда.....103

8.1	Диференцијалне једначине другог реда које садрже само променљиву x	104
Задаци.....		105
8.2	Диференцијалне једначине другог реда које не садрже у	106
Задаци.....		106

8.3	Диференцијалне једначине другог реда које не садрже x	109
	Задаци.....	110

9. Хомогена и нехомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима 115

9.1	Хомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима.....	116
	Задаци.....	118
9.2	Нехомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима.....	120
	Задаци.....	122

10. Лагранжова метода варијације константи..133

10.1	Лагранжова метода варијације константи.....	134
	Задаци	136

11. Бројни Редови141

11.1	Бројни редови.....	142
	Задаци	143
11.2	Основне особине бројних редова.....	145

12. Позитивни бројни редови.....149

12.1.	Критеријум упоређивања чланова реда.....	150
	Задаци.....	151
12.2.	Даламберов критеријум	152
	Задаци	153
12.1.	Кошијев корени критеријум.....	156
	Задаци	158
12.2.	Кошијев интегрални критеријум	160
	Задаци	161

13. Наизменични бројни редови	165
13.1 Лајбницов критеријум	166
Задаци	167
13.2 Апсолутна и условна конвергенција реда	170
Задаци	171
14. Функционални и степени редови	175
14.1 Функционални редови	176
14.2 Степени редови	177
Задаци	180
15. Тејлоров и Маклоренов ред	187
15.1 Особине конвергентних редова	188
15.2 Тејлорови и Маклоренови редови	189
15.3 Маклоренов развој функција	190
Задаци	191
16. Индекс појмова	199
17. Литература	202

УВОД

1. ЈЕЗИК МАТЕМАТИКЕ

2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

3. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА

- ОПЕРАЦИЈЕ СА СКУПОВИМА
- КАРДИНАЛНИ БРОЈ

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када савладате ово поглавље требало би да знате:

1. шта сачињава језик математике,
2. дефиницију исказа,
3. дефиниције логичких операција,
4. приоритете логичких операција,
5. шта су таутологије, а шта контрадикције,
6. основне логичке законе,
7. дефиниције основних скуповних релација и операција.

УВОД

1.1. ЈЕЗИК МАТЕМАТИКЕ

Током свог развоја математика је развила један специфичан језик који се разликује од обичног, говорног језика. Математички језик је стваран постепено да одговори потребама математичког расуђивања и самим тиме је прецизнији и краћи од говорног језика. Како су у његовом стварању учествовали математичари широм света добијен је језик који је међународни.

Математички језик и математички модели расуђивања нашли су своје примене у природним и техничким наукама. У новије време математика се примењује и у наукама као што су психологија, социологија, лингвистика и многим другим.

- Језик математике чине:

Константе: $2, 3, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{2}, \dots$;

Променљиве: $x, y, a, b, \alpha, \beta, \dots$;

Операцијски знаци:

алгебарске операције: $+, -, \cdot, /$, **логичке операције:** $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$,

скуповне операције: $\cup, \cap, \setminus, \dots$;

Релацијски знаци: $\rho: =, \leq, \geq, \perp, \parallel, \dots$;

Специјални знаци: $(,), [,], \{, \}, \exists, \forall, !, \dots$

- Коришћењем ових симбола дефинишемо математичке изразе и формуле.
- Изрази садрже константе, променљиве и операцијске знаке.

Пример: $x + 2$ је израз. Изрази у обичном језику су речи.

- Формуле садрже изразе и релацијске знаке.

Пример: $x + 2 = 5$ је формула. Формуле су у обичном језику реченице.

1.2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

Математичка логика је савремена математичка дисциплина настала у другој половини 19. века. До скоро је сматрана за апстрактну дисциплину, без практичне примене. Данас се без ње не могу решити веома практични проблеми везани за конструкције електронских рачунара и других аутомата. Уз апстрактну алгебру она је данас веза између човека и електронских рачунара. Применом математичке логике може се постићи материјализација најапстрактнијих математичких изтраживања.

- Афирмативна реченица која има истинитосну вредност назива се **исказ**.
- Искazi се обележавају малим словима $p, q, r, \dots$ која се називају **исказна слова**.
- **Истинитосна вредност** исказа је

$$\tau(p) = \begin{cases} 1, & p \text{ је тачан исказ} \\ 0, & p \text{ је нетачан исказ} \end{cases}$$

Уместо 1 и 0, користе се и ознаке $\top$ и $\perp$. Симболе 1 и 0 не треба схватати као бројеве 1 и 0 у уобичајеном смислу.

Пример: Реченица $p: 2-1=1$ је исказ и има тачну истинитосну вредност, $\tau(p)=1$.

Пример: Реченица $2-1=-1$ је исказ и има нетачну истинитосну вредност, $\tau(p)=0$.

Пример: Реченица $x^2=1$ није исказ јер не можемо да одредимо њену истинитосну вредност. За $x=\pm 1$ формула је тачна, а за све остале вредности је нетачна.

Основне логичке операције

операција	симбол	исказ
Конјункција (и)	$\wedge$	$p \wedge q$
Дисјункција (или)	$\vee$	$p \vee q$
Импликација (ако онда)	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$
Еквиваленција (ако и само ако)	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$
Негација (не)	$\neg$	$p \neg q$

Истинитосна вредност логичких операција

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$	$\tau(\neg p)$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Истинитосна вредност у табели је у сагласности са уобичајеном логиком. Једино код импликације наизглед нелогичност видимо у случају када је $\tau(p)=0$. Импликација је тада тачна без обзира на вредност исказног слова q .

Пример: Ако је Србија највећа на свету, већа је од Црне Горе.

Пример: Ако је Србија највећа на свету, већа је од САД.

- Формуле су сложени изрази кога чине исказна слова и логичке операције.

Пример: Формуле су $(p \Rightarrow q) \wedge p$, $p \vee q \vee r$, $\neg p(p \Leftrightarrow q)$.

Пример: Дати су искази $p \equiv (4x^4y^3)^3 : (2x^2y)^5 = 2x^2y^3$,

$q \equiv (3x^4y^2)^2 : (3x^6y)^2 = 3xy^4$, $r \equiv (2x-y)(2x+y) = 4x^2 - y^2$ и

$s \equiv (x-2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$.

Одредити њихову тачност и на основу тога одредити истинитосну вредност следећих изказа:

$(p \wedge q) \vee r$, $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$, $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)$, $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$.

$\tau(p) = 0$, $\tau(q) = 0$, $\tau(r) = 1$, $\tau(s) = 0$.

$\tau((p \wedge q) \vee r) = 1$,

$\tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) = 0$,

$\tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) = 1$,

$\tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) = 0$.

▪ Исказна формула која је увек тачна назива се таутологија. Таутологије су математички закони.

▪ Важније таутологије:

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ ($p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$) **закон комутације;**

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ **закон асоцијације;**

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ **закон дистрибуције;**

$p \wedge p \Leftrightarrow p$, $p \vee p \Leftrightarrow p$ **закон идемпотенције;**

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ **закон двоструке негације;**

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ **закон апсорпције;**

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ **Де Морганов закон;**

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ **Де Морганов закон;**

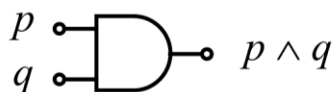
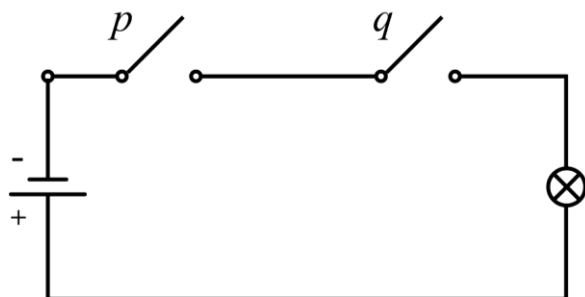
- Изказне формуле у којима се појављују само операције $\wedge, \vee, \neg$, при чему $\neg$ делује само на исказна слова, имају једну занимљиву интерпретацију која се користи у техници и назива прекидачка алгебра.
- Исказна слова се третирају као нормално отворени прекидачи, а њихова негација као нормално затворени прекидачи. Ако исказно слово има вредност $p = 1$ сматра се да је прекидач затворен, тј. да проводи струју, а да је за $p = 0$ отворен.



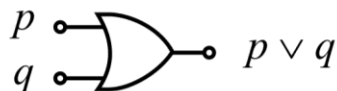
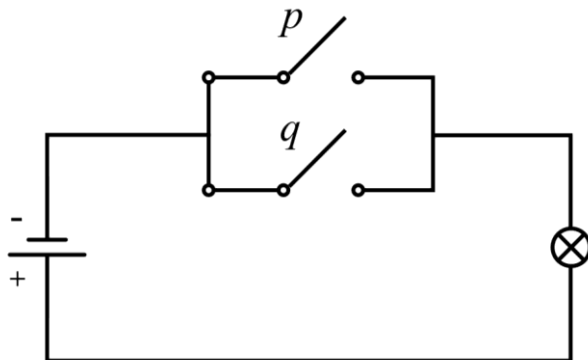
Формула се третира као мрежа са два краја састављена од прекидача који су повезани паралелно или серијски. Таутологијама одговарају мреже које увек проводе струју.

Пример:

Посматрајмо прекидачко коло које садржи прекидач и сијалицу. Вредност 1 додељујемо прекидачима p и q када су затворени, тј ако кроз њих протиче струја. У супротном додељујемо им вредност 0. Када су прекидачи редно везани, сијалица ће светлети и коло ће имати вредност 1 само ако су оба прекидача p и q затворена. Према томе, ово коло ће одговарати исказу p и q , односно $p \wedge q$ и зове се AND –и коло.

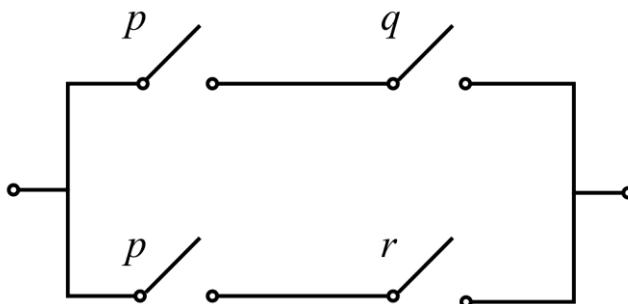
**Пример:**

Посматрајмо прекидачко коло у коме су прекидачи p и q везани паралелно. Када су прекидачи паралелно везани, сијалица ће светлети ако је $p = 1$ или $q = 1$ и коло ће имати вредност 1 ако је бар један прекидача p и q затворен. Према томе, ово коло ће одговарати исказу p или q , односно $p \vee q$ и зове се OR- или коло.



Пример:

Формули $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ одговара мрежа:



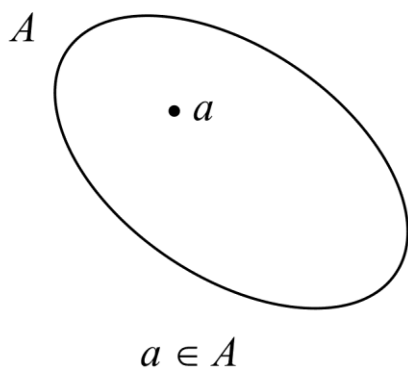
1.3. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА

Одлучујући корак у систематизацији математичких сазнања представља теорија скупова, тачније теорија бесконачних скупова чији је творац Кантор (1845-1918).

- Скуп је основни појам који се не дефинише, већ се узима као основни.

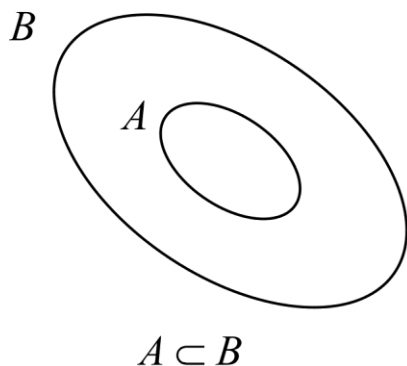
Напомена: Помоћу скупова дефинишу се други појмови, па говоримо о скуповима тачака, скуповима бројева, функција се дефинише као скуп уређених парова итд.

- Сваки **скуп** састоји се од различитих објеката које ћемо називати његовим **елементима**.



- Скупови се означавају великим словима $A, B, C, \dots$, а елементи малим словима $a, b, c, \dots$ и користимо запис $A = \{a, b, c, \dots\}$.
- Неки елемент a може припадати датом скупу A , што се означава са $a \in A$, или не припадати истом скупу, што се означава са $a \notin A$.
- Скуп који нема елемената назива се **празан скуп** и обележава са $\emptyset$.
- Скуп A је **подскуп** скупа B и пишемо $A \subset B$ ако сваки елемент скупа A припада истовремено и скупу B .

$$A \subset B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$



- Два скупа A и B су једнака ако сваки елемент скупа A припада и скупу B и ако сваки елемент скупа B истовремено припада и скупу A .

$$A = B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \in B\}.$$

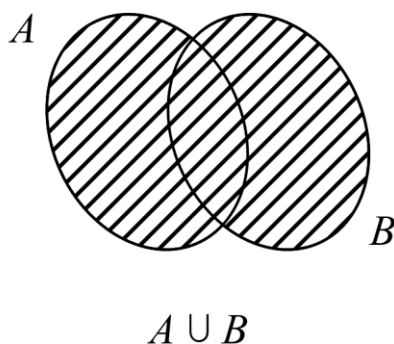
- Партитивни** скуп $P(S)$ датог скупа S је скуп $P(S) = \{X; X \subseteq S\}$.

Пример: $S = \{a, b, c\},$

$$P(S) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}.$$

1.3.1. ОПЕРАЦИЈЕ СА СКУПОВИМА

- Унија** два скупа A и B је скуп $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

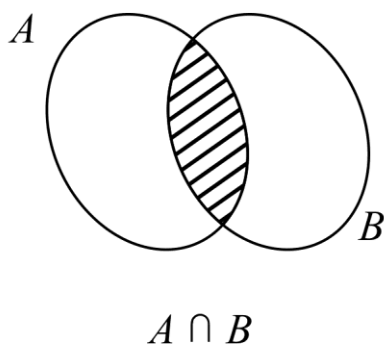


Пример: $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 6, 7\}; A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7\}.$

- У општем случају, када имамо коначно много скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$, њихова унија је:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

- Пресек** скупова A и B је skup $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

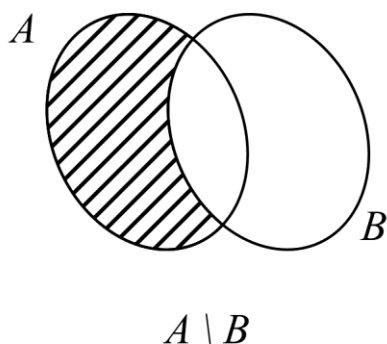


Пример: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$; $A \cap B = \{2\}$.

- Ако је пресек два скупа A и B празан, $A \cap B = \emptyset$, тада кажемо да су та два скупа **дисјунктна**.
- Ако је дато коначно много скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ њихов пресек је:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

- Разлика** скупова A и B је skup $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.



Пример: На скупу реалних бројева дати су интервали $A = (1, 3)$ и $B = (2, 5)$. Према дефиницији разлике скупова имамо да је $A \setminus B = (1, 2]$, а $B \setminus A = [3, 5)$.

- **Симетрична разлика скупова** A и B је унија скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$, тј.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- **Комплемент** скупа A у односу на скуп B (или допуна скупа A до скупа B) где је $A \subset B$ је скуп $B \setminus A = C_B A$.
- Пар елемената (a, b) називамо **уређеним паром** (или уређеном двојком) ако је тачно одређено који је елемент на првом, а који на другом месту.
- Уређени парови (a, b) и (c, d) су једнаки ако и само ако је $a = c$ и $b = d$.
- **Декартовим производом** скупова A и B назива се скуп $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Пример: Дати су скупови $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$.

$$A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\},$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

Очигледно је да $A \times B \neq B \times A$, што значи да за Декартов производ скупова не важи закон комутације.

- Декартов производ $A \times A$ се означава са A^2 .
- Декартов производ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ представља реалну равн, тј.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Пример: Дат је скуп $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Одредити скунове $A = \{x \mid x \geq 3\}$ и $B = \{x \mid x < 8\}$, чији су елементи елементи скупа P , а затим одредити скунове $A \cap B$, $A \cup B$, A/B .

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A/B = \{8, 9\}.$$

1.3.2. КАРДИНАЛНИ БРОЈ

Одређивање броја елемената коначних скупова своди се на њихово пребројавање. Међутим, када се ради о бесконачним скуповима, ствар је много сложенија. Тада се срећемо са доста неочекиваним ситуацијама.

- Ако постоји „1-1“ и „на“ пресликавање f скупа A на скуп B , (бијекција) онда се за скунове A и B каже да су еквивалентни.

- Еквивалентни скупови A и B имају исти *кардинални број*, у ознаци $k(A) = k(B)$.
- Код коначних скупова *кардинални број* представља број елемената скупа.

Пример:

Еуклидова аксиома каже: Целина је већа од дела.

Кардинални број скупа природних бројева једнак је кардиналном броју скупа свих парних природних бројева.

Та једнакост се види из пресликавања

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 & \dots & 2 \cdot n & \dots \end{array}$$

Дакле $k(\mathbb{N}) = k(2\mathbb{N})$.

Још 1638 године Галилеј је сматрао да се овде ради о парадоксу. Интуитивно се чини да је скуп природних бројева има више елемената него скуп парних природних бројева.

Канторова теорија показује да се бесконачни скупови могу упоређивати. Скупови $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$ су еквивалентни, али скупови $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ нису.

Кардинални број скупа $\mathbb{R}$ је већи од кардиналног броја скупа $\mathbb{N}$, значи можемо рећи да је неки бесконачни скуп „бесконачнији“ од другог.

Пример: Скуп свих тачака праве еквивалентан је са скупом тачака равни.

Скуп свих реалних бројева између 0 и 1 има већи кардинални број од скупа свих рационалних бројева $\mathbb{Q}$.

Пример: Кардинални број празног скупа је 0, и пишемо $k(\emptyset) = 0$.

- Кардинални број скупа природних бројева означава се хебрејским словом $\aleph$ и чита се *алеф*, са индексом 0

$$k(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

1. Ако је $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ и $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, одредити

а) $A \cup B$, $(A \cup B) \cup C$,

б) $A \cap B$, $(A \cap B) \cap C$,

ц) $A \setminus B$, $C \setminus A$,

д) $A \times B$, $P(A)$.

Решење:

а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

б) $A \cap B = \{2, 3\}$, $(A \cap B) \cap C = \{2, 3\}$,

ц) $A \setminus B = \{1\}$, $C \setminus A = \{4, 5, 6, 7\}$,

д)

$$A \times B =$$

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2. Одредити елементе скупова $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$ и

$B = \{x \mid 2x + 1 < 7 \wedge x \in \mathbb{N}\}$, а затим израчунати $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Решење:

$$A = \{-1, 1\}.$$

Како је $2x+1 < 7 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$, а треба да узмемо само природне бројеве

$$B = \{1, 2\}.$$

$$A \cap B = \{1\}, A \cup B = \{-1, 1, 2\}, A \setminus B = \{-1\}, B \setminus A = \{2\}.$$

3. Дат је skup $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Одредити скупове

$A = \{x \mid x \in P \wedge x \geq 3\}$ и $B = \{x \mid x \in P \wedge x < 8\}$, а затим израчунати $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$.

Решење:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ и } B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A \setminus B = \{8, 9\}.$$

4. Дат је skup $P = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Одредити скупове

$$A = \left\{ x \mid x \in P \wedge \frac{2x}{12-x} \in P \right\} \text{ и } B = \left\{ x \mid x \in P \wedge \frac{x^2}{2} - x \in P \right\}, \text{ а затим}$$

израчунати $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, P(A \setminus B)$.

Решење:

$$A = \{0, 4, 6, 8, 9\}, B = \{0, 2, 4\}.$$

$$A \cap B = \{0, 4, 6, 8\}, A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A \setminus B = \{6, 8, 9\}, B \setminus A = \{2\},$$

$$P(A \setminus B) = \{\emptyset, \{6\}, \{8\}, \{9\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{8, 9\}, \{6, 8, 9\}\}.$$

5. Дати су скупови $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, 4\}$, $C = \{2, 4, c\}$,

$D = \{a, b, 3\}$ и $E = \{1, b\}$. Одредити a, b, c и d ако знамо да је

$B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$ и $E \subset B$.

Решење: $a=1, b=2, c=3, d=4$.

6. Дати су скупови $A = \{n | n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$, $B = \{n | n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 7\}$, $C = \{2, 3, 6\}$, Одредити скупове X и Y ако знамо да је $X \subset A$, $C \cup X = B$.

Решење: Једно од решења је $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

7. Применом таутологија доказати следеће скуповне једнакости:

- а) $A \cap (A \cup B) = A$, б) $(A / B) \cap B = \emptyset$,
 в) $A \cap B = B \cap A$, г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Решење:

а)

$$x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$$

$$x \in A \wedge x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$$

$$x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

Ако уведемо ознаке: $p : x \in A$ и $q : x \in B$, добијамо исказну формулу

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$. Коришћењем таблице лако се доказује да је формула таутологија, па самим тим и свака формула која се на њу може свести је тачна.

- б) Формули $(A / B) \cap B = \emptyset$ одговара таутологија $(p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow \perp$.

К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И

Исказ

Конјункција

Дисјункција

Импликација

Еквиваленција

Негација

Таутологија

Контрадикција

Скуп

Унија

Пресек

Декартов производ

МАТРИЦЕ И ДЕТЕРМИНАНТЕ

1. МАТРИЦЕ

2. ОПЕРАЦИЈЕ СА МАТРИЦАМА

3. ДЕТЕРМИНАНТЕ

4. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

5. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. матрицама и операцијама са матрицама,
2. детерминантама и особинама детерминанти,
3. Сарусовом правилу за израчунавање вредности детерминанти,
4. Лапласовом правилу за израчунавање вредности детерминанти.

2.1 МАТРИЦЕ

- **Матрица** је правоугаона шема са $m \times n$ елемената распоређених у m врста и n колона:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрице се означавају великим словима латинице: $A, B, C, \dots$

Произвољни елемент матрице a_{ij} припада i -тој врсти и j -тој колони, па матрицу можемо означити као $[a_{ij}]_{m \times n}$.

За матрицу са m врста и n колона кажемо да има димензију $m \times n$.

