ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА

Горан Дикић

Београд, 2011.

Аутор: *др Горан Дикић*

Рецензенти:
др Жељко Ђуровић, професор Електротехничког факултета у Београду;
др Вера Петровић, професор Високе школе елктротехнике и рачунарства струковних студија у Београду

Обрада и припрема текста: *др Горан Дикић*

Издавач: *Висока школа електротехнике и рачунарства струковних студија, Београд*

Корице: *Габријела Димић и Кристијан Кук*

Тираж: *100*

Штампа: *МСТ Гајић, Београд*

ISBN 978-86-7982-095-2

CIP- Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

681.5.011(075.8)

Дикић, Горан, 1960-
Основе теорије аутоматског управљања / Горан Дикић. – Београд : Висока школа електротехнике и рачунарства , 2011 (Београд : МСТ Гајић). – 176 стр. : граф. прикази ; 30 cm

Тираж 100. Библиографија : стр. 174. – Регистар.

а) Системи аутоматског управљања
COBISS.SR-ID 183606796

Предговор

Ова књига је намењена студентима који су одслушали само почетне курсеве Математике из Математичке анализе и Линеарне алгебре. Изучавање Теорије система аутоматског управљања започиње овладавањем знања која се односе на моделирање и анализу континуалних система управљања. На тај начин стварају се предуслови за овладавање поступцима који треба да омогуће добијање жељених карактеристика система, а изучавају се на вишим курсевима из области ситема аутоматског управљања .

Међутим, поред већ поменутих курсева Математике за успешну анализу континуалних система управљања неопходно је и познавање елемената виших курсева који се односе на изучавање Лапласове трансформације и Теорију функција комплексне варијабле. Због тога се, након кратког увода, на почетку књиге појављује друго поглавље под називом Математичке основе моделирања процеса управљања. У њему се описују различити модели система и објашњава смисао увођења Лапласове трансформације како би се код студената развила мотивација за пажљиво читање и разумевање садржаја који се односе на моделирање сигнала, односно Фуријеов ред и Фуријеову трансформацију. На крају поглавља дефинисани су Лапласова трансформација и њена својства, поступци одређивања Лапласове трансформације најчешће коришћених функција, примена инверзне Лапласове трансформације и дефинисана је Функција преноса. Бројни примери наведени су како би се лакше разумео описани математички апарат. Строге математичке дефиниције и објашњења поменутих трансформација читаоци увек могу пронаћи у одговарајућој математичкој литератури.

У трећем поглављу описани су: алгебра функције преноса, дефинисане су карактеристичне функције система управљања, извршена је класификација система у односу на ред астатизма, Мејсоново правило за одређивање функције *преноса и поступци добијања модела система у простору стања на основу његове функције преноса.*

У четвртом поглављу анализирано је понашање континуалних система аутоматског управљања. Описани су основни закони управљања, карактеризација система у стационарном стању и током прелазног процеса. Анализирана је зависност одзива система од распореда полова и нула функције преноса. На крају поглавља су дефинисани интегрални индекси перформанси система.

Пето поглавље описује алгебарске критеријуме стабилности. Стабилност система представља његово најважније својство. Свака анализа започиње тако што се прво утврђује да ли је систем стабилан. Имајући у виду потребу да се током изучавања теорије система управљања прво овлада неким основним знањима као и комплексност овог проблема стабилност је дефинисана у претпоследњем поглављу ове књиге.

Шесто поглавље је посвећено анализи система у фреквенцијском домену. На почетку овог поглавља описан је поступак добијања амплитудних и фазних карактеристика система, односно Бодеових дијаграма. Посебна пажња посвећена је математичкој интерпретацији и опису Никвистовог критеријума с обзиром да се, за разлику од алгебарских критеријума, на основу њега може остварити и процена резерве стабилности система. На крају поглавља описани су поступак одређивања константи које карактеришу величину грешке у стационарном стању и процена резерви стабилности система на основу одговарајућих Бодеових дијаграма.

У Београду, фебруара 2011. *Аутор*

САДРЖАЈ

1

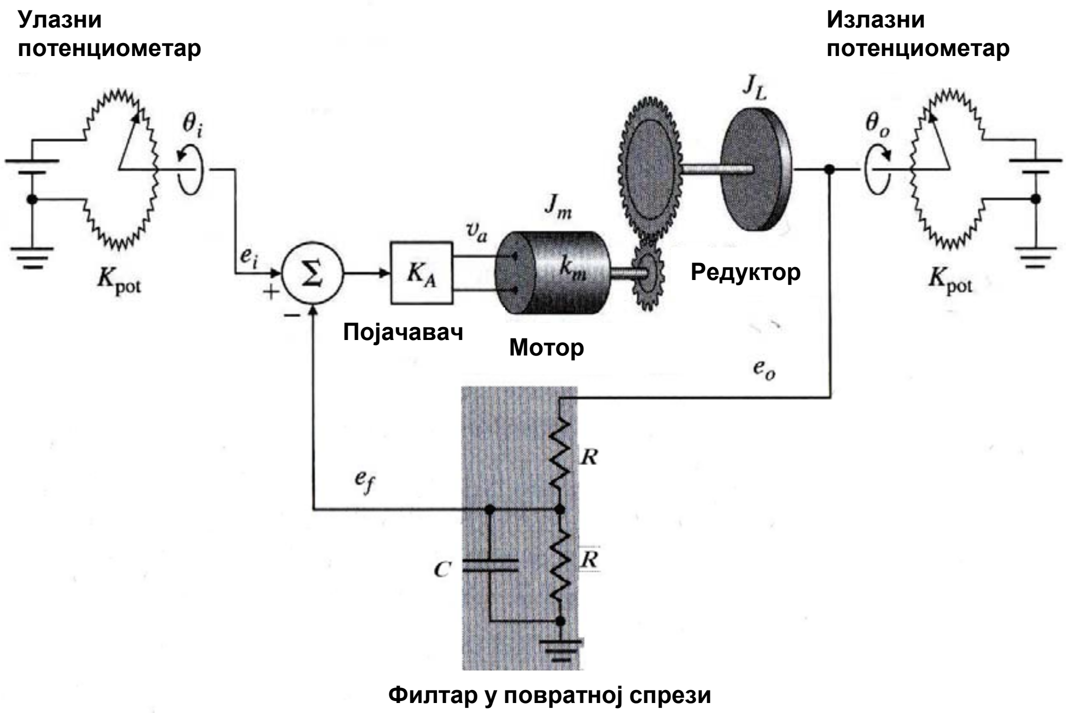
УВОД

Циљ овог поглавља је да се, на примеру позиционог серво система, прикаже основна структура и суштина процеса система аутоматског управљања. Поред тога наведене су основне особине система које се могу користити као критеријум за њихово разврставање у поједине подгрупе.

Увођењем природних извора енергије у производне процесе људски рад је замењен ангажовањем машина што је неминовно омогућило бржу и масовнију производњу разноврсних добара. Развојем машина настају процеси у којима се захтева ангажовање радника кроз понављање истоветних радних операција или се очекује да он реагује у све краћем времену и оствари неки облик управљања. Очигледно, након процеса механизације производње добара убрзо се наметнуо захтев за што мање ангажовање човека у процесу одлучивања. Људска ограничења као и неопходност хуманизације радних услова усмерили су научну мисао ка развоју средстава којим је елиминисано или минимизирано ангажовање човека током управљања и контроле радних процеса. Појава Ватовог центрифугалног регулатора усвојена је као почетак развоја система аутоматског управљања јер је његовим увођењем обезбеђена аутоматска контрола дотока паре, а самим тим и контрола брзине обртаја вратила за погон ондашњих машина. Развој технике у периоду непосредно пре и током другог светског рата условљава нагли развој теорије у овој области. Формулисани су поступци и критеријуми за анализу и синтезу система аутоматског управљања. Напредак у области стицања теоретских сазнања као и развој нових технологија омогућио је реализацију софистицираних пројеката као што су истраживање месеца, развој беспилотних летелица и читавих индустријских погона без присуства човека у радном процесу.

1.1 Структура система управљања

Процес управљања, у општем случају, подразумева постојање извора информација о задацима и резултатима управљања, анализу ових информација и доношење одлуке као и постојање елемената система који ће обезбедити да се управљање реализује. Анализа информација, у савременим системима, најчешће се остварује применом уређаја на основу којих су прављани електронски рачунари (аналогни или дигитални). У складу са природом објекта и процеса управљања информације о задацима и резултатима управљања често се појављују као неелектричне величине па је неопходно да се применом одговарајућих претварача трансформишу у електричне сигнале. Поред тога у систему се налазе елементи као што су филтери и ускладници који обезбеђују жељене динамичке карактеристике и заштиту у погледу смањења деловања разних поремећајних утицаја. На слици 1 приказани су елементи позиционог серво система како би се илустровао један пример процеса управљања.

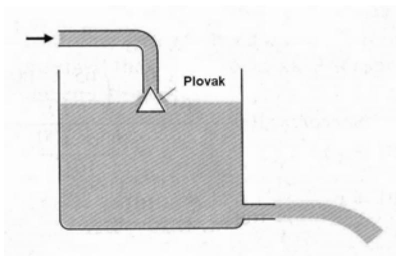


Сл. 1 Приказ елемената позиционог серво система

Серво систем, у општем случају, обезбеђује да излазна променљива прати промене улазне променљиве уз извесно повећање снаге. Позициони серво систем, као што и само име каже треба да омогући позиционирање, односно довођење објекта управљања у положај који је дефинисан вредношћу улазне променљиве. У конкретном случају, као што се види са слике, осовина излазног потенциметра треба да прати закрет осовине улазног потенциометра.

Напони на клизним контактима оба потенциометра представљају електричне еквиваленте одговарајућих углова, односно вредности улазне и излазне променљиве. Из аспекта теорије система аутоматског управљања ови напони заправо представљају информације о задацима и резултатима управљања. Њиховим поређењем долази се до информације о грешци односно одступању излазне променљиве од вредности која је дефинисана вредношћу улазне променљиве. Процес поређења, у конкретном случају, остварује се помоћу диференцијалног електричног појачавача (приказан на слици 1 кружићем са словом сигма) који на свом излазу генерише сигнал грешке пропорционалан разлици напона на његовим улазима. Даљим појачањем добија се виши енергетски ниво сигнала што омогућава погон извршног елемента. У конкретном случају то је електрични мотор који закреће осовину излазног потенциометра тако да аутоматски елиминише или минимизира било какво одступање од захтеване вредности. С обзиром да систем делује тако да смањује сигнал грешке описани алгоритам управљања назван је негативна повратна спрега и представља основу за реализацију аутоматског управљања. Механизам деловања негативне повратне спреге у суштини је одавно познат јер се користио за одржавање константног протока течности још у доба водених часовника.

Познато је да брзина истицања течности из неке посуде нелинеарно опада смањивањем њене висине у суду. Уколико се жели да проток буде константан неопходно је обезбедити непромењиву висину течности. Ово је могуће уколико се примени једноставан механизам приказан на слици 2.



Сл. 2 Механизам за одржавање константног протока течности.

Пловак на површини течности смештен је тако да променом своје висине утиче на промену отвореног пресека доводне цеви. Истицањем течности пловак пада и повећава се отворени пресек доводне цеви. Већа количина течности дотиче у резервоар и на тај начин одржава се њен константан ниво, односно непроменљив проток на излазу резервоара током времена.

Системи управљања без присуства негативне повратне спреге користе се изузетно, у крајње једноставним уређајима, у одсуству поремећаја или када колебања излазне променљиве не утичу значајно на резулате управљања. Међутим, у том случају нема ни аутоматског управљања већ је неопходно надзирање процеса од стране оператора, односно човека који ће у случају потребе интервенисати тако што ће утицати на процес мењајући вредност улазне променљиве.

1.2 Подела система аутоматског управљања

Систем у општем случају можемо дефинисати као уређај, процес или алгоритам помоћу којег се обрађују или генеришу сигнали. У складу са њиховим особинама системе разврставамо у многобројне категорије. Постоје три кључне особине по којима разврставамо системе, а то су природа њихових сигнала, линеарност и стационарност.

Зависно од природе сигнала које обрађују и генеришу ситеми се деле на континуалне и дискретне. У оквиру континуалних система сигнали су непрекидни по времену као и по нивоу изузев када су у питању прекиди прве врсте као на пример у случају одскочне функције (јединична степ побуда). У случају дискретних система сигнали могу бити дискретизовани по нивоу, времену или по нивоу и времену

Једно од најзначајних својстава ситема је линеарност. У том смислу их разврставамо на линеарне и нелинеарне. Линеарни системи одговарају, на побуду $(ax_1(t)+ bx_2(t))$, одзивом $(ay_1(t)+ by_2(t))$. При томе су $y_1(m)$, $y_2(m)$ одзиви система на побуду сигналима $x_1(m)$ и $x_2(m)$, а параметри a и b су реалне или комплексне константе. Уколико је повезаност излазне и улазне променљиве система описана нелинарном једначином онда кажемо да је систем нелинеаран.

Зависно од промене параметара који описују понашање система делимо их на стационарне и нестационарне. Уколико се параметри система не мењају током времена кажемо да је систем стационаран. При једнаким почетним условима и непромењеној побуди његов одзив остаје непромењен. Једино у случају временског помака, односно за побуду $x(m-m_0)$ такав систем генерише одзив $y(m-m_0)$. Другим речима, временски померај у улазном сигналу ће утицати на временски померај у излазу система али не и на његов облик. У случају временски променљивих параметара (нестационарни системи) у истим околностима, односно за побуду $x(m-m_0)$ поред временског помака у одзиву система се појављују и промене облика сигнала (амплитудне и фазне).

Очигледно, могуће је класификовати системе на бројне начине у зависности од тога шта се усвоји као критеријум за њихову класификацију. На пример, за све системе који се у једнаким околностима увек понашају на истоветан начин можемо рећи да припадају класи детерминистичких система. Насупрот њима, постоје стохастички системи који у истоветним условима генеришу одзив случајног карактера. У многим случајевима одзив ових система има обележја неке расподеле вероватноћа па их је могуће статистички описати.

Поједини системи управљања подразумевају услове експлоатације који нису претходно познати па је неопходно прилагођавање њихових динамичких карактеристика у складу са тренутном ситуацијом. Кретање возила у зимским условима представља добар пример таквих услова. Појава леда и воде на путу условљава потпуно другачији поступак кочења и заустављања возила у односу на сув пут. Другим речима неопходно је да динамика кочионог система буде аутоматски прилагођена путним условима. Имајући у виду адаптибилно понашање описани пример припада класи адаптивних система управљања.

2

МАТЕМАТИЧКЕ ОСНОВЕ МОДЕЛИРАЊА ПРОЦЕСА УПРАВЉАЊА

Циљ овог поглавља је да се опишу различити модели система и објасни смисао увођења Лапласове трансформације како би се код студената развила мотивација за пажљиво читање и разумевање садржаја који се односе на моделирање сигнала, односно Фуријеов ред, Фуријеову трансформацију и примену Лапласове трансформације при решавању конкретних проблема.

Анализа и синтеза система аутоматског управљања подразумева познавање математичког модела како елемената тако и система у целини. При дефинисању модела користе се научна знања која објашњавају понашање конкретног система. Тако ће се при опису електричних кола користити Кирхофови закони и друга правила која важе за системе у области електротехнике. У пракси је чест случај да су системи управљања реализовани комбиновањем елемената или читавих уређаја чије се функционисање објашњава применом сазнања из различитих научних области. Тада се математички модели одговарајућих система добијају тимским радом стручњака из ових области. При моделирању се полази од најосновнијх чињеница, а то је познавање структуре система и међузависности између његових елемената. На први поглед може се рећи да је лако доћи до модела система познајући математички опис понашања сваког његовог елемента. У случају сложенијег ситема на овај начин би добили непрегледан скуп једначина који би најчешће тешко могли да решимо или би се добила само приближна решења.

Динамика већине линеарних система може се описати интегродиференцијалном једначином другог или трећег реда јер се понашање појединих елемената може занемарити у нормалном радном режиму. Уколико, на пример, имамо паралелно одвијање два процеса, од којих се један реализује знатно спорије, динамика система је одређена управо динамиком споријег процеса.

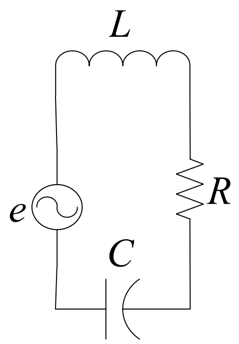
Понекад је понашање система описано јеначинама које није могуће решити. У том случају решења се добијају симулирањем на рачунару или на основу понашања модела који је најчешће реализован помоћу еквивалентног електричног кола.

2.1 Дефинисање модела система

Зависно од циљева и поступка симулације конкретан систем може бити моделиран на више начина. Илуструјмо ове могућности на примерима једноставних система као што су серијско електрично коло и механички систем који су приказани на сликама 2.1 и 2.2.

Електрично коло на слици 2.1 састављено је од отпорника *R*, кондензатора *C*, индуктивности *L* и извора електромоторне силе *e*. На основу Кирхофових закона може се написати једначина електродинамичке равнотеже

$$e(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t) \tag{2.1}$$



Сл. 2.1 Серијско RLC електрично коло

при чему су падови напона на одговарајућим компонентама електричног кола

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt},$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt,$$

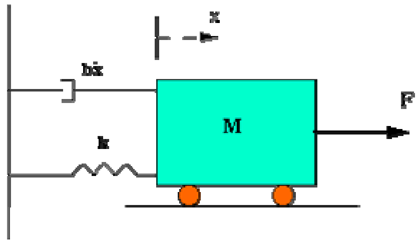
$$u_R(t) = Ri(t).$$

Тако се добија модел система у облику интегродиференцијалне једначине

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt + Ri(t). \tag{2.2}$$

У случају механичког транслаторног система кога чине маса *M*, опруга са коефицијентом крутости *k* и вискозна пригушница са коефицијентом трења *b*, у присуству спољне силе *F*, добија се диференцијална једначина

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t). \tag{2.3}$$



Сл. 2.2 Модел механичког транслаторног система под деловањем спољне силе F.

Променљива x, очигледно, означава пређени пут. Уколико се при дефинисању модела као променљива усвоји брзина, односно прва деривација променљиве x добија се једначина (2.4) која по својој форми у потпуности има аналоган облик као и једначина описаног *RLC* кола

$$F(t) = M\frac{d\dot{x}(t)}{dt} + k\int \dot{x}(t)dt + b\dot{x}(t)\,. \tag{2.4}$$

Као што се види два физички потпуно различита система имају истоветан математички модел. Ова чињеница представља основу за симулирање рада система применом физичких модела развијених на бази електричних компонената. У недостатку брзих рачунара у прошлости је овај поступак често примењиван како би се анализирало понашање и тестирала решења проблема управљања неелектричних процеса.

Уколико се у једначину (2.3) уведу супституције

$$a_1 = \frac{b}{M}, \quad a_0 = \frac{k}{M}, \quad b_0 = \frac{1}{M}$$

највиша деривација променљиве x дефинисана је једначином

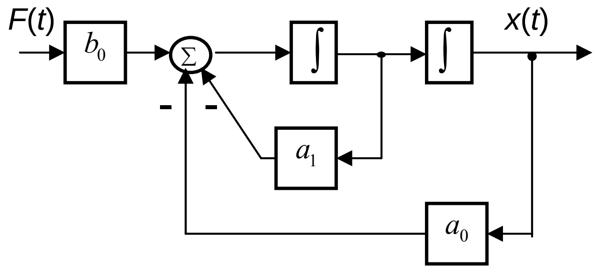
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = b_0F(t) - a_1\frac{dx(t)}{dt} - a_0x(t)\,. \tag{2.5}$$

Узастопним интеграљењем последње једначине добија се

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int [b_0F(t) - a_1\frac{dx(t)}{dt} - a_0x(t)]dt\,, \tag{2.6}$$

$$x(t) = \int [\int [b_0F(t) - a_1\frac{dx(t)}{dt} - a_0x(t)]dt]dt\,. \tag{2.7}$$

Једначина (2.7) у потпуности описује како треба симулирати конкретан систем помоћу електричног кола. Очигледно, потребна су три појачавача са појачањима a_0, a_1, b_0, суматор и два интегратора. Слика 2.3 симболички приказује везе између појединих елемената таквог електричног кола. При томе кружић са уписаним знаком сигма означава суматор, а правоугаоници појачаваче и интеграторе. Ток одговарајућих сигнала одређен је стрелицама. Поменути елементи конкретног електричног кола једноставно се реализују применом операционих појачавача.



Сл. 2.3 Симулациони модел система другог реда

Уколико се уведу нове промењљиве:

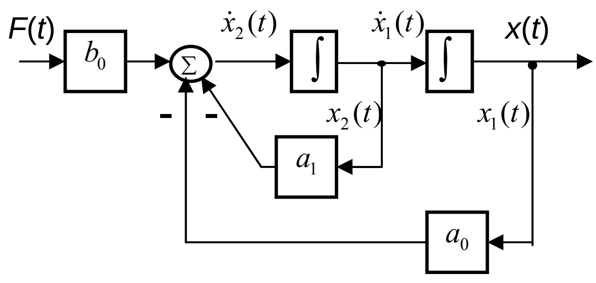
$$x_1(t) = x(t) \text{ i } x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{2.8}$$

механички транслаторни систем, приказан на слици 2.2, може се описати системом диференцијалних једначина првог реда.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2(t)}{dt} &= b_0 F(t) - a_1 \frac{dx_1(t)}{dt} - a_0 x_1(t) \\ &= b_0 F(t) - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t)\end{aligned} \tag{2.10}$$

Увођење промењљивих, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, омогућава да се систем опише моделом у простору стања. Слика 2.4 приказује симулациони модел са уведеним промењљивим.



Сл. 2.4 Модел система другог реда у простору стања

Уочимо да уведене променљиве представљају сигнале на излазу интегратора. Сваки од ових сигнала представља једно од стања система. Ово је лако разумети на примеру механичког транслаторног система с обзиром да стања представљају пређени пут, брзину и убрзање масе *M*. Шта добијамо увођењем ових променљивих? Већ је истакнуто да је диференцијална једначина вишег реда замењена системом линеарних диференцијалних једначина првог реда које се лакше решавају. Ово нуди могућност решавања проблема анализе и синтезе линеарних континуалних система применом нумеричких рачунара. Тада се процес интеграљења симулира неким од добро познатих алгоритама. С друге стране могуће је дефинисати модел система у матричној форми и искористити предности матричног рачуна у погледу компактног записа и елегантног решавања рачунских проблема. Уколико, ради лакшег писања, уведемо ознаке

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \;, \; \dot{x}_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$$

једначине (2.9) и (2.10) могу се преписати у матричном облику

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} F(t) \,. \tag{2.11}$$

При томе се излаз система такође дефинише матричном једначином у зависности од његових стања $x_1(t)$, $x_2(t)$ и улаза $F(t)$

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} F(t) \,. \tag{2.12}$$

Развој модела система у простору стања биће детаљније описан у наредном поглављу.

Поред описаних модела могуће је описати ситем или поједине његове делове користећи функцију преноса која је, у одсуству поремећаја и уз претпоставку да су сви почетни услови једнаки нули, одређена количником излазне и улазне промељиве. У општем случају функција преноса линеарних континуланих система има облик количника два полинома чији ред је одређен динамиком система. Уколико дефинишемо оператор деривирања $D = \dfrac{d}{dt}$ на основу једначине

(2.5) добијамо функцију преноса механичког транслаторног система у операторском облику

$$\frac{F(t)}{X(t)} = \frac{b_0}{D^2 + a_1 D + a_0} \,. \tag{2.13}$$

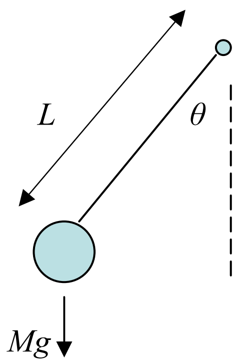
Поштујући извесна ограничења описани поступци моделирања линеарних система примењују се и у случају када су карактеристике објекта управљања нелинеарне. У случају када су промене изазване побудним сигналом или случајним поремећајима довољно мале могуће је линеаризовати функције којима се моделирају такви системи развијајући их у Тејлоров ред у околини тачке. Уколико је одзив система у околини радне тачке x_0 описан функцијом $f(x)$, при малим променама улазне промењљиве δx, развој у Тејлоров ред описује једначина

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2!} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \delta x^2 + \dots \tag{2.14}$$

С обзиром да се због малог одступања δx чланови вишег реда могу занемарити добија се линеарна апроксимација

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \delta x \tag{2.15}$$

Пример таквог система представља клатно изведено из равнотежног положаја.



Сл. 2.5 Слободно клатно

Тангенцијалну брзина кугле масе M одређује производ $v_t = L\dot{\theta}$ при чему је L дужина, а $\dot{\theta}$ угаона брзина клатна. Уколико се занемари маса клатна тангенцијална сила F_t, која условљава његов отклон за угао θ, биће уравнотежена инерцијалном силом $ML\ddot{\theta}$, силом трења у тачки ослонца $bL\dot{\theta}$ (b - коефицијент трења у тачки ослонца) и гравитационом силом $Mg\sin\theta$ (g=9,81m/s^2). У конкретном случају систем се описује једначином:

$$ML\ddot{\theta} + bL\dot{\theta} + Mg\sin\theta = F_t$$

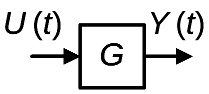
У случају када су отклони $\vartriangle\theta$ мали у односу на равнотежни положај важе апроксимације $\sin\vartriangle\theta \simeq \vartriangle\theta$, $\cos\vartriangle\theta \simeq 1$. Исти систем је тада могуће описати линеаризованом једначином

$$ML\vartriangle\ddot{\theta} + bL\vartriangle\dot{\theta} + Mg\vartriangle\theta = F_t .$$

Након свега изложеног намеће се питање: „Због чега се толико инсистира на линеарности система управљања“? У случају постојања нелинеарности систем би у одређеним околностима могао лако да заосцилује или да генерише одзиве чије амплитуде временом имају све веће вредности, односно дивергирају.

Поред тога појављују се и други феномени који, у зависности од намене уређаја, могу бити и пожељни. Нека систем, симболички приказан на слици 2.6 функцијом преноса G, обезбеђује да променљива на излазу $Y(t)$ има вредности квадрата улазне променљиве $u(t)$, односно

$$y(t) = \left(u(t)\right)^2$$



Сл. 2.6 Симболички приказ система чија је функција преноса G, а улазна и излана променљива $U(t)$ и $Y(t)$

Уколико је улазни сигнал формиран као сума две хармонијске функције

$$u(t) = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t$$

на излазу се добија

$$\begin{aligned} y(t) &= (\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)^2 \\ &= (\sin\omega_1 t)^2 + 2(\sin\omega_1 t \cdot \sin\omega_2 t) + (\sin\omega_2 t)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega_1 t) + \cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega_2 t) \\ &= 1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t - \cos 2\omega_1 t - \cos 2\omega_2 t \end{aligned}$$

сума хармонијских сигнала чије се фреквенције разликују у односу на фреквенције сигнала на улазу. Ово није у складу са дефиницијом линеарних система за које важи да фреквенција улазног сигнала остаје непромењена у односу на улазни сигнал већ се мења само његова амплитуда и фаза. Добијени резултат је пожељан када је у питању реализација уређаја као што су модулатори помоћу којих се сигнали пресликавају из основног у неки други фреквенцијски спектар.

Решавање интегродиференцијалних једначина често је повезано са бројним потешкоћама. Понекад се решење може добити једино применом адекватних симулација на аналогном или дигиталном рачунару. У случају линеарних диференцијалних једначина са константним параметрима, применом Лапласове трансформације, решавање проблема преводи се из временског у комплексни домен како би се комплетан поступак свео на примену основних математичких операција (сабирања, одузимања, множења и дељења). Користећи инверзну Лапласову трансформацију добијено решење се поново преводи у временски домен. Током превођења из једног у други домен користе се одговарајуће таблице Лапласових трансформација па конкретан проблем треба претходно свести на табличне случајеве. Пре саме дефиниције Лапласове трансформације неопходно је да се мало позабавимо описом, односно математичким моделирањем сигнала.

2.2 Математичко моделирање сигнала

Познато је да се нека сложена функција описује помоћу скупа других једноставнијих функција у виду суме

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,. \tag{2.16}$$

Декомпозиција, односно растављање конкретне функције, најлакше се остварује уколико постоји униформност међу елементима овог скупа. Другим речима пожељно је да промена свих једноставнијих функција буде описана истим законом, а да се оне међусобно разликују по вредности неког параметра. На тај начин елементарне функције формирају систем и настају од једне генеративне функције. Најпростији пример таквог скупа представљају хармонијски повезане тригонометријске функције типа синус и косинус. Француски математичар Фурије (Fourier) открио је како да се њиховим обједињавањем добије еквивалентан запис неке произвољне периодичне функције који се по њему назива Фуријеов ред.

2.2.1 Развој периодичне функције у Фуријеов ред

Анализирајмо прво неке односе између хармонијски повезаних тригонометријских функција пре него што формално дефинишемо развој периодичне функције у Фуријеов ред. На слици 2.7 се види да сума синусних сигнала различитих фреквенција нема синусни облик. Међутим, овај облик би остао непромењен ако би графички приказ био проширен дуж временске осе. Другим речима добила би се периодична функција. Претпоставимо, због краћег записа, да је основна фреквенција функција $\sin(m\omega t)$ и $\cos(n\omega t)$ $\omega = 1$. Имајући у виду хармонијску повезаност ових функција јасно је да су m и n целобројне константе. Тада важи

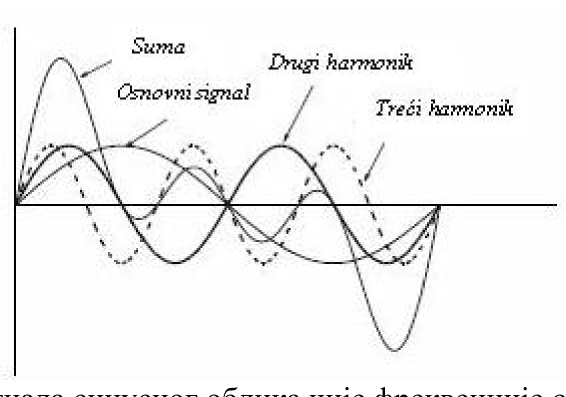
$$\int_0^{2\pi} \sin mt dt = 0 \tag{2.17}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nt dt = 0 \tag{2.18}$$

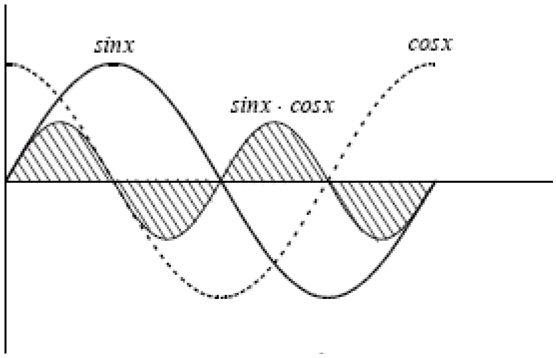
$$\int_0^{2\pi} (\sin mt)(\cos nt) dt = 0 . \tag{2.19}$$

Приказани интеграли имају вредност нула на интервалу од 0 до 2π због једнакости површина испод одговарајућих функција на супротним странама временске осе (види слику 2.8). Интеграл (2.19) има вредност нула с обзиром да је

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \tag{2.20}$$



Сл. 2.7 Сума сигнала синусног облика чије фреквенције одговарају основном, другом и трећем хармонику.



Сл. 2.8 Графички доказ да је $\int_0^{2\pi} (\sin mt)(\cos nt)dt = 0$

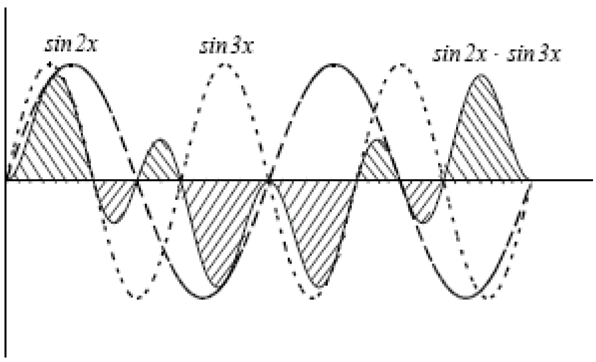
Исто тако, у случају када се коефицијенти *m* и *n* разликују добија се

$$\int_0^{2\pi} (\sin mt)(\sin nt)dt = 0 \tag{2.21}$$

пошто је

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]\,. \tag{2.22}$$

Добијени резултат је и графички приказан на слици 2.9 за случај када су $m = 2$ и $n = 3$. Поново се уочава једнакост површина испод одговарајућих функција на супротним странама временске осе.



Сл. 2.9 Графички доказ да је $\int_0^{2\pi} (\sin mt)(\sin nt)dt = 0$ за случај $m = 2$ и $n = 3$.

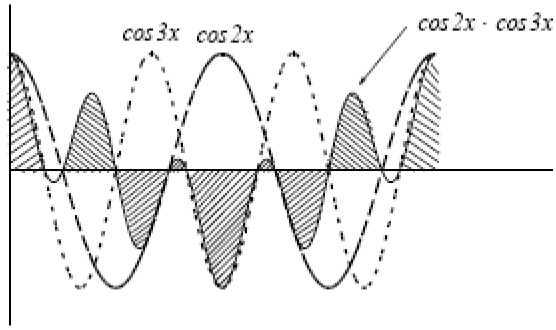
Такође, у случају када се коефицијенти *m* и *n* разликују добија се

$$\int_0^{2\pi} (\cos mt)(\cos nt)dt = 0 \tag{2.23}$$

пошто је

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]\,. \tag{2.24}$$

Добијени резултат је илустрован на слици 2.10 за случај када су $m = 2$ и $n = 3$. И у овом случају лако је уочити једнакост површина испод одговарајућих функција на супротним странама временске осе.



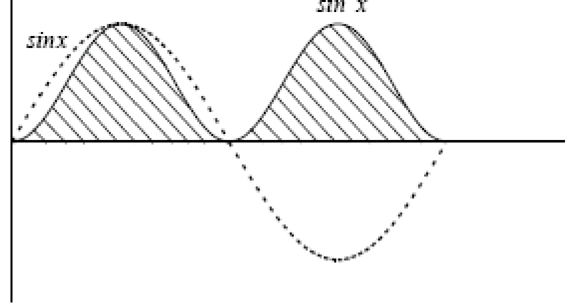
Сл. 2.10 Графички доказ да је $\int_0^{2\pi} (cos\ mt)(\cos nt)dt = 0$ за случај $m = 2$ и $n = 3$.

Међутим, у случају када су коефицијенти m и n једнаки интеграли (2.21) и (2.23) имају вредности које се разликују од нуле

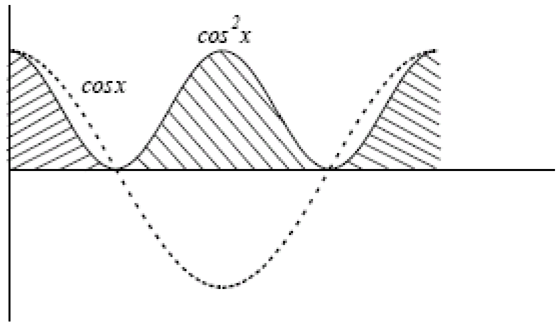
$$\int_0^{2\pi} (\sin mt)^2\, dt = \pi \tag{2.25}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos mt)^2\, dt = \pi\ . \tag{2.26}$$

Логично је очекивати добијени резултат с обзиром да се интеграљење обавља над квадратима основних функција, односно вредности не мењају знак па не постоји могућност узајамног поништавања парцијалних сума у резултату интеграљења. Слике (2.11) и (2.12) илустративно доказују истинитост тврдње да су вредности конкретних интеграла, у односу на претходне случајеве, различите од нуле.



Сл. 2.11 Графички доказ да је $\int_0^{2\pi} (\sin mt)^2\, dt \neq 0$ за случај $m = 2$ и $n = 3$.



Сл. 2.12 Графички доказ да је $\int_0^{2\pi} (\cos mt)^2 dt \neq 0$ за случај $m = 2$ и $n = 3$.

Описани примери указују на врло важно својство хармонијски повезаних тригонометријсих функција типа синус и косинус, а то је њихова *ортогоналност*. Ово својство, у општем случају, подразумева да су функције неког скупа такве да постоји интеграл

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx \tag{2.27}$$

и важи једначина

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm} = \begin{Bmatrix} 0 & za\ n \neq m \\ d_n \neq 0 & za\ n{=}m \end{Bmatrix}. \tag{2.28}$$

Другим речима, ортогоналност значи да је интеграл производа било које две функције конкретног скупа на интервалу [a,b] једнак нули осим интеграла умношка функције саме са собом.

Уколико, при томе, функција $f(x)$ испуњава Дирихлеове услове:

1) $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$,

2) непрекидна је по деловима и

3) има прекиде прве врсте

онда је могуће написати Фуријеов развој функције $f(x)$, односно генерализовани Фуријеов ред

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\,. \tag{2.29}$$

Очигледно, ортогоналне функције $\varphi_n(x)$ чине основу еквивалентног записа периодичне функције $f(x)$. При томе коефицијенти c_n одређују значај учешћа припадајуће функције $\varphi_n(x)$ у формирању сложене функције $f(x)$, а њихове вредности могу се одредити уколико постоји интеграл

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \neq 0 \quad za\ m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ . \tag{2.30}$$

У том случају на основу једначине (29) можемо написати

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_0\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx + ... + c_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx + ... \tag{2.31}$$

Имајући у виду ортогоналност функција $\varphi_n(x)$ сви интеграли на десној страни једначине осим интеграла уз коефицијент c_n једнаки су нули. Ова чињеница омогућава да се одреди његова вредност

$$c_n = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx\,. \tag{2.32}$$

Очигледно, ортогоналност обезбеђује да $\varphi_n(x)$ учествује једноструко у формирању функције $f(x)$ и то само посредством коефицијента c_n. Скуп коефицијената $\{c_n\}$ се зове *спектар* функције $f(x)$ и потпуно је одређује у конкретном ортогоналном систему.

Наведена разматрања указују на услове који треба да буду испуњени како би се периодични сигнал $f(t)$ могао описати Фуријеовим редом

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos 3\omega t + a_4\cos 4\omega t + ... \\ b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + b_3\sin 3\omega t + b_4\sin 4\omega t + ... \end{aligned}$$

односно

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\right). \tag{2.33}$$

Први члан реда, $a_0/2$, представља истосмерну компоненту сигнала тако да у случају када $f(t)$ описује неки напон $v(t)$ или струју $i(t)$ онда он одређује њихову средњу вредност. Вредности свих коефицијената Фуријеовог реда лако се израчунавају уколико потражимо вредност интеграла умношка било које две функције, чланице наведеног реда, различитих фреквенција на интервалу од $-T/2$ до $T/2$ (при чему је $\omega = 2\pi/T$).

Интеграљењем реда описаног једначином (2.33) на интервалу од $-T/2$ до $T/2$ захваљујући особини ортогоналности[1] тригонометријских функција добија се

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0 T + 0 + 0 + 0 + ... + 0,$$

односно

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \qquad (2.34)$$

На истоветан начин се израчунавају коефицијенти a_i и b_i уз напомену да је претходно неопходно помножити цео ред са одговарајућом тригонометријском функцијом. Тако се за коефицијент a_n добија

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt = 0 + 0 + ... + a_n\frac{T}{2} + 0 + 0 + ... + 0,$$

Односно

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt. \qquad (2.35)$$

Аналогним поступком, али овај пут множећи цео ред са функцијом $\sin(n\omega t)$ добија се

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0 + 0 + ... + b_n\frac{T}{2} + 0 + 0 + ... + 0,$$

односно

[1] За разлику од једначина (2.25) и (2.26) у овом случају усвојене су границе интеграла од –T/2 до T/2 уместо од 0 до 2π због чега се као резултат добија вредност T/2 уместо π.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt\,. \tag{2.36}$$

Очигледно, добијене су три формуле за рачунање одговарајућих коефицијената Фуријеовог реда. Међутим, применом комплексног записа тригонометријских функција добија се компактнији запис Фуријеовог реда као и могућност да се одговарајући коефицијенти израчунају применом истоветне формуле.

Користећи добро познате тригонометријске идентитете

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

ред, дефинисан једначином (2.33), добија комплексни облик

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

односно

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i - jb_i}{2} e^{jn\omega t} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i + jb_i}{2} e^{-jn\omega t}\,. \tag{2.37}$$

Уводећи смене

$$X_0 = \frac{1}{2}a_0\,, \quad X_i = \frac{a_i - jb_i}{2}\,, \quad X_{-i} = \frac{a_i + jb_i}{2}$$

добија се коначно комплексни облик Фуријеовог реда

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_i e^{ji\omega t}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.38}$$

При томе се одговарајући коефицијенти израчунавају на основу формуле

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \;. \tag{2.39}$$

Примена Фуријеовог реда омогућила је развој метода за анализу и синтезу линеарних континуалних система у фреквенцијском домену. С обзиром да се на излазу ових система хармонијски сигнали појављују у истом облику, али са другачијом амплитудом и фазом, може се применити метод суперпозиције како би се добио Фуријеов ред излазног сигнала. На основу односа амплитуда и фаза улазног и излазног сигнала сваког хармоника могу се јасно уочити динамичка својства конкретног система.

2.2.2 Фуријеова трансформација

Шта урадити у случају када функција $f(t)$ није периодична функција? Развој у Фуријеов ред се може применити и у случају извесних непериодичних функција, ако их формално сматрамо периодичним са бесконачном периодом понављања. Тада од Фуријеовог реда прелазимо на Фуријеов интеграл.

Уведимо при дефиницији периоде замену $T = 2d$, а уместо кружне фреквенције ω пишимо $2\pi/T$. Тада су одговарајући коефицијенти

$$X_n = \frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} f(t)e^{-jn\frac{\pi}{d}t}dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{2.40}$$

а ред функције $f(t)$ има облик

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\frac{\pi}{d}t}. \tag{2.41}$$

Након увођења X_n и множењем са π/π добија се

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} f(t)e^{-jn\frac{\pi}{d}t}dte^{jn\frac{\pi}{d}t}\,\frac{\pi}{\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{d} f(t)e^{-jn\frac{\pi}{d}t}dte^{jn\frac{\pi}{d}t}\,\frac{\pi}{d}.$$

Количник π/d заправо представља разлику фреквенција $\Delta\omega = n\frac{\pi}{d} - (n+1)\frac{\pi}{d}$ хармоника којима одговарају амплитуде X_n и X_{n+1} због чега је

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-d}^{d} f(t)e^{-j\omega_n t}dt\right)e^{j\omega_n t}\Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega, d)e^{j\omega_n t}\Delta\omega. \end{aligned}$$

При томе је

$$F(j\omega, d) = \int_{-d}^{d} f(t)e^{-j\omega_n t}dt. \tag{2.42}$$

С обзиром на претпоставку да периода понављања $T = 2d$ тежи бесконачности ($d \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega \to 0$) добија се трансформациони пар

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2.43}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{2.44}$$

Изрази који дефинишу трансформациони пар имају смисла само ако функција $f(t)$ испуњава, већ поменуте, Дирихлеове услове и ако интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right| dt \tag{2.45}$$

има коначну вредност. За разлику од Фуријеовог реда види се да сви чланови новодобијеног реда имају бесконачно мале амплитуде, а разлике њихових фреквенција теже нули.