- Две матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ су једнаке, тј. $A = B$ ако и само ако је: $a_{ij} = b_{ij}, \forall (i, j), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

- **Матрица врсте** је матрица код које је $[a_{ij}]_{m \times n}$ $m = 1, n > 1$, тј.

$$[a_{ij}]_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

- **Матрица колоне** је матрица код које је $m > 1, n = 1$, тј.

$$[a_{ij}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- **Нула матрица** је она матрица чији су сви елементи једнаки нула.
- **Квадратна матрица** је матрица код које је број врста једнак броју колона.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ леже на **главној дијагонали**, док елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ припадају **споредној дијагонали** квадратне матрице.

- Квадратна матрица у којој су сви елементи ван главне дијагонале нула, а елементи на главној дијагонали нису сви нула, назива се **дијагонална матрица**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Јединична матрица** је дијагонална матрица код које је $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ и означава се словом I .
- **Транспонована матрица** матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ је матрица добијена заменом места свих врста одговарајућим колонама или обрнуто. Обележава се са A^T и износи $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Пример: За матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ транспонована матрица биће

матрица $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

2.2 ОПЕРАЦИЈЕ СА МАТРИЦАМА

- **Збир** матрица $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, је матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ако и само ако је $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Напомена: Збир матрица различитих димензија није дефинисан.

- Операција сабирања матрица има следеће особине:

$A + B = B + A$, **комутативност**;

$(A + B) + C = A + (B + C)$, **асоцијативност**.

Пример: Сабрати матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}.$$

- Производ броја** $\lambda \in \mathbb{R}$ и матрице $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ је матрица истих димензија облика:

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}.$$

- Операција множења матрице бројем има следеће особине:

$\lambda A = A\lambda$, **комутативност**;

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$; $\alpha, \beta \neq 0$, **асоцијативност**;

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, **дистрибутивност с обзиром на збир бројева**;

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, **дистрибутивност с обзиром на збир матрица**.

Пример: Помножити матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ бројем $\lambda = 2$.

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

- **Производ** $A \cdot B$ матрица $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ и $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ је матрица C , чији се елементи c_{ij} формирају по закону:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

Напомена: Матрица C има онолико врста колико их има матрица A и онолико колона колико их има матрица B .

Напомена: Дакле елемент c_{ij} матрице C који се налази у пресеку i -те врсте и j -те колоне, образује се тако што се елементи i -те врсте матрице A помноже одговарајућим елементима j -те колоне матрице B и добијени производи саберу.

- Операција множења матрица има следеће особине:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \text{ асоцијативност;}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A, \text{ не важи закон комутације;}$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Пример: Помножити матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 19 & -8 \\ 31 & -14 \end{bmatrix}.$$

Производ $B \cdot A$ није дефинисан зато што димензије матрица нису одговарајуће.

2.3 ДЕТЕРМИНАНТЕ

- Свакој квадратној матрици придружујемо реални број који зовемо **детерминанта**.
- **Детерминанта** је квадратна шема бројева од $n \times n$ елемената распоређених у n врста и n колона.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Напомена: Детерминанта је **број**, за разлику од матрице која је само шема произвољних елемената.

- Број $|a_{11}| = a_{11}$ назива се **детерминанта првог реда**.
- Број $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ назива се **детерминанта другог реда**.
- Број $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ назива се **детерминанта трећег реда**.

2.4 ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

САРУСОВО ПРАВИЛО

(Sarrus, 1798-1861)

- **Правило** се односи на детерминанте трећег реда и гласи:

$$\begin{vmatrix} + & + & \pm \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Пример: Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = 0.$$

ЛАПЛАСОВО ПРАВИЛО



P. Laplace (1749-1827)

Француски математичар Лаплас дао је значајан допринос у теорији диференцијалних једначина, вероватноћи, анализи, астрономији и небеској механици. Мада скромног порекла Наполеон га је произвео у грофа, а након његовог пада краљ Луј 18. у маркиза.

Енглески преводилац његових дела написао је “Увек када сам код Лапласа налазио изјаву, лако је видети; знао сам да ми треба неколико сати напорног рада док се не досетим и не докажем како је то лако видети”.

За разлику од Сарусовог правила које се користи само за израчунавање детерминанти трећег реда, Лапласово правило важи за детерминанте било ког реда.

- Основна идеја овог правила је да се израчунавање детерминанте n -тог реда своди на израчунавање детерминанте $n-1$ реда, детерминанта $n-1$ реда своди се на израчунавање детерминанте $n-2$ реда и тај поступак се понавља све док се не дође до детерминанте првог реда.

Да бисмо објаснили ову методу потребно је да дефинишемо појам минора и појам кофактора.

Нека је D детерминанта n -тог реда

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Детерминанта која се добија из детерминанте D одбацивањем i -те врсте и j -те колоне назива се **минор** елемента a_{ij} и обележава се са M_{ij} .

Напомена: Очигледно, детреминанта трећег реда има онолико минора колико и елемената, тј. 9. На пример, елементима a_{11} , a_{12} и a_{13} одговарају минори

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- **Кофактор** елемента a_{ij} је број $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

- **Лапласово правило:** Детерминанта је једнака збиру производа елемената ма које врсте (односно колоне) и одговарајућих кофактора тј.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, i = 1, 2, \dots, n$$

(развој по елементима i -те врсте).

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}, j = 1, 2, \dots, n.$$

(развој по елементима j -те колоне).

Пример: Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Детерминанта се може израчунати развојем по било којој врсти или колони.

Развојем по првој врсти добићемо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

2.5 ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

- Ако две суседне врсте (колоне) узајамно промене места детерминанта мења знак.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -D.$$

- Детерминанта се множи бројем $k \neq 0$ ако се сви елементи врсте (колоне) помноже тим бројем.

$$k \cdot D = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & kb_2 \\ a_1 & kb_1 \end{vmatrix}.$$

- Ако су сви елементи једне врсте (колоне) једнаки нула, вредност детерминанта је једнака нула.
- Ако су две врсте (колоне) једнаке или пропорционалне, тада је вредност детерминанте једнака нула.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = k(a_1 b_1 - a_1 b_1) = k \cdot 0 = 0.$$

- Ако све врсте (колоне) детерминанте реда $n \geq 3$ циклично промене места детерминанта не мења своју вредност.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

- Вредност детерминанте се не мења ако се сваком елементу једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) помножени једним истим бројем.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ma_3 \end{vmatrix}.$$

- Ако су елементи једне врсте (колоне) дате детерминанте збирови од два или више сабирака, тада се детерминанта може разложити на збир од две или више детерминаната.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Напомена: Детерминанте су историјски настале у вези проучавања система једначина и представљају значајно средство за њихово рачунање.

ЗАДАЦИ

1. Наћи збир матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+(-2) \\ 3+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Наћи матрицу $C = 2 \cdot A - B$, ако су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ и

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$C = 2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Наћи производе $A \cdot B$ и $B \cdot A$ матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ и

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 5 & -4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Производ $B \cdot A$ не постоји јер димензије матрица A и B нису одговарајуће.

4. Доказати да за матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ важи

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2.$$

Решење:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = A^2 + B^2.$$

5. Ако је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, израчунати $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$.

Решење:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2-ad & -ab-bd \\ -ac-cd & -ad-d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Резултат је нула матрица.

6. Ако је $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, наћи њену транспоновану матрицу A^T .

Резултат: $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$

7. Ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, наћи све матрице које су комутативне са матрицом A .

Решење:

Нека је X матрица таква да је $AX = XA$.

Узмимо да је матрица $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, добијамо

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ x+z & y+t \end{bmatrix},$$

$$XA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{bmatrix}.$$

Из услова $AX = XA$ добијамо систем једначина:

$$x = x + y, y = y, x + z = z + t, y + t = t, \text{ односно } y = 0, x = t \text{ одакле}$$

налазимо решење $X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ z & x \end{bmatrix}.$

8. Проверити следеће резултате:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [13],$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -39 & 29 \\ 24 & -48 & 32 \\ 58 & 24 & 56 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Дат је полином $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ и матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$,

наћи $P(A)$.

Решење:

$$P(A) = 3A^2 - 2A + 5I.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$$

10. Дат је полином $P(x) = 2x^2 + 3x + 5$ и матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

наћи $P(A)$.

Решење:

$$P(A) = 2A^2 + 3A + 5I.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 3 & 14 & 3 \\ 12 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

11. Ако је $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$, одредити $f(A)$ за $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Резултат:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 29 & 6 & 6 \\ 27 & 38 & 15 \\ 15 & 9 & 26 \end{bmatrix}.$$

ДЕТЕРМИНАНТЕ

Израчунати вредност детерминанти:

$$12. \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \text{ д) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решење:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 1 - 12 = -11.$$

б) Користећи Сарусово правило добијамо:

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 40.$$

в) Користећи Лапласово правило, развијањем по првој врсти добијамо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (9 - 8) - (15 - 2) + 3 \cdot (20 - 3) = 40.$$

.

г) Користећи Лапласово правило, развијањем по другој врсти добијамо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ = 3 \cdot (-9) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -34.$$

д) Користећи једну од особина детерминанти, можемо прву колону да помножимо са -3 и додамо трећој колони. Детерминанту сада развијамо по првој врсти која садржи две нуле.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -34.$$

13. Израчунати детерминанту матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Решење:

Матрица A је троугаона, па је $\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 9 = 27$.

Проверити резултате:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20$; б) $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3$.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Матрица

Детерминанта

Сарусово правило

Лапласово правило

ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

1. АДЈУНГОВАНА МАТРИЦА

2. ОСОБИНЕ И ИЗРАЧУНАВАЊЕ ИНВЕРЗНЕ МАТРИЦЕ

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. адјунгованој матрици,
2. инверзној матрици,
3. кофакторима,
4. регуларној матрици,
5. сингуларној матрици.

3.1 АДЈУНГОВАНА МАТРИЦА

- **Адјунгована матрица** матрице A у ознаци $\text{adj}A$ је транспонована матрица матрице кофактора матрице A .

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.2 ОСОБИНЕ И ИЗРАЧУНАВАЊЕ ИНВЕРЗНЕ МАТРИЦЕ

- **Инверзна матрица** дате квадратне матрице A је матрица A^{-1} која има својство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, где је I јединична матрица.
- За квадратну матрицу A кажемо да је **регуларна** ако је $\det A \neq 0$, а **сингуларна** ако је $\det A = 0$.

- **Инверзна матрица** квадратне регуларне матрице A је матрица

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}.$$

- За регуларне матрице A и B истог реда важе правила:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Пример: Наћи инверзну матрицу дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Како је $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, постоји матрица A^{-1} .

Кофактори матрице A су $A_{11} = 5$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$.

Налазимо да је: $A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Пример: Наћи инверзну матрицу дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -17 \neq 0.$$

Кофактори матрице A су:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЦИ

1. Наћи инверзну матрицу матрица:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$\text{а) } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Како је $\det A = -1 \neq 0$, постоји матрица A^{-1} .

Кофактори матрице A су: $A_{11} = 1, A_{12} = 3, A_{21} = 1, A_{22} = 2$.

$$\text{Налазимо да је: } A^{-1} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{б) } \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Кофактори матрице A су:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Проверити решење:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix};$$

б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ не постоји.

3. Решити матричне једначине :

$XA = B$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Решење:

Како је $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$ постоји

A^{-1} . Решење дате матричне једначине је $X = BA^{-1}$.

Одредимо матрицу A^{-1} .

$$A^{-1} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Значи,

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 16 & 11 \\ 4 & -23 & -15 \end{bmatrix}.$$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Решење:

Матрична једначина гласи $AX = B$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Како је $\det(A) = -4 \neq 0$, постоји матрица A^{-1} , па је решење дате матричне једначине $X = A^{-1}B$.

$$\text{Како је } A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ добијамо}$$

$$X = \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$5. \quad A \cdot X + X - B = 0, \text{ ако је } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$AX + X - B = 0 \Leftrightarrow (A + I)X = B \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1} \cdot B$$

$$\det(A + I) = 4 \neq 0$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 & -12 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \\ 11 & 28 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$6. \quad XA + X = A^T \text{ ако је } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$XA + X = A^T \Leftrightarrow X(A + I) = A^T \Leftrightarrow X = A^T(A + I)^{-1}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A + I) = -3 \neq 0;$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$7. (A + I)X = A - I, \text{ ако је } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$\text{Нека је } B = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тада једначина постаје $BX = C$.

$$\text{Како је } \det(B) = 6 \neq 0, \text{ постоји } B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ па је решење}$$

дате матричне једначине $X = B^{-1}C$.

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Решити матричне једначине :

а) $X(A - 3I) = A + I$, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $AX = B$, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

в) $AX - 2X - A = I$ где је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Резултат:

а) $X = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 10 \\ 4 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; б) $X = \begin{bmatrix} -7 & -16 \\ 7 & 15 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$; в) $X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Инверзна матрица

Адјунгована матрица

Кофактори

Регуларна матрица

Сингуларна матрица

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

- 1. ГАУСОВ АЛГОРИТАМ**
- 2. КРАМЕРОВА МЕТОДА**
- 3. ХОМОГЕНИ СИСТЕМ
ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА**
- 4. МАТРИЧНИ МЕТОД ЗА
РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА
ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да стекнете основна знања о:

1. системима линеарних једначина,
2. Гаусовом алгоритму за решавање система линеарних једначина,
3. Крамеровој методи за решавање система линеарних једначина,
4. матричној методи за решавање система линеарних једначина.

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

4.1 ГАУСОВ АЛГОРИТАМ

Дат је систем од m линеарних једначина са n непознатих.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

где је $m > n$, $m = n$ или $m < n$.

- Гаусова метода се састоји у сукцесивном елиминисању непознатих из система и трансформацијом у троугаони или трапезни еквивалентни систем из кога се добија решење или се установи да систем нема решења.

Претпоставимо да је коефицијент $a_{11} \neq 0$. Искључимо непознату x_1 из свих једначина система осим прве.

Да бисмо то реализовали потребно је прву једначину помножити са $-a_{21}/a_{11}$ и додати је другој једначини, затим прву једначину помножити са $-a_{31}/a_{11}$ и додати је трећој једначини, итд. На тај начин се уместо полазног система добија еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \vdots & \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)} \end{aligned}$$

Ако сада претпоставимо да је $a_{22}^{(1)} \neq 0$, применићемо исти поступак за искључивање променљиве x_2 из последњих $m-2$ једначина система и добићемо еквивалентан систем једначина:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n &= b_m^{(2)} \end{aligned}$$

Ако би продужили исти поступак $k-1$ пута добили би систем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned}$$

Ако су сви коефицијенти добијеног система једнаки нули, а слободни члан није нула, систем је несагласан и нема решења.

Ако је $k = n$, систем има јединствено решење.

Ако је $k < n$ систем има бесконачно решења. Тада су $x_{k+1}, \dots, x_n$ слободне променљиве које преносимо на десну страну, а затим се одређују везане променљиве $x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$.

Пример: Гаусовом методом решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -2x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Након множења прве једначине редом са -2 и 2 и додавањем редом другој и трећој једначини добијамо систем:

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$-5y + 7z = 11$$

$$5y - 4z = -2$$

Додавањем друге једначине трећој добијамо систем:

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$-5y + 7z = 11$$

$$3z = 9$$

Ово је систем троугаоног облика из којег се непосредно добија јединствено решење $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Пример: Гаусовом методом решити систем једначина:

$$x + 2y + z = 10$$

$$2x + y + z = 6$$

$$10x - y + 3z = 2$$

Након множења прве једначине редом са -2 и -10 и додавањем редом другој и трећој једначини добијамо систем:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

$$-21y - 7z = -98$$

Множењем друге једначине са -7 и додавањем трећој добијамо систем:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

$$0 \cdot z = 0$$

Ово је неодређен систем. Стављајући $z = t$ непосредно се добија решење $(x, y, z) = \left(\frac{2-t}{3}, \frac{14-t}{3}, t \right)$.

4.2 КРАМЕРОВА МЕТОДА

(Gabriel Cramer, 1704-1752)

Дат је систем од n једначина са n променљивих:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Уочимо следеће детерминанте:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ детерминанта система.}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ детерминанта која одговара непознатој } x_k;$$

$$k = \overline{1, n}.$$

Крамерово правило:

- Ако је детерминанта система $D \neq 0$, тада систем има **јединствено решење**.

$$x_k = \frac{D_k}{D}, k = 1, 2, \dots, n.$$

- Ако је детерминанта система $D = 0$, а бар једна од детерминанти $D_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$, систем **нема решења**.
- Ако је детерминанта система $D = 0$, и све детерминанте $D_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$, систем је **неодређен** и ако има решења може их имати само бесконачно много.

Пример: Решити систем једначина:

$$x + 3y - 2z = 1$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x + 2z = 7$$

Детерминанта система је: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$

Детерминанте D_x , D_y , D_z добијамо када у детерминанти D заменимо редом прву, другу и трећу колону колоном слободних чланова.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -26,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -39.$$

Решење система је:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-39}{-13} = 3.$$

Напомена: Крамерово правило скоро и да нема практични значај. Алгоритамска сложеност тог правила је велика, а зато се за решавање система реда $n > 3$ увек користи Гаусов метод. Као што смо видели решавање система линеарних једначина трансформацијом на еквивалентни троугаони систем не представља велики проблем. Данас у оквиру савремених нумеричких метода решавања система линеарних једначина развијене су многе практичне рачунарске шеме, прикладне за решавање система једначина применом рачунара.

4.3 ХОМОГЕНИ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Дат је систем од m хомогених једначина са n променљивих:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

- Како је $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ хомогени систем је **увек сагласан** $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p)$.
- Хомогени систем има само **тривијално** решење $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ако и само ако је $\text{rang}(A)$ једнак броју непознатих n .
- Хомогени систем има и **нетривијално** решење ако и само ако је $\text{rang}(A)$ мањи од броја непознатих n .

Претходни став о сагласности и броју решења хомогеног система, је последица Кронекер-Капелијеве теореме.

Пример: Хомогени систем једначина

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

има само тривијално решење $(0, 0, 0)$, јер је, $\text{rang}(A) = 3$ и једнак је броју једначина система.

Пример:

$$\begin{aligned}x + y + 2z + u &= 0 \\2x - y + z - 2u &= 0 \\x - 2y - z - 3u &= 0\end{aligned}$$

Како је $\text{rang}(A) = 2$, а $n = 3$ систем једначина има и нетривијалних решења и своди се на систем од две једначине са две непознате:

$$\begin{aligned}x + y &= -2z - u \\2x - y &= -z + 2u\end{aligned}$$

чије је решење $(x, y, z, u) = \left(-t + \frac{r}{3}, -t - \frac{4r}{3}, t, r\right); t, r \in \mathbb{R}$.

4.4 МАТРИЧНИ МЕТОД ЗА РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Дат је систем од n једначина са n променљивих:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.\end{aligned}$$

Систем се може написати у матричном облику као:

$$AX = B$$

где је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Под претпоставком да је матрица A регуларна, тј. да јој је детерминанта различита од нуле, систем има јединствено решење $X = A^{-1}B$.

Пример: Матричном методом решити систем једначина:

$$2x - 3y + z = 7$$

$$3x - 2y - z = 3$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\det A = 10 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -7 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2).$$

ЗАДАЦИ

1. Гаусовом методом решити системе једначина:

$x + y + z = 6$	$2x - y + z = 8$	$x + 2y + 2z = 1$
а) $2x + y + 3z = 13$	б) $x + 3y - 2z = -7$	в) $2x + 3y + z = 0$
$-x + 5y - 2z = 3$	$3x + 2y - z = 1$	$ax + y - z = 1$
	$x - 4y + 3z = 15$	

Решење:

$$x + y + z = 6$$

a) $2x + y + 3z = 13$

$$-x + 5y - 2z = 3$$

Ако се прва једначина помножи са -2 и дода другој једначини и прва једначина дода трећој добићемо систем:

$$x + y + z = 6$$

$$-y + z = 1$$

$$6y - z = 9$$

Множењем друге једначине са 6 и додавањем трећој добијамо систем:

$$x + y + z = 6$$

$$-y + z = 1$$

$$5y = 10$$

Ово је систем троугаоног облика из којег се непосредно види да је јединствено решење $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

б) Ако у полазном систему прву једначину помножену редом са 2 , 1 и -3 додамо другој, трећој односно четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем:

$$2x - y + z = 8$$

$$5x + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + z = 8$$

$$5x + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + y = 9$$

$$-5x - y = -9$$

Ово је систем од две једначине са три непознате који не може да има јединствено решење. Нека је $x = t \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада из друге једначине система добијамо $y = 9 - 5t$ и заменом обе вредности у прву једначину добијамо $z = 17 - 7t$.

Дакле скуп решења је $(x, y, z) = (t, 9 - 5t, 17 - 7t)$.

$$2x + 3y + z = 0 \quad 2x + 3y + z = 0$$

в) $-3x - 4y = 1 \Leftrightarrow -3x - 4y = 1$

$$(a+2)x + 4y = 1 \quad (a-1)x = 2$$

Скуп решења задатог система једначина гласи:

За $a \neq 1$ имамо $(x, y, z) = \left(\frac{2}{a-1}, \frac{-a-5}{4(a-1)}, \frac{3a-1}{4(a-1)} \right)$.

За $a = 1$ систем нема решења.

2. Гаусовом методом решити системе једначина:

$$x + 2y - 6z = -13 \quad x + 2y - 3z = 5 \quad 2x - y + z = -1$$

а) $2x + 5y + 4z = 24$ б) $2x + 3y - 5z = 8$ в) $x + 2y - 3z = 8$

$$3x + 10y + z = 26 \quad 5x + y - 8z = 7 \quad ax + y - 2z = 7$$

Резултат: а) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$;

б) $(x, y, z) = (1, 2, 0)$;

в) За $a \neq 3$ је $(x, y, z) = (0, -5, -6)$,

за $a = 3$ је $(x, y, z) = (t, 7t - 5, 5t - 6)$.

3. Крамеровом методом решити системе једначина:

$$3x + 2y + z = 5$$

$$x + 2y + z = 10$$

а) $2x + 3y + z = 1$

б) $2x + y + z = 6$

$$2x + y + 3z = 11$$

$$10x - y + 3z = 2$$

$$x + y + z = 3$$

$$2x + y + z = -1$$

в) $x - 2y + 2z = 1$

г) $-x + y + 2z = 3$

$$-2x + y - 3z = 4$$

$$3x + 2y + 4z = 1$$

Решење:

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

Како је $D \neq 0$ систем има јединствено решење:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{24}{12} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-24}{12} = -2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{36}{12} = 3,$$

$$(x, y, z) = (2, -2, 3).$$

б) $D = 0, D_x = D_y = D_z = 0$. Закључујемо да је систем неодређен.