Обично нас не занима вредност фунције $f(t)$ када је t <0 па можемо усвојити да је тада $f(t) \equiv 0$. Функције са овим својством се називају *каузалне*, а одговарајућа трансформација, позната под именом *унилатерална Фуријеова трансформација*, има облик

$$F(j\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{2.46}$$

2.3 Дефиниција Лапласове трансформације

Примена Фуријеове трансформације у анализи и синтези система аутоматског управљања наилази на ограничења условљена чињеницом да већина функција у пракси не испуњава услов конвергенције интеграла (2.45). У том случају неопходно је увести фактор конвергенције $e^{-\sigma t}$, где је σ реалан, позитиван, довољно велики број који обезбеђује да интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)e^{-\sigma t}\right| dt$$

конвергира. На основу једначина (2.43) и (2.46) добија се

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt\right)e^{j\omega t}d\omega,$$

односно

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt\right)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega. \tag{2.47}$$

Уколико се уведе смена $s = \sigma + j\omega$ и усвоји да σ има константну вредност ($\sigma = \gamma$) на целом опсегу интеграције у једначини (2.47) деривирањем се добија

$$\mathrm{d}s = j\mathrm{d}\omega$$

тако да једначину (2.47) можемо преписати у облику

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\right)e^{st}ds, \qquad t>0. \tag{2.48}$$

Последња једначина омогућава да се дефинишу Лапласова и инверзна лапласова трансформација

$$F(s)=L[f(t)]=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt, \quad \sigma<\sigma_a, \tag{2.49}$$

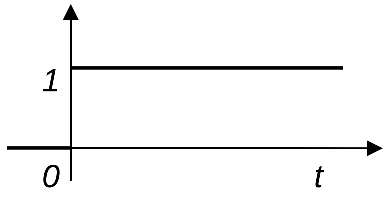
$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty}F(s)e^{st}ds, \qquad t>0. \tag{2.50}$$

Истакнимо на крају описаних разматрања да Лапласову трансформацију можемо разумети као математичку интерпретацију било које непериодичне функције збиром (интегралом) бесконачног броја пригушених квазипериодичних осцилација, истог фактора пригушења σ, бесконачно малих амплитуда и бесконачно малих разлика у фреквенцијама свака два суседна члана збира.

2.4 Лапласова трансформација елементарних функција

Следећи примери илуструју поступак налажења Лапласове трансформације

ПРИМЕР 2.1 Одредите Лапласову трансформацију одскочне функције.



Сл. 2.13 Одскочна функција у тренутку $t = 0$

РЕШЕЊЕ:

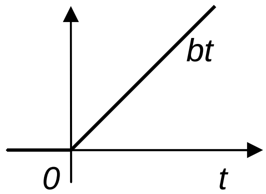
Ова функција је од посебног интереса у анализи система аутоматског управљања. Аналитички је дефинисана изразом $f(t) = ah(t)$ при чему је a њена амплитуда, а $x(t)$ представља јединичну одскочну функцију

$$h(t) = \begin{cases} 0 & za \quad t<0 \\ 1 & za \quad t \geq 0 \end{cases}$$

По дефиницији је

$$F(s) = \int_0^\infty ae^{-st} = \left.\frac{-ae^{-st}}{s}\right|_0^\infty = 0 - \frac{-a}{s} = \frac{a}{s}$$

ПРИМЕР 2.2 Одредите Лапласову трансформацију нагибне функције.



Сл. 2.14 Нагибна функција

РЕШЕЊЕ:

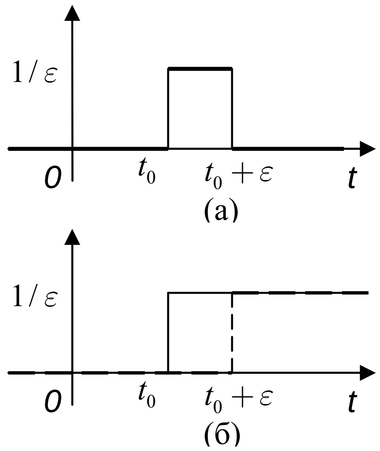
Аналитички је ова функција описана изразом $f(t) = bt$. Да би се одредио комплексни лик ове функције у конкретном случају је потребно применити парцијалну интеграцију

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Уколико се усвоји $u = bt$ и $dv = e^{-st}dt$ добија се

$$F(s) = \int_0^\infty bte^{-st}dt = \left[-\frac{bte^{-st}}{s} - \frac{be^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty = \frac{b}{s^2}$$

ПРИМЕР 2.3 Одредите Лапласову трансформацију јединичне импулсне функције $\delta(t - t_0)$



Сл. 2.15 Импулсна функција (а) и поступак њеног генерисања (б)

РЕШЕЊЕ:

Ова функција је такође од посебног интереса у теорији система аутоматског управљања. Аналитички је дефинисана изразом $f(t) = \delta(t - t_0)$. Претпоставимо да ова функција има вредност ε^{-1} само на интервалу $t_0 \le t \le (t_0 + \varepsilon)$ при чему ε тежи нули. У том случају важи интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

односно ову функцију можемо приказати правоугаоним импулсом (сл. 2.15-а) чија површина има јединичну вредност, бесконачну амплитуду и бесконачно мало време трајања

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h(t - t_0) - h(t - t_0 - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Слика 2.15-б приказује поступак моделирања функције $\delta(t - t_0)$ помоћу одскочних фукција $h(t - t_0)$ и $h(t - t_0 - \varepsilon)$. Јасно је да се жељени облик правоугаоног импулса добија као разлика одскочнох функција чији прекиди настају у тренуцима $t = t_0$ и $t = t_0 + \varepsilon$.

Према дефиницији Лапласове трансформације добија се

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{t_0+\varepsilon}^{t_0}=\frac{e^{-st_0}-e^{-s(t_0+\varepsilon)}}{\varepsilon s}$$

С обзиром да ε тежи нули добија се разломак облика нула кроз нула. За његово израчунавање примењује се Лопиталово правило (потребно је деривирати одвојено бројилац и именилац по ε) након чега се добија

$$F(s)=e^{-st_0}\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}=\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-st_0}\frac{se^{-s\varepsilon}}{s}$$

односно $F(s)=1\cdot e^{-st_0}$. Очигледно, у случају $t_0=0$ добија се $F(s)=1$, односно Лапласова трансформација јединичне импулсне функције има вредност 1. У примеру се јасно уочава да у случају кашњења, односно када је $t_0 \neq 0$ Лапласова трансформација генерише исти комплексни лик али помножен са вредношћу e^{-st_0}. Ово је универзално својство Лапласове трансформације, односно важи и у случају других функција. Проверите на пример за случај одскочне функције и добићете да је

$$L\left(h(t-t_0)\right)=\frac{1}{s}e^{-st_0}$$

ПРИМЕР 2.4 Одредите Лапласову трансформацију простопериодичне функције $f(t)=\sin(\omega t)$

РЕШЕЊЕ: $$F(s)=\int_{0}^{\infty}\sin(\omega t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty}(e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t})dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left\{\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{(s-j\omega)}\bigg|_{\infty}^{0}-\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{(s+j\omega)}\bigg|_{\infty}^{0}\right\}$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Аналогним поступком се добија Лапласова трансформација функције $f(t)=\cos(\omega t)$

$$L\left(\cos(\omega t)\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

2.5 Својства Лапласове трансформације

У овом поглављу наведена су основна својства Лапласове трансформације како би се омогућило њено лакше коришћење у пракси. Заинтересовани читаоци могу пронаћи егзактне доказе у одговарајућој математичкој литератури.

1. Линеарност

   $L\{\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\}=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$; $\qquad L\{\alpha f(t)\}=\alpha F(s)$

2. Временско кашњење

   $$F_1(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t-\lambda)e^{-st}dt=e^{-s\lambda}F(s)$$

3. Скалирање времена

   $$F_1(s)=\int_{0}^{\infty} f(at)e^{-st}dt=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

4. Помак у комплексном домену

   $$F_1(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt=F(s+a)$$

5. Диференцирање

   $$L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=\int_{0^-}^{\infty}\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-st}dt=-f(0^-)+sF(s)$$

   $$L\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0^-)-\frac{df(0^-)}{dt}$$

   $$L\left\{\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right\}=s^mF(s)-\sum_{k=1}^{m}s^{m-k}\frac{d^{k-1}f(0^-)}{dt^{k-1}}$$
   $$=s^mF(s)-s^{m-1}f(0^-)-s^{m-2}\frac{df(0^-)}{dt}-s^{m-3}\frac{d^2f(0^-)}{dt^2}-\dots$$

6. Интеграљење у временском домену

   $$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

7. Интеграљење у комплексном домену

$$\frac{f(t)}{t} = \int_{s}^{\infty} F(s)ds$$

8. Конволуција у временском домену

$$L\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \left(f_1(t) * f_2(t)\right) e^{-st} dt = F_1(s)F_2(s)$$

9. Множење функција у временском домену

$$L\left\{f_1(t) f_2(t)\right\} = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

10. Множење са временском променљивом

$$L\left\{tf(t)\right\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

2.6 Инверзна Лапласова трансформација

Применом Лапласове трансформације проблем решавања сложених интегродиференцијалних једначина је олакшан али се описи променљивих добијају у комплексном облику. С обзиром на начин посматрања појава око нас логично је да смо више заинтересовани за њихов опис у временском домену. Инверзна Лапласова трансформација, као што је већ истакнуто, омогућава да се лик неке променљиве добијен у виду реалне рационалне функције комплексне променљиве (рационална функција комплексне променљиве са реалним коефицијентима) преведе из комплексног у временски домен. Ово је најлакше учинити уколико се реална рационална функција комплексне променљиве прво растави у суму парцијалних разломака. Полиноми у имениоцима ових разломака су нижег реда у односу на полином функције која се раставља. Услед тога парцијални разломци имају стандардне облике који омогућавају да се у одговарајућим таблицама лако пронађу њихове инверзне Лапласове трансформације, а самим тим и облик конкретне променљиве у временском домену.

Нека је реална рационална функција дефинисана количником полинома $N(s)$, $D(s)$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\ldots+a_1 s+a_0} \tag{2.51}$$

при чему су коефицијенти $a_к$ и $b_к$ за $к = 0, 1, 2, \ldots, n$ реални бројеви. Поред тога ограничимо се на случајеве када је ред полинома у имениоцу већи или једнак реду полинома у бројиоцу $(n \geq m)$. У случају када је $a_n \neq 1$ погодно је да се прво изврши нормализација дељењем оба полинома са овим коефицијентом

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\frac{1}{a_n}(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\ldots+b_1 s+b_0)}{s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}s^{n-2}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}} \tag{2.52}$$

Корени полинома у бројиоцу представљају нуле функције $F(s)$ и одређују се као решења једначине $N(s) = 0$. Корени полинома у имениоцу представљају полове функције $F(s)$ и одређују се као решења једначине $D(s) = 0$. Нуле и полови се могу појавити као реални, у коњуговано комплексним паровима или у комбинацији једних и других, а могу бити прости (једноструки) и/или вишеструки. За одређивање инверзне Лапласове трансформације занима нас природа полова односно корени једначине

$$s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}s^{n-2}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}=0 \tag{2.53}$$

У тексту који следи разматра се растављање функције у суму парцијалних разломака за три основна случаја: када су сви полови реални и различити, случај једноструких коњуговано комплексних полова и ситуација када се појављују вишеструки полови. Сви остали случајеви представљају њихову комбинацију.

1. СЛУЧАЈ: СВИ ПОЛОВИ СУ РЕАЛНИ И РАЗЛИЧИТИ

Нека су одговарајући полови означени као n_1, n_2, n_3, ... $n_н$ тада полином у имениноцу функције $F(s)$ можемо приказати у факторизованом облику

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot(s-p_3)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)} \tag{2.54}$$

а одговарајућа сума парцијалних разломака има облик

$$F(s) = \frac{r_1}{(s-p_1)} + \frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + ... + \frac{r_n}{(s-p_n)} \qquad (2.55)$$

За одређивање вреднсоти коефицијената $p_{1,}$ $p_{2,}$ $p_{3,}$ ... p_n треба помножити обе стране једначине полиномом $(s-p_k)$ при чему је $k = 1, 2, 3, ..., n$. Тада се сваки коефицијент израчунава на основу једначине

$$r_k = \lim_{s \to p_k} (s-p_k)F(s) = (s-p_k)F(s)\Big|_{s=p_k} \qquad (2.56)$$

ПРИМЕР 2.5 Развијте функцију преноса $F(s)$ у суму парцијалних разломака.

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2}$$

РЕШЕЊЕ: Лако се уочава да је полином у имениоцу могуће написати у факторизованом облику након чега следи развој функције у суму парцијалних разломака

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{r_1}{(s+1)} + \frac{r_2}{(s+2)}$$

Коефицијенти p_1 и p_2 се рачунај на већ описан начин

$$r_1 = \lim_{s \to -1} (s+1)F(s) = \frac{3s+2}{(s+2)}\Bigg|_{s=-1} = -1$$

$$r_2 = \lim_{s \to -2} (s+2)F(s) = \frac{3s+2}{(s+2)}\Bigg|_{s=-2} = 4$$

Применом добијених решења добија се коначан резултат

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)}$$

ПРИМЕР 2.6 Развијте функцију преноса $F_2(s)$ у суму парцијалних разломака.

$$F_2(s) = \frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48}$$

РЕШЕЊЕ: Функција у овом случају има три различита реална пола $p_1 = -2$, $p_2 = -4$ и $p_3 = -6$.

$$F_2(s)=\frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48}=\frac{3s^2+2s+5}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$
$$=\frac{r_1}{(s+2)}+\frac{r_2}{(s+4)}+\frac{r_3}{(s+6)}$$

Одређивањем коефицијената

$$r_1=\left.\frac{3s^2+2s+5}{(s+4)(s+6)}\right|_{s=-2}=\frac{13}{8} \qquad r_2=\left.\frac{3s^2+2s+5}{(s+2)(s+6)}\right|_{s=-4}=-\frac{45}{4}$$

$$r_2=\left.\frac{3s^2+2s+5}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=-6}=\frac{101}{8}$$

функција $F_2(s)$ се записује као сума парцијалних разломака

$$F_2(s)=\frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48}=\frac{13/8}{(s+2)}+\frac{-45/4}{(s+4)}+\frac{101/8}{(s+6)}$$

2. случај: Полови су комплексни

Често се дешава да су полови одговарајуће рационалне функције $F(s)$ комплексни. С обзиорм да се они појављују у виду коњуговано комплексних парова број комплексних полова је паран. Коњугована вредност комплексног пола $n_к$, у овом тексту, означава се звездицом, односно као $n_к^*$. Развој функције у суму парцијалних разломака остварује се на исти начин као и у случају реалних различитих полова. Једина разлика је у томе што коефицијенти $p_к$ који одговарају комплексним половима такође имају комплексни облик. Следећи пример јасно илуструје ову тврдњу.

Пример 2.7 Развите функцију $F_3(s)$ у суму парцијалних разломака.

$$F_3(s)=\frac{s+3}{(s+1)[(s+2)^2+4]}$$

Решење: Очигледно, функција садржи један реалан и пар којугованих комплексних полова. Одговарајући развој у суму парцијалних разломака има облик

$$F_3(s)=\frac{s+3}{(s+1)[(s+2)^2+4]}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)}$$
$$=\frac{r_1}{(s+1)}+\frac{r_2}{(s+2+j2)}+\frac{r_3}{(s+2-j2)}$$

Коефицијенти p_1, p_2 и p_3 се рачунај на истоветан начин као и у случају реалних различитих полова

$$r_1 = \left.\frac{s+3}{(s^2+4s+8)}\right|_{s=-1} = \frac{2}{5}$$

$$r_2 = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2-j2)}\right|_{s=-2-j2} = \frac{1-j2}{(-1-j2)(-j4)} = \frac{1-j2}{-8+j4}$$

$$= \frac{(1-j2)}{(-8+j4)}\frac{(-8-j4)}{(-8-j4)} = \frac{-16+j12}{80} = -\frac{1}{5}+j\frac{3}{20}$$

$$r_3 = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)}\right|_{s=-2+j2} = \frac{1-j2}{(-1+j2)(j4)} = \frac{1-j2}{-8-j4}$$

$$= \frac{(1-j2)}{(-8-j4)}\frac{(-8+j4)}{(-8+j4)} = \frac{-16-j12}{80} = -\frac{1}{5}-j\frac{3}{20}$$

Наравно, последњи развој није неопходан јер су у питању коњуговано комплексни полови па је $p_3 = p_2^*$, односно

$$r_3 = \left(-\frac{1}{5}+j\frac{3}{20}\right)^* = -\frac{1}{5}-j\frac{3}{20}$$

Добијена решења омогућавају да се након супституције коефицијената функција преноса $F_3(s)$ напише као сума парцијалних разломака

$$F_3(s) = \frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48} = \frac{2/5}{(s+2)} + \frac{-1/5+j3/20}{(s+2+j2)} + \frac{-1/5-j3/20}{(s+2-j2)}$$

Присуство комплексних бројева у коначном запису може се избећи уколико се саберу последња два члана у суми парцијалних разломака. Тада ће се добити

$$F_3(s) = \frac{2/5}{(s+2)} - \frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)}$$

3. СЛУЧАЈ: ПОСТОЈЕ ВИШЕСТРУКИ ПОЛОВИ

Нека фукција $F(s)$ има троструки пол n_1 при чему су сви остали полови реални и различити. Тада се израз за $F(s)$

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^3\cdot(s-p_2)\cdot(s-p_3)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)} \tag{2.57}$$

развија у суму парцијалних разломака

$$F(s) = \frac{r_{11}}{(s-p_1)^3} + \frac{r_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{r_{13}}{(s-p_1)} + \frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + ... + \frac{r_n}{(s-p_n)} \tag{2.58}$$

Коефицијенти $p_2, p_3,...,p_н$ рачунај се на већ познати начин

$$r_k = \lim_{s \to p_k}(s-p_k)F(s) = (s-p_k)F(s)\big|_{s=p_k}$$

За одређивање коефицијента p_{11} треба помножити обе стране једначине полиномом $(s-p_1)^3$. Тако се добија

$$\begin{aligned}(s-p_1)^3 F(s) &= r_{11} + (s-p_1)r_{12} + (s-p_1)^2 r_{13} \\ &+ (s-p_1)^3\left(\frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + ... + \frac{r_n}{(s-p_n)}\right)\end{aligned} \tag{2.59}$$

Уколико одредимо граничну вредност ове једначине када $s \to p_1$

$$\begin{aligned}\lim_{s \to p_1}(s-p_1)^3 F(s) &= r_{11} + \lim_{s \to p_1}[(s-p_1)r_{12} + (s-p_1)^2 r_{13}] \\ &+ \lim_{s \to p_1}\left[(s-p_1)^3\left(\frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + ... + \frac{r_n}{(s-p_n)}\right)\right]\end{aligned}$$

добија се вредност коефицијента p_{11}

$$r_{11} = \lim_{s \to p_1}(s-p_1)^3 F(s)\,. \tag{2.60}$$

Уколико производ $(s-p_1)^3 F(s)$ прво деривирамо по с, а затим одредимо вредност када $s \to p_1$ добијамо вредност коефицијента p_{12}

$$r_{12} = \lim_{s \to p_1}\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^3 F(s)\right]. \tag{2.61}$$

За одређивање коефицијента p_{13} потребно је да још једном деривирамо производ $(s-p_1)^3 F(s)$ пре него што потражимо граничну вредност када $s \to p_1$

$$r_{13} = \frac{1}{2}\lim_{s \to p_1}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^3 F(s)\right]. \tag{2.62}$$

У случају да постоји пол *m*-тог реда аналогним поступком би се одредиле вредности свих коефицијената. Тако би се за деривацију реда *к-1* добило

$$(k-1)!\,r_{1k} = \lim_{s \to p_1}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[(s-p_1)^m F(s)\right] \tag{2.63}$$

односно

$$r_{1k} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{s \to p_1}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[(s-p_1)^m F(s)\right]. \tag{2.64}$$

Описани поступак је приказан у примерима који следе.

ПРИМЕР 2.8 Развијте функцију $F_4(s)$ у суму парцијалних разломака.

$$F_4(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2}$$

РЕШЕЊЕ:

$$F_4(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{r_1}{(s+2)} + \frac{r_{21}}{(s+1)^2} + \frac{r_{22}}{(s+1)}$$

$$r_1 = \left.\frac{s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = 1$$

$$r_{21} = \left.\frac{s+3}{(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$$

$$r_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s+2}\right)\right|_{s=-1} = \left.\frac{(s+2)-(s+3)}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$F_4(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{(s+1)}$$

Приметимо да је последњи коефицијент, ресидуум p_{22}, могао да се израчуна не користећи деривирање, једноставним увођењем већ познатих вредности за p_1 и p_{21} уз претпоставку да је $s = 0$. Тако се добија једначина

$$\left.\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{(s+2)}\right|_{s=0} + \left.\frac{2}{(s+1)^2}\right|_{s=0} + \left.\frac{r_{22}}{(s+1)}\right|_{s=0}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 2 + r_{22}$$

која даје исти резултат $r_{22} = -1$.

ПРИМЕР 2.9 Одредите суму парцијалних разломака за функцију $F_5(s)$.

$$F_5(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s+1)^3(s+2)^2}$$

РЕШЕЊЕ: Очигледно, постоје два вишеструка пола због чега одговарајућа сума парцијалних разломака има облик

$$F_5(s) = \frac{r_{11}}{(s+1)^3} + \frac{r_{12}}{(s+1)^2} + \frac{r_{13}}{(s+1)} + \frac{r_{21}}{(s+2)^2} + \frac{r_{22}}{(s+2)} \tag{2.65}$$

Након множења обе стране једначине са $(s-p_1)^3$ и увршттавања $s=-1$ добија се вредност коефицијента p_{11}

$$r_{11} = \left.\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1 .$$

За одређивање коефицијента p_{12} поред множења једначине (2.65) са $(s-p_1)^3$ треба извршити и деривирање по s како би се након супституције $s=-1$ добило

$$\begin{aligned} r_{12} &= \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right)\right|_{s=-1} \\ &= \left.\frac{(s+2)^2(2s+3)-2(s+2)(s^2+3s+1)}{(s+2)^4}\right|_{s=-1} \\ &= \left.\frac{s+4}{(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 3. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Додатно деривирање једначине (2.66) омогућава да се одреди и вредност коефицијента p_{13}

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left.\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right)\right|_{s=-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left.\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right)\right]\right|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left.\left[\frac{s+4}{(s+2)^3}\right]\right|_{s=-1} = \frac{1}{2}\left.\left[\frac{(s+2)^3-3(s+2)^2(s+4)}{(s+2)^6}\right]\right|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2}\left.\left[\frac{(s+2)-3(s+4)}{(s+2)^4}\right]\right|_{s=-1} = \left.\frac{-s-5}{(s+2)^4}\right|_{s=-1} = -4 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Применом аналогног поступка одређују се коефицијенти p_{21} и p_{22}

$$r_{21} = \left.\frac{s^2+3s+1}{(s+1)^3}\right|_{s=-2} = -1$$

$$r_{22} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+1)^3}\right)\Bigg|_{s=-2}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{(s+1)^3(2s+3)-3(s+1)^2(s^2+3s+1)}{(s+1)^6}\right)\Bigg|_{s=-2}$$

$$= \frac{(s+1)(2s+3)-3(s^2+3s+1)}{(s+1)^4}\Bigg|_{s=-2} = \frac{-s^2-4s}{(s+1)^4}\Bigg|_{s=-2} = 4$$

Супституцијом израчунатих вредности у једначину (2.65) коначно се добија развој функције $F_5(s)$ у суму парцијалних разломака

$$F_5(s) = \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{-4}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)}.$$

2.6 Функција преноса

У првој тачки овог поглавља већ је поменута функција преноса у операторском облику. При томе је напоменуто да се она дефинише за случај када су сви почетни услови једнаки нули и у одсуству поремећаја. Под истим условима дефинише се и функција преноса у комплексном домену, односно када се примени Лапласова трансформација на интегродиференцијалну једначину. Размотримо, као пример, једначину (2.5)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = b_0F(t) - a_1\frac{dx(t)}{dt} - a_0x(t).$$

Препишимо је тако да најпре раздвојимо промењљиве на супротне стране једначине.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = b_0F(t).$$

Претпоставимо да су сви почетни услови једнаки нули, односно да је

$$x(0^-) = \frac{dx(0^-)}{dt} = 0.$$

Интегродиференцијална једначина се, у том случају, лако преводи из временског у комплексни домен. Применом теореме о Лапласовој трансформацији деривације добија се

$$s^2X(s)+sa_1X(s)+a_0X(s)=b_0F(s)\,,$$

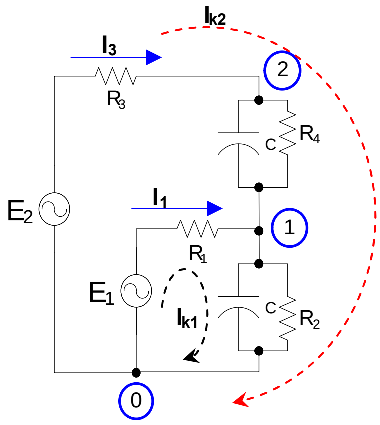
односно

$$[s^2+sa_1+a_0]X(s)=b_0F(s)\,.$$

На основу последње једначине директно се одређује функција преноса као однос комплексних ликова излазне и улазне променљиве

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{b_0}{s^2+sa_1+a_0}$$

ПРИМЕР 2.10: Одредите контурне струје $I_{к1}$ и $I_{к2}$ за електрично коло према слици 2.16.



Сл. 2.16 Електрично коло са два извора електромоторне силе

РЕШЕЊЕ: У циљу скраћења записа одговарајућих једначина прво дефинишимо импедансе

$$z_1=R_1\,;\; z_2=\frac{R_2}{R_2Cs+1}\,;\; z_3=R_3\,;\; z_4=\frac{R_4}{R_4Cs+1}\,.$$

Очигледно, импедансе z_2 и z_4 су одређене као еквивалентне вредности паралелне везе кондензатора C и одговарајућег отпорника. Затим одредимо вредности контурних струја $I_{к1}$ и $I_{к2}$. На основу другог Кирхофовог закона добијамо

за контуру К$_1$: $\quad z_1I_{k1}+z_2(I_{k1}+I_{k2})=E_1$

за контуру К$_2$: $\quad z_2(I_{k1}+I_{k2})+(z_3+z_4)I_{k2}=E_2$

Уколико прегрупишемо одговарајуће чланове добијамо систем једначина записан у матричном облику

$$\begin{bmatrix} z_1 + z_2 & z_2 \\ z_2 & z_2 + z_3 + z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Вредности контурних струја $I_{к1}$ и $I_{к2}$ израчунавамо применом Крамеровог правила

$$I_{k1} = \frac{D_1}{D}, \quad I_{k2} = \frac{D_2}{D}$$

При чему су D_1, D_2, и D детерминанте

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} E_1 & z_2 \\ E_2 & z_2 + z_3 + z_4 \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \det \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & E_1 \\ z_2 & E_2 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & z_2 \\ z_2 & z_2 + z_3 + z_4 \end{bmatrix}.$$

Након израчунавања наведених детерминанти добија се

$$I_{k1} = \frac{1}{D}\left[(z_2 + z_3 + z_4)E_1(s) - z_2 E_2(s)\right]$$

$$I_{k2} = \frac{1}{D}\left[-z_2 E_1(s) + (z_1 + z_2)E_2(s)\right].$$

Приказано електрично коло можемо да посматрамо као систем са два улаза и два излаза. Уколико групишемо решења у матричну форму добијамо

$$\begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

При томе су

$$G_{11} = \frac{(z_2 + z_3 + z_4)}{D}; \qquad G_{12} = \frac{-z_2}{D}$$

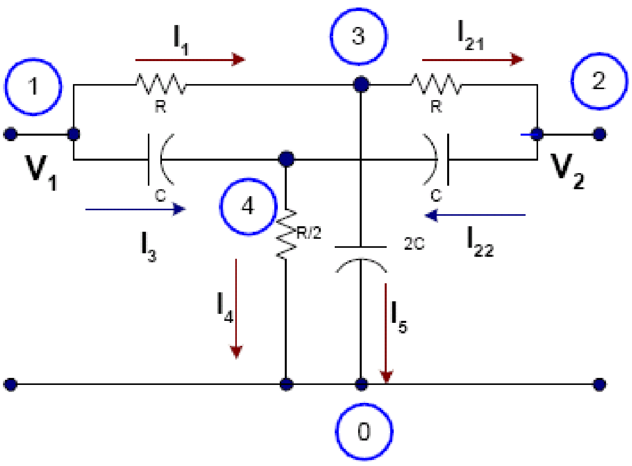
$$G_{21} = \frac{-z_2}{D}; \qquad G_{22} = \frac{(z_1 + z_2)}{D}.$$

Приказани елементи матрице заправо представљају функције преноса између појединих улаза и излаза система. Ово је заправо пример мултиваријабилног система, односно система са више улаза и више излаза. Приметимо да се у том случају свака од функција преноса добија једноставно уколико се претпостави да су сви други улази једнаки нули. У конкретном случају G_{11} представља однос комплексних ликова контурне струје $I_{к1}$ и извора електромоторне силе E_1

$$G_{11}(s) = \frac{I_{k1}(s)}{E_1(s)}.$$

Приметимо, такође, да се у имениоцу сваке функције преноса, за конкретни систем, појављује исти полином дефинисан матрицом D. Управо због тога овај полином се назива *карактеристични полином* система.

ПРИМЕР 2.11: Одредити функцију преноса $G(s) = \dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$ за електрично коло приказано на слици 2.17.



Сл. 2.17 Електрично коло у облику паралелног Т четворокрајника

РЕШЕЊЕ: Уколико усвојимо да су потенцијали чворова 1, 2, 3 и 4 у односу на нулти чвор означени са V_1, V_2, V_3 и V_4 могуће је дефинисати струје кроз сваку грану електричног кола.

$$I_1 = \frac{V_1 - V_3}{R} = G(V_1 - V_3); \qquad G = \frac{1}{R} \tag{2.68}$$

$$I_{21} = \frac{V_3 - V_2}{R} = G(V_3 - V_2); \tag{2.69}$$

$$I_{22} = \frac{V_2 - V_4}{X_C} = sC(V_2 - V_4); \qquad X_C = \frac{1}{sC} \tag{2.70}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_4}{X_C} = sC(V_1 - V_4) \tag{2.71}$$

$$I_4 = \frac{V_4 - 0}{\frac{R}{2}} = 2GV_4 \tag{2.72}$$

$$I_5 = \frac{V_3 - 0}{X_{2C}} = s2CV_3 \tag{2.73}$$

Уколико се затим напишу једначине за чворове 2, 3 и 4 добијамо

$$I_{21} - I_{22} = 0 \tag{2.74}$$

$$I_1 - I_{21} - I_5 = 0 \tag{2.75}$$

$$I_3 + I_{22} - I_4 = 0 \tag{2.76}$$

Имајући у виду једначине (2.68) – (2.76) добија се систем једначина

$$(G + sC)V_2 - GV_3 - sCV_4 = 0 \tag{2.77}$$

$$GV_1 - GV_3 - (GV_3 - GV_2) - s2CV_3 = 0 \tag{2.78}$$

$$sCV_1 - sCV_4 + sCV_2 - sCV_4 - 2GV_4 = 0 \tag{2.79}$$

При томе је позната само вредност улазног напона и параметара *R* и *C*. Уколико прегрупишемо одговарајуће чланове добијамо систем једначина записан у матричном облику

$$\begin{bmatrix} G + sC & -G & -sC \\ G & -2(G + sC) & 0 \\ sC & 0 & -2(G + sC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -GV_1 \\ -sCV_1 \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

Непознати напон V_2 се сада лако може израчунати применом Крамеровог правила

$$V_2 = \frac{D_2}{D} \tag{2.81}$$

При чему су D_2 и D детерминанте

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & -G & -sC \\ -GV_1 & -2(G + sC) & 0 \\ -sCV_1 & 0 & -2(G + sC) \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

$$D = \det\begin{bmatrix} G+sC & -G & -sC \\ G & -2(G+sC) & 0 \\ sC & 0 & -2(G+sC) \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

Након њиховог израчунавања и увођења смене

$$G = \frac{1}{R} \tag{2.84}$$

добија се

$$V_2 = \frac{(RC)^2 s^2 + 1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 1} V_1 \tag{2.85}$$

односно функција преноса

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(RC)^2 s^2 + 1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 1}\ . \tag{2.86}$$

2.7 Резиме

Анализа и синтеза система аутоматског управљања подразумева познавање математичког модела како елемената тако и система у целини. Зависно од циљева и поступка симулације конкретан систем може бити моделиран на више начина.

Познајући структуру система као и међусобно деловање његових елемената могуће је одредити модел система у облику диференцијалне једначие. При томе је ред ове једначине одређен сложеношћу система. Њено решавање може бити сложено па се често користе симулациони модели који омогућавају да се одговарајућа решења добију применом аналогних рачунара.

Полазећи од концепта стања система могуће је оформити модел система у виду скупа диференцијалних једначина првог реда. При томе се модел система формулише у матричном облику који омогућава да се искористе предности матричног рачуна у погледу компактног записа и елегантног решавања рачунских проблема помоћу нумеричких рачунара.

Поред наведених модела могуће је описати ситем или поједине његове делове користећи функцију преноса која је, у одсуству поремећаја и уз претпоставку да су сви почетни услови једнаки нули, одређена количником излазне и улазне промељиве. Уводећи оператор деривирања можемо, на основу диференцијалне једначине система, одредити његову функцију преноса у операторском облику

У случају када су карактеристике објекта управљања нелинеарне, а промене изазване побудним сигналом или случајним поремећајима довољно мале могуће је линеаризовати функције којима се моделирају такви системи развијајући их у Тејлоров ред у околини тачке.

Решавање интегродиференцијалних једначина често је повезано са бројним потешкоћама. Понекад се решење може добити једино применом адекватних симулација на аналогном или дигиталном рачунару. У случају линеарних диференцијалних једначина са константним параметрима, применом Лапласове трансформације, решавање проблема преводи се из временског у комплексни домен како би се комплетан поступак свео на примену основних математичких операција (сабирања, одузимања, множења и дељења).

Лапласову трансформацију можемо разумети као математичку интерпретацију било које непериодичне функције збиром (интегралом) бесконачног броја пригушених квазипериодичних осцилација, истог фактора пригушења σ, бесконачно малих амплитуда и бесконачно малих разлика у фреквенцијама свака два суседна члана збира.

Применом Лапласове трансформације значајно је олакшан проблем решавања сложених интегродиференцијалних једначина али се решења добијају у комплексном облику. С обзиром на начин посматрања појава око нас логично је да смо више заинтересовани за њихов опис у временском домену. Инверзна Лапласова трансформација омогућава да се лик неке променљиве добијен у виду реалне рационалне функције комплексне променљиве (рационална функција комплексне променљиве са реалним коефицијентима) преведе из комплексног у временски домен. Ово је најлакше учинити уколико се реална рационална функција комплексне променљиве прво растави у суму парцијалних разломака. Полиноми у имениоцима ових разломака су нижег реда у односу на полином функције која се раставља. Услед тога парцијални разломци имају стандардне облике који омогућавају да се у одговарајућим таблицама лако пронађу њихове инверзне Лапласове трансформације, а самим тим и облик конкретне промењљиве у временском домену.

2.8 Питања за проверу знања

1. Како се добија симулациони модел система аутоматског управљања?
2. Шта су предности моделирања система у простору стања?
3. Како изгледа и шта представља функција преноса система у операторском облику?
4. Објасните својство ортогоналности функција?
5. Који услови морају бити испуњени да би периодичан сигнал могао бити описан Фуријеовим редом?
6. Опишите поступак одређивања коефицијената Фуријеовог реда?
7. Шта представља Фуријеова трансформација у односу на Фуријеов ред?
8. Наведите дефиницију Лапалсове трансформације и објасните како је она повезана са Фуријеовом трансформацијом?
9. Одредите Лапласове трансформације функција e^{at}, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ ако су $a > 0,\ \omega > 0$?
10. Опишите поступак одређивања инверзне Лапласове трансформације

    а) када су сви полови функције преноса реални и различити,

    б) када функција преноса садржи вишеструке полове и

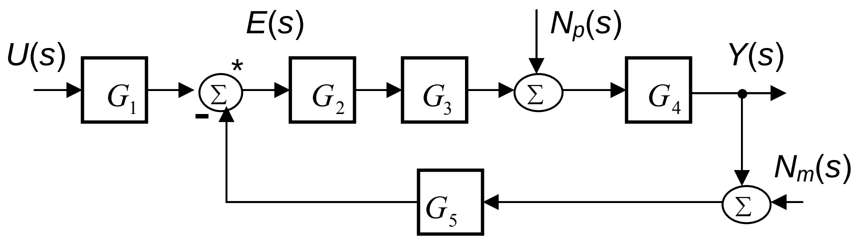
    в) када фукција преноса садржи комплексне полове.
11. Дефинишите функцију преноса система у комплексном домену и објасните поступак њеног одређивања за случај система описаног линеарном диференцијалном једначином другог реда.

3

МОДЕЛИРАЊЕ СИСТЕМА АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА

Циљ овог поглавља је да се дефинишу алгебра функције преноса, основни појмови као што су карактеристични полином, функција повратног и функција спрегнутог преноса, објасни примена Мејсоновог правила за одређивање функције преноса и поступци добијања модела система у простору стања на основу његове функције преноса.

Најчешће се као полазна основа при анализи и синтези неког система аутоматског управљања користи његова графичка интерпретација у виду структурног блок дијаграма. Она омогућава да се прикажу променљиве система, интеракција између њих, односно ток информација и елементи система у виду блокова са припадајућим функцијама преноса. Наравно, физичка природа и техничка конструкција компонената система при томе остају непознати. Слика 3.1 приказује основну конфигурацију неког система. Поједини блокови представљају његове компоненте са одговарајућим динамичким карактеристикама описаним функцијама преноса G_1, G_2, G_3, G_4 и G_5. Линије оријентисане путем стрелица означавају смерове протока информација, а кружићи са уписаним знаком сигма означавају поредбене елементе, односно дискриминаторе, који обављају аритметичке операције или места на којима се појављује суперпонирано[1] деловање поремећајне променљиве као што је на пример шум мерења N_m.



Сл 3.1 Структурни блок дијаграм система аутоматског управљања

У конкретном случају функција преноса G_1 представља референтни улазни елемент преко којег се задаци управљања уводе у систем. Информација о

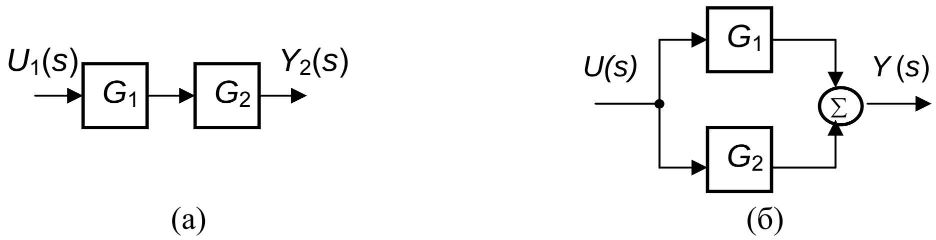
[1] Суперпонирано деловање подразумева да на том месту не постоји дискриминатор као реална компонента, али се помоћу њега моделира присуство поремећајног сигнала.

резултатима управљања враћа се преко елемената кола повратне спреге чије су динамичке карактеристике описане функцијом преноса G_5. Дискриминатор означен звездициом на слици 3.1 на свом излазу генерише сигнал грешке E. Знак минус поред стрелице на улазу у дискриминатор означава да се тај сигнал одузима од сигнала којем одговара стрелица без икакве ознаке. Функције преноса G_2, G_3 описују закон управљања, односно компензатор и динамичка својства извршног елемента којим се делује на објекат управљања, приказан функцијом преноса G_4, како би се обезбедило елиминисање или минимизација сигнала грешке. Присуство нежељених сигнала у систему управљања као што су деловање поремећаја и мерни шум означени су на структурном блок дијаграму као променљиве N_p и N_m.

Структурни блок дијаграм омогућава да се одреди функција преноса комплетног система, а самим тим и његов одзив $Y(s)$ на побуду чији је комплексни лик означен са $U(s)$. Уобичајено се каже да елементи система између улаза и излаза структурног блок дијаграма припадају *директној грани*. У конкретном случају то су елементи означени блоковима чије су функције преноса G_1, G_2, G_3 і G_4. Елементи који обезбеђују да се информација са излаза врати на улаз дискриминатора (у конкретном случају G_5) формирају *повратну грану*. Елементи који формирају затворену контуру (у конкретном случају G_2, G_3, G_4 и G_5) представљају *петљу повратне спреге*.

3.1 Алгебра функције преноса

При формирању модела неког система често се, због присуства више повратних спрега као и већег броја улазних сигнала (*мултиваријабилни системи*), добија релативно сложен структурни блок дијаграм. Користећи принцип суперпозиције и алгебру функција преноса ови дијаграми се релативно лако преводе у неку од основних структура која је погодна за даљу анализу и синтезу система. Правила алгебре функција преноса су релативно проста и лако их је доказати уз помоћ примера приказаних на сликама 3.2 и 3.3.



Сл. 3.2 Серијска (а) и паралелна (б) веза елемената сиситема управљања.

У случају редне везе елемената система управљања (сл. 3.2а) функција преноса система у целини се једноставно добија као производ функција преноса сваког појединачног елемента

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_1 G_2 . \tag{3.1}$$

За случај паралелног деловања појединих елемената (сл. 3.2б) укупна функција преноса одређена је сумом функција преноса појединих елемената

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1 + G_2 . \tag{3.2}$$

За систем са негативном повратном спрегом (сл. 3.3) потребно је прво формулисати неколико једноставних једначина

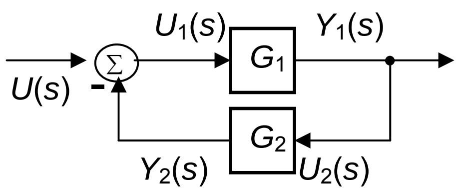
$$U_1(s) = U(s) - Y_2(s)$$

$$Y_2(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$$

$$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$$

на основу којих се добија функција преноса целог система

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} . \tag{3.3}$$

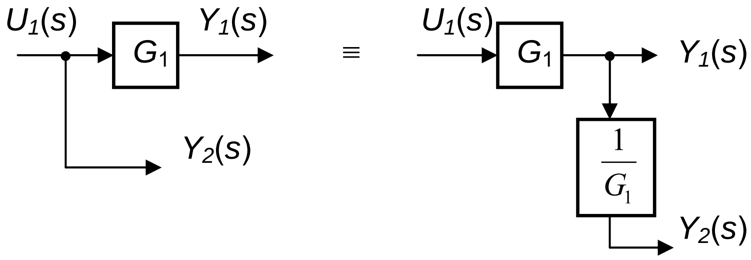


Сл.. 3.3 Структура система са негативном повратном спрегом

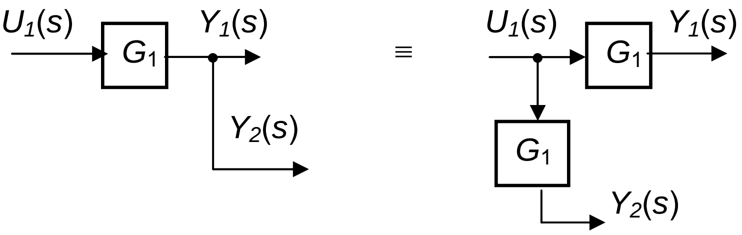
Уколико је сигнал са излаза додат на улаз дискриминатора путем повратне спреге, односно уместо минуса на структурном блок дијаграмау стоји знак плус (често се изоставља по угледу на означавање бројева већих од нуле) значи да постоји позитивна повратна спрега па ће полином у имениоцу претходне једначине бити дефинисан као разлика броја 1 и производа функција преноса G_1G_2.