Систем се трансформише у еквивалентни систем:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

чије је решење $(x, y, z) = \left(\frac{2+t}{3}, \frac{14-t}{3}, t \right)$, где је $t \in \mathbb{R}$.

в) $D = 0, D_x = 32$, па према Крамеровој теореме систем нема решења.

$$\text{г) } (x, y, z) = (-1, 0, 1).$$

4. Дискутовати и решити системе једначина у зависности од реалног параметра a :

$$ax + y + z = 1$$

$$3x - 2y + z = 0$$

$$x + y + az = 1$$

$$\text{а) } x + ay + 2z = 2 \quad \text{б) } -x + y - 2z = 2 \quad \text{в) } x + ay + z = 1 \quad \text{г) }$$

$$2x + y + z = 0$$

$$ax - y - z = 0$$

$$ax + y + z = 1$$

$$ax + y + 2z = 1$$

$$x + ay + z = a$$

$$x + y + 2z = a^2$$

Решење:

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-2)^2;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a-2;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a-1;$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5-4a.$$

За $D \neq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$ систем има јединствено решење:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{a-2}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{2a-1}{(a-2)^2}, z = \frac{D_z}{D} = \frac{5-4a}{(a-2)^2}.$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a-2}, \frac{2a-1}{(a-2)^2}, \frac{5-4a}{(a-2)^2} \right).$$

За $D=0$, односно за $a=2$ добијамо $D_y=3 \neq 0$, па је систем немогућ.

$$\text{б) } D=3(a-2), D_x=-6, D_y=-2(a+3), D_z=-2(2a-3).$$

За $D=3(a-2)$, тј. за $a \neq 2$ имамо јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2}{a-2}, -\frac{2(a+3)}{3(a-2)}, \frac{-2(2a-3)}{3(a-2)} \right).$$

За $D=0$, тј. за $a=2$, $D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$ систем је немогућ и нема решења.

$$\text{в)} D = -(a-1)^2(a+2), D_x = -(a-1)^2, D_y = -(a-1)^2, D_z = -(a-1)^2.$$

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right).$$

$$D = 0 \text{ за } a = 1 \vee a = -2.$$

За $a = -2$ је $D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$ систем је немогућ и нема решења.

За $a = 1$ је $D_x = 0, D_y = 0, D_z = 0$ систем је неодређен и своди се на три исте једначине:

$$x + y + z = 1, x + y + z = 1, x + y + z = 1.$$

Ако уведемо смену да је $x = t \in \mathbb{R}$ и $y = r \in \mathbb{R}$, добијамо $z = 1 - t - r$, па је решење облика $(x, y, z) = (t, r, 1 - t - r)$.

$$\text{г)} D = 2a^2 - 3a + 1 = (a-1)(2a-1),$$

$$D_x = -2a^3 + a^2 + 2a - 1 = -(a-1)(a+1)(2a-1),$$

$$D_y = -a^3 + 4a^2 - 2a - 1 = -(a-1)(a^2 - 3a - 1), D_z = (a^2 - 1)^2.$$

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(-(a+1), \frac{-(a^2 - 3a - 1)}{(2a-1)}, \frac{(a+1)^2(a-1)}{(2a-1)} \right).$$

$$D = 0 \text{ за } a = 1 \vee a = \frac{1}{2}.$$

За $a = 1$ систем се своди на:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow z = 0, y = 1 - x, \text{ па је } (x, y, z) = (t, 1 - t, 0), t \in \mathbb{R}.$$

За $a = \frac{1}{2}$, $D_z \neq 0$ систем нема решења.

5. Решити системе једначина:

$$\begin{array}{ll} x + y + az = 2 & x + y + z = a \\ \text{а) } x + ay + z = -1 & \text{б) } x + (1+a)y + z = 2a \\ ax + y + z = -1 & x + y - (1+a)z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x + y + az = 3 & x + y + az = 1 \\ \text{в) } x + ay + z = 0 & \text{г) } x + ay + az = 1 \\ ax + y + z = 0 & ax + ay + az = 1 \end{array}$$

Решење:

а) $D = -(a-1)^2(a+2)$, $D_x = (a-1)(a+2)$, $D_y = (a-1)(a+2)$,
 $D_z = -2(a-1)(a+2)$.

За $D \neq 0$, тј. за $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1} \right).$$

$D = 0$ за $a = -2 \vee a = 1$.

За $a = -2$ је $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$ и систем се своди на:

$$\begin{array}{l} x + y - 2z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \\ -2x + y + z = -1 \end{array}$$

Решавањем било којом од познатих метода добијамо решење:

$$(x, y, z) = (t+1, t+1, t).$$

За $a = 1$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$, систем је контрадикција.

$x + y + z = 2$, $x + y + z = -1$, $x + y + z = -1$ и нема решења.

б) $D = -a(a+2)$, $D_x = a(-a^2+2)$, $D_y = -a(a+2)$, $D_z = -a^2$.

За $D \neq 0$, тј. за $a \neq 0 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a^2-2}{a+2}, 1, -\frac{a}{a+2} \right).$$

$D = 0$ за $a = -2 \vee a = 0$.

За $a = -2$ систем је немогућ.

За $a = 0$ систем је неодређен и решење је $(x, y, z) = (t, -t, 0) t \in \mathbb{R}$.

в) За $D \neq 0$, односно за $a \neq 1 \wedge a \neq -2$, систем има јединствено

решење $(x, y, z) = \left(-\frac{3}{(a-1)(a+2)}, -\frac{3}{(a-1)(a+2)}, \frac{3(a+1)}{(a-1)(a+2)} \right)$.

За $D = 0$, односно за $a = -2$ систем није могућ и нема решења.

За $D = 0$, односно за $a = 1$ систем није могућ и нема решења.

г) $D = a(a-1)^2$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = (a-1)^2$.

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ је $(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{1}{a} \right)$.

За $D = 0$, односно за $a = 1$ је $(x, y, z) = (1-t-r, t, r)$, $t, r \in \mathbb{R}$.

За $D = 0$, односно за $a = 0$ систем није могућ и нема решења.

6. У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{lll} x - 2y + z = 1 & x + y + z = 3 & \\ \text{а) } 3x + 2y + z = 0 & \text{б) } x - ay + 2z = 1 & \text{в) } \\ 5x - 2y + az = 1 & 2x + 2y - az = 6 & \\ x + 2y + z = 1 & & \\ 3x + 2y + z = 0 & & \\ 5x - 2y + az = 1 & & \end{array}$$

Резултат:

а)

За $a \neq 3$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{a-1}{4(a-3)}, \frac{7-3a}{8(a-3)}, \frac{1}{3-a} \right).$$

За $a = 3$ систем нема решења.

б)

За $a \neq -1$ и $a \neq -2$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(3 - \frac{2}{a+1}, \frac{2}{a+1}, 0 \right).$$

За $a = -2$ систем има бесконачно много решења

$$(x, y, z) = (5, -2-t, t), t \in \mathbb{R}.$$

За $a = -1$ систем нема решења.

в)

За $a \neq -1$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{a-1}{4(a-3)}, \frac{7-3a}{8(a-3)}, \frac{1}{3-a} \right).$$

За $a = 3$ систем нема решења.

7. Решити хомогени систем једначина и дискутовати решења у зависности од параметра a .

$$\begin{array}{ll} 2x + 2y + 3z = 0, & x + y + z = 0, \\ \text{а) } 3x + ay + 5z = 0, & \text{б) } ax + 4y + z = 0, \\ x + 7y + 3z = 0. & 6x + (a+2)y + 2z = 0. \\ x + 2y + z = 0, & x + y + z = 0, \\ \text{в) } x + y + z = 0, & \text{г) } x + (a+1)y + 2z = 0, \\ ax + y + z = 0. & x + (a+1)z = 0. \end{array}$$

Решење:

а) Услов да хомоген систем има нетривијална решења је да детерминанта матрице система буде једнака нули.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & a & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

Систем се своди на две једначине са три непознате:

$$2x + 2y = -3z$$

$$3x + 5y = -5z$$

Решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{-5t}{4}, \frac{-t}{4}, t \right), t \in \mathbb{R}$.

б) $D = a^2 - a - 12$.

За $D \neq 0$, односно за $a \neq 4 \wedge a \neq -3$, систем има само тривијално решење $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$D = 0$ за $a = 4$ и тада систем постаје:

$$x + y + z = 0,$$

$$4x + 4y + z = 0,$$

$$6x + 6y + 2z = 0.$$

који има решења облика $(x, y, z) = (k, -k, 0), k \in \mathbb{R}$.

$D = 0$ за $a = -3$ систем постаје:

$$x + y + z = 0,$$

$$-3x + 4y + z = 0,$$

$$6x - y + 2z = 0.$$

који има решења облика $(x, y, z) = (-3k, -4k, 7k), k \in \mathbb{R}$.

в) $D = a - 1$.

$D \neq 0$ за $a \neq 1$, тада систем има само тривијално решење $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

За $D = 0$, односно за $a = 1$, систем поред тривијалног има и бесконачно много нетривијалних решења и своди се на систем облика:

$$x + 2y + z = 0,$$

$$x + y + z = 0.$$

чије је решење облика $(x, y, z) = (-t, 0, t), t \in \mathbb{R}$.

г) $D = a^2 + 1 \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$, па систем има само тривијално решење.

8. Решити систем једначина матричним методом:

$$\begin{array}{lll} x+2y-z=-3 & x+y+z=2 & 2x-y+3z=-1 \\ \text{а) } 2x+3y+z=-1 & \text{б) } x+2y+3z=2 & \text{в) } x+2y-4z=5 \\ x-y-z=3 & x+y-2z=5 & 3x+y+2z=1 \end{array}$$

Решење:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\det A = 9 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, (x, y, z) = (2, -2, 1).$$

$$\text{в) } (x, y, z) = (1, 2, -1).$$

$$\text{г) } (x, y, z) = (1, 0, -1).$$

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Системи линеарних једначина

Гаусов алгоритам

Крамерово правило

Матрични метод

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

- 1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
ПРВОГ РЕДА**
- 2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОД
КОЈИХ СЕ ПРОМЕНЉИВЕ МОГУ
РАЗДВОЈИТИ**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

- 1.** појам диференцијалне једначине,
- 2.** појам општег решења диференцијалне једначине,
- 3.** појам партикуларног решења диференцијалне једначине,
- 4.** појам сингуларног решења диференцијалне једначине,
- 5.** појам диференцијалне једначине првог реда.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

- **Диференцијалном једначином** називамо једначину која изражава неку везу између независно променљиве, непознате функције и њених извода

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Пример:

$y' = \cos x$ је диференцијална једначина првог реда.

$y'' + 3y' + 5y = \cos x$ је диференцијална једначина другог реда.

Највиши ред извода у тој једначини називамо **редом** те диференцијалне једначине.

- **Решење диференцијалне једначине** је свака функција $y = f(x)$ која са својим изводима идентички задовољава дату једначину.

Како се се једначине обично решавају интеграцијом, решење се често назива интегралом диференцијалне једначине.

- **Опште решење** диференцијалне једначине n -тог реда је свака функција облика

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

односно

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

где су $C_1, C_2, \dots, C_n$ међусобно независне константе.

- **Партикуларно решење** диференцијалне једначине је свака она функција која се добија из општег решења те једначине за посебне вредности константи $C_1, C_2, \dots, C_n$.
- Једнакости $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n)}(x_0) = y^{(n)}_0$, где су **почетне вредности** $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n)}_0$, дати бројеви, зовемо **почетни услови**.
- Партикуларно решење диференцијалне једначине које се добија из њеног општег решења на основу датих почетних услова зове се **Кошијево решење**.
- **Сингуларно решење** диференцијалне једначине је решење које није партикуларно, односно не може се добити из општег решења ни за које вредности константи.

Пример:

$$y' = \cos x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dy = \cos x dx, \text{ интеграцијом ове}$$

једнакости, тј.

$$\int dy = \int \cos x dx \Leftrightarrow y = \sin x + C, \text{ добијамо опште решење}$$

диференцијалне једначине.

Пример:

Опште решење диференцијалне једначине $y''y = y'(1+y')$ је

$$\text{функција } y = \frac{1}{C_1} \left(e^{C_1(x+C_2)} + 1 \right), C_1 \neq 0.$$

Међутим ова једначина има и сингуларно решење $y = C$, које се не може добити из општег решења никаквим избором константи C_1 и C_2 .

5.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

- *Диференцијалном једначином првог реда* називамо једначину облика

$$y' = f(x, y), \text{ односно } F(x, y, y') = 0,$$

у којој су x независно променљива, y функција, а y' њен извод.

5.2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОД КОЈИХ СЕ ПРОМЕНЉИВЕ МОГУ РАЗДВОЈИТИ

- Ако се диференцијална једначина може написати у облику

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

кажемо да је то једначина код које се *променљиве могу раздвојити*.

Интеграцијом те једначине, тј.

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

добивамо везу између x , y и C , које представља *опште решење* диференцијалне једначине.

Ако се зада почетни услов $y(x_0) = y_0$, одређује се константа C и њој одговарајуће *партикуларно решење* које задовољава дати почетни услов.

ЗАДАЦИ ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

Решити диференцијалне једначине:

1. $x dx + y dy = 0$.

Решење:

$$x dx + y dy = 0 \Leftrightarrow y dy = -x dx.$$

Интеграцијом једнакости, тј. $\int x dx = \int -y dy$ добијамо

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2C.$$

Уобичајено је да уведемо смену $2C = C_1$.

Значи, опште решење дате диференцијалне једначине гласи

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

2. $y' = \frac{y}{x}, x \neq 0$.

Решење:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, y \neq 0.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$\ln|y| = \ln|x| + C$. Ако уведемо смену $C = \ln C_1, C_1 > 0$, добијамо

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1 \text{ одакле је } |y| = C_1|x|.$$

За $C_1 = \pm C_2$ добијамо опште решење $y = C_2 x$.

3. $y' = 2y^2 x^{-3}$, ако је $x \neq 0$.

Решење:

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 x^{-3} \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x^3},$$

$$\int y^{-2} dy = 2 \int x^{-3} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2} + C \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1 - Cx^2}.$$

4. $xy' = y(1 + x \cos x).$

Решење:

$$xy' = y(1 + x \cos x) \Leftrightarrow y' = \frac{y(1 + x \cos x)}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$= y \frac{1 + x \cos x}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \cos x \right) dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} + \cos x \right) dx \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + \sin x + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - \ln|x| - \ln C = \sin x, C > 0,$$

$$\ln \left| \frac{y}{Cx} \right| = \sin x \Leftrightarrow \frac{y}{Cx} = e^{\sin x} \Leftrightarrow y = Cxe^{\sin x}, C = \pm C_1.$$

5. $y' = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)xy}$ ако је $x, y \neq 0$.

Решење:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)xy} \Leftrightarrow \frac{y}{1 + y^2} dy = \frac{dx}{x(1 + x^2)},$$

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{dx}{x(1 + x^2)} \Leftrightarrow \int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1 + x^2} dx,$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \ln C, C > 0$$

$$\ln(1 + y^2)(1 + x^2) = 2(\ln|x| + \ln C) \Leftrightarrow \ln(1 + y^2)(1 + x^2) = \ln(x^2 C^2) \Leftrightarrow$$

$$(1 + y^2)(1 + x^2) = x^2 C_1, C^2 = C_1.$$

6. $y' = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y.$

Решење:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y \Leftrightarrow \frac{dy}{\operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{tg}^2 x dx \Leftrightarrow \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} dy = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \sin^2 y}{\sin^2 y} dy = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx,$$

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 y} - 1 \right) dy = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \Leftrightarrow y + ctgy = tgx - x + C.$$

8. $y' = 2\sqrt{y}, y > 0.$

Решење:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx, \quad \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx, \quad \sqrt{y} = x + C \Leftrightarrow y = (x + C)^2.$$

Функција $y = 0$ је сингуларно решење.

9. $2x^2 yy' + y^2 = 2.$

Решење:

$$2x^2 yy' + y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2 - 2} dy = -\frac{dx}{x^2},$$

$$\int \frac{2y}{y^2 - 2} dy = -\int \frac{dx}{x^2},$$

$$2 \ln |y^2 - 2| = \frac{1}{x} + \ln C \Leftrightarrow (y^2 - 2)^2 = Ce^{\frac{1}{x}}, C > 0.$$

Функције $y = \pm\sqrt{2}$ су сингуларна решења једначине.

7. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy \text{ за које је } y(0) = 1.$$

Решење:

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = y(x - \sqrt{1 + x^2}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x - \sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2} dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{x}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{x}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) dx,$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln C, C > 0,$$

$$|y| = \frac{C\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}, y = \frac{C_1\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}, C = \pm C_1.$$

Из услова да је $y(0) = 1$ добијамо да је $C_1 = 1$ и партикуларно

решење је $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$

10. $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y), y(0) = \frac{\pi}{4}.$

Решење:

$$y' + \cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y = \cos x \cos 2y + \sin x \sin 2y \Leftrightarrow$$

$$y' = 2 \sin x \sin 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \sin x \sin 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{\sin 2y} = 2 \sin 2x dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sin 2y} = 2 \int \sin 2x dx, \left\{ \begin{array}{l} \sin 2y = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 y}, \operatorname{tg} y = t, \\ \sin 2y = \frac{2t}{1+t^2}, dy = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\},$$

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \sin 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = 2 \int \sin 2x dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln|t| = -\cos 2x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tgy}| = -\cos 2x + C$$

За $y(0) = \frac{\pi}{4}$ добијамо $C = 2$ и партикуларно решење је

$$\frac{1}{2} \ln|\operatorname{tgy}| = -\cos 2x + 2.$$

11. $(xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy.$

Решење:

$$x(y+1)dx = (x^2+1)(y^2+1)dy \Leftrightarrow \frac{y^2+1}{y+1}dy = \frac{x}{x^2+1}dx,$$

$$\int \left(y - 1 + \frac{2}{y+1} \right) dy = \int \frac{x}{x^2+1} dx,$$

$$\frac{y^2}{2} - y + 2\ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2y + 4\ln|y+1| = \ln(x^2+1) + 2C, \ln C_1 = 2C, C_1 > 0$$

$$y^2 - 2y = \ln \frac{C_1(x^2+1)}{(y+1)^4} \Leftrightarrow y^2 - 2y = \ln \frac{C_2(x^2+1)}{(y+1)^4}, C_2 = \pm C_1.$$

12. $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0.$

Решење:

$$\cos x \cos y dy = -\sin x \sin y dx \Leftrightarrow \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln|\sin y| = \ln|\cos x| + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{\sin y}{\cos x} \right| = \ln C \Leftrightarrow \frac{\sin y}{\cos x} = C_1, C = \pm C_1.$$

13. $(y^2 + y + 1)dx + x(x^2 - 4)dy = 0.$

Решење:

$$(y^2 + y + 1)dx + x(x^2 - 4)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x(x^2 - 4)} = -\frac{dy}{y^2 + y + 1}$$

$$\int \left(-\frac{1}{4x} + \frac{1}{8(x-2)} + \frac{1}{8(x+2)} \right) dx = -\int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}},$$

$$-\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x+2| + \ln C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, C > 0,$$

$$\frac{1}{8} \ln \frac{C_1(x^2 - 4)}{x^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, C_1 = \pm C.$$

14. $xy^2 + e^x y' = 0.$

Решење:

$$xy^2 + e^x y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} dx = -\frac{dy}{y^2},$$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = -\int \frac{dy}{y^2},$$

Какоје $\int \frac{x}{e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -xe^{-x} - e^{-x}$, и добијамо опште решење

$$-xe^{-x} - e^{-x} = \frac{1}{y} + C.$$

15. $xy dx + e^x dy = 0.$

Резултат: $e^{-x}(x+1) = \ln y C_1.$

16. $xyy' = \sqrt{y^2 + 1}.$

Резултат: $\ln x = C + \sqrt{y^2 + 1}.$

17. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2.$

Резултат: $y = 2 + C \cos x.$

18. $y' - x^2 = y(x^2 y + x^2 - 2y').$

Резултат: $\ln(y^2 + y + 1) = \frac{x^3}{3} + C.$

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Диференцијална једначина

Опште решење диференцијалне једначине

Партикуларно решење диференцијалне једначине

Сингуларно решење диференцијалне једначине

ЛИНЕАРНА И ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

1. ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

2. ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. општи облик линеарне диференцијалне једначине првог реда,
2. општи облик хомогене диференцијалне једначине првог реда,
3. опште решење линеарне диференцијалне једначине првог реда,
4. решавање хомогене диференцијалне једначине увођењем одговарајуће смене.

6.1 ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

- *Линеарна диференцијална једначина првог реда* је једначина облика

$$y' + f(x)y = g(x)$$

која је линеарна у односу на функцију $y(x)$ и њен извод. $f(x)$ и $g(x)$ су задате непрекидне функције.

- *Опште решење* линеарне диференцијалне једначине је:

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[\int g(x)e^{\int f(x)dx} dx + C \right].$$

Доказ:

Ако се задата једначина помножи са $e^{\int f(x)dx}$ добијамо

$$y'e^{\int f(x)dx} + f(x)ye^{\int f(x)dx} = g(x)e^{\int f(x)dx},$$

односно еквивалентну једначину

$$\left(ye^{\int f(x)dx} \right)' = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Интеграцијом ове једначине добијамо једнакост

$$ye^{\int f(x)dx} = C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx,$$

односно опште решење дате диференцијалне једначине,

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right).$$

6.2 ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

- Једначина облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

зове се *хомогена диференцијална једначина*.

Увођењем смене, тј помоћне непознате диференцијабилне функције $u = u(x)$ тако да је:

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{тј.} \quad y = xu,$$

свака хомогена једначина се може свести на једначину која раздваја променљиве.

Наиме, како је $y' = u + xu'$ једначина $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ се своди на једначину

$$u + xu' = f(u),$$

односно у облику

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u \quad \text{или} \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

у којој су променљиве раздвојене.

Интеграцијом ове једнакости

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{тј} \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x|C, \quad C > 0,$$

И коришћењем уведене смене, добија се опште решење хомогене једначине

ЗАДАЦИ

Решити диференцијалне једначине:

1. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$.