Користећи принцип суперпозиције и алгебру функција преноса сложени структурни дијаграми се релативно лако преводе у неку од основних структура које су погодне за даљу анализу и синтезу система.

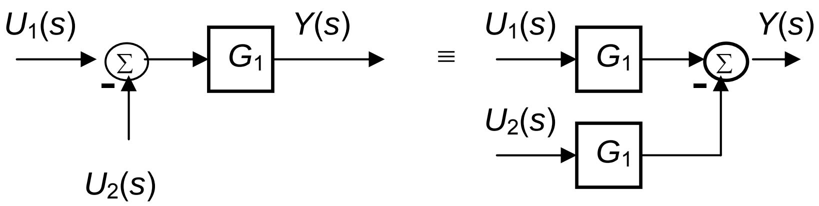
На сликама које следе илустрована су најважнија правила алгебре функције преноса помоћу којих се сложени структурни дијаграми преводе у неку од већ описаних основних структура ради даље анализе и синтезе система.



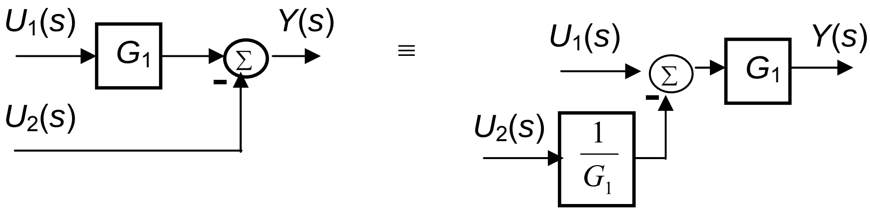
Сл. 3.4 Померање тачке гранања иза блока



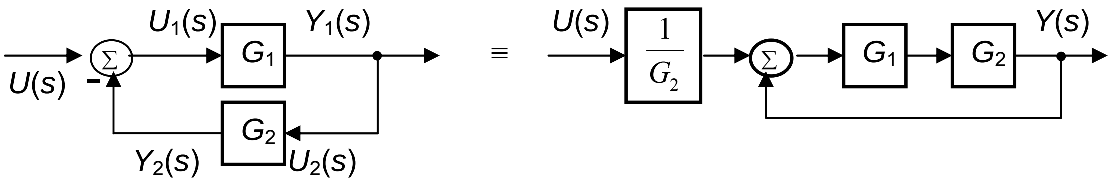
Сл. 3.5 Померање тачке гранања испред блока



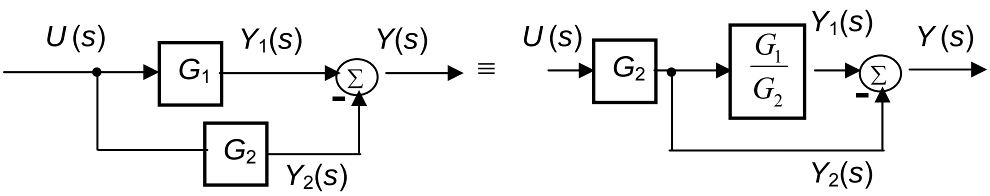
Сл. 3.6 Премештање дискриминатора иза блока



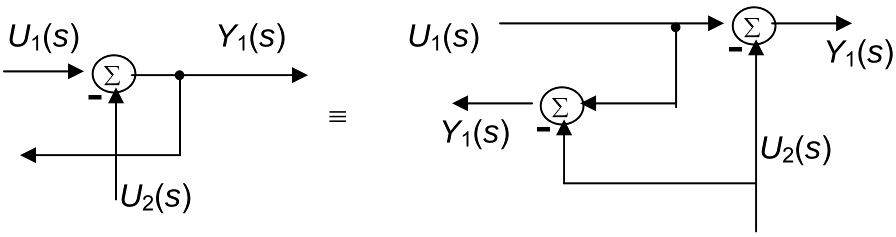
Сл. 3.7 Премештање дискриминатора испред блока



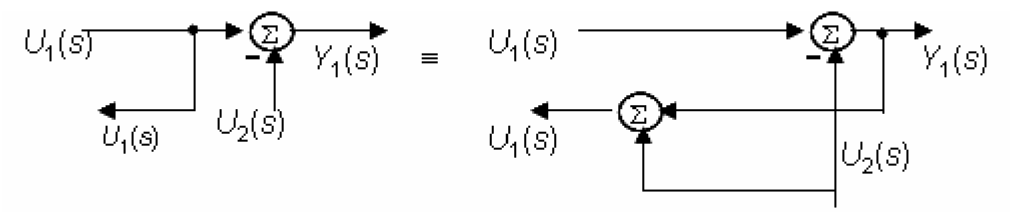
Сл. 3.8 Премештање блока из повратног кола



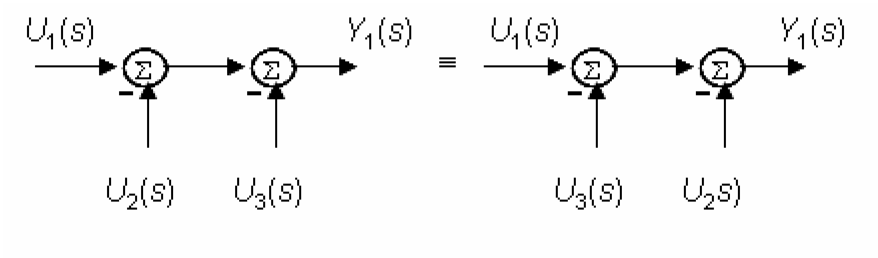
Сл. 3.9 Премештање блока из директног кола



Сл. 3.10 Премештање повратне спреге испред дискриминатора

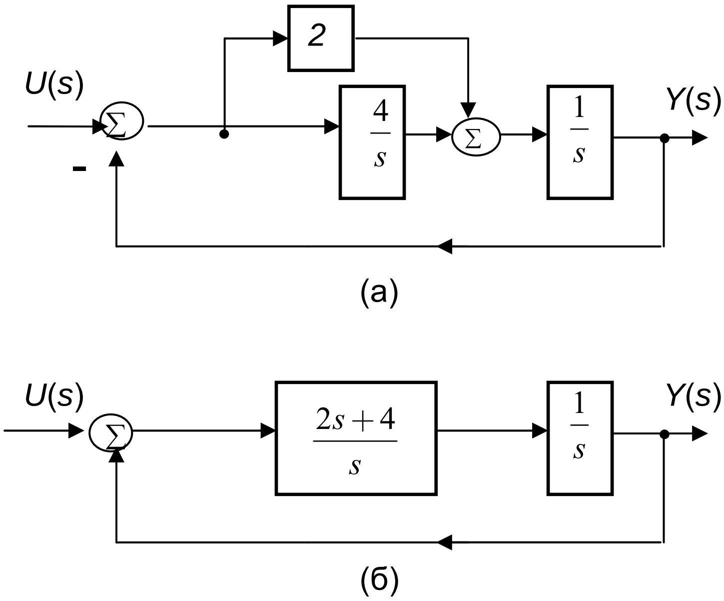


Сл. 3.11 Премештање повратне спреге иза дискриминатора



Сл. 3.12 Комутација променљивих

ПРИМЕР 3.1: Одредите функцију преноса за систем приказан на слици 3.13(а).



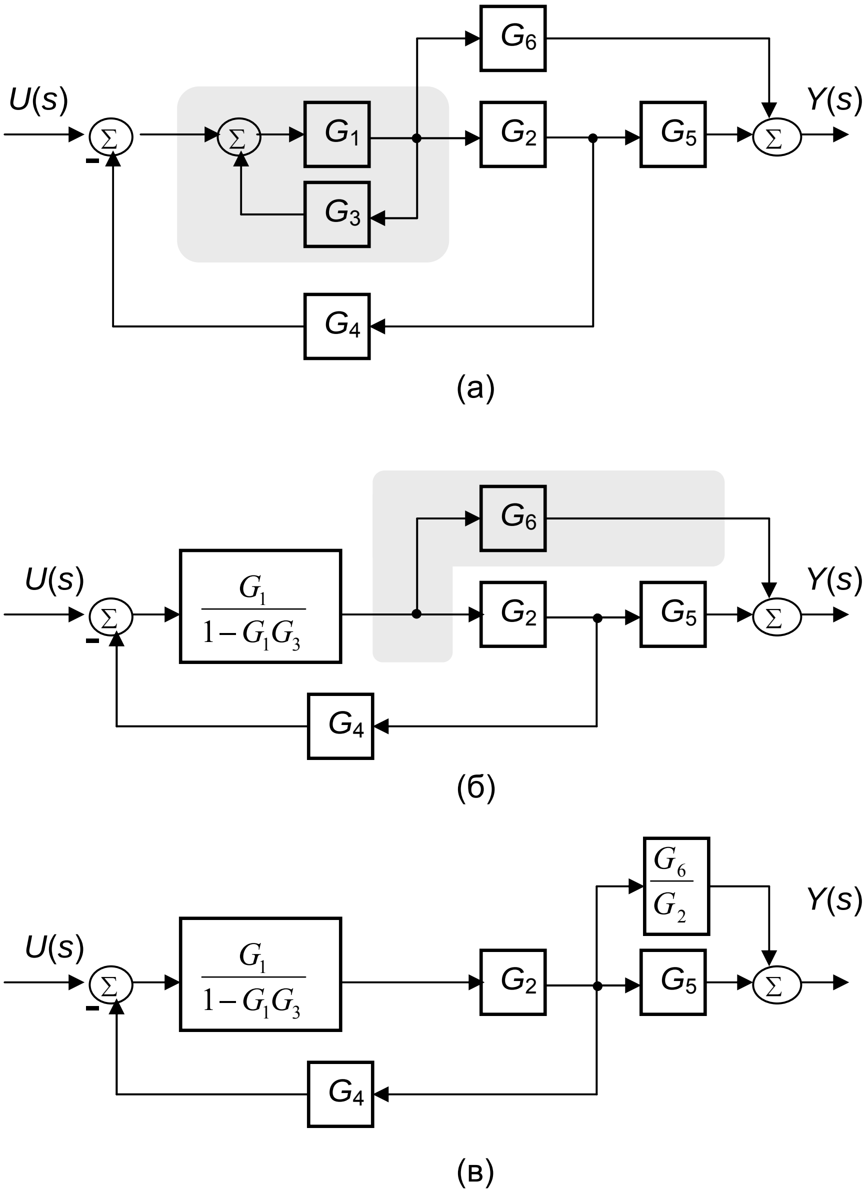
Сл. 3.13 Структурни блок дијаграм система управљања

РЕШЕЊЕ: Применом елементарних трансформација систем се своди на структуру приказану на слици 3.13(б) након чега се добија функција преноса

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{2s+4}{s^2}}{1+\dfrac{2s+4}{s^2}} \tag{3.4}$$

$$G(s)=\frac{2s+4}{s^2+2s+4}$$

ПРИМЕР 3.2: Одредите функцију преноса за систем према слици 3.14(а).



Сл 3.14 Пример поједностављења структурног блок дијаграма

РЕШЕЊЕ: Пре свега неопходно је да поједноставимо облик структурног блок дијаграма сводећи га на основне структуре. На слици 3.14(а) подбојом је означен део система који формира коло позитивне повратне спреге. Одговарајућа структура је замењена блоком који, на слици 3.14(б), има функцију преноса

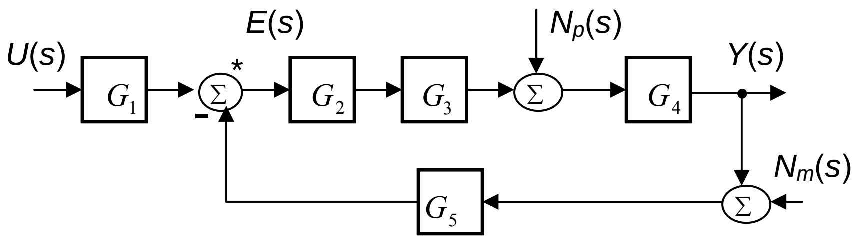
$$G(s)\frac{G_1}{1-G_1G_3}\,.$$

Премештањем тачке гранања иза блока G2 добијена је коначна структура приказана на слици 3.14(в). Сада се применом елементарних правила алгебре функција преноса директно добија функција преноса целог система

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{G_1G_2}{1-G_1G_3}}{1+\dfrac{G_1G_2G_4}{1-G_1G_3}}\left(G_5+\frac{G_6}{G_2}\right)$$

$$G(s)=\frac{G_1G_2G_5+G_1G_6}{1-G_1G_3+G_1G_2G_4}. \tag{3.5}$$

ПРИМЕР 3.3: Одредите, применом алгебре функција преноса, комплексни лик излазне промењиве за систем према слици 3.15 претпостављајући да поремећајни и мерни шумови $N_p(s)$ і $N_m(s)$ не постоје.

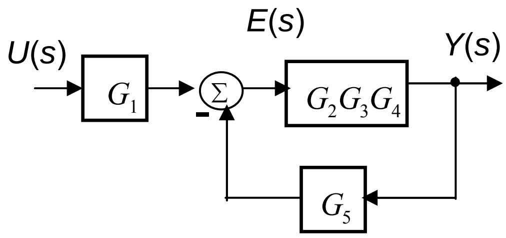


Сл 3.15 Структурни блок дијаграм система са једном управљаном промењивом

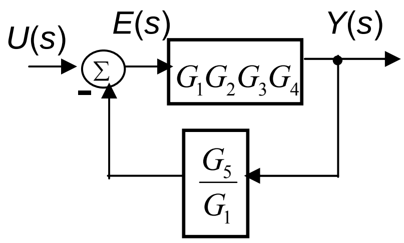
РЕШЕЊЕ: Најпре нацртајмо структурни блок дијаграм система без присуства наведених шумова (сл. 3.16-а). С обзиром да у директној грани дела система са повратном спрегом постоји редна веза елемената чије су функције преноса G_2, G_3 и G_4 уведимо истовремено уместо њих блок са функцијом преноса која је једнака њиховом производу.

У следећем кораку, премештањем блока G_1 иза дискриминатора, добија се структура на основу које се лако дефинише функција преноса система у целини

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}. \tag{3.6}$$



(а)

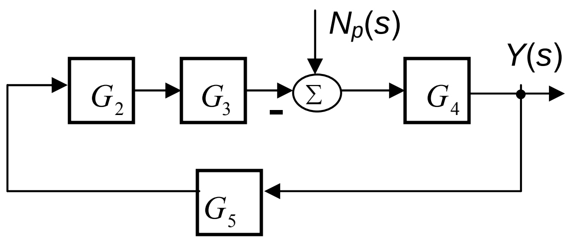


(б)

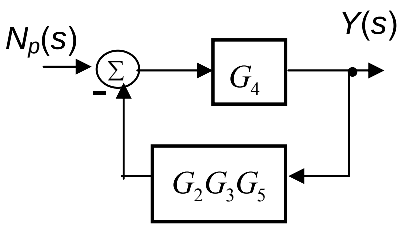
Сл. 3.16 Поступак свођења система на основну структуру

ПРИМЕР 3.4: Одредите, применом алгебре функција преноса, комплексни лик излане променљиве за систем према слици 3.15 занемарујући постојање мерног шума $N_m(s)$ и побудног сигнала $U(s)$.

РЕШЕЊЕ: Након увођења поменутих занемарења структурни блок дијаграм се своди на структуру приказану на слици 3.17.



(а)



(б)

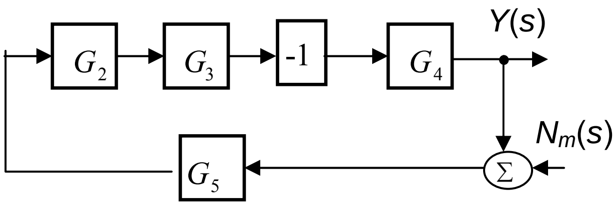
Сл. 3.17 Поступак свођења система на основну структуру

Након што се елементи прегрупишу, цртајући их у складу са стандардним приказом структуре са повратном спрегом, коначно се добија функција преноса система у целини.

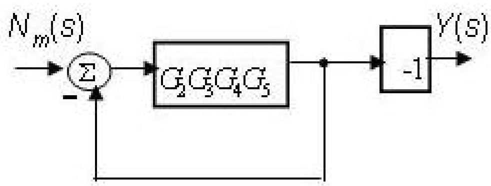
$$\frac{Y(s)}{N_p(s)} = \frac{G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}. \qquad (3.7)$$

ПРИМЕР 3.5: Одредите, применом алгебре функција преноса, комплексни лик излане променљиве за систем према слици 3.15 занемарујући постојање поремећајног шума $N_p(s)$ и побудног сигнала $U(s)$.

РЕШЕЊЕ: Након увођења поменутих занемарења структурни блок дијаграм се своди прво на структуру у којој се појављује блок са функцијом преноса која означава инверзију сигнала (означен са -1 на слици 3.18) .



(а)



(б)

Сл. 3.18 Поступак свођења система на основну структуру

Премештањем блока означеног са -1 иза тачке гранања добија се структура, приказана на слици 3.17(б), на основу које произлази функција преноса система

$$\frac{Y(s)}{N_m(s)} = -\frac{G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}. \qquad (3.8)$$

3.2 Карактеристичне функције САУ

Уколико анализирамо функције преноса добијене у примерима 3.3 - 3.5

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{N_p(s)} = \frac{G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{N_m(s)} = -\frac{G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}{1+G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}$$

можемо уочити да се у сва три случаја појављује исти полином у именицу. Због тога се овај полином назива *карактеристични* или *својствени полином*, а једначина

$$1+G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s) = 0 \tag{3.9}$$

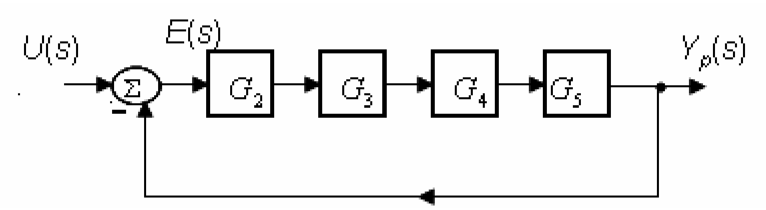
карактеристична једначина система. Разлог је врло једноставан. Свака од наведених функција преноса односи се на исти систем. Без обзира шта посматрамо као улаз, а шта као излаз конкретног система при одређивању функције преноса овај полином има увек исти облик.

Све три функције преноса добијене су за систем са затвореним колом повратне спреге. У литератури се за овакве функције користи назив *функције спрегнутог преноса*. У сваком од приказаних случајева разликује се само улаз. Ова чињеница се наглашава тако што кажемо да смо у претходним примерима одредили функције спрегнутог преноса у односу на улазну промењљиву (пример 3.3), промењљиву поремећаја (пример 3.4) и промењљиву шума мерења (пример 3.5). Строга дефиниција функције спрегнутог преноса подразумева однос комплексних ликова улазне и излазне промењљиве система при чему су сви почетни услови и вредности осталих улаза једнаки нули.

Уколико за систем приказан на слици 3.15 претпоставимо да је функција преноса $G_1(s) = 1$ и занемаримо постојање поремећајног и мерног шума, $N_p(s)$ и $N_m(s)$, а затим одредимо функцију спрегнутог преноса за сигнал повратне спреге $Y_p(s)$ у односу на улаз $U(s)$ добија се

$$\frac{Y_p(s)}{U(s)} = -\frac{G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}{1+G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}. \tag{3.10}$$

Ово је лако проверити користећи слику 3.19 која приказује систем са слике 3.15 добијен након увођења наведених претпоставки. Приметимо постојање јединичне повратне спреге у овом систему.



Сл 3.19 Структурни блок дијаграм система са јединичном повратном спрегом

Уколико уведемо смену

$$W(s) = G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s) \tag{3.11}$$

можемо написати последњу функцију спрегнутог преноса у сажетијем облику

$$\frac{Y_p(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{1+W(s)}. \tag{3.12}$$

Функција $W(s)$ у ствари представља *функцију повратног преноса*. Очигледно, за конкретан систем приказан на слици 3.19, она представља однос комплексних ликова сигнала повратне спреге и сигнала грешке при свим почетним условима једнаким нули

$$W(s) = \frac{Y_p(s)}{E(s)}. \tag{3.13}$$

Функција преноса се лако одређује као производ функција преноса серијски повезаних елемената који формирају петљу повратне спреге.

Приметимо на овом месту да је одзив система $Y(s)$ много осетљивији на присуство шума мерења $N_m(s)$ него на поремећаје $N_p(s)$ који се појављују у директној грани кола повратне спреге. Увођењем функције повратног преноса одговарајуће функције спрегнутог преноса добијају сажетији запис

$$\frac{Y(s)}{N_p(s)} = \frac{G_4(s)}{1+W(s)} \tag{3.14}$$

$$\frac{Y(s)}{N_m(s)} = -\frac{W(s)}{1+W(s)}. \tag{3.15}$$

У оба случаја дејство поремећаја на одзив система мање је $[1+W(s)]$ пута у односу на случај када је повратна спрега прекинута.

3.3 Класификација система у односу на ред астатизма

У најопштијем случају функција повртаног преноса система аутоматског управљања може се свести на облик

$$W(s) = \frac{K_r(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + 1)}{s^r(a_n s^{n-r} + a_{n-1}s^{n-r-1} + \ldots + a_1 s + 1)} \tag{3.16}$$

при чему је K_r фактор појачања функције повратног преноса, а r означава ред астатизма. У зависности од вредности експонента r системи се класификују као системи нултог астатизма ($r = 0$), системи астатизма првог реда ($r = 1$) и системи астатизма другог реда ($r = 2$). Системи вишег реда астатизма, односно за вредности $r > 2$, немају практичног смисла због тешкоћа које се срећу при њиховој стабилизацији.