Решење:

Како је $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$, биће

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(\int e^{\int \frac{dx}{x}} \sin x dx + C \right) = e^{-\ln|x|} \left(\int e^{\ln|x|} \sin x dx + C \right) \\ = \frac{1}{|x|} \left(\int |x| \sin x dx + C \right).$$

За $x > 0$, добијамо

$$y = \frac{1}{x} (\sin x - x \cos x + C) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$

За $x < 0$, добијамо

$$y = -\frac{1}{x} (-\sin x + x \cos x + C) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} - \frac{C}{x} = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Из овога примера видимо да није потребно користити апсолутну вредност зато што све промене знака апсорбује интеграциона константа.

Опште решење полазне диференцијалне једначине је

$$y = \frac{1}{x} (\sin x - x \cos x + C) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$

2. $y' + 2y - (x^2 + 2x) = 0$, за $y(0) = \frac{3}{4}$.

Решење:

$$y' + 2y = x^2 + 2x,$$

$$f(x) = 2, g(x) = x^2 + 2x,$$

$$y = e^{-2x} \left(\int e^{2x} (x^2 + 2x) dx + C \right),$$

$$\left\{ \int e^{2x} (x^2 + 2x) dx = \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \cdot e^{2x} - \int (x+1) \cdot e^{2x} dx = \right. \\ \left. \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} (x+1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right. \\ \left. y = e^{-2x} \left(C + \frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 + 2x - 1) \right) = e^{-2x} C + \frac{1}{4} (2x^2 + 2x - 1) \right\}.$$

је опште решење диференцијалне једначине.

3. $y' + y = \sin x$.

Решење:

$$f(x) = 1, g(x) = \sin x,$$

$$y = e^{-\int dx} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \cdot \left[\int e^x \sin x dx + C \right],$$

$$\left\{ \int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right\}.$$

$$y = e^{-x} \left[C + \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right] = \frac{C}{e^x} + \frac{\sin x - \cos x}{2}.$$

је опште решење.

4. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$.

Решење:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \sin x,$$

$$y = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{\int \operatorname{tg} x dx} dx \right],$$

$$\left\{ \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| \right\}.$$

$$y = e^{\ln(\cos x)} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{\ln(\cos x)^{-1}} dx + C \right] = \cos x \cdot \left[\int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx + C \right]$$

$$= \cos x \cdot \left[\int \operatorname{tg} x dx + C \right] = \cos x \cdot \left[C - \ln(\cos x) \right].$$

је опште решење.

5. $xy' + 2y = e^{x^2}$.

Решење:

$$xy' + 2y = e^{x^2} \Leftrightarrow y' + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{x}e^{x^2},$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = \frac{1}{x}e^{x^2},$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \frac{e^{x^2}}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = e^{-2\ln x} \left[\int \frac{e^{x^2}}{x} e^{2\ln x} dx + C \right] =$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \left[\int \frac{e^{x^2}}{x} x^2 dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x \cdot e^{x^2} dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right].$$

је опште решење.

6. $xy' - y = x \ln x.$

Решење:

$$xy' - y = x \ln x \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = \ln x,$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = \ln x,$$

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left[\int \ln x \cdot e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} dx + C \right] = e^{\ln x} \cdot \left[\int \ln x \cdot e^{-\ln x} dx + C \right] =$$

$$x \cdot \left[\int \frac{\ln x}{x} dx + C \right] = x \cdot \left[C + \frac{\ln^2 x}{2} \right].$$

је опште решење.

7. $y' = 2(2x - y)$, за $y(0) = 1$.

Решење:

$$y' = 2(2x - y) \Leftrightarrow y' + 2y = 4x,$$

$$f(x) = 2, g(x) = 4x,$$

$$y = e^{-2\int dx} \left(C + 4 \int x e^{2\int dx} dx \right) = e^{-2x} \left(C + 4 \int x e^{2x} dx \right).$$

$$\left\{ \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right\}.$$

$$y = e^{-2x} \left(C + 4 \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) \right) = C e^{-2x} + 2x - 1.$$

је опште решење.

Ако је $y(0) = 1$, $C = 2$, партикуларно решење је $y = 2e^{-2x} + 2x - 1$.

8. $(y + x^3 \sin x)dx - xdy = 0$, за $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решење:

$$(y + x^3 \sin x) - xy' = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin x,$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = x^2 \sin x,$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int e^{-\int \frac{dx}{x}} x^2 \sin x dx + C \right) = e^{\ln x} \left(\int e^{-\ln x} x^2 \sin x dx + C \right)$$

$$= x \left(\int x \sin x dx + C \right) = x \left(-x \cos x + \int \cos x dx + C \right)$$

$$= x(-x \cos x + \sin x + C)$$

је опште решење.

Како је $C = \frac{2}{\pi} - 1$, партикуларно решење је

$$y = x \left(\frac{2}{\pi} - 1 - x \cos x + \sin x \right).$$

9. $y - x^2 y' = 1 + xy'$

Решење:

$$y'(x + x^2) - y = -1 \Leftrightarrow y' - y \frac{1}{x + x^2} = -\frac{1}{x + x^2},$$

$$f(x) = -\frac{1}{x + x^2}, g(x) = -\frac{1}{x + x^2},$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x+x^2}} \left(C - \int e^{-\int \frac{1}{x+x^2}} - \frac{1}{x+x^2} dx + C \right),$$

$$\left\{ \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) = \ln \frac{x}{x+1} \right\}.$$

$$y = e^{\ln \frac{x}{x+1}} \left(C - \int e^{-\ln \frac{x}{x+1}} \frac{1}{x+x^2} dx \right) = \frac{x}{x+1} \left(C - \int \frac{x+1}{x} \frac{1}{x(x+1)} dx \right) =$$

$$\frac{x}{x+1} \left(C - \int \frac{dx}{x^2} \right) = \frac{x}{x+1} \left(C + \frac{1}{x} \right) = \frac{x C}{x+1} + \frac{1}{x+1},$$

је опште решење.

10. $x^2 y' + xy - 8x^2 \cos^2 x = 0$

Решење:

$$x^2 y' + xy - 8x^2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = 8 \cos^2 x,$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 8 \cos^2 x,$$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int 8 \cos^2 x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right) = e^{-\ln x} \left(C + \int 8 \cos^2 x \cdot e^{\ln x} dx \right) =$$

$$\frac{1}{x} \left(C + 8 \int x \cdot \cos^2 x dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + 8 \int x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \right) =$$

$$\frac{1}{x} \left(C + 4 \int (x + x \cdot \cos 2x) dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + 2x^2 + 4 \int x \cos 2x dx \right) =$$

$$\left\{ \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right\}$$

$$\frac{1}{x} \left(C + 2x^2 + 4 \left(\frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \right) = \frac{C}{x} + 2x + 2 \sin 2x + \frac{1}{x} \cos 2x.$$

је опште решење.

11. $xy' + y = x^3 + x$

Резултат: $y = \frac{1}{4} \left(x^3 + 2x + C \frac{1}{x} \right).$

12. $y' + y \sin x = \sin x.$

Резултат: $y = 1 + Ce^{\cos x}$.

13. $xy' - y = x^5$.

Резултат: $y = Cx + \frac{x^5}{4}$.

14. $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -\cos^2 x$

Резултат: $y = \sin x \cdot [C + \operatorname{ctgx} + x]$.

15. $y' + y \sin x = 2xe^{\cos x}$.

Резултат: $y = e^{\cos x} (x^2 + C)$.

16. $y' \cos^2 x + y = 1$, за $y(0) = 0$.

Резултат: $y_p = 1 - e^{-\operatorname{tg} x}$.

17. $y' + y \cdot \operatorname{ctgx} = 5e^{\cos x}$, за $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$.

Резултат: $y_p = \frac{1}{\sin x} (1 - 5 \cdot e^{\cos x})$.

18. $y' + 2xy = x^3$, за $y(1) = 1$

Резултат: $y_p = e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Решити диференцијалне једначине:

19. $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Решење:

Ако уведемо смену $\frac{y}{x} = u$; $u = u(x)$, $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$, дата

једначина постаје

$$u'x + u = u + u^2 \Leftrightarrow u'x = u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Ако интегралимо ову једнакост, добијамо опште решење дате диференцијалне једначине

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C, C > 0,$$

$$-\frac{1}{u} = \ln C|x| \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln C_1 x}, C_1 = \pm C,$$

$$y = -\frac{x}{\ln C_1 x}.$$

20. $xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y.$

Решење:

Дељењем полазне једначине са $x \neq 0$, добијамо

$$y' = \sqrt{3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

смена: $\frac{y}{x} = u$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u.$

$$u'x + u = \sqrt{3 + u^2} + u \Leftrightarrow u'x = \sqrt{3 + u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{3 + u^2}.$$

Интеграцијом добијамо:

$$\int \frac{du}{\sqrt{3 + u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u + \sqrt{3 + u^2}| = \ln|x| + \ln C, C > 0,$$

$$\ln|u + \sqrt{3 + u^2}| = \ln C|x|, C_1 = \pm C,$$

$$u + \sqrt{3 + u^2} = C_1 x \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = C_1 x \Leftrightarrow y + \sqrt{3x^2 + y^2} = C_1 x^2,$$

опште решење диференцијалне једначине.

21. $2xyu' = x^2 + 3y^2.$

Решење:

Дељењем полазне једначине са $x^2 \neq 0$, добијамо

$$2 \cdot \frac{y}{x} y' = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2, \text{ а увођењем смене } y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \text{ је}$$

$$2 \cdot u(u + xu') = 1 + 3u^2 \Leftrightarrow 2u^2 + 2uxu' = 1 + 3u^2 \Leftrightarrow 2uxu'$$

$$= 1 + u^2 \Leftrightarrow \frac{2udu}{1+u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$2 \int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln(1+u^2) = \ln|x|C, C > 0,$$

$$(1+u^2) = |x|C \Leftrightarrow (1+u^2) = C_1x, \quad C_1 = \pm C.$$

Како је $u = \frac{y}{x}$ добијамо опште решење диференцијалне једначине.

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C_1x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^3C_1.$$

22. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

Решење:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}, \text{ смена : } \frac{y}{x} = u, y' = u'x + u,$$

$$xu' + u = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du - \int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\arctgu - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x|C \Leftrightarrow \arctgu = \ln C|x|\sqrt{1+u^2}, \quad C > 0$$

$$C|x|\sqrt{1+u^2} = e^{\arctgu} \Leftrightarrow C\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctg\frac{y}{x}},$$

је опште решење диференцијалне једначине.

23. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$

Решење

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} \cdot y' = 0, \text{ смена:}$$

$$\frac{y}{x} = u; \quad y' = u'x + u,$$

$$1 + u^2 + u \cdot (u + xu') = 0 \Leftrightarrow 1 + 2u^2 = -xu'u' \Leftrightarrow \frac{u}{1 + 2u^2} du = -\frac{dx}{x},$$

$$-\int \frac{u du}{2u^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{u du}{u^2 + \frac{1}{2}} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \ln(2u^2 + 1) = \ln|x|C, \quad C > 0,$$

$$\ln \sqrt[4]{2u^2 + 1} + \ln x C_1 = 0, C_1 = \pm C,$$

$$C_1 x = \frac{1}{\sqrt[4]{2u^2 + 1}} \Leftrightarrow C_1^4 x^2 = \frac{1}{2y^2 + x^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1 - C_1^4 x^4}{2C_1^4 x^2}.$$

је опште решење диференцијалне једначине.

24. $(x^2 + y^2)dx + x^2 dy = 0$

Решење:

$$(x^2 + y^2)dx + x^2 dy = 0 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + y' = 0, \text{ смена } \frac{y}{x} = u,$$

$$1 + u^2 + u'x + u = 0 \Leftrightarrow u'x = -(u^2 + u + 1) \Leftrightarrow -\frac{du}{u^2 + u + 1} = \frac{dx}{x},$$

$$-\int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} = \ln|x|C, \quad C > 0,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln C_1 x, \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln C_1 x, \quad C_1 = \pm C.$$

је опште решење диференцијалне једначине.

25. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$

Решење:

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}y' = 0, \text{ смена: } \frac{y}{x} = u,$$

$$1 - 3u^2 + 2u(u'x + u) = 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{u^2 - 1}u' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2u}{u^2 - 1}du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{2u}{u^2 - 1}du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u^2 - 1| = \ln|x|C, C > 0, |u^2 - 1| = |x| \cdot C, u^2 = Cx + 1, C = \pm C_1,$$

$$\frac{y^2}{x^2} = Cx + 1 \Leftrightarrow y^2 = Cx^3 + x^2.$$

је опште решење дате диференцијалне једначине.

$$26. (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy.$$

Решење:

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = y', \text{ смена: } \frac{y}{x} = u,$$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = u'x + u \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u + \sqrt{u^2 + 1}| = \ln|x|C, C > 0 \Leftrightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} = xC_1, C_1 = \pm C \Leftrightarrow$$

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = C_1x^2.$$

је опште решење дате диференцијалне једначине.

$$27. (3x + y)y' = x + 3y.$$

Решење:

$$(3x + y)y' = x + 3y \Leftrightarrow \left(3 + \frac{y}{x}\right)y' = 1 + 3\frac{y}{x}, \text{ смена: } \frac{y}{x} = u,$$

$$(3+u)(u+xu')=1+3u \Leftrightarrow u'x+u=\frac{1+3u}{3+u} \Leftrightarrow u'x=-\frac{u^2-1}{3+u},$$

$$\int \frac{3+u}{u^2-1} du = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 3 \int \frac{du}{u^2-1} + \int \frac{u du}{u^2-1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{3}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{1}{2} \ln |u^2-1| = -\ln |x| + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right|^3 \cdot |u^2-1| = \ln \frac{C^2}{x^2},$$

$$\ln \frac{C}{x} = \ln \frac{(u-1)^2}{u+1} \Leftrightarrow \frac{C}{x} = \frac{\left(\frac{y}{x} - 1 \right)^2}{\frac{y}{x} + 1} \Leftrightarrow \frac{(y-x)^2}{y+x} = C.$$

је опште решење.

28. $xy' - y = x \left(1 + e^{\frac{y}{x}} \right)$, за $x \neq 0$ и $y(1) = 0$.

Решење:

$$xy' - y = x \left(1 + e^{\frac{y}{x}} \right) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 1 + e^{\frac{y}{x}}, x \neq 0, \text{ смена: } \frac{y}{x} = u.$$

$$u + xu' - u = 1 + e^u \Leftrightarrow \frac{du}{1+e^u} = \frac{dx}{x}, \left\{ 1+e^u = t, e^u du = dt, du = \frac{dt}{t-1} \right\}$$

$$\frac{dt}{t(t-1)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| = \ln |x| + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{t-1}{t} \right| = |x|C \Leftrightarrow \frac{t-1}{t} = xC_1, C = \pm C_1$$

$$\frac{e^u}{1+e^u} = xC_1 \Leftrightarrow e^u = \frac{xC_1}{1-xC_1} \Leftrightarrow u = \ln \frac{xC_1}{1-xC_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \ln \frac{xC_1}{1-xC_1} \Leftrightarrow y = x \ln \frac{xC_1}{1-xC_1}$$

Из почетног услова добијамо $C_1 = \frac{1}{2}$ и партикуларно решење

$$y = x \ln \frac{x}{2-x}.$$

29. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

Решење:

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \text{ смена } \frac{y}{x} = u,$$

$$u'x = \operatorname{tg} u \Leftrightarrow \frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow \sin u = xC_1 \Leftrightarrow \sin \frac{y}{x} = xC_1, C_1 = \pm C$$

Ако је $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$, па је партикуларно решење $\sin \frac{y}{x} = \frac{x}{2}$.

30. $x^2 y' = y(x + y)$, за $y(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Решење:

$$x^2 y' = y(x + y) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \text{ смена } \frac{y}{x} = u,$$

$$\frac{du}{dx} x = u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{u} = \ln |x| + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{y} = \ln |x| C \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\ln x C_1}, C_1 = \pm C$$

Ако је $y(1) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow C_1 = -\ln 2$ па је партикуларно решење $y = -\frac{x}{\ln \frac{x}{2}}$.

31. $xy' = y \ln \frac{y}{x}.$

Резултат: $y = xe^{C_1x+1}$.

32. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$, за $y(1) = e$.

Резултат: $y = xe^x$.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Линеарна диференцијална једначина првог реда

Хомогена диференцијална једначина првог реда

БЕРНУЛИЈЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

- 1. БЕРНУЛИЈЕВА
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА
ЈЕДНАЧИНА**
- 2. ПРИМЕРИ ПРИМЕНА
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ
ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА У
ЕЛЕКТРОТЕХНИЦИ**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. општи облик Бернулијеве диференцијалне једначине,
2. свођење Бернулијеве на линеарну диференцијалну једначину,
3. примену диференцијалних једначина на RLC кола,

7.1 БЕРНУЛИЈЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

Бернулијева једначина има облик

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R}.$$

За $n=0$ она се своди на линеарну диференцијалну једначину, а

за $n=1$ на једначину у којој се раздвајају променљиве.

Ако се уведе смена $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, односно $y' = \frac{z'}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}}$, једначина се своди на линеарну диференцијалну једначину функције $z(x)$,

$$z' + (1-n)f(x) \cdot z = (1-n)g(x),$$

чије је решење $z = \varphi(x, C)$. Како је $z = y^{1-n}$, добија се опште решење полазне једначине

$$y = [\varphi(x, C)]^{\frac{1}{1-n}}.$$

7.2 ПРИМЕРИ ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА У ЕЛЕКТРОТЕХНИЦИ

1. Неоптерећени кондензатор капацитивности C укључује се у коло сталне једносмерне струје са једним отпорником отпорности R и једним генератором електромоторне силе E_0 . Одредити како се мења оптерећеност кондензатора од почетка

оптерећивања кондензатора до успостављања стационарног стања у колу.

Решење:

Из текста задатка добија се следећа једначина

$$E_0 = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C},$$

односно

$$Q'(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{E_0}{R}.$$

Ово је линеарна диференцијална једначина првог реда чије је решење

$$Q(t) = e^{-\int \frac{1}{RC} dt} \left(C_1 + \int \frac{E_0}{R} e^{\int \frac{1}{RC} dt} dt \right) = e^{-\frac{1}{RC} t} \left(C_1 + \int \frac{E_0}{R} e^{\frac{1}{RC} t} dt \right) =$$

$$e^{-\frac{1}{RC} t} \left(C_1 + \frac{E_0}{R} R C e^{\frac{1}{RC} t} \right) = C_1 e^{-\frac{1}{RC} t} + C E_0.$$

Уз почетне услове $t = 0$ и $Q(0) = 0$ добијамо да је $C_1 = -C E_0$ односно партикуларно решење

$$Q(t) = C E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

2. Кондензатор капацитивности C оптерећен количином наелектрисања Q_0 растеређује се преко отпорника отпорности R . Одредити како се мења оптерећеност кондензатора у току процеса растеређивања.

Решење:

Из текста задатка добија се следећа једначина

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0,$$

Ово је диференцијална једначина првог реда која раздваја променљиве

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{RC} dt,$$

Интеграцијом ове једнакости

$$\int \frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{RC} \int dt,$$

добивамо опште решење једначине

$$\ln Q(t) + \ln C_1 = -\frac{1}{RC} t, C_1 > 0 \Leftrightarrow Q(t) C_1 = e^{-\frac{1}{RC} t}.$$

Уз почетне услове $t = 0$ и $Q(0) = Q_0$ добијамо да је

$$C_1 = \frac{1}{Q_0} \text{ односно партикуларно решење}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC} t}.$$

3. Прост калем индуктивности L укључује се у коло сталне једносмерне струје са једним отпорником отпорности R и једним генератором електромоторне силе E_0 . Одредити како се мења јачина струје у колу док се не успостави стационарно стање.

Решење:

$$4. \quad E_0 = L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

ЗАДАЦИ

Одредити решења диференцијалних једначина:

1. $xy' + y + xy^2 = 0$ за $y(1) = 1$.

Решење:

Ако дату једначину поделимо са $x \neq 0$, добијамо

$$y' + \frac{1}{x}y = -y^2.$$

Да бисмо је решили, уводимо смену $y = z^{\frac{1}{1-2}} = z^{-1}$.

Одавде је $y' = -z^{-2} \cdot z'$, па дата једначина постаје

$$-z^{-2} \cdot z' + \frac{1}{x}z^{-1} = -z^{-2},$$

односно после дељења са $-z^{-2} \neq 0$, $z' - \frac{1}{x}z = 1$.

Опште решење ове једначине је

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) = x \left(C + \int \frac{dx}{x} \right) = x(C + \ln|x|).$$

Коришћењем смене $y = \frac{1}{z}$ добијамо опште решење дате

$$\text{једначине } y = \frac{1}{x(C + \ln|x|)}.$$

Како је $y(1) = 1$, биће $C = 1$, па је партикуларно решење

$$y = \frac{1}{x(1 + \ln|x|)}.$$

2. $y' + y = xy^5$.

Решење:

Ако уведемо смену $y = z^{-\frac{1}{4}}$, $y' = -\frac{1}{4}z^{-\frac{5}{4}} \cdot z'$ и заменимо

ове вредности у полазну једначину добијамо:

$$-\frac{1}{4}z^{-\frac{5}{4}}z' + z^{-\frac{1}{4}} = xz^{-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow z' - 4z = -4x.$$

Решење ове, сада линеарне ледначине, је

$$z = e^{4x} \left(C - 4 \int x e^{-4x} dx \right) = C e^{4x} + x + \frac{1}{4}.$$

Како је $y = z^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow z = y^{-4}$, добијамо опште решење полазне диференцијалне једначине $y^{-4} = C e^{4x} + x + \frac{1}{4}$.

3. $xy' - y = 2y^2 x \ln x$, за $y(1) = 1$.

Решење:

Дељењем ове једначине са $x \neq 0$ добијамо

$$y' - \frac{1}{x}y = 2y^2 \ln x.$$

Уводимо смену $y = z^{-1} \Rightarrow y' = -z^{-2}z'$,

па добијамо $-z^{-2} \cdot z' - \frac{1}{x}z^{-1} = 2z^{-2} \ln x \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -2 \ln x$.

Опште решење ове једначине је

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C - 2 \int e^{\int \frac{dx}{x}} \ln x dx \right) \\ &= e^{-\ln x} \left(C - 2 \int e^{\ln x} \ln x dx \right) = \frac{1}{x} \left(C - 2 \int x \ln x dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right), \end{aligned}$$

па је опште решење дате једначине

$$y = z^{-1} = x \left(C - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right)^{-1}.$$

Ако је $y(1) = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$, партикуларно решење је

$$y = x \left(-\frac{1}{2} - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right)^{-1}.$$

4. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$.

Решење:

смена $y = z^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = z^3, y' = 3 \cdot z^2 z',$

$$3z^2 z' - 9x^2 z^3 = (x^5 + x^2)z^2 \Leftrightarrow z' - 3x^2 z = \frac{1}{3}(x^5 + x^2),$$

$$z = e^{x^3} \left(C + \int \frac{x^5 + x^2}{3} e^{-x^3} dx \right) = e^{x^3} \left(C + \frac{1}{3} \left(\int x^5 e^{-x^3} dx + \int x^2 e^{-x^3} dx \right) \right)$$

$$z = Ce^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9}$$

.

$$y = \left(Ce^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9} \right)^3 \text{ је опште решење.}$$

Ако је $y(0) = 0, C = \frac{2}{9}$ партикуларно решење је

$$y = \left(\frac{2}{9} e^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9} \right)^3.$$

5. $x^3 y^2 + xy = y'$

Решење:

$$x^3 y^2 + xy = y' \Leftrightarrow y' - xy = x^3 y^2,$$

смена $y = z^{\frac{1}{1-2}} = z^{-1}, y' = -z^{-2} z'$

$$z + xz = -x^3,$$

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - \int x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right),$$

$$\left\{ \int x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} \right\}$$

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 2e^{\frac{x^2}{2}} \right) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 + 2,$$

$y^{-1} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 + 2$ је опште решење.

Ако је $y(1) = 1$ добијамо $C = 0$ и партикуларно решење

је $y = \frac{1}{2 - x^2}$.

6. $y' - \frac{1}{x}y - x^2\sqrt{y} = 0$.

Решење:

$$y' - \frac{1}{x}y - x^2\sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = x^2\sqrt{y},$$

смена $y = z^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = z^2$, $y' = 2 \cdot z \cdot z'$,

$$2zz' - \frac{1}{x}z^2 = x^2z \Leftrightarrow z' - \frac{1}{2x}z = \frac{1}{2}x^2$$

$$z = e^{\frac{1}{2}\ln x} \left(C + \int e^{-\frac{1}{2}\ln x} \cdot \frac{x^2}{2} dx \right) = \sqrt{x} \left(C + \frac{1}{2} \int x^{\frac{3}{2}} dx \right)$$

$$= \sqrt{x} \left(C + \frac{1}{5} \sqrt{x^5} \right) = C\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3.$$

$$y = \left(C\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3 \right)^2, \text{ је опште решење.}$$

Ако је $y(1) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{5}$, партикуларно решење је

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3.$$

7. $xy' + y = x^3y^6$

Решење:

$$xy' + y = x^3y^6 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = x^2y^6,$$

смена $y = z^{\frac{1}{1-6}} = z^{-\frac{1}{5}}$, $y' = -\frac{1}{5} \cdot z^{-\frac{6}{5}} \cdot z'$,

$$-\frac{1}{5} \cdot z^{-\frac{6}{5}} \cdot z' + \frac{1}{x} z^{-\frac{1}{5}} = x^2 z^{-\frac{6}{5}} \Leftrightarrow z' - \frac{5}{x} z = -5x^2,$$

$$z = e^{\ln x^5} \left(C - 5 \int x^2 e^{-\ln x^5} dx \right) = x^5 \left(C - 5 \int \frac{1}{x^3} dx \right)$$

$$= x^5 \left(C + \frac{5}{2x^2} \right) = Cx^5 + \frac{5}{2}x^3,$$

$$y^{-5} = Cx^5 + \frac{5}{2}x^3 \text{ је опште решење.}$$

8. $y' - y = xy^5.$

Резултат: $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}.$

9. $y' - y = xy^2.$

Резултат: $y = \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}.$

10. $y' + \frac{1}{x}y = x^2y^2.$

Резултат: $y = \frac{2}{x(2C - x^2)}.$

11. $y' + xy = xy^3$

Резултат: $y = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{x^2}}}.$

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Бернулијева диференцијална једначина

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА

- 1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ
ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА
КОЈЕ САДРЖЕ САМО
ПРМЕНЉИВУ x**
- 2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ
ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА
КОЈЕ НЕ САДРЖЕ y**
- 3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ
ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА
КОЈЕ НЕ САДРЖЕ x**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате да решите диференцијалне једначине другог реда :

- 1.** које садрже само прменљиву x ,
- 2.** које не садрже прменљиву y ,
- 3.** које не садрже прменљиву x .

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА

- *Диференцијална једначина другог реда* је облика

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

- *Опште решење* диференцијалне једначине другог реда је

$$\phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

где су C_1, C_2 произвољне константе.

- Почетни услови за одређивање интеграционих константи C_1, C_2 које одговарају траженом *партикуларном решењу* су: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, где су x_0, y_0, y'_0 дати бројеви.

У овом курсу обрадићемо само неке једноставније типове диференцијалних једначина другог реда.

8.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА КОЈЕ САДРЖЕ САМО ПРМЕНЉИВУ x

- Једначина облика

$$y'' = f(x),$$

садржи само променљиву x .

Једначине овог типа се решавају двоструком интеграцијом.

Како је $y'' = \frac{dy'}{dx}$, ова једначина се може написати као

$$dy' = f(x)dx, \text{ одакле је } y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Ако је $\int f(x)dx = f_1(x)$, тада је $dy = (f_1(x) + C_1)dx$, тј.

$$y = \int f_1(x)dx + C_1x + C_2.$$

Опште решење те једначине је $y = f_2(x) + C_1x + C_2$, где је $\int f_1(x)dx = f_2(x)$.

ЗАДАЦИ

Решити диференцијалне једначине:

1. $y'' = x$.

Решење:

Опште решење добијамо када два пута интегралимо дату једначину.

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Опште решење гласи $y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

2. $y'' = \ln x$, за $y(1) = 0$ и $y'(1) = -1$.

Решење:

$$y' = \int \ln x dx = x \ln x - x + C_1.$$

$$y = \int (x \ln x - x + C_1) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2,$$

је опште решење дате диференцијалне једначине.

На основу датих почетних услова добијамо да је $C_1 = 0, C_2 = \frac{3}{4}$, па тражено партикуларно решење гласи

$$y = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{4}.$$

8.2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА КОЈЕ НЕ САДРЖЕ y

- То је једначина облика

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Једначине овог типа решавају се увођењем смене $y' = p$. Тада је $y'' = p'$, чиме дату једначину сводимо на једначину првог реда $F(x, p, p') = 0$ по непознатој функцији $p = p(x)$. Ако је њено опште решење $p = \varphi(x, C_1)$, онда због смене $y' = p$ и $y' = \varphi(x, C_1)$, интеграцијом добијамо опште решење дате диференцијалне једначине $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$.

ЗАДАЦИ

Решити диференцијалне једначине:

1. $xy'' + y' - x^2 = 0$.

Решење:

Увођењем смене $y' = p, y'' = p'$, једначина се своди на диференцијалну једначину првог реда по функцији

$$p(x) \text{ и гласи } p' + \frac{1}{x} p = x.$$

Ово је линеарна диференцијална једначина првог реда, чије опште решење је

$$p = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^2, \text{ па је опште решење полазне једначине}$$

$$y = \int y' dx = \int \left(C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^2 \right) dx = C_1 \ln x + \frac{1}{9} x^3 + C_2, \quad x > 0.$$

2. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = x.$

Решење:

За $y' = p$, $y'' = p'$, дата диференцијална једначина постаје

$$(x^2 + 1)p' - 2xp = x \Leftrightarrow p' - \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot p = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Решење ове линеарне једначину је

$$p = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} \left(C_1 + \int \frac{x}{x^2+1} e^{-\int \frac{2x}{x^2+1} dx} dx \right) =$$

$$e^{\ln(x^2+1)} \left(C_1 + \int \frac{x}{x^2+1} e^{-\ln(x^2+1)} dx \right) =$$

$$(x^2 + 1) \left(C_1 + \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} \right) = (x^2 + 1) \left(C_1 - \frac{1}{2(x^2 + 1)} \right) =$$

$$C_1(x^2 + 1) - \frac{1}{2}.$$

Интеграцијом овог решења добијамо

$$y = C_1 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) - \frac{1}{2} x + C_2, \text{ опште решење дате једначине.}$$

3. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, за $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Решење:

За $y' = p$, $y'' = p'$, биће

$$p'(x^2 + 1) = 2xp \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx,$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{x^2+1} dx, \quad \ln p = \ln(x^2+1) + \ln C, \quad p > 0, C > 0,$$

$$p = (x^2+1)C_1, \quad C_1 = \pm C.$$

Дакле $dy = (x^2+1)C_1 dx$, па је опште решење дате

$$\text{једначине } y = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) C_1 + C_2.$$

Из услова $y(0)=1$ и $y'(0)=3$ добијамо да је $C_1=3$ и $C_2=1$, па партикуларно решење гласи $y = x^2 + 3x + 1$.

4. $y'' = e^x y'^2$.

Решење:

За $y' = p, y'' = p'$, једначина постаје

$$p' = e^x p^2 \Leftrightarrow \frac{dp}{p^2} = e^x dx,$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int e^x dx, \quad -\frac{1}{p} = e^x + C_1 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{e^x + C_1}.$$

Како је, $dy = -\frac{dx}{e^x + C_1}$, добијамо опште решење дате

једначине

$$y = -\int \frac{dx}{e^x + C_1} = \left\{ \begin{array}{l} e^x + C_1 = t \\ e^x dx = dt, dx = \frac{dt}{t - C_1} \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{t(t - C_1)} =$$

$$\frac{1}{C_1} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t - C_1} \right) dt = \frac{1}{C_1} \ln \frac{t}{t - C_1} + \ln C_2 =$$

$$\frac{1}{C_1} \ln C_2 \cdot \frac{e^x + C_1}{e^x}, \quad C_2 > 0.$$

5. $xy'' - y' = x^2 e^x$, за $y(1)=3$ и $y'(1)=e+2$.

Решење:

За $y' = p, y'' = p'$, добијамо линеарну једначину првог реда

$$p' - \frac{p}{x} = xe^x, \text{ чије је решење}$$

$$p = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C_1 + \int xe^x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) = x \left(C_1 + \int e^x dx \right) = xC_1 + xe^x.$$

Како је $\frac{dy}{dx} = xC_1 + xe^x$, опште решење једначине гласи

$$y = \int (xC_1 + xe^x) dx = \frac{x^2}{2} C_1 + xe^x - e^x + C_2.$$

За почетне услове $y(1) = 3, y'(1) = e + 2$ добијамо $C_1 = 2, C_2 = 2$ и партикуларно решење гласи $y = x^2 + xe^x - e^x + 2$.

6. $y'' + y'tgx - \sin 2x = 0$, за $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Резултат: $y = 3\sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2$.

8.3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА КОЈЕ НЕ САДРЖЕ x

- То је једначина облика

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Једначине овог типа решавају се сменом $p = y'$, где је p функција од y , тј. $p = p(y)$. Тада је $y'' = p'_y \cdot y' = p'_y \cdot p$ и једначина се своди на диференцијалну једначину првог реда облика

$$\Phi\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Ако је њено опште решење $p = \varphi(y, C_1)$, тада због
смене $p = y'$, она постаје диференцијална једначина
која раздваја променљиве облика $y' = \varphi(y, C_1)$,
односно $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$, која после интеграције
 $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx$, даје опште решење дате једначине у
облику

$$f(y, C_1) = x + C_2.$$

ЗАДАЦИ

Решити следеће диференцијалне једначине:

1. $y'^2 + yy'' = 0$.

Решење:

Сменом $y'_x = p$, тј. $y'' = p'_y \cdot p$ полазна једначина се
своди на једначину

$$p^2 + y \cdot p \cdot p'_y = 0, \text{ односно на } p(p + y \cdot p'_y) = 0.$$

Сада решавамо две једначине $p = 0$ и $p + y \cdot p'_y = 0$.

Прва једначина $p = 0$, даје сингуларно решење

$$y = \text{const}, \text{ а друга се своди на } \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}.$$

Интеграљењем ове везе, тј. $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{1}{y} dy$, добијамо

$$\ln|p| = \ln C - \ln|y|, C > 0, \quad p = \frac{C_1}{y}, C = \pm C_1.$$

Како је $y'_x = \frac{C_1}{y} \Leftrightarrow ydy = C_1 dx$, поновном интеграцијом,

$\int ydy = \int C_1 dx$, се добија $\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$, опште решење дате једначине.

2. $y'' \sin y = 2y'^2 \cos y$, за $y(0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(0) = 1$.

Решење:

Ако је $y' = p$ и $y'' = p'_y \cdot p$, једначина постаје $p'_y \cdot p \sin y - 2p^2 \cos y = 0$, тј.

$$p(p'_y \sin y - 2p \cos y) = 0.$$

Одавде је $p = 0$ или $p'_y \sin y = 2p \cos y$.

Из $p = 0$ следи $y' = 0$ односно $y = \text{const}$, то је сингуларно решење дате једначине.

Из $p'_y \sin y = 2p \cos y \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2 \cos y}{\sin y} dy$ интеграљењем,

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2 \cos y}{\sin y} dy, \text{ добијамо}$$

$$\ln|p| = 2 \ln \sin y + \ln C, C > 0,$$

$$\ln|p| = \ln \sin^2 y \cdot C \Leftrightarrow p = C_1 \sin^2 y, C_1 = \pm C.$$

Како је $\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$, тј. $\int \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 \int dx$,

добијамо опште решење једначине $-\text{ctg} y = C_1 x + C_2$.

За $y'(0) = 1$ и $y(0) = \frac{\pi}{4}$, добијамо да је $C_1 = 2$ и

$C_2 = -1$, тако да партикуларно решење гласи $-\text{ctg} y = 2x - 1$.

3. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.

Решење:

Ако је $y' = p$ и $y'' = p'_y \cdot p$, биће

$$y(1 - \ln y) p'_y \cdot p + (1 + \ln y) p^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p(y(1 - \ln y) p'_y + (1 + \ln y) p) = 0.$$

Одавде је $p = 0$ или $y(1 - \ln y) p'_y + (1 + \ln y) p = 0$.

Из $p = 0$ односно $y' = 0$ следи да је $y = \text{const.}$ сингуларно решење дате једначине.

Из $y(1 - \ln y) p'_y + (1 + \ln y) p = 0$ добијамо

$$\frac{dp}{p} = \frac{1 + \ln y}{y(\ln y - 1)} dy.$$

Како је $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{1 + \ln y}{y(\ln y - 1)} dy$, користећи смену

$\ln y - 1 = t$ за десни интеграл, добијамо

$$\ln|p| = t + 2\ln|t| + \ln C, C > 0, \quad \ln \frac{p}{C_1 t^2} = t, C_1 = \pm C,$$

$$\frac{p}{C_1 t^2} = e^t \Leftrightarrow p = C_1 t^2 e^t \Leftrightarrow p = C_1 (\ln y - 1)^2 e^{\ln y - 1} \Leftrightarrow$$

$$pe = C_1 (\ln y - 1)^2 y \Leftrightarrow \frac{edy}{(\ln y - 1)^2 y} = C_1 dx.$$

Поновном интеграцијом добијамо $y = e^{\frac{C_2 + x - C_1 x}{x + C_2}}$, опште решење једначине.

4. $yy'' = y^2 y' + y'^2$

Решење:

Сменом $y' = p$, добијамо

$$yp'_y p = y^2 p + p^2 \Leftrightarrow p(y p'_y - y^2 - p) = 0.$$

Одавде је $p = 0$ или $yp'_y - y^2 - p = 0$.

Из $p = 0$, односно $y' = 0$ добијамо $y = \text{const.}$, сингуларно решење дате једначине.

Из $yp'_y - y^2 - p = 0$ следи $p'_y - \frac{1}{y} p = y$, чије је решење

$$p = e^{\int \frac{dy}{y}} \left(C_1 + \int y e^{-\int \frac{dy}{y}} dy \right) \Leftrightarrow p = y(C_1 + y) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(C_1 + y)} = dx$$

,
односно

$$\int \frac{dy}{y(C_1 + y)} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + C_1} \right) dy = \int dx$$

добивамо

$$\frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| = x + C_2 \Leftrightarrow \left| \frac{y}{y + C_1} \right| = e^{C_1(x + C_2)}, \text{ опште}$$

решење.

$$5. \quad yy'' = y'^2 - y'^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Решење:

$$y' = p, \quad y'' = p'_y \cdot y' = p'_y \cdot p.$$

$$yp'_y p = p^2 - p^3 \Leftrightarrow p(y p'_y - p + p^2) = 0.$$

Одавде је $p = 0$ или $yp'_y = p - p^2$.

Из $p = 0$ добијамо сингуларно решење је $y = \text{const}$.

Из $yp'_y = p - p^2$, добијамо $\frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y}$, па

интеграцијом имамо

$$\int \frac{dp}{p(p-1)} = -\int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} \right) dp = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln \left| \frac{p}{p-1} \right| = \ln Cy, \quad C > 0, \quad \frac{p}{p-1} = C_1 y, \quad C_1 = \pm C, \quad p = \frac{y - C_1}{y}$$

$$\frac{y - C_1}{y} dy = dx \Leftrightarrow \left(1 - \frac{C_1}{y} \right) dy = dx,$$

$$\int \left(1 - \frac{C_1}{y} \right) dy = \int dx,$$

$y - C_1 \ln|y| = x + C_2$ је опште решење.

Из почетних услова добијамо да је $C_1 = 2$ и $C_2 = 0$, па је партикуларно решење $y - 2\ln|y| = x$.

6. $yy'' = -e^{-2y}$, $y(3) = 0$, $y'(3) = 1$.

Резултат: Два партикуларна решења $y = \ln(x - 2)$ и $y = \ln(4 - x)$.

7. $2yy'' = y'^2$.

Резултат: $y = \cos t$ и $y = (C_1x + C_2)^2$.

8. $2yy'' - y'^2 - 1 = 0$.

Резултат: $y = \frac{C_1(x + C_2)^2}{4} + \frac{1}{C_1}$.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Диференцијална једначина другог реда

Партикуларно решење

Опште решење

ХОМОГЕНА И НЕХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

- 1. ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА
ЈЕДНАЧИНА СА
КОНСТАНТНИМ
КОЕФИЦИЈЕНТИМА**
- 2. НЕХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА
ЈЕДНАЧИНА СА
КОНСТАНТНИМ
КОЕФИЦИЈЕНТИМА**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

- 1.** општи облик хомогене линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима,
- 2.** општи облик нехомогене линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима,
- 3.** карактеристичну једначину,
- 4.** методу неодређених коефицијената

9.1 ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

- Једначина

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

где су коефицијенти $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ и $a_0 \neq 0$ назива се *хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима*.

- Два решења дате једначине y_1 и y_2 су *линеарно независна* ако је $\frac{y_1}{y_2} \neq \cos t$.
- Ко су y_1 и y_2 два линеарно независна партикуларна решења дате једначине онда је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ опште решење једначине, где су C_1 и C_2 произвољне константе.

Потражимо партикуларно решење те једначине у облику $y = e^{kx}$, где константу k треба одредити. Како је $y' = k e^{kx}$ и $y'' = k^2 e^{kx}$, заменом у дату једначину добијамо идентитет

$$e^{kx} (a_0 k^2 + a_1 k + a_2) = 0,$$

а како је $e^{kx} \neq 0$, добијамо

$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$, *карактеристичну једначину* дате хомогене једначине.

Дакле, можемо закључити да ће експоненцијална функција e^{kx} бити решење хомогене једначине ако и само ако је k решење карактеристичне једначине.

Да бисмо образовали карактеристичну једначину за дату хомогену једначину, треба да у једначину уместо y ставимо 1, први извод заменимо константом k , а други извод са k^2 .

Разликујемо три могућа случаја за корене карактеристичне једначине:

1. Ако су $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ и $k_1 \neq k_2$,

тада добијамо два партикуларна решења једначине $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$.

Опште решење у овом случају има облик

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2. Нека је $k_1 = k_2 \equiv k$, $k \in \mathbb{R}$.

У том случају добијамо једно партикуларно решење је облика $y_1 = e^{kx}$, а друго партикуларно решење је облика $y_2 = xe^{kx}$.

Опште решење хомогене једначине има облик

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}.$$

3. Ако су корени карактеристичне једначине коњуговано комплексни: $k_1 = \alpha + i\beta$, и $k_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, тада имамо два партикуларна решења:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \text{ и } y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Опште решење у овом случају је

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

ЗАДАЦИ

Решити дате диференцијалне једначине:

1. Наћи опште решење једначине $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Решење:

Карактеристична једначина гласи $k^2 + 3k - 4 = 0$, и њена решења су $k_1 = -4$ и $k_2 = 1$.

Постоје дакле два партикуларна решења дате једначине облика $y_1 = e^{-4x}$ и $y_2 = e^x$, па је опште решење дате једначине $y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$.

2. Наћи опште решење једначине $y'' - 3y' + 2y = 0$, а затим одредити партикуларно решење за почетне услове $y(0) = 2$ и $y'(0) = -3$.

Решење:

Корени одговарајуће карактеристичне једначине $k^2 - 3k + 2 = 0$ су $k_1 = 2$ и $k_2 = 1$, што значи да је опште решење дате једначине $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

За почетне услове $y(0) = 2$ и $y'(0) = -3$ добијамо да је $C_1 = -5$, $C_2 = -7$.

Тражено партикуларно решење гласи $y = -5e^{2x} - 7e^x$.

3. Наћи опште решење једначине $9y'' - 24y' + 16y = 0$.

Решење:

Карактеристична једначина гласи $9k^2 - 24k + 16 = 0$, одакле је $k_1 = k_2 = \frac{4}{3}$.

Опште решење дате једначине је $y_h = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{4}{3}x}$.

4. Наћи опште решење једначине $y'' + 2y' + 3y = 0$, за $y(0) = 1, y'(0) = 0$

Решење:

Карактеристична једначина је облика $k^2 + 2k + 3 = 0$ и $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$. Како је $\alpha = -1$, а $\beta = \sqrt{2}$, опште решење дате једначине је $y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.

За дате почетне услове добијамо да је $C_1 = 1$ и

$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, па партикуларно решење гласи

$$y = e^{-x} \cos \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \sin \sqrt{2}x.$$

5. $y'' + 3y' = 0$.

Резултат: $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

6. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Резултат: $y = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}$.

7. $y'' - 4y' + 7y = 0$

Резултат: $y = e^{2x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$.

8. $y'' - 6y' + 13y = 0$, за $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Резултат: $y = e^{3x-\pi} \sin 2x$.

9.2 НЕХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

- Једначина облика

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

је *нехомогена линеарна једначина са константним коефицијентима* $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ и $a_0 \neq 0$.