Из аспекта анализе и синтезе ситема, уколико је могуће, погодно је функцију повратног преноса свести на факторизован облик:

$$W(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{s^r \prod_{j=1}^{n-r}(T_j s + 1)}. \tag{3.17}$$

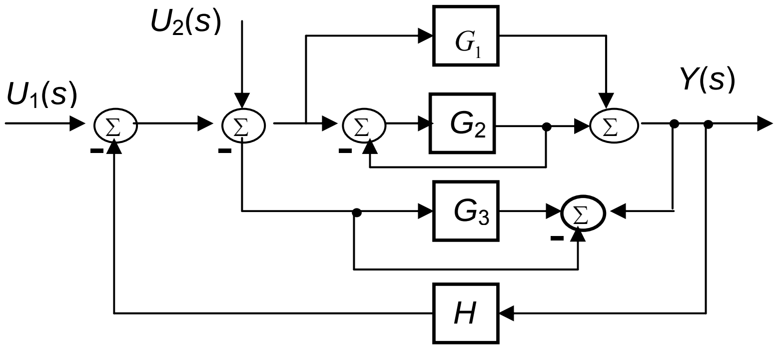
Уколико се у неком од полинома појављују коњуговано комплексне нуле тада би се у факторизованом облику израза за функцију повратног преноса појавили фактори типа

$$as^2 + bs + 1 = T^2 s^2 + 2\xi T s + 1. \tag{3.18}$$

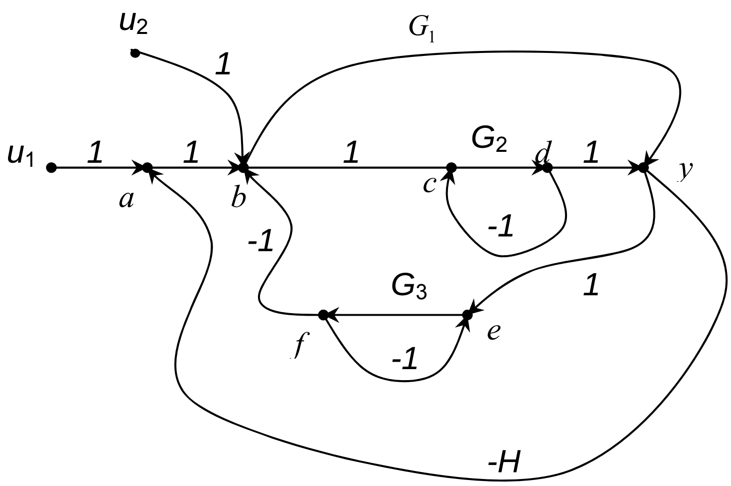
Овакав начин факторизације парова коњуговано комплексних нула или полова функције повратног преноса погодан је посебно у примени метода анализе и синтезе система у фреквенцијском домену.

3.4 Мејсоново правило

Мејсоново правило представља једноставан поступак за израчунавање функције преноса уколико је ситем представљен структурним блок дијаграмом. Илустрација примене овог правила биће извршена на основу система са два улаза и једним излазом чији је структурни блок дијаграм приказан на слици 3.20. Први корак у примени Мејсоновог правила јесте да се на основу добијеног структурног блок дијаграма формира граф тока сигнала у коме ће чворови графа представљати карактеристичне сигнале структурног блок дијаграма, а гране треба да представљају везе између појединих сигнала. Уобичајено је да се за чворове графа усвоје улазни и излазни сигнали, сигнали који се добијају иза суматора и сигнали који се мултиплицирају. Усвајајући за чворове графа сигнале u_1, u_2, y, a, b, c, d, e и f како је то приказано на слици 3.21, добија се граф тока сигнала са слике 3.20.



Сл 3.20 Пример структурног блок дијаграма система са два улаза и једним излазом



Сл 3.21 Граф тока сигнала за систем са слике 3.20

Следећи корак је да се одреде све контуре графа и укупно појачање контура. Под контуром подразумевамо секвенцу грана које почињу и завршавају у истој тачки при чему се поштује оријентација грана. Појачање контуре се рачуна као производ појачања свих грана које чине контуру. У добијеном графу тока сигнала крије се шест контура са одговарајућим појачањима:

1. контура: *cdc* појачање је $\Delta_1 = -G_2(s)$
2. контура: *fef* појачање је $\Delta_2 = -G_3(s)$
3. контура: *bcdyefb* појачање је $\Delta_3 = -G_2(s)G_3(s)$
4. контура: *byefb* појачање је $\Delta_4 = -G_1(s)G_3(s)$
5. контура: *abcdya* појачање је $\Delta_5 = -G_2(s)H(s)$
6. контура: *abya* појачање је $\Delta_6 = -G_1(s)H(s)$

Сада је потребно формирати детерминанту графа $\Delta(s)$ која се рачуна по следећој формули:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i \Delta_i + \sum_{i,j} \Delta_i \Delta_j - \sum_{i,j,k} \Delta_i \Delta_j \Delta_k + ... \tag{3.19}$$

при чему се у првој суми рачунају све контуре, односно њихова појачања. Друга сума сабира производе свих парова контура које се не додирују. Трећа сума узима у обзир све триплете контура које се не додирују и тако даље. Подразумевамо да се две контуре додирују уколико имају бар један заједнички чвор. Сходно томе, детерминанта посматраног графа постаје:

$$\begin{aligned} \Delta(s) = 1 - (&\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6) \\ &+ (\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_4 + \Delta_1\Delta_6 + \Delta_2\Delta_5 + \Delta_2\Delta_6) - \Delta_1\Delta_2\Delta_6 ... \end{aligned} \tag{3.20}$$

Сада је потребно уочити директне путање од улазних сигнала до излаза и при томе за сваку од тих директних путања треба рачунати одговарајуће појачање путање и детерминанту. Појачање путање се добија множењем појачања свих грана које чине путању док се детерминанта путање рачуна по истој формули као детерминанта целог графа, али узимајући у обзир само оне контуре које не додирују директне путање.

Путање од улаза u_1 до излаза y и одговарајуће детерминанте су:

1. дир. путања: u_1abcdy, појачање је $P_1^1 = G_2(s)$
2. а детерминанта $\Delta_1^1 = 1 - \Delta_2$
3. дир. путања: u_1aby, појачање је $P_1^2 = G_1(s)$, а детерминанта $\Delta_1^2 = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1\Delta_2$

Путање од улаза u_2 до излаза y и одговарајуће детерминанте су:

1. дир. путања: u_2bcdy, појачање је $P_2^1 = G_2(s)$, а детерминанта је $\Delta_2^1 = 1 - \Delta_2$
2. дир. путања: u_2by, појачање је $P_2^2 = G_1(s)$, а детерминанта $\Delta_2^2 = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1\Delta_2$.

Коначно, могуће је формирати матрицу врсту функције преноса, јер је у питању систем са два улаза и једним излазом на следећи начин:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{P_1^1\Delta_1^1 + P_1^2\Delta_1^2}{\Delta} & \dfrac{P_2^1\Delta_2^1 + P_2^2\Delta_2^2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Уочимо да је именилац у сваком члану матрице врсте функције преноса исти и једнак детерминанти графа. У бројиоцима треба да се налази збир производа појачања директних путања и одговарајућих детерминанти за све директне путање које воде од посматраног улазног сигнала до излаза. Ово је правило које важи за сваки систем независно од броја улазних и излазних сигнала.

3.5 Улога функције преноса при одређивању одзива система

Као што је познато функција преноса омогућава да се лакше проведу аналитички поступци анализе и синтезе система аутоматског управљања. Уочимо зато неке интересантне односе између одзива система на јединичну импулсну и степ побуду и функције преноса система.

У примеру 2.3 показано је да Лапласова трансформација јединичне импулсне функције има вредност 1. Због тога је комплексни лик одзива ситема на побуду овим сигналом управо једнак функцији преноса система.

$$Y(s) = G(s)$$

Другим речима импулсни одзив система једнак је инверзној Лапласовој трансформацији функције преноса система

$$y(t) = L^{-1}[G(s)].$$

С друге стране Лапласова трансформација интеграла неке функције је дефинисана једначином

$$L\left\{\int_0^t f(\xi)d\xi\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Уколико је функција $F(s)$ одзив ситема на побуду јединичном импулсном функцијом можемо рећи да овај интеграл представља умножак Лапласове трансформације јединичне одскочне функције и комплексног лика одзива ситема на побуду јединичном импулсном функцијом. Другим речима јединични одскочни одзив система једнак је интегралу нормалног јединичног импулсног одзива система, односно јединични импулсни одзив система је једнак изводу нормалног јединичног одскочног одзива.

Веза између ових одзива омогућава да се лакше одреде поједине карактеристике система као што су, на пример, екстремне вредности његовог одзива. Као што је познато ове вредности се одређују применом деривабилног рачуна. На основу наведених чињеница може се уочити да прва деривација одзива система на степ побуду није ништа друго него сама функција преноса конкретног система. У том случају директном применом инверзне Лаплсаове трансформације може се на основу функције преноса система лако одредити прва деривација одзива система на степ побуду као и његова екстремна вредност .

3.6 Модел система у простору стања

Основна идеја моделирања система у простору стања већ је приказана у тачки један другог поглавља ове књиге. Као што је познато, у случају линеарних временски непромењивих система, функција преноса је представљена количником полинома комплексне променљиве са реалним коефицијентима

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \tag{3.22}$$

при чему је $n \geq m$. Претпоставимо за почетак да је функција преноса система аутоматског управљања другог реда, у нефакторизованом облику и да је полином у бројиоцу нултог реда, односно да имамо функцју преноса

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{a_2 s^2+a_1 s+a_0}\,. \tag{3.23}$$

Из практичних разлога добро је свести полином у имениоцу на облик у којем ће коефицијент уз променљиву са највишом потенцијом имати јединичну вредност. У конкретном случају потребно је поделити оба полинома са коефицијентом a_2. Тако се добија

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{a_2}}{s^2+\frac{a_1}{a_2}s+\frac{a_0}{a_2}}\,. \tag{3.24}$$

Након увођења супституција

$$K=\frac{1}{a_2},\ b=\frac{a_1}{a_2}\ \text{и}\ c=\frac{a_0}{a_2}$$

добија се функција преноса у облику

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{s^2+bs+c}\,. \tag{3.25}$$

Ово није ништа друго него серијска веза елемената чије су функције преноса

$$G_1(s)=\frac{1}{s^2+bs+c}\ \text{и}$$

$$G_2(s)=K\,.$$

Уколико прву функцију преноса дефинишемо као однос комплексниох ликова

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + bs + c} \tag{3.26}$$

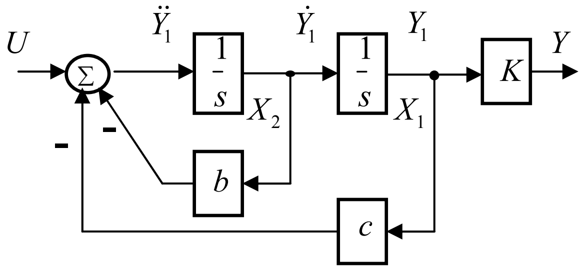
добићемо једначину

$$(s^2 + bs + c)Y_1(s) = U(s),$$

односно

$$s^2 Y_1(s) = U(s) - bsY_1(s) - cY_1(s). \tag{3.27}$$

С обзиром да су $s^2 Y_1(s) = \ddot{Y}_1(s)$, $sY_1(s) = \dot{Y}_1(s)$, односно друга и прва деривација комплексног лика променљиве $y_1(m)$ поступком узастопног интеграљења променљиве $\ddot{Y}_1(s)$ добијају се $\dot{Y}_1(s)$ и $Y_1(s)$. На основу једначине (3.27) можемо формирати симулациони дијаграм приказан на слици 3.22.



Сл 3.22 Симулациони дијаграм система описаног функцијом преноса (3.26)

Интегратори су означени елементима са функцијом преноса

$$G_I(s) = \frac{1}{s}$$

јер се у комплексном домену поступак интеграљења описује на овај начин.

Уколико се излази интегратора усвоје као нове променљиве

$$X_1(s) = Y_1(s) \text{ и } X_2(s) = \dot{Y}_1(s)$$

систем, приказан на слици 3.22, може се описати системом диференцијалних једначина првог реда:

$$\dot{X}_1(s) = X_2(s),$$

$$\dot{X}_2(s) = U(s) - bX_2(s) - cX_1(s)$$

Увођење нових промењљивих, $X_1(s)$ и $X_2(s)$, омогућава да се конкретан систем опише системом диференцијалних једначина првог реда. На основу њих исти систем може се описати у матричној форми

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s). \tag{3.28}$$

При томе се излаз система дефинише матричном једначином у зависности од његових стања $X_1(s)$, $X_2(s)$ и улаза $U(s)$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U(s). \tag{3.29}$$

Уколико матрице у последње две једначине означимо тако да важи

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

добијамо сажетији запис модела система у простору стања

$$\dot{X}(s) = AX(s) + BU(s) \tag{3.31}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \tag{3.32}$$

При томе прва једначина представља једначину стања, а друга једначину излаза система.

Уколико је функција преноса дата у факторизованом облику

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + bs + c} = K \cdot \frac{1}{s + p_1} \cdot \frac{1}{s + p_2} \tag{3.33}$$

при чему су p_1 и p_2 корени карактеристичне једначине $s^2 + bs + c = 0$, односно полови функције преноса, добија се модел система чији је симулациони дијаграм приказан на слици 3.23. При томе систем диференцијалних једначина сада има облик

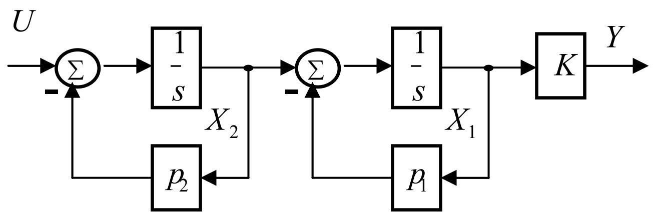
$$\dot{X}_1(s) = -p_1 X_1(s) + X_2(s), \tag{3.34}$$

$$\dot{X}_2(s) = U(s) - p_2 X_2(s), \tag{3.35}$$

а одговарајуће једначине стања и излаза система су

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \tag{3.36}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U(s) . \tag{3.37}$$



Сл 3.23 Симулациони дијаграм система за случај када је функција преноса дата у факторизованом облику

Уколико исту функцију преноса развијемо у суму парцијалних разломака

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + bs + c} = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} \tag{3.38}$$

добија се симулациони дијаграм, приказан на слици 3.24, на основу којег се формира систем диференцијалних једначина

$$\dot{X}_1(s) = -p_1 X_1(s) + U(s) , \tag{3.39}$$

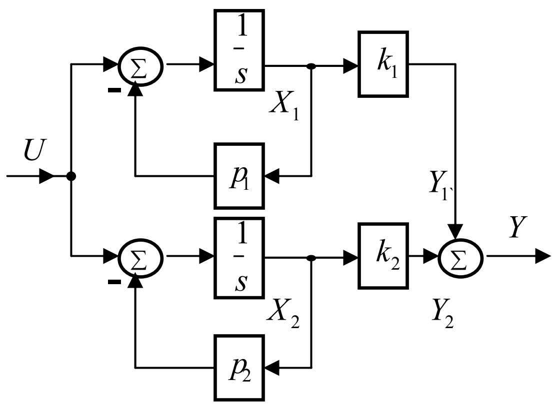
$$\dot{X}_2(s) = -p_2 X_2(s) + U(s) , \tag{3.40}$$

При томе одговарајуће једначине стања и излаза система имају облик

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \tag{3.41}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U(s) . \tag{3.42}$$

Овај модел је посебно интересантан због чињенице да се систем диференцијалних једначина стања добија у каноничној форми, односно матрица A има дијагонални облик. С обзиром да она садржи све полове функције преноса, а њихов положај одређује понашање система, у литератури се за ову матрицу често користи назив *матрица система*.



Сл 3.24 Симулациони дијаграм система за случај када је функција преноса развијена у суму парцијалних разломака

Дијагонални облик матрице A олакшава поступак одређивања функције преноса система на основу његовог модела у простору стања. Објаснимо ову чињеницу полазећи од једначина

$$\dot{X}(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)\,.$$

Уколико једначину стања запишемо уводећи јединичну матрицу I чије димензије одговарају димензијама вектора стања X добијамо

$$sIX(s) = AX(s) + BU(s) \tag{3.43}$$

однсоно

$$(sI - A)X(s) = BU(s)\,. \tag{3.44}$$

На тај начин могуће је коначно одредити вектор стања

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)\,,$$

Уврштавањем добијеног вектора стања у (3.32) добија се

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Очигледно, у случају дијагоналног облика матрице А поступак одређивања инверзне матрице $(sI - A)^{-1}$ своди се на израчунавање реципрочних вредности елемената на главној дијагонали, а то је много једноставније у односу на случај када матрица није дијагонална.

У случају када функција преноса садржи вишеструке полове њеним развојем у суму парцијални разломака добија се такође модел система у каноничном облику.

Симулациони дијаграм за случај система са четири пола од којих су два иста приказан је на слици 3.25. Његова функција преноса

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)^2} \tag{3.46}$$

након развоја у суму парцијалних разломака има облик

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{(s+p_1)} + \frac{k_2}{(s+p_2)} + \frac{k_{31}}{(s+p_3)} + \frac{k_{32}}{(s+p_3)^2}\,. \tag{3.47}$$

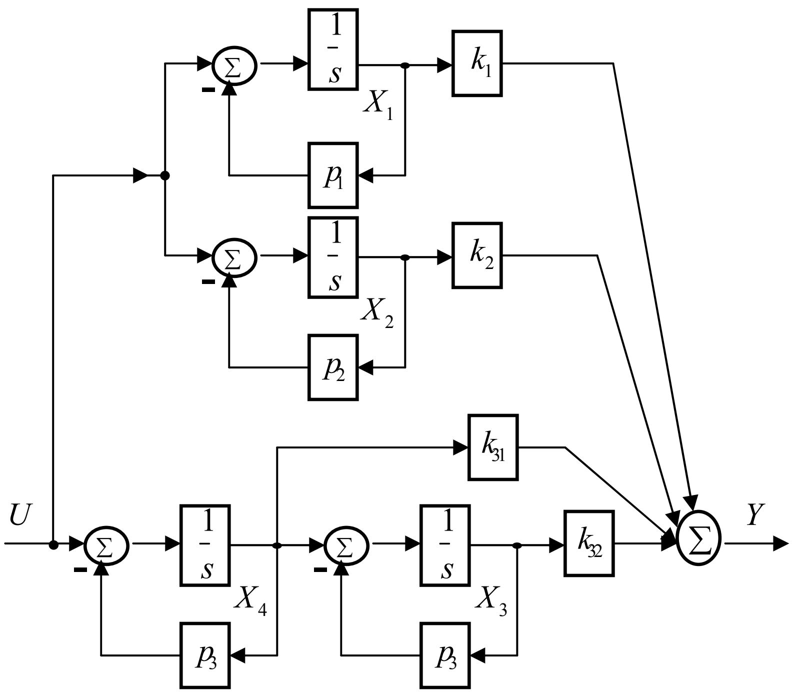
Усвајајући, као и до сада, излазе интегратора за променљиве стања добијамо систем диференцијалних једначина

$$\dot{X}_1(s) = -p_1 X_1(s) + U(s)\,, \tag{3.48}$$

$$\dot{X}_2(s) = -p_2 X_2(s) + U(s)\,, \tag{3.49}$$

$$\dot{X}_3(s) = -p_3 X_3(s) + X_4(s)\,, \tag{3.50}$$

$$\dot{X}_2(s) = -p_4 X_4(s) + U(s)\,, \tag{3.51}$$



Сл. 3.25 Симулациони дијаграм система за случај када је функција преноса садржи вишеструке полове

Матрични модел система и једначина излаза који одговарају овом симулационом дијаграму имају облик

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \\ \dot{X}_3(s) \\ \dot{X}_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ X_4(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s), \tag{3.52}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_{32} & k_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ X_4(s) \end{bmatrix} + [0]U(s). \tag{3.53}$$

Уочимо да двоструком полу p_3 у матрици A одговара субматрица

$$\begin{bmatrix} -p_3 & 1 \\ 0 & -p_3 \end{bmatrix}.$$

Добијени модел представља Џорданову каноничну форму диференцијалне једначине стања система, када функција преноса система поседује вишеструке полове.

Након свега анализирајмо поступак добијања модела система за случај када функција преноса има полином у имениоцу у нефакторизованом облику, а полином у бројиоцу има ред већи од нуле, односно садржи и чланове са комплексном променљивом s.

Претпоставимо да је систем описан функцијом преноса

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}. \tag{3.54}$$

Њој одговара диференцијална једначина

$$[s^2 + a_1 s + a_0]Y(s) = [b_1 s + b_0]U(s). \tag{3.55}$$

Развој симулационог дијаграма на основу ове диференцијачлне једначине није погодан јер нам у случају симулација недостаје променљива $sU(s)$ која одговара првој деривацију улазног сигнала $u(t)$. Због тога се уводи помоћна променљива $Z(s)$. При томе оба полинома функције преноса множимо са њом

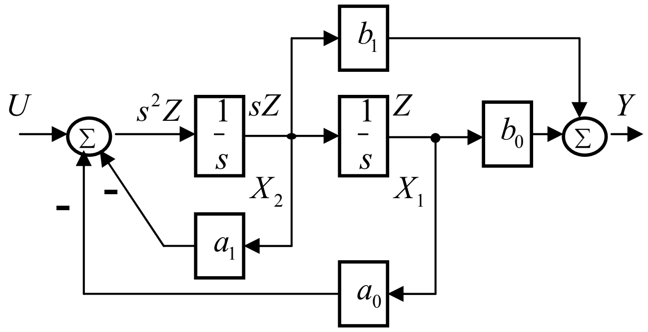
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

тако да сада можемо написати две диференцијалне једначине

$$Y(s) = [b_1 s + b_0] Z(s)\,,$$

$$U(s) = [s^2 + a_1 s + a_0] Z(s)\,.$$

Ако сада за промењиве стања усвојимо $X_1(s) = Z(s)$ и $X_2(s) = sZ(s)$ и те промењиве сматрамо излазима интегратора добијамо симулациони дијаграм система као на слици 3.26.