- *Опште решење једначине* је облика

$$y = y_h + y_p,$$

где је y_h опште решење одговарајуће *хомогене једначине*, а y_p једно *партикуларно решење* дате једначине.

Одређивање општег решења хомогене једначине показано је у предходној глави. Проблем се своди на одређивање партикуларног решења.

Партикуларно решење дате једначине може да се нађе помоћу *методе неодређених коефицијената*, али само за неке класе функција $f(x)$.

Разликоваћемо следеће случајеве:

1. $f(x) = P(x)$ где је $P(x)$ полиномска функција.

Партикуларно решење гласи:

$$y_p = \begin{cases} Q(x) & k_1 \neq 0 \wedge k_2 \neq 0, \\ xQ(x) & k_1 = 0 \vee k_2 = 0. \end{cases}$$

k_1, k_2 су решења карактеристичне једначине, а $Q(x)$ полином непознатих коефицијента које треба одредити.

Степен полинома $Q(x)$ исти је као степен полинома $P(x)$.

2. $f(x) = P(x)e^{ax}$.

$$y_p = \begin{cases} Q(x)e^{ax}, & a \neq k_1 \wedge a \neq k_2, \\ Q(x)xe^{ax}, & a = k_1 \vee a = k_2, (k_1 \neq k_2), \\ Q(x)x^2e^{ax}, & a = k_1 = k_2. \end{cases}$$

3. $f(x) = P(x)\cos \beta x + Q(x)\sin \beta x$.

$$y_p = \begin{cases} P_1(x)\cos \beta x + Q_1(x)\sin \beta x, & k_1, k_2 \neq 0 \pm \beta i, \\ x(P_1(x)\cos \beta x + Q_1(x)\sin \beta x), & k_1, k_2 = 0 \pm \beta i. \end{cases}$$

4. $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos \beta x + Q(x)\sin \beta x)$.

$$y_p = \begin{cases} e^{\alpha x}(P_1(x)\cos \beta x + Q_1(x)\sin \beta x), & k_1, k_2 \neq \alpha \pm \beta i, \\ xe^{\alpha x}(P_1(x)\cos \beta x + Q_1(x)\sin \beta x), & k_1, k_2 = \alpha \pm \beta i. \end{cases}$$

ЗАДАЦИ

Решити диференцијалне једначине:

Случај када је $f(x) = P(x)$.

1. $y'' - y = x^2$

Решење:

Карактеристична једначина хомогеног дела ове диференцијалне једначине гласи $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$ и решење одговарајуће хомогене једначине је $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Како су $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{1,2} \neq 0$, тражено партикуларно решење је облика $y_p = ax^2 + bx + c$, полиномска функција другог степена, односно истог степена као функција $f(x) = x^2$.

Одредимо непознате коефицијенте a, b, c .

Како је

$$y_p = ax^2 + bx + c, \quad y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a$$

заменом ових израза у полазну диференцијалну једначину добијамо

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 \Leftrightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2.$$

Упоредјујући коефицијенте уз променљиве истог степена добијамо да је

$$a = -1, b = 0, c = -2.$$

Партикуларно решење гласи $y_p = -x^2 - 2$.

Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2$.

2. $y'' - y' = 2(1 - x), y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Решење:

Решења карактеристичне једначине $k^2 - k = 0$ су $k_1 = 1$ и $k_2 = 0$ па је решење одговарајуће хомогене једначине $y_h = C_1 e^x + C_2$.

Како је $k_1 = 1, k_2 = 0$, а $f(x)$ је линеарна функција, партикуларно решење дате диференцијалне једначине тражимо у облику $y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$.

Одавде имамо

$$y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx, \quad y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

и заменом ових израза у полазну диференцијалну једначину добијамо

$$2a - (2ax + b) = 2(1 - x), \text{ односно } a = 1 \text{ и } b = 0.$$

Партикуларно решење једначине гласи $y_p = x^2$.

Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 e^x + C_2 + x^2$.

За почетне услове $y'(0) = 1$ и $y(0) = 1$ добијамо да је $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, па је тражено партикуларно решење $y = e^x + x^2$.

3. $y'' + y' + y = x^2 + 2$, за $y'(0) = 2$, $y(0) = 2$.

Решење:

$$k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$y_p = ax^2 + bx + c, \quad y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a,$$

$$2a + 2ax + b + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2,$$

$$a = 1, b = -2, c = 2.$$

$y_p = x^2 - 2x + 2$ је партикуларно решење.

Опште решење диференцијалне једначине је

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x^2 - 2x + 2.$$

За почетне услове $y'(0) = 2$ и $y(0) = 2$ добијамо $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ па је партикуларно решење $y = x^2 - 2x + 2$.

4. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5.$

Решење

$$k^2 + 4k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = -2 \pm i,$$

$$y_h = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Како је $k_{1,2} \neq 0$, биће

$$y_p = ax^2 + bx + c, \quad y'_p = 2ax + b, \quad y'' = 2a.$$

$$2a + 8ax + 4b + 5ax^2 + 5bx + 5c = 5x^2 - 32x + 5,$$

$$a = 1, \quad b = -8, \quad c = 7.$$

$$y_p = x^2 - 8x + 7, \text{ је партикуларно решење.}$$

Опште решење дате једначине је

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7.$$

Случај када је $f(x) = P(x) \cdot e^{ax}$

4. $y'' - 2y' = 3 \cdot e^{-x}$

Решење:

$$k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2, k_2 = 0, \quad y_h = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Пошто је $a = -1$ и $a \neq k_1, k_2$, $P(x) = 3$, партикуларно решење дате диференцијалне једначине потражимо у облику $y_p = Ae^{-x}$ где је A неодређена константа.

Сада је

$$y_p = Ae^{-x}, \quad y'_p = -Ae^{-x}, \quad y''_p = Ae^{-x},$$

$$Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 3 \cdot e^{-x} \text{ и добијамо } A = 1.$$

Партикуларно решење гласи $y_p = e^{-x}$.

Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^{-x}$.

За почетне услове $y'(0) = 1$ и $y(0) = 2$ добијамо $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$, па је партикуларно решење $y = e^{2x} + e^{-x}$.

5. $y'' - 5y' + 6y = 3 \cdot e^{2x}$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Решење:

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2, k_2 = 3, y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

Пошто је $a = 2 = k_1$ имамо

$$y_p = A x e^{2x}, \quad y_p' = A x e^{2x} (1 + 2x), \\ y_p'' = 2A x e^{2x} (2 + 2x).$$

Заменом у датој диференцијалној једначини добија се

$$4A e^{2x} (x+1) - 5A e^{2x} (1+2x) + 6A e^{2x} x = 3e^{2x}, \quad \text{односно} \\ A = -3.$$

Партикуларно решење је $y_p = -3x e^{2x}$.

Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} - 3x e^{2x}$.

За почетне услове $y'(0) = 0$ и $y(0) = 1$ добијамо $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, па је партикуларно решење $y = e^{3x} - 3x e^{2x}$.

6. $y'' - 2y' + y = x e^x$, за $y'(0) = 3$, $y(0) = 2$.

Решење:

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1/2} = 1, y_h = C_1 e^x + x \cdot C_2 e^x.$$

Пошто је $a = 1 = k_1 = k_2$, $y_p = (Ax + B)x^2 e^x$. Сада је

$$y_p' = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x, \\ y_p'' = (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B)e^x \text{ и добијамо} \\ A = \frac{1}{6} \text{ и } B = 0, \text{ а партикуларно решење је } y_p = \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

Опште решење диференцијалне једначине је

$$y = C_1 e^x + x \cdot C_2 e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

За почетне услове $y'(0) = 3$ и $y(0) = 2$ добијамо $C_1 = 2$

и $C_2 = 1$, па је партикуларно решење

$$y = 2e^x + xe^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

7. $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

Решење:

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1 \vee k_2 = 2, \quad y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Пошто је $a = 1 = k_1$, тада је

$y_p = Axe^x$, $y_p' = A(x+1)e^x$, $y_p'' = A(x+2)e^x$ и добија се да је $A = -1$.

Партикуларно решење је $y_p = -xe^x$, а опште решење

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$

8. $y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$

Решење:

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1 \vee k_2 = -2, \quad y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Пошто је $a = 2 \neq k_{1,2}$,

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x}, \quad y_p' = (2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c)e^{2x},$$

$$y_p'' = (4ax^2 + 4(2a+b)x + 2(a+2b+2c))e^{2x}.$$

заменом у датој диференцијалној једначини добија се

$$4ax^2 + (10a + 4b)x + 2a + 5b + 4c = x^2 - 1.$$

Одавде је $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{5}{8}$, $c = \frac{13}{32}$.

Партикуларно решење је $y_p = \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{8} x + \frac{13}{32} \right) e^{2x}.$

Опште решење диференцијалне једначине је

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{8} x + \frac{13}{32} \right) e^{2x}.$$

9. $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

Решење:

$$k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm i, \quad a = 1 \neq k_{1,2},$$

$y_p = Ae^x$, $y'_p = y''_p = Ae^x$, и заменом у датој диференцијалној једначини добија се $2Ae^x = 4e^x \Rightarrow A = 2$.

$y_p = 2e^x$ је партикуларно решење.

Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x$.

Уз почетне услове $y(0) = 4$ и $y'(0) = -3$ добијамо $C_1 = 2$, $C_2 = -5$.

Тражено партикуларно решење је $y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x$.

Случај када је $f(x) = P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x$.

10. $y'' - 5y' + 6y = \sin 3x$.

Решење:

$$k^2 - k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2 \vee k_2 = 3,$$

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

$k_1 \neq k_2 \neq 0 \pm 3i$, па је партикуларно решење облика

$$y_p = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Како је $y'_p = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y''_p = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$, заменом у датој диференцијалној једначини добијамо

$(-3A-15B)\cos 3x + (15A-3B)\sin 3x = \sin 3x$, односно да је $A = \frac{5}{78}, B = -\frac{1}{78}$.

Партикуларно решење је $y_p = \frac{5}{78}\cos 3x - \frac{1}{78}\sin 3x$.

Опште решење диференцијалне једначине је

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{5}{78}\cos 3x - \frac{1}{78}\sin 3x.$$

11. $y'' - y = 2\sin x$.

Решење

$$k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1 \vee k_2 = -1, y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$$y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x,$$

$$y'_p = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x, y''_p = -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x.$$

$$-A \cdot \sin x - B \cdot \cos x - A \cdot \sin x - B \cdot \cos x = 2\sin x,$$

$$(-2A) \cdot \sin x + (-2B) \cdot \cos x = 2\sin x \Rightarrow A = -1 \wedge B = 0.$$

$$y_p = -\sin x.$$

Опште решење диференцијалне једначине је

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \sin x.$$

13. $y'' + y = \cos x$.

Решење:

$$k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm i, y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

$$y_p = (A \sin x + B \cos x)x,$$

$$y'_p = (A \cos x - B \sin x)x + A \sin x + B \cos x,$$

$$y''_p = -Ax \sin x - Bx \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x.$$

$$-2B \sin x + 2A \cos x = \cos x.$$

$$B = 0, A = \frac{1}{2}.$$

Партикуларно решење је $y_p = \frac{1}{2}x \sin x$.

Опште решење дате једначине је

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

14. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2 \cos 2x.$

Решење:

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1 \vee k_2 = -2, \quad y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Како је $0 \pm 2i \neq k_{1,2}$, $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x.$

$$y'_p = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x,$$

$$y''_p = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x,$$

па заменом у датој једначини добијамо:

$$(-2A - 6B) \sin 2x + (6A - 2B) \cos 2x = \sin 2x + \cos 2x.$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}.$$

$$y_p = \frac{1}{4} (\sin 2x - \cos 2x).$$

Опште решење дате једначине је

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} (\sin 2x - \cos 2x).$$

Из услова $y(0) = \frac{3}{4}$, $y'(0) = \frac{7}{2}$ добијамо $C_1 = -4$, $C_2 = 5$,

па је тражено партикуларно једначине

$$y = -4e^{-2x} + 5e^{-x} + \frac{1}{4} (\sin 2x - \cos 2x).$$

- Ако је функција $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, збир функција које смо посматрали у предходним случајевима, тада се одређује партикуларно решење за сваку појединачну функцију, а партикуларно решење полазне једначине је њихов збир, тј. $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_n}.$

15. $y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$

Решење:

$$k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0 \vee k_2 = 1, y_h = C_1 + C_2 e^x.$$

$$1. y'' - y' = e^x, y_{p_1} = A x e^x,$$

$$2. y'' - y' = e^{2x}, y_{p_2} = B e^{2x},$$

$$3. y'' - y' = x, y_{p_3} = x(Cx + D).$$

$$1. y_{p_1} = A x e^x, y'_{p_1} = A e^x + A x e^x, y''_{p_1} = 2A e^x + A x e^x \quad \text{и} \\ A = 1, \\ y_{p_1} = x e^x.$$

$$2. y_{p_2} = B e^{2x}, y'_{p_2} = 2B e^{2x}, y''_{p_2} = 4B e^{2x}, B = \frac{1}{2},$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$3. y_{p_3} = x(Cx + D), y'_{p_3} = 2Cx + D, y''_{p_3} = 2C,$$

$$C = -\frac{1}{2}, D = -1.$$

$$y_{p_3} = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right).$$

Партикуларно решење диференцијалне једначине је

$$y_p = x e^x + \frac{1}{2} e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right).$$

Опште решење једначине

$$y = C_1 + C_2 e^x + x e^x + \frac{1}{2} e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right).$$

$$16. y'' + 3y' - 4y = (x^2 + x)e^{-x}.$$

$$\text{Резултат: } y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \frac{5}{54} e^{-x} - \frac{2}{9} x e^{-x} - \frac{1}{6} x^2 e^{-x}.$$

$$17. y'' + 3y' - 4y = 2e^{-x}.$$

$$\text{Резултат: } y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \frac{1}{3} e^{-x}.$$

$$18. y'' + 3y' - 4y = (x - 2)e^{-4x}.$$

$$\text{Резултат: } y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x + \frac{9}{25} x e^{-4x} - \frac{1}{10} x^2 e^{-4x}.$$

19. $y'' - 3y' + 2y = x$.

Резултат: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{5}{4}$.

20. $y'' - 3y' = x^2 - 1$

Резултат: $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{9} x^2 + \frac{7}{27} x$.

21. $y' - 4y = 2e^x \cos x + (x^2 + x)e^x \sin x$.

Резултат:

$$y = C_1 e^{4x} + e^x \left(\left(\frac{-1}{10} x^2 - \frac{11}{50} x - \frac{178}{250} \right) \cos x + \left(\frac{-3}{10} x^2 - \frac{23}{50} x + \frac{21}{250} \right) \sin x \right)$$

22. $y'' - 2y' + 5y = x \sin 2x$.

Резултат:

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \left(\frac{4}{17} x - \frac{76}{289} \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{17} x + \frac{2}{289} \right) \sin 2x$$

23. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \sin x$.

Резултат: $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - x e^x \cos x$.

24. $y'' - y' = \sin x + x \cos x$

Резултат:

$$y = C_1 + C_2 e^x + y_p = -\frac{1}{2} x \sin x + \left(-\frac{1}{2} x + 1 \right) \cos x.$$

25. $y'' + y' = \sin 2x$.

Резултат: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + -\frac{1}{5} \sin 2x + -\frac{1}{10} \cos 2x .$

26. $y'' + y = \sin x + \cos 2x .$

Резултат:

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

К Л Ъ У Ч Н Е Р Е Ч И

Партикуларно решење

Карактеристична једначина

ЛАГРАНЖОВА МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

- 1. ОСОБИНЕ ЛАГРАНЖОВЕ
МЕТОДЕ ВАРИЈАЦИЈЕ
КОНСТАНТИ**
- 2. ЛАГРАНЖОВА МЕТОДА
ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ,
ЗА РЕШАВАЊЕ
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ
ЈЕДНАЧИНА**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

- 1.** да примените Лагранжову методу варијације константи за решавање диференцијалних једначина.

10.1 ЛАГРАНЖОВА МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

- Ова метода омогућује налажење партикуларног решења нехомогене линеарне диференцијалне једначине

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

При коришћењу ове методе потребно је знати опште решење одговарајуће хомогене једначине.

Метода може да се примени како на једначине са константним коефицијантима тако и са произвољним коефицијентима, тј функцијама од x .

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Доказ:

Претпоставимо да смо за одговарајућу хомогену једначину

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

нашли њено опште решење $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$.

Партикуларно решење нехомогене једначине тражимо у истом облику

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

сматрајући да су $C_1(x)$ и $C_2(x)$ непознате функције које треба одредити из услова да $y_p(x)$ идентички задовољава дату нехомогену једначину, а y_1 и y_2 су позната линеарно независна партикуларна решења хомогене једначине.

Диференцирањем овог израза добијамо

$$y_p' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'.$$

Ако су $C_1(x)$ и $C_2(x)$ тако одабране да је

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0,$$

тада се добија

$$y_p' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2',$$

$$y_p'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'.$$

Замењујући ове вредности у полазну једначину добијамо:

$$C_1(x)(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(x)(y_2'' + py_2' + qy_2) + \dots$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Изрази у заградама су једнаки нули јер су y_1 и y_2 по претпоставци решења хомогене једначине.

Дакле, да би функција $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, представљала партикуларно решење нехомогене једначине, мора бити задовољен и услови

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

а детерминанта система

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

То значи да прво можемо из претходног система наћи $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = \frac{1}{W(x)}(-y_2 f(x)), \quad C_2'(x) = \frac{1}{W(x)} y_1 f(x),$$

а затим интеграцијом и функције $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

ЗАДАЦИ

Решити диференцијалне једначине:

1. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$ за $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решење:

Хомогена једначина гласи $y'' + y = 0$.

Карактеристична једначина је $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm i$.

Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

где су C_1 и C_2 произвољне линеарно независне константе.

Опште решење ћемо тражити у облику $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

где је $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$.

Формирајмо систем једначина

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$$

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{2}{\sin^3 x}.$$

Решења система су $C_1' = -\frac{2}{\sin^2 x}$ и $C_2' = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$, а после интеграције добијамо

$$C_1 = 2 \operatorname{ctg} x + A, C_2 = -\frac{1}{\sin^2 x} + B, A, B = \text{const}.$$

Опште решење дате једначине је

$$y = (2 \operatorname{ctg} x + A) \cos x + \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + B \right) \sin x,$$

или

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

За почетне услове $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, добијамо да је

$$A = -1 \text{ и } B = 2.$$

Тражено партикуларно решење је

$$y = -\cos x + 2 \sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(x-1)^2}$ за $y(0) = y'(0) = 0$.

Решење:

Опште решење хомогене једначине је $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Варијацијом констаната одредићмо опште решење дате једначне.

Константе C_1, C_2 схватамо као функције променљиве x и одређујемо их из система једначна

$$C_1' e^x + C_2' x e^x = 0$$

$$C_1' e^x + C_2' e^x (x+1) = \frac{e^x}{(x-1)^2},$$

Чије је решење

$$C_1' = -\frac{x}{(x-1)^2} \text{ и } C_2' = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Како је

$$C_1 = -\int \frac{x}{(x-1)^2} dx = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + A,$$

$$C_2 = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} + B,$$

опште решење гласи

$$y = e^x \left(-\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + A - \frac{x}{x-1} + Bx \right)$$

$$y = e^x (-\ln|x-1| + A - 1 + Bx) = e^x (C + Bx - \ln|x-1|),$$

Из почетних услова $y(0) = y'(0) = 0$ добијамо $C = 0$ и $B = -1$.

Партикуларно решење гласи $y = -e^x (\ln|x-1| + x)$.

3. $y'' + y = \sin 2x$.

Решење:

Опште решење хомогеног дела је $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Из система једначина

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$$

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \sin 2x,$$

Добијамо да је

$$C_1' = -2 \sin^2 x \cos x \Rightarrow C_1 = -2 \int \sin^2 x \cos x dx = -\frac{2}{3} \sin^3 x + A,$$

$$C_2' = 2 \cos^2 x \sin x \Rightarrow C_2 = 2 \int \cos^2 x \sin x dx = -\frac{2}{3} \cos^3 x + A.$$

Опште решење дате једначине гласи

$$y = A \cos x + B \sin x - \frac{2}{3} (\sin^3 x \cos x + \cos^4 x \sin x) =$$

$$A \cos x + \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x.$$

За почетне услове $y(0)=1$ и $y'(0)=-\frac{2}{3}$ добијамо да је $A=1$ и $B=0$.

Партикуларно решење гласи $y = \cos x - \frac{1}{3} \sin 2x$.

4. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

Решење:

Опште решење хомогене једначине је. $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

$$\left. \begin{array}{l} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' (x+1) e^x = e^{2x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} C_1' + C_2' x = 0 \\ C_1' + C_2' (x+1) = e^x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} C_1' = -x e^x \\ C_2' = e^x \end{array}$$

$$C_1 = -\int x e^x dx = -(x e^x - e^x) + A$$

$$C_2 = \int e^x dx = e^x + B$$

$$y = \left(-(x e^x - e^x) + A \right) e^x + (e^x + B) x e^x = \underbrace{A e^x + B x e^x}_{y_h} + \underbrace{e^{2x}}_{y_p}$$

5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$

Решење:

Опште решење хомогене једначине

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1' e^{-2x} + C_2' x e^{-2x} = 0 \\ -2C_1' e^{-2x} + C_2' (1-2x) e^{-2x} = e^{-2x} \ln x \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} C_1' + C_2' x &= 0 \\ -2C_1' + C_2' (1 - 2x) &= \ln x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} C_1' &= -x \ln x \\ C_2' &= \ln x \end{aligned},$$

$$C_1 = -\int x \ln x dx = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + A$$

$$C_2 = \int \ln x dx = x \ln x - x + B.$$

Опште решење гласи:

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) e^{-2x} + (x \ln x - x + B) x e^{-2x} =$$

$$\left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} \right) e^{-2x}.$$

6. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$

Резултат:

$$y = (A - \ln |\sin x|) \cos 2x + \left(B - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \sin 2x.$$

7. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$

Резултат: $y = A \sin x + B \cos x - \frac{\cos 2x}{2 \cos x}.$

8. $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

Резултат: $y = A e^{2x} + (B - x) e^x.$

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Лагранжова метода

Нехомогене линеарне диференцијалне једначине

БРОЈНИ РЕДОВИ

- 1. БРОЈНИ РЕДОВИ**
- 2. ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ
БРОЈНИХ РЕДОВА**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

- 1.** основне особине бројних редова,
- 2.** општи члан реда,
- 3.** појам парцијалне суме,
- 4.** остатак реда,
- 5.** појам конвергентног и дивергентног реда,
- 6.** да испитате конвергенцију реда.

11.1 БРОЈНИ РЕДОВИ

Збир бесконачног геометријског реда количника мањеј од 1 налазио је још Архимед. Дивергенцију хармониског реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ одредио је 1650 год. Италијански научник Менголи. Њутн се бавио степеним редовима 1665 год. који је рачунао да се свака функција може представити степеним редом. Права теорија редова почиње да се развија са радовима Гауса 1812, Болцана 1817 и Кошија 1821 који је дао савремену дефиницију конвергенције и дефинисао основне теореме.

- Нека је $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ низ реалних или комплексних бројева, тада се израз

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots$$

назива *бесконачни бројни ред*.

- Члан a_n се назива *општим чланом реда*.

Пример:

Ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, се може написати у облику $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \dots$, а $\frac{1}{2^n}$ је општи члан реда.

- Нека је дат низ *делимичних парцијалних сума* реда.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S,$$

кажемо да **ред конвергира** и да је S **сума реда**.

Ред који није конвергентан је **дивергентан**.

- Ред $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ назива се **остатак реда**.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију и одредити суму реда:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$

Решење:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

n -та парцијална сума је:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \text{ ред је конвергентан и сума је } S = 1.$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}.$

Решење:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k} = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} + \dots$$

n -та парцијална сума је:

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + \ln((n+1) - \ln n) = \ln(n+1).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Ред је дивергентан.

3. Испитати конвергенцију геометријског реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots.$$

Решење:

$$n\text{-та парцијална сума је } S_n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Ако је $|q| < 1$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$ и ред је конвергентан.

Ако је $|q| > 1$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и ред је дивергентан,

Ако је $q = 1$, $S_n = a(n+1)$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и ред је дивергентан.

Ако је $q = -1$ $S_n = \begin{cases} a, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$ ред нема граничну вредност и дивергентан је.

4. Испитати конвергенцију хармонијског реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Решење:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Ред се може написати на следећи начин:

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{15}\right) + \cdots$$

$$> 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

одакле се види да ред дивергира.

11.2 ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ БРОЈНИХ РЕДОВА:

- **Потребан услов** за конвергенцију реда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ је да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Доказ:

Како је $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ и $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$, добијамо $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Ако дати ред конвергира онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Обрат не важи.

Пример:

Код хармониског реда је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Испуњен је потребан услов, а доказали смо да је ред дивергентан.

- Ако је ред конвергентан и ако је $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ **његов остатак**, тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Доказ:

Имамо да је $S_n + r_n = S \Leftrightarrow r_n = S - S_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0$.

- Ако се реду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **дода** или **одузме** коначно много чланова тада се његова **конвергенција неће променити**.

Доказ:

Ако је S_n n та делимична сума, а S'_k збир додатих или одузетих k чланова.

Ако са S'_{n+k} обележимо n ту делимичну суму која је настала додавањем или

одузимањем k чланова, тада је $S_{n+k}' = S_n \pm S'_k$.

Како је сума S'_k коначна то значи да на $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ утиче само $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_{n+k}$, тј.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_{n+k} \pm S'_k$. Значи нови ред се исто понаша као полазни.

- Ако се сваки члан реда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **помножи са константом** C ($C \neq 0$), добија се ред $\sum_{k=1}^{\infty} C a_k$, који је **конвергентан или дивергентан зависно од тога да ли је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан или дивергентан.**

Доказ:

Ако је дати ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Низ његових парцијалних сума S_n има граничну

вредност S , тј $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Ако је S'_n парцијалних сума реда $\sum_{k=1}^{\infty} C a_k$.

$S'_n = C a_1 + C a_2 + \dots + C a_n = C(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = C S_n$, његова гранична вредност је $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C S_n = C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C S$.

- Ако су редови $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **конвергентни** и ако су им суме S' и S'' , тада ће и ред $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ **конвергирати** и сума му је $S' \pm S''$.

Доказ:

Ако су S'_n и S''_n парцијалне суме датих редова и $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''.$$

Нека је $S_n = S'_n \pm S''_n$ низ делимичних сума реда $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$, тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n \pm S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S' \pm S''.$$

Пример: Доказати да је ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{2^{2k}}$ конвергентан.

Доказ: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Ово су два геометријска реда чије су суме

$$S_1 = \frac{4}{3} \text{ и } S_2 = 2, \text{ па је сума реда } S = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}.$$

- *Конвергентни редови могу се сабирати и одузимати члан по члан.*
- *Збир или разлика конвергентног и дивергентног реда је дивергентан ред.*
- *Збир или разлика дивергентних редова је дивергентан ред.*
- *Израз $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$, $r \in \mathbb{N}$ је такође ред.*
- *Редови $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ су истовремено конвергентни или дивергентни.*

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Конвергентан ред

Дивергентан ред

Општи члан реда

Парцијална сума

ПОЗИТИВНИ БРОЈНИ РЕДОВИ

- 1. КРИТЕРИЈУМ
УПОРЕЂИВАЊА ЧЛАНОВА
РЕДОВА**
- 2. ДАЛАМБЕРОВ КРИТЕРИЈУМ**
- 3. КОШИЈЕВ КОРЕНИ
КРИТЕРИЈУМ**
- 4. КОШИЈЕВ ИНТЕГРАЛНИ
КРИТЕРИЈУМ**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате да применити:

- 1.** критеријум упоређивања чланова редова,
- 2.** Даламберов критеријум ,
- 3.** Кошијев корени критеријум,
- 4.** Кошијев интегрални критеријум.

ПОЗИТИВНИ БРОЈНИ РЕДОВИ

С обзиром да су сви чланови реда позитивни, низ њихових парцијалних сума је растући низ, па ред или конвергира коначном одређеном броју или дивергира у бесконачно (одређено дивергира). За испитивање конвергенције редова користимо различите критеријуме.

12.1 КРИТЕРИЈУМ УПОРЕЂИВАЊА ЧЛАНОВА РЕДОВА

- Ако су чланови задатог реда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ са позитивним члановима, почев од неког члана, *увек мањи од одговарајућих чланова неког другог реда* $\sum b_k$ за који знамо да *конвергира*, тада и *задати ред конвергира*.
- Ако су чланови задатог реда $\sum a_k$ са позитивним члановима, почев од неког члана, *увек већи од одговарајућих чланова неког другог реда* $\sum b_k$ за који знамо да *дивергира*, тада и *задати ред дивергира*.

Доказ:

Ако су S'_n и S''_n парцијалне суме датих редова, а ред $\sum b_n$ конвергира, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$, $S'' > 0$.

Како су сви чланови реда позитивни $S''_n < S''$. Из релације $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n, \dots$ добијамо да је $S'_n < S''_n$, односно $S'_n < S''$, што значи да се вредности низа S'_n морају нагомилавати око неког броја S' који је мањи или једнак S'' . Дакле почев од неког довољно

великог броја све тачке низа S'_n нагомилаваће се око S' , тј

$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$, односно ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергира.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију редова:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$

Решење:

Да бисмо доказали конвергенцију реда упоредићемо га са редом

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)},$ за који знамо да конвергира.

Општи члан познатог конвергентног реда је $b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n}.$

Како је општи члан задатог реда $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2 + n} = b_n$ увек мањи

од општег члана реда који конвергира, следи да задати ред конвергира.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$

Решење:

Упоредимо задати ред са хармонијским редом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$

Како је $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} = b_n,$ а знајући да хармонијски ред дивергира,

закључујемо да и задати ред дивергира.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}.$

Решење:

Како је $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ је конвергентан (као геометријски ред), онда и задати ред конвергира.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$

Решење:

Како је $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, а ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ је дивергентан, биће и задати ред дивергентан.

12.2 ДАЛАМБЕРОВ КРИТЕРИЈУМ

(D'ALAMBER 1717-1783)

- Ако је $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ред са позитивним члановима и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Тада за:

- $l < 1$ - *ред конвергира*,
- $l > 1$ - *ред дивергира*,
- $l = 1$ - не знамо да ли ред конвергира или дивергира (прелазимо на други критеријум за испитивање конвергенције).

Овај критеријум само одговара на питање да ли ред конвергира или не, али не израчунава суму реда.

Доказ:

Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, на основу дефиниције граничне вредности

низа за сваки $\varepsilon > 0$ може се одредити број $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је

$$\forall n > n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| \leq \varepsilon, \text{ тј } l - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \varepsilon = q < 1, \quad a_{n+1} \leq q a_n.$$

За $\forall n > n_0$ добијамо

$$a_{n_0+1} \leq qa_{n_0},$$

$$a_{n_0+2} \leq a_{n_0+1}q = q^2 a_{n_0},$$

$$a_{n_0+3} \leq a_{n_0+2}q = q^3 a_{n_0}.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0+n} \leq a_{n_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Ред на

десној страни неједнакости је геометријски ред који конвергира. На основу критеријума упоређивања и задати ред конвергира.

Ако је $l > 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq l - \varepsilon = q > 1$

Значи почев од $\forall n > n_0$ $a_{n_0+1} > a_{n_0}$. a_{n_0} је неки позитиван број, па пошто су сви чланови низа почев од a_{n_0+1} већи од a_{n_0} , закључујемо да општи члан реда не тежи нули, односно ред дивергира. Ако је $l = 1$ не знамо да ли ред конвергира или дивергира.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију редова:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k}{k!}.$

Решење:

Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0, \text{ а}$$

$l = 0 < 1$, закључујемо да ред конвергира.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2} < 1, \text{ ред конвергира.}$$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty, l = \infty, \text{ ред дивергира.}$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Како је $l = 1$, не знамо да ли ред дивергира или конвергира. У овом случају морамо употребити неки други критеријум за испитивање конвергенције. Ово је хармонијски ред за који смо доказали да дивергира критеријумом упоређивања.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+2)5^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(2n+4)5^{n+1}}}{\frac{n}{(2n+2)5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)5^n}{(2n+4)5^n n} = \frac{1}{5}, l = \frac{1}{5} < 1, \text{ ред}$$

конвергира.

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad l = e > 1, \text{ ред}$$

дивергира.

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 2^{k+2}}{3^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1) \cdot 2^{n+3}}{3^{n+1}}}{\frac{n \cdot 2^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3}, \quad l = \frac{2}{3} < 1, \text{ ред}$$

конвергира.

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4k+1}} \left(\frac{2}{5}\right)^k.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{4n+5}} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{4n+1}} \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{4n+5}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}, \quad l = \frac{2}{5} < 1, \text{ ред}$$

конвергира.

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{3^k k!}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{3^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3}, \quad l = \frac{2}{3} < 1, \text{ ред конвергира.}$$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{(2n-1)}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \text{ ред}$$

конвергира.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e}, \quad l = \frac{3}{e} > 0, \text{ ред дивергира.}$$

12.3 КОШИЈЕВ КОРЕНИ КРИТЕРИЈУМ (CAUCHY)

- Ако је $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ је ред са позитивним члановима и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$

Тада за:

- $l < 1$ - *ред конвергира*,
- $l > 1$ - *ред дивергира*,
- $l = 1$ - *не знамо да ли ред конвергира или дивергира*
(прелазимо на други критеријум за испитивање конвергенције)

Овај критеријум такође само одговара на питање да ли ред конвергира или не, али не израчунава суму реда.

Доказ:

На основу дефиниције граничне вредности, за сваки $\varepsilon > 0$, може одредити број $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $\forall n > n_0 \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| \leq \varepsilon$, тј

$$l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon.$$

Нека је $l < 1$, $\sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon = q < 1$, одакле је $a_n \leq q^n$.

Дакле за свако $\forall n > n_0$ добијамо

$$a_{n_0} \leq q^{n_0}$$

$$a_{n_0+1} \leq q^{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq q^{n_0+2}$$

.....

Сабирањем ових веза добијамо

$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots \leq q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots$. Ред на десној страни неједнакости је геометријски ред који конвергира. На основу критеријума упоређивања и задати ред конвергира.

Ако је $l > 1$, $\sqrt[n]{a_n} \geq l - \varepsilon > 1$. Према томе за $\forall n > n_0$ задовољено

$\sqrt[n]{a_n} > 1$, дакле $a_n > 1$. Како општи члан реда не тежи нули ред дивергира.

Ако је $l = 1$ не знамо да ли ред конвергира или дивергира.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију редова:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad l = 0 < 1, \text{ ред конвергира.}$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k^2}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e}, \quad l = \frac{1}{e} < 1,$$

ред
конвергира.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-k^2}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e},$$

$l = \frac{1}{e} < 1$, ред конвергира.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2 + 2}{k^2 + k + 3} \right)^{k^2}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2}{n^2+n+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{n^2+n+3}\right)^{\frac{n+1}{n^2+n+3} \cdot \frac{n^2+n+3}{n+1} \cdot n} =$$

$$e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+n+3}} = e^{-1},$$

$$l = \frac{1}{e} < 1, \text{ ред конвергира.}$$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(2 + \frac{1}{k}\right)^{-k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2} < 1, \text{ ред}$$

конвергира.

6. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+2}\right)^{(k-1)k}.$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{(n-1)n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+2}\right)^{\frac{3}{n+2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot (n-1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{n+2}} = e^{-3},$$

$$l = \frac{1}{e^3} < 1, \text{ ред конвергира.}$$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}.$

Резултат:

$$l = \frac{1}{e^2} < 1, \text{ ред конвергира.}$$

12.4 КОШИЈЕВ ИНТЕГРАЛНИ КРИТЕРИЈУМ

- Нека је $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ред са позитивним и нерастућим члановима.

Ако је функција $f(x)$ на интервалу $[1, \infty)$ позитивна, непрекидна и нерастућа таква да је:

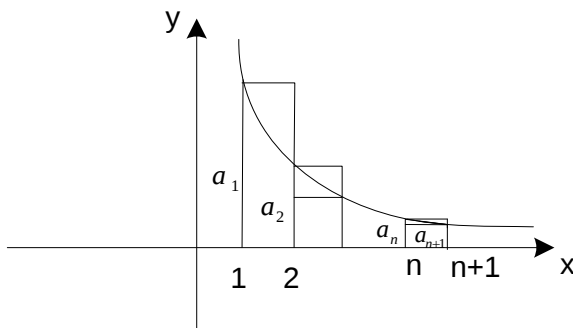
$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots, \text{ онда:}$$

Ако $\int_1^{\infty} f(x)dx$ конвергира, онда и ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергира.

Ако $\int_1^{\infty} f(x)dx$ дивергира, онда и ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ дивергира.

Доказ:

Конструишимо график функције на интервалу $[1, n+1]$. Површина криволиниског трапеза од $x=1$ до $x=n+1$ је $I_n = \int_1^{n+1} f(x)dx$ и налази се између површине уписане и описане степенасте фигуре састављене од правоугаоника основица 1 и висине $f(n) = a_n$.



Збир површина уписаних правоугаоника је $a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_{n+1} - a_1$,
а описаних је $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

$$S_{n+1} - a_1 < I_n < S_n.$$

Када пустимо да $n \rightarrow \infty$, ако несвојствени интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$

конвергира, тада $\int_1^{n+1} f(x) dx$ тежи коначној вредности I и

$$I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx < I, \text{ па добијамо } S_{n+1} < I_n + a_1 < S_n + a_1, \text{ тј растући низ}$$

парцијалних сума S_{n+1} је ограничен одозго. Значи постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S$, тј ред конвергира.

Ако интеграл дивергира, тада $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = \infty$, па из везе $I_n < S_n$ следи да $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \infty$, тј ред дивергира.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију редова:

$$1. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

Решење:

Уочимо функцију $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, x \geq 2$. Функција $f(x) \geq 0$ и непрекидна за

$x \geq 2$. Како је $f'(x) = -\frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^2 x} < 0$, функција је опадајућа за $x \geq 2$.

$$I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left\{ \frac{dx}{\frac{dx}{x}} = dt \right\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{dt}{t^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln a} =$$

$$-\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Пошто несвојствени интеграл конвергира, следи да и ред конвергира.

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$$

Решење:

Уочимо функцију $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, која је дефинисана и непрекидна за $x \in [1, \infty)$.

Како је $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = 0$, $x = e$,

За $x \in (0, e) \Rightarrow f(x) \nearrow$, а за $x \in (e, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow$.

Дакле за $x \in [3, \infty)$ функција је позитивна и нерастућа.

$$I = \int_3^{\infty} \frac{\ln x dx}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a \frac{\ln x dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\ln 3}^{\ln a} t dt = \lim_{a \rightarrow \infty} t^2 \Big|_{\ln 3}^{\ln a} =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\ln^2 a - \ln^2 3) = \infty$$

Дивергирају и интеграл и ред.

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}.$$

Решење:

Уочимо функцију $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Функција је очигледно позитивна и непрекидна за $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{-e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1)}{2x\sqrt{x}} < 0, x \in [1, \infty) \text{ значи}$$

функција опада.

$$I = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{-\sqrt{x}} = t \\ -\frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = -2 \int_{e^{-1}}^0 dt = 2t \Big|_{e^{-1}}^0 = 2e^{-1}, \text{ интеграл}$$

конвергира па конвергира и ред.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}.$

Решење:

Уочимо функцију $f(x) = \frac{1}{x^a}, x \in [1, \infty)$. Она је на задатом интервалу позитивна, непрекидна и нерастућа.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{x^{1-a}}{1-a}, & a \neq 1 \\ \ln x, & a = 1 \end{cases}.$$

Ако је $a \leq 1$ интеграл дивергира, па и ред дивергира, ако је $a > 1$ интеграл конвергира, па и ред конвергира

На пример, редови $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, дивергирају,

док редови $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергирају.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Критеријум упоређивања,
Даламберов критеријум,
Кошијев корени критеријум,
Кошијев интегрални критеријум.

НАИЗМЕНИЧНИ БРОЈНИ РЕДОВИ

1. ЛАЈБНИЦОВ КРИТЕРИЈУМ

2. АПСОЛУТНА И УСЛОВНА КОНВЕРГЕНЦИЈА РЕДА

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

- 1.** Појам и особине наизменичног бројног реда
- 2.** Лајбницов критеријум
- 3.** Апсолутну конвергенцију реда
- 4.** Условна конвергенција реда

НАИЗМЕНИЧНИ БРОЈНИ РЕДОВИ

- Ред $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, $a_k > 0$, назива се *алтернативни или наизменични ред*.
- *Сума реда* S , ако постоји, задовољава неједнакост $0 < S < a_1$.

Пример: Ред $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ је наизменични или алтернативни ред.

13.1 ЛАЈБНИЦОВ КРИТЕРИЈУМ

- Алтернативни ред *конвергира* ако
 1. *апсолутне вредности чланова алтернативног реда опадају* тј $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$, и
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказ:

Уочимо збир коначно много парних чланова реда

Како је $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0$,

а са друге стране

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_n < a_1,$$

закључујемо да је $0 < S_{2n} < a_1$.

Низ S_{2n} је очигледно растући, а ограничен је одозго, па је конвергентан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \text{ тако да је } 0 < S \leq a_1.$$

Збир непарних чланова се може написати као $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$ закључујемо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ односно

полазни ред конвергира.

- Ред $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{k+1} = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$, називамо *остатак реда* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$.

- *Остатак реда* по апсолутној вредности **није већи** је од апсолутне вредности **првог изостављеног члана**,

$$|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \right| < a_{n+1},$$

а **знак** остатка једнак је **знаку првог изостављеног члана**.

Доказ:

Нека је n паран број. Тада је $r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \dots$.

Овај ред задовољава Лајбницов критеријум па је $0 \leq r_n \leq a_{n+1}$

Ако је n непаран број, тада је $r_n = -a_{n+1} + a_{n+2} - \dots$ и

$-r_n = +a_{n+1} - a_{n+2} + \dots$, па је $0 \leq -r_n \leq a_{n+1}$, тј $|r_n| \leq a_{n+1}$.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију редова:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$.

Решење:

Ово је алтернативни ред, где је општи члан $a_n = \frac{1}{n}$ позитиван и монотонно опадајући нула низ, па по Лајбницовом критеријуму ред конвергира.

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 1}.$$

Решење:

Ово је алтернативни ред.

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$, докажимо још да низ a_n опада.

Уочимо функцију $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$x \in [1, \infty), f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \searrow,$$

што значи да и низ са општим чланом a_n опада за $n \geq 1$, па ред конвергира по Лајбницовом критеријуму.

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k-1}{k(k+1)}.$$

Решење:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n(n+1)} = 0,$$

2. Докажимо још да низ a_n опада.

Уочимо функцију $f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}, x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x)^2}, f'(x) = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Функција опада $x \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, односно за $x \geq 2$, па низ опада за $n \geq 2$.

Дакле ред конвергира по Лајбницовом критеријуму.

4. Дат је ред $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$, колика је грешка ако суму реда S апроксимирамо са S_{1000} ?

Решење:

Овај ред по Лајбницевој критеријуму конвергира.

$S_{1000} = 1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{1000}$. Ако збир S апроксимирамо са S_{1000} , чинимо грешку

$R = S - S_{1000}$, која је по апсолутној вредности мања од првог изостављеног

члана $a_{n+1} = \frac{1}{1001}$, дакле $|R| = |S - S_{1000}| < \frac{1}{1001}$.

Ред споро конвергира, односно апроксимација S парцијалном сумом S_{1000}

садржи грешку која је мања од $\frac{1}{1001}$, значи ни трећа децимала није сигурна.

5. Израчунати збир реда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ са тачношћу до 0,1.

Решење:

Нађимо n за које је $|R_n| \leq 0,1$.

Како је $|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < 0,1$ довољно је ставити $n+1=10$, $n=9$.

Тада је $S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{9} = 0,746$.

6. Израчунати суму реда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$ са тачношћу до 0,01.

Решење:

Нађимо n за које је $|R_n| \leq 0,01$.

$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 0,01 \Rightarrow (n+1)! > 100 \Rightarrow n = 4$

Тада је $S_3 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = 0,625$.

7. Применом Лајбницевог критеријума доказати конвергенцију следећих редова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k(k+2)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

14.2 АПСОЛУТНА И УСЛОВНА КОНВЕРГЕНЦИЈА РЕДА

- Нека је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ конвергентан, кажемо да је полазни ред **апсолутно конвергентан**.
- Нека је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ дивергентан, кажемо да је полазни ред **условно конвергентан**.
- Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ **конвергентан**, онда је и ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **конвергентан** (обруто не важи).

Доказ:

Посматрајмо помоћни ред

$$(a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots (a_n + |a_n|) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|)$$

Како је $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, а ред $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$ је конвергентан, па је по

критеријуму упоређивања и ред $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|)$ конвергентан.