Сл. 3.26 Симулациони дијаграм система за случај када функција преноса има полином у имениоцу у нефакторизованом облику, а полином у бројиоцу има ред већи од нуле

Као и у претходним случајевима можемо написати систем диференцијалних једначина

$$\dot{X}_1(s) = X_2(s)\,, \tag{3.56}$$

$$\dot{X}_2(s) = U(s) - a_0 X_1(s) - a_1 X_2(s)\,, \tag{3.57}$$

На основу симулационог дијаграма непосредно се добија матрични модел и једначина излаза система

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \tag{3.58}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + [0] U(s)\,. \tag{3.59}$$

3.7 Резиме

Најчешће се као полазна основа при анализи и синтези неког система аутоматског управљања користи његова графичка интерпретација у виду структурног блок дијаграма који омогућава да се одреди функција преноса комплетног система, а самим тим и његов одзив на конкретну побуду. Уобичајено се каже да елементи система између улаза и излаза структурног блок дијаграма припадају *директној грани*. Елементи који обезбеђују да се информација са излаза врати на улаз дискриминатора формирају *повратну грану*. Елементи који формирају затворену контуру представљају *петљу повратне спреге*.

При формирању модела неког система често се, због присуства више повратних спрега као и већег броја улазних сигнала (*мултиваријабилни системи*), добија релативно сложен структурни блок дијаграм. Користећи принцип суперпозиције и алгебру функција преноса ови дијаграми се релативно лако преводе у неку од основних структура која је погодна за даљу анализу и синтезу система.

Уколико функција $F(s)$ означава одзив ситема на побуду јединичном импулсном функцијом тада је одскочни одзив система једнак интегралу јединичног импулсног одзива система, односно јединични импулсни одзив система је једнак изводу нормалног јединичног одскочног одзива. Очигледно прва деривација одзива система на степ побуду није ништа друго него сама функција преноса конкретног система. У том случају директном применом инверзне Лаплсаове трансформације може се на основу функције преноса система лако одредити прва деривација одзива система на степ побуду као и његова екстремна вредност .

У зависности од облика функције преноса могу се добити различити модели у простору стања. При томе је посебно интересантан модел система који се добија након развоја функције преноса у суму парцијалних разломака због чињенице да матрица система има дијагонални облик па се поступак израчунавања инверзне матрице $(sI - A)^{-1}$,при одређивању функције преноса на основу модела система у простору стања, своди се на израчунавање реципрочних вредности елемената на главној дијагонали, а то је много једноставније у односу на случај када матрица није дијагонална.

У случају када функција преноса садржи вишеструке реалне полове њеним развојем у суму парцијални разломака добија се модел система у каноничном облику познат под називом Џорданова канонична форма.

У случају када је полином у имениоцу функције преноса у нефакторизованом облику, а полином у бројиоцу има ред већи од нуле, односно садржи и чланове са комплексном промењивом s потребно је прво помножити оба полинома са помоћном промењивом како би се формирао одговарајући модел у простору стања.

3.8 Питања за проверу знања

1. Наведите основне компоненте система аутоматског управљања и нацртајте припадајући структурни блок дијаграм?
2. Објасните шта су карактеристични полином и карактеристична једначина система?
3. Дефинишите функцију спрегнутог и функцију повратног преноса?
4. Објасните утицај поремећајног шума присутног у директној грани кола повратне спреге на одзив система?
5. Објасните какав је утицај присуства мерног шума на излазу система са повратном спрегом на његов одзив?
6. Шта означава ред астатизма система?
7. Каква је веза између јединичног одскочног одзива система и његовог одзива на побуду јединичним импулсом?
8. Одредите модел система у простору стања уколико функција спрегнутог преноса система има трећи ред и дата је у факторизованом облику.
9. Дефинишите матрицу система и објасните како се она одређује?
10. Шта је карактеристично за Џорданову каноничну форму и када она настаје?

4

АНАЛИЗА ПОНАШАЊА КОНТИНУАЛНИХ СИСТЕМА

Циљ овог поглавља је да се упознају основни закони управљања, карактеризација система у стационарном стању и током прелазног процеса и оствари увид у зависност одзива система од распореда полова и нула функције преноса.

Анализа понашања система управљања треба да омогући стицање увида у величину одступања вредности управљане променљиве у односу на унапред задане вредности. Уколико је ова вредност позната за сваки тренутак времена тада постоји потпуна информација о својствима система којег посматрамо.

Имајући у виду разноликост сигнала који се могу појавити на улазу система, из практичних разлога, усвојени су типични облици њихове промене као што су одскочна, нагибна и параболична функција како би се остварио стандардан приступ при оцени квалитета понашања система. Поред тога предложено је и више типова критеријума, односно индекса перформанси, за оцену квалитета понашања система који се могу сврстати у четири групе.

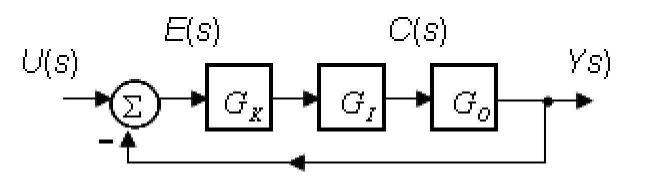
Прву групу сачињавају критеријуми за оцену тачности рада система у стационарном стању. На основу њих се одређује величина сигнала грешке у устаљеном режиму рада система.

Другу групу сачињавају критеријуми који служе за оцену брзине одзива система на побуду одговарајућим улазним сигналима и поремећајима.

Трећу групу чине критеријуми за оцену резерве стабилности. Њиховом применом стиче се информација о томе колико је ситем далеко од границе стабилности. У зависности од домена у којем се врши анализа примењују се критеријуми као што су унапред задато време смирења прелазног процеса, степен релативне стабилности, амплитудна и фазна резерва ситема.

Четврту групу критеријума чине интегрални индекси перформансе дефинисани путем интеграла у којем подинтегрална функција има за аргумент сигнал грешке система. Критеријуми прве три групе омогућавају увид у поједине перформансе система. За разлику од њих интегрални критеријуми представљају показатеље који својом вредношћу обједињавају информације о релевантним динамичким карактеристикама система као што су претек стабилности и брзина реаговања система.

Усвојимо, за потребе анализе понашања система аутоматског управљања, крајње поједностављену структуру система приказану на слици 4.1. Уочимо да се она састоји од компензатора, извршног елемента и објекта управљања чије су функције преноса G_K, G_I и G_O.



Сл 4.1 Поједностављена структура система аутоматског управљања

Функција преноса објекта управљања је одређена његовим конструктивним параметрима које најчешће није могуће мењати. У том случају, адекватан избор регулатора формираног серијском везом компензатора и извршног органа представља једини начин да се утиче на понашање система у целини. Функција преноса дефинисана количником комплексних ликова управљачке променљиве $C(s)$ и сигнала грешке $E(s)$

$$G_R(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G_K(s)G_I(s) \tag{4.1}$$

одређује закон управљања, а самим тим и понашање система у целини. У том смислу погодно је најпре дефинисати ове законе, а онда анализирати њихов утицај на понашање система у светлу постављених критеријума, односно индекса перформанси.

4.1 Закони управљања

У зависности од параметара објекта управљања, захтеваних карактеристика система у целини као и реалних ограничења у случају линеарних континуалних ситема у пракси се користе пропорционални, интегрални и диференцијални закон управљања, или нека од њихових комбинација, за реализацију одговарајућег регулатора.

Веза између управљане променљиве и сигнала грешке за случај безинерционог пропорционалног регулатора има облик

$$c(t) = K_1 e(t)\,. \tag{4.2}$$

Пропорционални регулатор са инерцијалним својствима има функцију преноса

$$G_R(s) = K_1 \frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n-r}(T_j s + 1)}\,. \tag{4.3}$$

Уочимо да у стационарном стању деривативи свих променљивих система теже нули па функција преноса има вредност константе $G_R(s) = K_1$ тако да без обзира на постојање инерционалних својстава, довољно дуго након завршетка прелазног процеса, постоји пропорционалност између управљане променљиве и сигнала грешке. У случају спoропроменљивог сигнала грешке може се такође рећи да је

$$G_R(s) = K_1 \frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n-r}(T_j s + 1)} \approx K_1\,, \tag{4.4}$$

односно постоји приближна пропорционалност између сигнала грешке и управљане променљиве без обзира на постојање инерционалних својстава регулатора.

Веза између управљане променљиве и сигнала грешке за случај интегралног закона управљања има облик

$$\frac{dc(t)}{dt} = K_I e(t)\,. \tag{4.5}$$

Очигледно, брзина промене управљачке променљиве пропорционална је сигналу грешке, односно управљачка променљива је пропорционална интегралу сигнала грешке по времену

$$c(t) = K_I \int e(t)dt\,. \tag{4.6}$$

Применом Лапласове трансформације, уз претпоставку нултих почетних услова, из претходне једначине добија се

$$C(s) = K_I \frac{1}{s} E(s) \tag{4.7}$$

За разлику од пропорционалног закона управљања, у случају интегралног регулатора, функција преноса поред коефицијента пропорционалности K_I садржи и комплексну променљиву, односно има облик

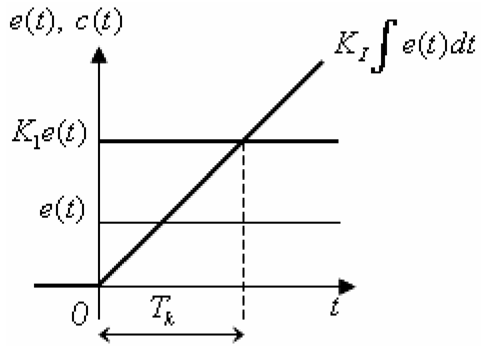
$$G_I(s) = K_I \frac{1}{s}. \tag{4.8}$$

У општем случају функција преноса интегралног регулатора може имати сложенији облик

$$G_I(s) = K_I \frac{1}{s} \frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n-r}(T_j s + 1)}, \tag{4.9}$$

али као што видимо увек поседује комплексну променљиву s у имениоцу. Као и у случају пропорционалног регулатора за случај споропроменљивих сигнала функција преноса приближно одговара релацији (4.8).

Приметимо да у случају идеалног пропорционалног регулатора, када нема инерцијалног деловања, управљачка променљива тренутно мења своју вредност у складу са променом сигнала грешке. У случају идеалног интегралног регулатора присутно је извесно кашњење T_K, односно потребно је неко време да излазна променљива поприми вредност коју би имала у случају пропорционалног регулатора. Ово се најбоље уочава анализом прелазног процеса приказаног на слици 4.2 за случај када сигнал грешке $e(t)$ има облик одскочне функције.



Сл 4.2 Илустрација дејства пропорционалног и интегралног закона управљања

На први поглед рекло би се да интегрални регулатор има лошије карактеристике због уоченог кашњења. Међутим, уочимо да за разлику од пропорционалног регулатора у случају интегралног закона управљања вредност управљачке промењљиве $c(t)$ стално расте у присуству константног поремећаја $e(t)$. Имајући у виду структуру система управљања приказану на слици 4.1 ово практично значи да вредност управљане промењљиве $y(t)$ стално мења своју вредност тежећи да смањи вредност грешке што представља пожељно својство ситема.

У случају диференцијалног закона управљања управљачка промењљива директно је пропорционална брзини промене сигнала грешке

$$c(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}. \tag{4.10}$$

Применом Лапласове трансформације из претходне једначине добија се

$$C(s) = K_D s E(s) \tag{4.11}$$

У општем случају функција преноса диференцијалног регулатора има сложенији облик

$$G_D(s) = K_D s \frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n-r}(T_j s + 1)}.$$

Диференцијални регулатор, за разлику од пропорционалног и интегралног регулатора, испољава своје присуство само у моменту настанка поремећаја. Другим речима његово присуство нема утицаја на стационарно стање управљане промењљиве $y(t)$ већ само утиче на облик прелазног процеса, односно на динамичке карактеристике система.

4.2 Карактеризација стационарног режима

Квалитет рада система аутоматског управљања у стационарном стању одређује се на основу величине сигнала грешке у присуству стандардних сигнала и поремећаја. Напоменимо да анализа величине грешке у стационарном стању има смисла само уколико је систем стабилан, односно уколико прелазни процес изазван неким сигналом или услед поремећаја исчезава током времена након побуде. У том случају, применом крајње граничне теореме Лапласове трансформације, добија се да је сигнал грешке у стационарном стању одређен релацијом

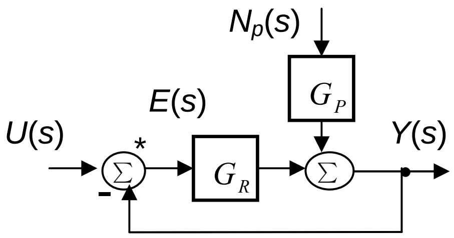
$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s).$$

Претпоставимо да имамо систем са улазом $U(s)$ и поремећајем $N_P(s)$ приказан на слици 4.3. Применом алгебре функције преноса добија се релација

$$Y(s) = \frac{G_R(s)}{1+G_R(s)}U(s) + \frac{G_P(s)}{1+G_R(s)}N_P(s) \tag{4.12}$$

која омогућава да се излазна променљива $Y(s)$ одреди у зависности од промена побудног сигнала и поремећаја. Уколико сигнал грешке усвојимо као излаз система добија се функција која описује његову зависност од улазне променљиве и сигнала поремећаја

$$E(s) = \frac{1}{1+G_R(s)}U(s) - \frac{G_P(s)}{1+G_R(s)}N_P(s). \tag{4.13}$$



Сл 4.3 Структурни блок дијаграм система са једним улазом и једним поремећајем

Применом крајње граничне теореме Лапласове трансформације на релацију (4.13) добија се

$$e(t) = \left[\frac{sU(s)}{1+G_R(s)}\right]_{s\to 0} - \left[\frac{sG_P(s)N_P(s)}{1+G_R(s)}\right]_{s\to 0} = e'(\infty) + e''(\infty). \tag{4.14}$$

Прва компонента $e'(\infty)$ описује вредност грешке насталу присуством побудног сигнала, а друга $e''(\infty)$ условљену присуством поремећаја. С обзиром да је систем на слици 4.3 реализован са јединичном повратном спрегом функција преноса $G_R(s)$, у конкретном случају, има смисао функције повратног преноса $W(s)$. На основу релације (4.14) можемо рећи да вредност грешке у стационарном стању зависи од структуре и параметара система, односно од облика функције спрегнутог преноса $W(s)$ и функције $G_P(s)$ као и од типа и величине побудног сигнала и поремећаја. С обзиром да, у најопштијем случају, функција повртаног преноса система аутоматског управљања има облик описан једначином (3.16)

$$W(s) = \frac{K_r(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + 1)}{s^r(a_n s^{n-r} + a_{n-1}s^{n-r-1} + \ldots + a_1 s + 1)}$$

јасно је да фактор појачања K_r као и њен ред астатизма r значајно одређују величину сигнала грешке $e(\infty)$. У циљу јединственог приступа при оцени квалитета система, величина грешке у стационарном стању одређује се у присуству стандардних сигнала који својим обликом одговарају одскочној, нагибној и параболичној функцији. Зависно од реда астатизма функције повратног преноса при одређивању величине сигнала грешке усвојени су погодно дефинисани параметри као што су константа положаја K_p, брзинска константа K_v и константа убрзања K_a. При томе су

$$K_p = \lim_{s\to 0} W(s), \tag{4.15}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sW(s) \text{ и} \tag{4.16}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 W(s). \tag{4.17}$$

Претпоставимо да функција повратног преноса има астатизам нултог реда ($r = 0$). Тада константа положаја има коначну вредност $K_p = K_r$. У случају одскочне побудне функције $u(t) = r_0 \cdot h(t)$ чија је амплитуда r_0 добија се

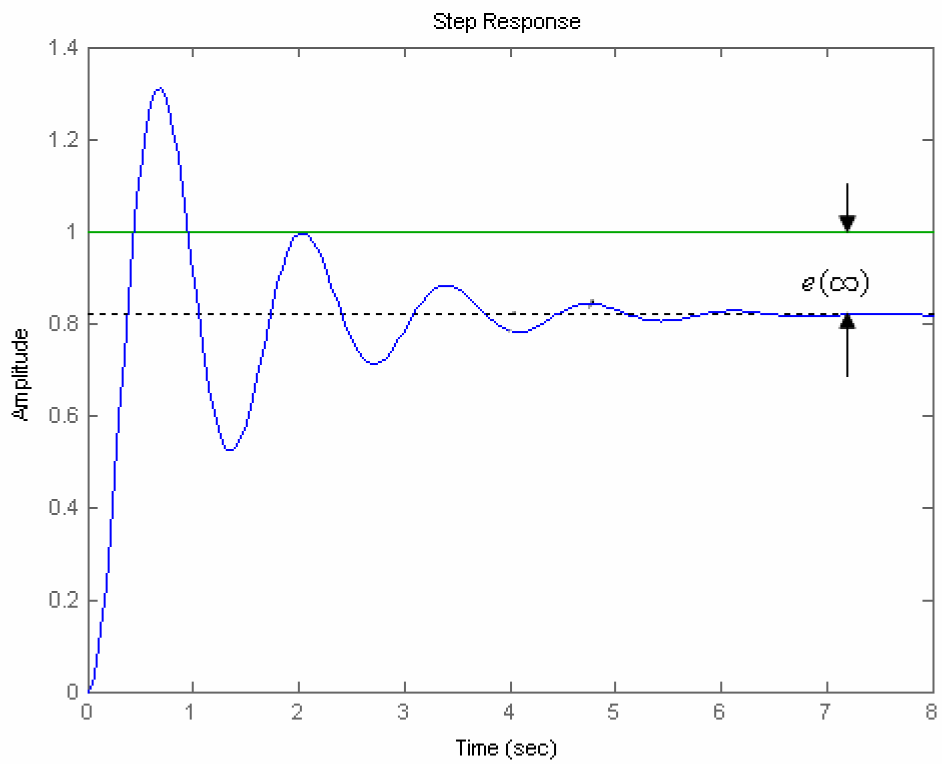
$$e'(\infty) = \left[\frac{s\frac{r_0}{s}}{1 + W(s)} \right]_{s\to 0} = \frac{r_0}{1 + K_p}. \tag{4.18}$$

Очигледно, синал грешке у стационарном стању за системе нултог реда астатизма има коначну вредност (Сл. 4.4) која је мања уколико је константа положаја већа.

Имајући у виду облик функције повратног преноса, дефинисан за најопштији случај, јасно је да повећањем реда астатизма констатнта положаја тежи бесконачности па ће грешка у случају одскочне побудне функције бити нула.

Уколико се уместо одскочне функције, под истим условима у погледу реда астатизма, за побуду примени сигнал нагибног облика чији је коефцијент нагиба v_0 тада се добија

$$e'(\infty) = \left[\frac{s\dfrac{v_0}{s^2}}{1+W(s)} \right]_{s\to 0} \to \infty\,, \tag{4.19}$$



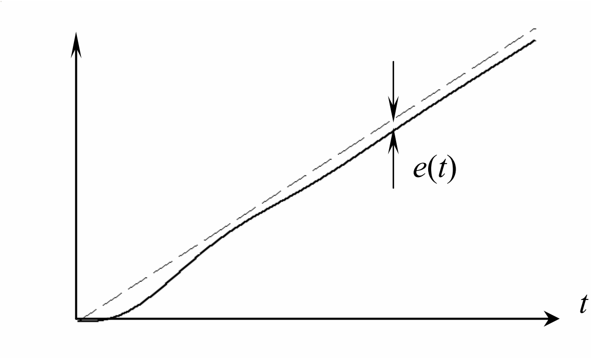
Сл 4.4 Илустрација грешке у стацуионарном стању за систем са функцијом повратног преноса нултог реда астатизма

односно сигнал грешке у стационарном стању непрекидно расте. Сличан резултат се добија и у случају када је на улаз доведена параболична побудна функција. Можемо закључити да се вредност константе положаја узима као мера за оцену величине грешке у стационарном стању за случај система нултог реда астатизма када је на њихов улаз доведен константан сигнал.

Шта се дешава уколико повећамо ред астатизма, односно претпоставимо да функција повратног преноса има астатизам (r = 1)? У том случају константа положаја K_p има вредност која тежи бесконачности па ће грешка у случају побуде одскочном функцијом бити једнака нули. Оцена квалитета рада у стационарном стању, за системе са астатизмом првог реда, заснива се на вредности брзинске константе K_v дефинисане једначином (4.16). У случају система са астатизмом првог реда она има коначну вредност, односно $K_v = K_r$. Уколико се, при томе, на улазу система примењује сигнал који се линеарно мења, односно сигнал који има облик нагибне функције $u(t) = v \cdot t \cdot h(t)$ добија се

$$e'(\infty) = \left[\frac{s\dfrac{v}{s^2}}{1+W(s)}\right]_{s\to 0} = \left[\frac{v}{sW(s)}\right]_{s\to 0} = \frac{v}{K_v}, \tag{4.20}$$

односно вредност грешке различита од нуле (слика 4.5).



Сл. 4.5 Илустрација грешке у стацуионарном стању за систем са функцијом повратног преноса астатизма првог реда

Овај режим рада система од посебног је интереса код сервосистема када се анализира тачност позиционирања константном брзином.

У случају да се под истим околностима, односно под претпоставком да систем има функцију повратног преноса првог реда, систем побуди сигналом облика параболичне функције ($u(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \cdot h(t)$) добија се

$$e'(\infty) = \left[\frac{s\dfrac{a}{s^3}}{1+W(s)}\right]_{s\to 0} = \left[\frac{\dfrac{a}{s}}{sW(s)}\right]_{s\to 0} = \left[\frac{\dfrac{a}{s}}{K_v}\right]_{s\to 0} \to \infty, \tag{4.21}$$

односно сигнал грешке у стационарном стању непрекидно расте.