Полазни ред се може написати у облику $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

и произилази да је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан као разлика два конвергентна реда.

ЗАДАЦИ

Испитати конвергенцију редова:

8. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}.$

Решење:

Ово је алтернативни ред који конвергира. Ред његових апсолутних вредности $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ је хармонијски ред, који дивергира. Значи, задати ред условно конвергира.

9. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\sqrt{k}}.$

Решење:

Ово је алтернативни ред који конвергира по Лајбницовом критеријуму. Ред

његових апсолутних вредности $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ такође конвергира. Значи

задати ред апсолутно конвергира.

10. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k.$

Решење:

Ред конвергира по Лајбницовом критеријуму.

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$, ред његових апсолутних вредности по

Кошијевом кореном критеријуму конвергира, што значи задати ред апсолутно конвергира.

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln(k+1)}.$$

Решење:

Дати ред конвергира по Лајбницовом критеријуму, а ред апсолутних вредности конвергира по критеријуму упоређивања, тј

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1},$$

а како ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ дивергира и ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$ дивергира. Значи задати ред условно конвергира.

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{k(k+1)}.$$

Решење:

Задати ред конвергира по Лајбницовом критеријуму:

Ред апсолутних вредности дивергира по интегралном Кошијевом критеријуму.

$$\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{(x+1)+x}{x(x+1)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln x (x+1) \Big|_1^a = \infty.$$

Значи задати ред условно конвергира.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Појам и особине наизменичног бројног реда

Лајбницов критеријум

Апсолутна конвергенција реда

Условна конвергенција реда

ФУНКЦИОНАЛНИ И СТЕПЕНИ РЕДОВИ

1. ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

2. СТЕПЕНИ РЕДОВИ

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

1. појам и особине функционалних редова,
2. појам и особине степених редова,
3. област конвергенције реда,
4. полупречник реда,
5. Абелову теорему.

14.1 ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

- Израз облика

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots,$$

где су $a_k(x)$ функције по x , назива се **функционални ред**.

Ако у функционалном реду заменимо $x = x_0$, где је x_0 број, добијамо бројни ред.

Пример:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \text{ је функционални ред.}$$

- Функционални ред је **конвергентан** у тачки x_0 , ако је бројни ред добијен из функционалног реда за $x = x_0$ конвергентан. Тачка $x = x_0$ зове се **тачка конвергенције реда**.

- Скуп свих тачака конвергенције функционалног реда зове се **област конвергенције реда**.

Пример:

$$\text{Дат је ред } \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$$

Ред конвергира у тачки $x = \frac{1}{2}$, а дивергира у тачки $x = 2$.

Односно, ако ставимо да је $x = \frac{1}{2}$ добијамо бројни ред

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ који конвергира, а ако је $x = 2$ ред $1 + 2 + 2^2 + \dots$ који дивергира.

Пример:

Одредити област конвергенције реда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

Ово је геометрички ред који конвергира за $q = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$, односно за $|x| > 1$, па је област конвергенције $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

14.2 СТЕПЕНИ РЕДОВИ

- Ред облика $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, $a_k \in R$ се назива **степенни ред**.
- Степени ред може бити и облика $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$, $a_k \in R$.

Пример:

$\sum_{k=1}^{\infty} x^{3k} = x^3 + x^6 + \dots$ је степенни ред.

- За сваки степенни ред постоји реалан број R , који се зове **полупречник конвергенције реда**, такав да ред **апсолутно конвергира** за $|x| < R$ и **дивергира** за $|x| > R$. Интервал $(-R, R)$ зове се **интервал конвергенције степеног реда**.

У тачкама $x = \pm R$, степенни ред може да **конвергира**, (условно или апсолутно) или да **дивергира**.

Ако степенни ред конвергира за $x \in R$, тада кажемо да је $R = \infty$.
Ако степенни ред конвергира само за $x = 0$, тада је $R = 0$.

- Полупречник конвергенције може да се одреди по формули

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{l},$$

или по формули

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{l}.$$

Абелова теорема

- Ако степени ред конвергира за неку вредност $x_0 \neq 0$, онда он апсолутно конвергира за сваку вредност за коју је $|x| < |x_0|$.
- Ако степени ред дивергира за неку вредност $x_1 \neq 0$, онда он дивергира за сваку вредност x за коју је $|x| > |x_1|$.

Доказ:

Како по претпоставци бројни ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots$

конвергира, његов општи члан тежи нули, тј $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. Због тога низ $a_0, a_1 x_0, a_2 x_0^2, \dots$ је ограничен и постоји број $M > 0$ такав да је $|a_n x_0^n| < M$ за $n = 0, 1, 2, \dots$.

Ако степени ред напишемо у облику $a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots$

и посматрамо ред састављен од његових апсолутних вредности

чланова $|a_0| + |a_1 x_0| \left| \left(\frac{x}{x_0} \right) \right| + |a_2 x_0^2| \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right| + \dots$, добијамо да је

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \left(\frac{x}{x_0} \right) \right| + |a_2 x_0^2| \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right| + \dots < M + M \left| \left(\frac{x}{x_0} \right) \right| + M \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right| + \dots$$

За $|x| < |x_0|$ ред је геометријски са количником $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ и према томе конвергира. Дакле и наш ред по критеријуму упоређивања конвергира. То значи да задати ред апсолутно конвергира.

- Ако ред дивергира за неку вредност $x_1 \neq 0$, тада ће он дивергирати за сваку вредност x за коју је $|x| > |x_1|$. Наиме ако би ред за неку вредност x која испуњава овај услов конвергирао, тада би по првом делу теореме конвергирао и у тачки x_1 , јер је $|x_1| < |x|$ што је супротно услову теореме да ред у тачки x_1 дивергира.

На основу Абелове теореме ако ред конвергира у некој тачки x_0 , тада ред апсолутно конвергира у интервалу $(-|x_0|, |x_0|)$. Ако ред дивергира за неку вредност x_1 , тада ред дивергира у интервалима $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$.

Из теореме може се закључити да постоји број $R > 0$, који се зове **полупречник конвергенције** такав да ред за $x \in (-R, R)$ конвергира, а за $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ дивергира.

Интервал $(-R, R)$ зове се **интервал конвергенције**

На крајевима интервала ред може да конвергира и дивергира, те је потребно додатно испитивање.

Ако је $R = \infty$ област конвергенције је x -оса.

Ако је $R = 0$ онда је област конвергенције тачка $x = 0$.

- За одредјивање полупречника конвергенције реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ посматраћемо ред састављен од апсолутних вредности чланова $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$. Ако тај ред конвергира, конвергираће и полазни ред.

На њега можемо применити неки од познатих критеријума Даламберов или Кошијев критеријум.

По Даламберовом критеријуму

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = l |x|$$

ред конвергира ако је $l|x| < 1$, тј $|x| < \frac{1}{l}$, а дивергира ако је

$$\boxed{|x| > \frac{1}{l}}.$$

ЗАДАЦИ

Одредити интервал, полупречник и област конвергенције редова:

1. $\sum_{l=0}^{\infty} x^k.$

Решење:

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$, имамо да за $|x| < 1$ ред конвергира, $|x| > 1$ дивергира.

$|x| = \pm 1$ такође дивергира.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \left(\frac{x}{2} \right)^k.$

Решење:

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+1}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$, на основу Даламберовог

критеријума ред апсолутно конвергира ако је $\left| \frac{x}{2} \right| < 1$, $-2 < x < 2$.

Значи полупречник конвергенције је $R = 2$, а интервал конвергенције је $(-2, 2)$.

Треба још испитати конвергенцију на крајевима интервала.

За $x = -2$ ред гласи $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$.

Ово је наизменични ред и на основу Лајбницевог критеријума како

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ бројни ред дивергира.

За $x = 2$ ред гласи $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$. Ово је такође дивергентан ред, јер

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ и није испуњен потребан услов конвергенције.

Дакле област конвергенције је $(-2, 2)$.

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{\sqrt{(k+1)^3}}$$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{(n+2)^3}}}{\frac{3^n}{\sqrt{(n+1)^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt{\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^3} = 3.$$

Значи полупречник конвергенције је $R = \frac{1}{3}$, а интервал конвергенције је $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

За $x = -\frac{1}{3}$ ред постаје наизменични бројни ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{\sqrt{(k+1)^3}} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(k+1)^3}}.$$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}} = 0$ и $\frac{1}{\sqrt{(k+1)^3}} > \frac{1}{\sqrt{(k+2)^3}}$, тј чланови

реда по апсолутној вредности опадају закључујемо да ред по Лајбницеовом критеријуму конвергира.

За $x = \frac{1}{3}$ ред постаје позитивни бројни ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{\sqrt{(k+1)^3}} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

а пошто је $\alpha = \frac{3}{2} < 1$, закључујемо да задати ред конвергира.

Дакле област конвергенције је реда је $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{\sqrt{k}}.$

Решење:

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{5^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{5^n}{\sqrt{n}}} \right| = 5$, полупречник конвергенције је

$$R = \frac{1}{5}, \text{ а интервал конвергенције је } \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Треба још испитати конвергенцију на крајевима интервала.

За $x = -\frac{1}{5}$ ред гласи $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{k}} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Ово је наизменични ред који конвергира на основу Лајбницевог критеријума.

За $x = \frac{1}{5}$ ред гласи $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{k}} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, а ово је дивергентан ред.

Дакле област конвергенције је $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{k} x^k$

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n + 2^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3$$

.

Значи полупречник конвергенције је $R = \frac{1}{3}$, а интервал

конвергенције је $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

На крајевима интервала имамо:

За $x = -\frac{1}{3}$ ред гласи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k + 2^k}{3^k \cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k}{k}.$$

Ово је наизменични ред који конвергира на основу Лајбницевог критеријума, тј,

општи члан $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} \right| = 0$, а чланови реда по апсолутној

вредности опадају,

$$f(x) = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{x}, x \geq 1, \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} x - 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x}{x^2} < 0 \quad \text{јер је}$$

$$\ln \frac{2}{3} < 0.$$

За $x = \frac{1}{3}$ ред гласи $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k}{k}$, а како је

$\frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} > \frac{1}{n}$ ово је дивергентан ред на основу критеријума упоређивања са хармониским редом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Дакле област конвергенције је $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

6. Одредити област конвергенције следећих редова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{\sqrt[3]{k}} \quad \text{Резултат: } \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^k} (x-2)^k \quad \text{Резултат: } (-\infty, +\infty)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{\sqrt[3]{k}} \quad \text{Резултат: } \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{k+1}}{k(k+2)} \quad \text{Резултат: } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{2^k \cdot 3^{k+1}}$$

Резултат: $(-6,6)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(2k-1) \cdot 4^{2k-1}}$$

Резултат: $[-16,16)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k x^k}{2^k}$$

Резултат: ред конвергира само у тачки $x = 0$

К Л Ј У Ч Н Е Р Е Ч И

Функционални ред,
Степени ред,
Област конвергенције реда,
Полупречник реда,
Абелова теорема.

ТЕЈЛОРОВ И МАКЛОРЕНОВ РЕД

- 1. ОСОБИНЕ КОНВЕРГЕНТНИХ РЕДОВА**
- 2. ТЕЈЛОРОВИ И МАКЛОРЕНОВИ РЕДОВИ**
- 3. МАКЛОРЕНОВ РАЗВОЈ ФУНКЦИЈА**

ЦИЉЕВИ УЧЕЊА

Када ово поглавље проучите требало би да знате:

- 1.** појам и особине Тејлоровог реда,
- 2.** појам и особине Маклореновог реда,
- 3.** Маклоренов развој елементарних функција.

15.1 ОСОБИНЕ КОНВЕРГЕНТНИХ РЕДОВА

- Збир степеног реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ је *непрекидна функција* у интервалу конвергенције $|x| < R$.

- У интервалу конвергенције $|x| < R$ степени ред се може диференцирати члан по члан произвољан број пута.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \dots$$

Ако је R полупречник конвергенције датог реда, онда је R и полупречник изводног реда.

Доказ:

Ако полазни ред има полупречник конвергенције R то значи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Диференцирањем реда добијамо $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Применом истог

критеријма добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) a_{n+1} x^{n+1}}{n a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{ односно граничне}$$

вредности су једнаке. Редови дакле имају исти полупречник конвергенције.

Пример: Ако је задат ред $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, 1)$,

онда је његов извод $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k \cdot x^{k-1} = -1 + 2x - 3x^2 \dots = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

- У интервалу конвергенције $|x| < R$ степени ред се може **интегралити члан по члан**

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx, \quad -R < a < b < R.$$

Пример:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{x+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x x^k dx = \int_0^x (1 - x + x^2 - \dots) dx = \int_0^x \frac{dx}{x+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \ln(x+1)$$

15.2 ТЕЈЛОРОВИ И МАКЛОРЕНОВИ РЕДОВИ

- Већ смо доказали да ако функција у околини тачки $x = a$ има све изводе

закључно до $n+1$, онда у околини тачке $x = a$ важи **Тејлорова формула**

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

где је $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), \quad \theta \in (0, 1).$

- Ако функција има све изводе у околини тачке $x = a$ и пустимо да $n \rightarrow \infty$,
тада Тејлорова формула постаје бесконачни **Тејлоров ред**

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Ова једнакост важи само ако $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. У том случају ред је конвергентан и његова сума је $f(x)$.

- За $a = 0$ Тејлоров ред постаје **Маклоренов ред**.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$$\text{где је } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Према томе услов да се функција може развити у Тејлоров ред је да:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$
- Има све изводе у том интервалу конвергенције $(a - R, a + R)$.

15.3 МАКЛОРЕНОВ РАЗВОЈ ФУНКЦИЈА

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, област конвергенције је $x \in (-\infty, \infty)$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in (-\infty, \infty)$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in (-\infty, \infty)$

- $(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, x \in (-1,1)$
- $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, x \in (-1,1)$
- $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, x \in (-1,1)$

ЗАДАЦИ

1. Развити функцију $y = e^{ix}$ у Маклоренов ред.

Решење:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} - \dots =$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = \cos x + i \sin x$$

2. Функцију $y = \ln(x+1)$ развити у Маклоренов ред. Одредити полупречник и област конвергенције реда.

Решење:

Како је

$$y(0) = 0$$

$$y' = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y''(0) = -1$$

$$y''' = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow y'''(0) = 2$$

.....

Добијамо маклоренов развој

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

$$\text{Из } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}}{(-1)^n \frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ добијамо да је } R=1, \text{ а}$$

интервал конвергенције је $(-1, 1)$.

За $x = -1$ ред је дивергентан, јер $\ln 0$ не постоји.

За $x = 1$ ред гласи $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. Ово је

наизменични ред који конвергира по Лајбницевог критеријуму, па је област конвергенције $(-1, 1]$.

3. Полазећи од функције $y = \frac{1}{1+x^2}$ развити у Маклоренов ред функцију $\arctg x$ и одредити полупречник и област конвергенције. Приближно израчунати $\frac{\pi}{4}$ користећи добијени резултат, узимајћи четири члана одговарајућег реда.

Решење:

Ако користимо развој функције $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1$

стављајући x^2 уместо x и добијамо развој задате функције.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, |x| < 1$$

Интеграцијом овог реда

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k x^{2k} dx$$

добијамо

$$\arctg x \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^x, \text{ односно } \arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ који}$$

апсолутно конвергира за $|x| < 1$. Полупречник конвергенције је

$$R = 1.$$

За $x = \pm 1$ добијамо конвергентне наизменичне редове, па је област конвергенције $[-1, 1]$.

$$\text{За } x = 1 \text{ ред гласи } \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Узимајући прва четири члана реда добијамо

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = 0,72381.$$

4. Полазећи од Маклореновог реда за функцију $\sin x$ израчунати

$$\text{интеграл } \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решење:

$$\text{Маклоренов развој функције } \sin x \text{ гласи } \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

овај ред апсолутно конвергира у интервалу $(-\infty, \infty)$.

Како је $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, овај ред је такође конвергентан у интервалу $(-\infty, \infty)$, па га је модуће интегралити члан по члан.

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} \int_0^x x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(!2k+1)!(2k+1)}$$

.

5. Израчунати интеграл $\int_0^{0.25} e^{-x^2} dx$ са тачношћу до 10^{-4} .

Решење:

$$\text{Ако у реду } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ заменимо } x \text{ са } x^2. \text{ добијамо}$$

$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$ овај ред је апсолутно конвергентан у интервалу $(-\infty, \infty)$, па га можемо интегралити члан по члан

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \Big|_0^{0,25} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \dots$$

ово је наизменични ред чија је грешка мања од апсолутне вредности првог изостављеног члана

$$|r| < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} = \frac{1}{10240} < \frac{1}{10000} < 10^{-4}.$$

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} \approx 0,2448$$

6. Израчунати интеграл $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ са тачношћу до 10^{-3} .

Решење:

Ако у реду $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ заменимо x са $\sqrt{x}$, добијамо

$$\cos \sqrt{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}, \text{ овај ред је апсолутно конвергентан у}$$

интервалу $[0, \infty)$, па га можемо интегралити члан по члан

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{(2k)!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(2k)!(k+1)} \Big|_0^1 =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5!} \dots = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} + \dots$$

ово је наизменични ред чија је грешка апроксимације мања од апсолутне вредности првог изостављеног члана

$$r < \frac{1}{2880} < \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$\int_0^{0,25} \cos \sqrt{x} dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} \approx 0,764$$

7. Израчунати интеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$ са тачношћу до 10^{-4} .

Решење:

Ако у Маклореновом развоју функције $\sin x$ заменимо x са x^2 добијамо

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Интеграцијом ове једнакости добијамо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \dots \end{aligned}$$

$$\text{Грешка } |r| < \frac{1}{11 \cdot 5!} < 0,0002 < 10^{-4}.$$

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \approx 0,3103$$

8. Израчунати интеграл $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ са тачношћу до 10^{-3} .

Решење:

Ако користимо развој функције $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, $|x| < 1$

стављајући x^4 уместо x и добијамо развој задате функције.

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{16} + \dots, \quad |x| < 1$$

Интеграцијом овог реда

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{0.5} (1 - x^4 + x^8 - x^{16} + \dots) dx = \int_0^{0.5} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k} \right) dx =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{0.5} (-1)^k x^{4k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{4k+1} \Big|_0^{0.5} = \left(x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \dots \right) \Big|_0^{0.5} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 0,494$$

У овом случају грешка је мања од $|r| < \left(\frac{1}{2} \right)^9 \cdot \frac{1}{9} < 0,001$.

9. Одредити интервал, полупречник и суму реда $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$, а

затим

диференцирањем развити функцију $\frac{1}{(1+x)^2}$ у степени ред.

Решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(-1)^n x^n} \right| = |x|. \text{ Значи ред на основу Даламберовог}$$

критеријума апсолутно конвергира за $|x| < 1$. Интервал

конвергенције је $(-1, 1)$, полипречник конвергенције $R = 1$.

За $x = \pm 1$ ред дивергира.

За $|x| < 1$ ред је бесконачни геометријски чја је сума $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1+x}$.

Диференцирањем везе $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$, добијамо

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k x^{k-1} = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ или } \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} k x^{k-1}, |x| < 1.$$

К Л Ъ У Ч Н Е Р Е Ч И

Тејлоров ред,
Маклоренов ред.

Индекс појмова

А

Абелова теорема, 178
алтернативни ред, 166
адјунгована матрица, 38
апсолутна конвергенција реда, 170

Б

Бернулијева диференцијална једначина, 94
бројни редови, 142

Г

Гаусов алгоритам, 46
геометријски ред, 144

Д

Даламберов критеријум, 152
Декартов производ, 12
детерминанте, 24
Де Морганов закон, 5
дисјункција, 4
дивергентан ред, 143
диференцијалне једначине, 66
диференцијалне једначине првог реда, 68

Е

еквиваленција, 4

И

импликација, 4
инверзна матрица, 38
интервал конвергенције реда, 179
исказ, 3

З

закон апсорпције, 5
закон асоцијације, 5
закон двоструке негације, 5
закон дистрибуције, 5
закон идемпотенције, 5
закон комутације, 5

К

кардинални број, 13
карактеристична једначина, 116
кофактор, 26
конвергентан ред, 143
конјункција, 4
контрадикција,
Кошијев корени критеријум, 156
Кошијев интегрални критеријум, 160
Крамерова метода, 49
Кошијево решење диференцијалне једначине, 67

Л

Лајбницов критеријум, 166
Лагранжова метода варијације константи, 134
Лапласово правило, 27
Линеарна диференцијална једначина првог реда, 78

М

Матрице, 20
Маклоренови редови, 189
Маклоренов развој функција, 190
Матрични метод за решавање система линеарних једначина, 52
минор, 26

Н

наизменични бројни редови, 166
негација, 4

нехомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима, 120

О

област конвергенције реда, 176

опште решење диференцијалне једначине, 66

остатак реда, 143, 167

П

партитивни скуп, 10

партикуларно решење диференцијалне једначине, 67

позитивни бројни редови, 149

полупречник конвергенције реда, 179

парцијална сума реда, 142

пресек, 11

Р

разлика, 11

регуларна матрица, 38

С

Сарусово правило, 24

сингларна матрица, 38

сингуларно решење диференцијалне једначине, 67

скуп, 8

степен редови, 177

Т

таутологија, 5

Тејлорови редови, 189

У

унија, 10

условна конвергенција реда, 170

Ф

функционални редови, 176

Х

хармонијски ред, 144

хомоген систем линеарних једначина, 51

хомогене диференцијалне једначине првог реда, 79

хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима, 116

Литература

- [1] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа 1*, Математички факултет Београд, 2008.
- [2] Б. Боричић, М. Ивовић, *Математика*, Економски факултет Београд, 2003.
- [3] Б. Боричић, М. Ивовић, Д. Аздељковић, И. Спасић, *Збирка задатака из математике*, Економски факултет Београд, 2003.
- [4] И. Ковачевић, З. Мишковић, А. Савић, *Математика за инжењере*, Висока школа електротехнике и рачунарства, Београд, 2008.
- [5] М. Меркле, *Математичка анализа*, Академска мисао, Београд, 2008.
- [6] Група аутора, *Математика за више техничке школе*, Савремена администрација, Београд, 1990.
- [7] Р. Шћепановић, Ј. Кнежевић-Миљановић, Јб. Протић, *Диференцијалне једначине*, Математички факултет Београд, 2005.
- [8] Г. Калајџић, *Линеарна алгебра*, Математички факултет Београд, 2007.