Да би систем у том случају имао коначну грешку неопходно је да његова функција повратног преноса има својство астатизма другог реда, односно да важи услов (*r = 2*). Тада је у складу са једначином (4.17) константа убрзања $K_a = K_r$, а одговарајућа грешка има вредност

$$e'(\infty) = \left[\frac{s\dfrac{a}{s^3}}{1+W(s)} \right]_{s\to 0} = \left[\frac{a}{s^2 W(s)} \right]_{s\to 0} = \frac{a}{K_a}\,. \tag{4.22}$$

Остаје да размотримо како поремећај делује на грешку система у стационарном стању. С обзиром да је на основу (4.14) компонента грешке која настаје услед присуства поремећаја

$$e''(\infty) = -\left[\frac{sG_P(s)N_P(s)}{1+W(s)} \right]_{s\to 0} \tag{4.23}$$

видимо да поред функције повратног преноса и функција преноса G_p такође утиче својим редом астатизма на понашање система у стационарном стању. У том смислу неопходно је формирати одговарајућу једначину у складу са (4.23) да би се, у конкретном случају, проверило да ли и како поремећај утиче на величину грешке у стационарном стању.

ПРИМЕР 4.1:Одредите коначну вредност одзива система уколи његова Лапласова трансформација има облик

$$Y(s) = \frac{3(s+2)}{s(s^2+2s+10)}.$$

РЕШЕЊЕ: Директном применом теорема коначне вредности добија се

$$y(\infty) = sY(s)\big|_{s=0} = \frac{3\cdot 2}{10} = 0,6.$$

Добијени резултат указује на чињеницу да ће након завршетка прелазног процеса излазна променљива имати константну вредност $y(m)$ = 0,6.

ПРИМЕР 4.2: Одредите коначну вредност сигнала уколико његова Лапласова трансформација има облик

$$Y(s) = \frac{3}{s(s-2)}.$$

РЕШЕЊЕ: Директном применом теорема коначне вредности добија се

$$y(\infty) = sY(s)\big|_{s=0} = -\frac{3}{2}.$$

Добијени резултат заправо није тачан. Растављањем функције *Y(s)* на суму парцијалних разломака добија се

$$Y(s) = \frac{-3}{2}\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s-2)}.$$

Инверзна Лапласова трансформација суме парцијалних разломака је

$$y(t) = \left(\frac{-3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}\right).$$

Добијени резултат јасно указује на чињеницу да сигнал нема коначну вредност јер други члан, због присуства растуће експоненцијалне функције, неогарничено расте са временом.

НАПОМЕНА : *Теорем коначне вредности користите само у случају када функција Y(s) нема полова који се налазе десно од имагинарне осе! У противном случају добићете некоректне резултате.*

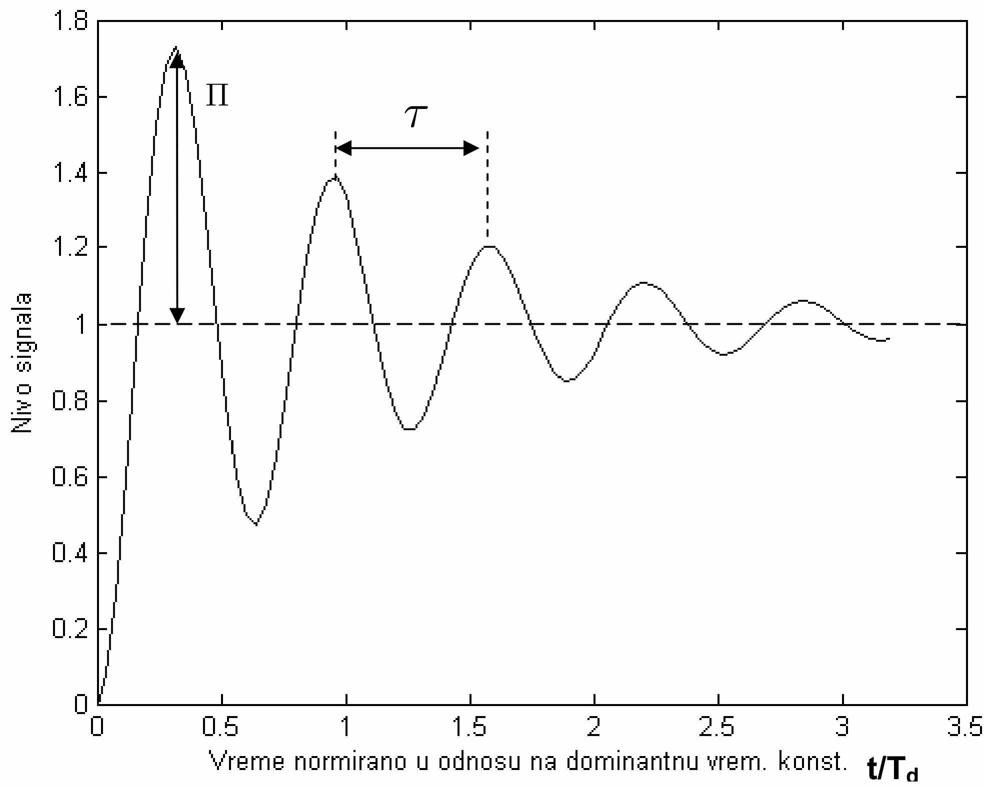
4.3 Карактеризација прелазног режима

Карактер прелазног режима, односно понашање система у времену непосредно након отпочињања деловања побудног сигнала или поремећаја одређен је конструктивним карактеристикама самог система. Видели смо, при моделирању система, да карактеристике саставних елемената и начин њиховог повезивања одређују облик и вредности параметара одговарајуће диференцијалне једначине, а самим тим и динамику његовог одзива у присуству побудног и поремећајног сигнала. Најпогодније је описати динамичка својства система у временском домену вредностима параметара његовог одзива на побуду одскочним сигналом као што су: прескок, време кашњења, време успона, време смирења, период осцилација и доминантна временска константа. Слика 4.6 приказује карактеристичне параметре одзива система другог реда.

Прескок Π се дефинише као разлика између првог максимума $\Pi(t_{M1})$ у одскочном одзиву система и величине овог одзива у стационарном режиму $\Pi(t \to \infty)$. Његова вредност у процентима $\Pi(\%)$, изражава се у односу на граничну вредност одзива када $t \to \infty$ користећи релацију

$$\Pi(\%) = \frac{\Pi(t_{M1}) - \Pi(t \to \infty)}{\Pi(t \to \infty)} \cdot 100 \tag{4.24}$$

Време кашњења T_k представља време неопходно да се на излазу система појави приметан сигнал. Дефинисано је као време током којег одскочни одзив достиже половину своје стационарне вредности.



Сл. 4.6 Илустрација одзива система са функцијом преноса другог реда на побуду јединичном одскочном функцијом.

Време успона T_u представља временски интервал током којег сигнал на излазу система оствари прираст од 10 до 90 процената вредности у стационарном стању. Његова вредност параметра може се одредити и као реципрочна вредност нагиба одскочног одзива система у тренутку $t = T_k$, односно када величина овог одзива достигне 50% своје граничне вредности. Време успона, поред брзине одзива, карактерише и способност система да верно репродукује улазне сигнале на свом излазу. Већем времену успона одговарају већа изобличења у преносу сигнала.

Време смирења T_S представља време неопходно да амплитуда осцилација у одскочном одзиву опадне на вредност мању од 2-5 процената од вредности у стационарном стању. Прелазни процес након овог времена нема значај за понашање система па се може занемарити.

Периода осцилација T дефинише се као временски интервал између два суседна максимума у одскочном одзиву.

Доминантна временска константа T_d означава време неопходно да анвелопа амплитуда прелазног процеса опадне на 37% своје почетне вредности. У стабилним линеарним системима, односно у случају када су сви полови функције преноса лево од имагинарне осе у комлексној равни, прелазни процеси исчезавају по експоненцијалном закону. У системима првог и другог реда компоненте прелазног процеса описују чланови типа $e^{-\sigma t}$ и $e^{-\sigma t}\sin(\omega t+\varphi)$ где је $\sigma > 0$. У оба случаја експоненцијални закон исчезавања прелазне појаве окарактерисан је фактором $e^{-\sigma t}$. У том случају доминантна временска константа T_d се одређује из услова $-\sigma t = -1$. Тада је $T_d = 1/\sigma$.

У системима вишег реда величина доминантне временске константе процењује се на основу положаја пара коњуговано комплексних полова који су најближи имагинарној оси у комплексној равни јер имају доминантан утицај на компоненту прелазног режима. С обзиром да је овај пар полова описан полиномом $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ биће $\sigma = \xi\omega_n$, односно доминантна временска константа има вредност

$$T_d \le \frac{1}{\xi\omega_n}. \tag{4.25}$$

У већини случајева функција преноса система вишег реда може се, занемаривањем полова и нула који незнатно утичу на понашање система у прелазном режиму, апроксимирати функцијом преноса другог реда. При томе су полови ове функције одређени положајем доминантних полова апроксимираног система.

4.4 Зависност одзива система од распореда полова и нула функције преноса

Дефинисање одзива система није ништа друго него задавање положаја полова и нула његове функције спрегнутог преноса у комплексној равни. Понашање већине система, након коректно пројектованог регулатора, најчешће се може описати функцијом преноса другог или трећег реда. Због тога је од посебног интереса детаљније разматрање неких типичних и релативно простих система.

4.4.1 Одзив система када функција преноса има само један реалан пол

Имајући у виду већ поменуте погодности у погледу примене Лапласове трансформације започнимо анализу одзива ситема превођењем његовог математичког модела из временског у комплексни домен. Нека је систем првог реда описан диференцијалном једначином

$$a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=cu(t) \tag{4.26}$$

У случају када су сви почетни услови једнаки нули Лапласовом трансформацијом ове једначине добија се

$$asY(s)+bY(s)=cU(s)\,, \tag{4.27}$$

односно

$$(as+b)Y(s)=cU(s)\,. \tag{4.28}$$

Одговарајућа функција преноса у комплексном домену има облик

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c}{(as+b)}\,. \tag{4.29}$$

Након дељења оба полинома у количнику са коефицијентом b добија се стандардна форма функције преноса

$$G(s)=\frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}s+1}\ , \tag{4.30}$$

која се увођењем супституција

$$K = \frac{c}{b} \text{ и } T = \frac{a}{b}$$

записује у облику

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}. \tag{4.31}$$

При томе K представља коефицијент статичког појачања, а T временску константу система.

Претпоставимо, за потребе даље анализе, да систем има јединично статичко појачање и да је побуђен сигналом чији опис одговара одскочној функцији са јединичном амплитудом. Тада је његов одзив у комплексном домену

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{Ts+1}. \tag{4.32}$$

За одређивање одзива система у временском домену неопходно је преписати приказани запис у виду суме парцијалних разломака како би се добили таблични облици одговарајућих Лапласових трансформација. С обзиром да у конкретном случају комплексни облик одзива система садржи два реална различита пола одговарајуће растављање има облик

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\frac{1}{Ts+1} &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{Ts+1} \\ &= \frac{A_0(Ts+1)+A_1 s}{s(Ts+1)}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Изједначавањем одговарајућих коефицијената у полиномима бројиоца добија се

$$A_0 = 1$$

$$A_0 T + A_1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad A_1 = -T$$

Комплексни лик одзива система се изражава на основу израчунатих коефицијената у облику суме функција

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1},$$

односно

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}. \tag{4.34}$$

С обзиром да се ове функције налазе у таблицама Лапласових трансформација одзив система у временском домену се одређује директно на основу датих решења

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right\} \tag{4.35}$$

$$y(t) = 1 - e^{\frac{-t}{T}} \tag{4.36}$$

4.4.2 Одзив система када функција преноса има два пола а нема коначних нула

Започнимо анализу одзива ситема поново превођењем његовог математичког модела из временског у комплексни домен. Нека је систем другог реда описан диференцијалном једначином

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = eu(t) \tag{4.37}$$

У случају када су сви почетни услови једнаки нули Лапласовом трансформацијом ове једначине добија се

$$as^2Y(s) + bsY(s) + cY(s) = eU(s)\,, \tag{4.38}$$

односно

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = eU(s)\,. \tag{4.39}$$

Одговарајућа функција преноса у комплексном домену има облик

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e}{(as^2 + bs + c)}\,. \tag{4.40}$$

Након дељења оба полинома у количнику са коефицијентом c добија се стандардна форма функције преноса

$$G(s) = \frac{\frac{e}{c}}{\frac{a}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1}\,, \tag{4.41}$$

која се увођењем супституција

$$K = \frac{e}{c}, \quad T^2 = \frac{a}{c} \;\text{ и }\; 2\xi T = \frac{b}{c}$$

записује у облику

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}. \tag{4.42}$$

Уколико се изврши нормализација како би коефицијент уз промењљиву највишег реда постао једнак јединици добија се још један стандардан запис функције преноса система другог реда

$$G(s) = \frac{K\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}. \tag{4.43}$$

При томе је, као и у претходном случају, K коефицијент статичког појачања, а ξ и ω представљају коефицијент пригушења и фреквенцију непригушених осцилација система другог реда. Значење последња два параметра биће јасније након објашњења која следе у овом тексту.

Уколико се ради једноставнијег записа поново претпостави јединични коефицијент статичког појачања у случају побуде система сигналом чији опис одговара јединичној одскочној функцији добија се комплексни одзив дефинисан једначином

$$Y(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\frac{1}{s} \tag{4.44}$$

За одређивање одзива система у временском домену неопходно је преписати приказани запис у виду суме парцијалних разломака како би се добили таблични облици одговарајућих Лапласових трансформација.

Облик еквивалентне суме парцијалних разломака зависи од положаја полова карактеристичног полинома $D(s) = s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2$ функције преноса система другог реда. Уколико је коефицијент пригушења $\xi>1$ полови су реални и различити. Одзив на јединичну одскочну функцију у том случају се лако добија као сума одзива два система првог реда. Временске константе тих система управо су одређене вредностима ових полова. Уколико је $\xi=1$ полови су једнаки. Ова вредност представља гранични случај јер даљим смањивањем вредности коефицијента пригушења, односно за вредности $0<\xi<1$, карактеристични полином садржи пар коњуговано комплексних полова

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm j\omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{4.45}$$

због чега одговарајућа сума парцијалних разломака има облик

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}\frac{1}{s} &= \frac{A_0}{s}+\frac{A_1 s + A_2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2} \\ &= \frac{A_0(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)+A_1 s^2 + A_2 s}{s(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)} \\ &= \frac{(A_0+A_1)s^2+(A_0 2\xi\omega + A_2)s + A_0\omega^2}{s(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)}\end{aligned} \tag{4.46}$$

С обзиром да важе једнакости

$$\begin{aligned}&A_0 = 1\\ &A_0 + A_1 = 0\\ &A_0 2\xi\omega + A_2 = 0\end{aligned}$$

као и због чињенице да је у случају коњуговано комплексних полова

$$s^2+2\xi\omega s+\omega^2 = (s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2) \tag{4.47}$$

добија се једнакост

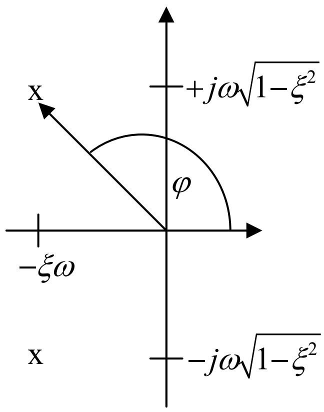
$$\begin{aligned}&\frac{\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}-\frac{s+2\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)}\\ &= \frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)}-\frac{\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)}\end{aligned} \tag{4.48}$$

С обзиром да су

$$\begin{aligned}&L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1\\ &L^{-1}\left\{\frac{s+\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)}\right\} = e^{-\xi\omega t}\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\\ &L^{-1}\left\{\frac{\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)}\right\} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}L^{-1}\left\{\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)}\right\}\\ &\qquad = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\end{aligned} \tag{4.49}$$

одзив система другог реда у временском домену на јединичну одскочну побуду описује се функцијом

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega t}\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\,. \tag{4.50}$$



Сл. 4.7 Положај полова за случај када је $0 \le \xi < 1$.

Имајући у виду распоред полова приказан на слици 4.7 лако се уочава да важе релације

$$\cos(\varphi) = -\xi \,, \qquad \sin(\varphi) = \sqrt{1-\xi^2} \tag{4.51}$$

на основу којих добијамо

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t)\cos(\varphi) - e^{-\xi\omega t}\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t)\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t)\cos(\varphi) - \frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t)\sin(\varphi) \tag{4.52}$$

Обједињавањем последња два члана једначине имамо

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t)\cos(\varphi) - \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t)\sin(\varphi)\right] \tag{4.53}$$

тако да се након примене адиционе теореме добија одзив система другог реда на јединичну степ побуду у коначном облику

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t) - \varphi)\right] \tag{4.54}$$

Одређивање екстремних вредности

Познато је да се положај екстремне вредности неке функције утврђује тако што се одреди њена прва деривација по временској променљивој *t*, а затим израчуна вредност ове променљиве када је деривација једнака нули. Као што знамо, у случају нултих почетних услова, операцији деривирања у временском домену одговара множење комплексног лика одговарајуће променљиве са комплексном променљивом *s*

$$\frac{dy(t)}{dt} = L^{-1}\left\{sY(s)\right\} \tag{4.55}$$

С обзиром да је излазна променљива система у конкретном случају

$$Y(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\frac{1}{s} \tag{4.56}$$

описаним поступком добија се

$$\frac{dy(t)}{dt} = L^{-1}\left\{\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\right\}. \tag{4.57}$$

Приметимо да добијени резултат представља функцију преноса конкретног система. Другим речима, можемо рећи да се прва деривација одзива система на степ побуду добија као инверзна Лапласова трансформација његове функције преноса. У случају коњуговано комплексног пара полова добија се

$$L^{-1}\left\{\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\omega^2}{(s+\xi\omega)^2 + \omega^2(1-\xi^2)}\right\}$$

$$L^{-1} = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} L^{-1}\left\{\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega)^2 + \omega^2(1-\xi^2)}\right\}$$

$$L^{-1} = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) \tag{4.58}$$

Уколико добијено решење изједначимо са нулом

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) = 0 \tag{4.59}$$

добија се једначина

$$\Rightarrow \omega\sqrt{1-\xi^2}t = k\pi, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{4.60}$$

из које следи резултат

$$t = \frac{k\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \tag{4.61}$$

Занима нас тренутак када настаје први максимум, зато што је највећи, па ћемо усвојити да је $k=1$ након чега се добија

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \tag{4.62}$$

Уврштавањем ове вредности у једначину одзива система на степ побуду добија се

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega\frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} - \varphi)\right], \tag{4.63}$$

односно

$$y(t) = 1 + \frac{e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\pi-\varphi) \cdot \tag{4.64}$$

Након примене адиционе теореме следи

$$y(t) = 1 + \frac{e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\sin(\pi)\cos(\varphi) - \cos(\pi)\sin(\varphi)\right]$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\varphi) \cdot \tag{4.65}$$

С обзиром да је $\sin(\varphi) = \sqrt{1-\xi^2}$ добија се

$$y(t) = 1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} . \tag{4.66}$$

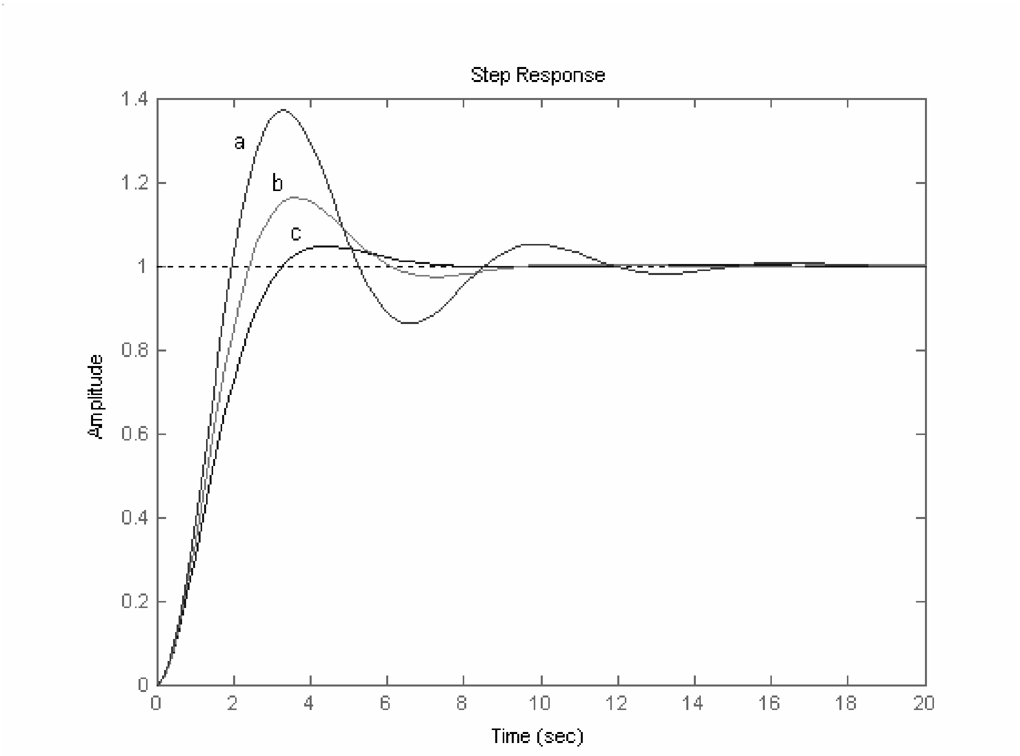
У конкретном случају, стационарна вредност излазне променљиве је $y(\infty) = 1$ услед чега је величина прескока

$$\Pi = y(t_1) - y(\infty) ,$$

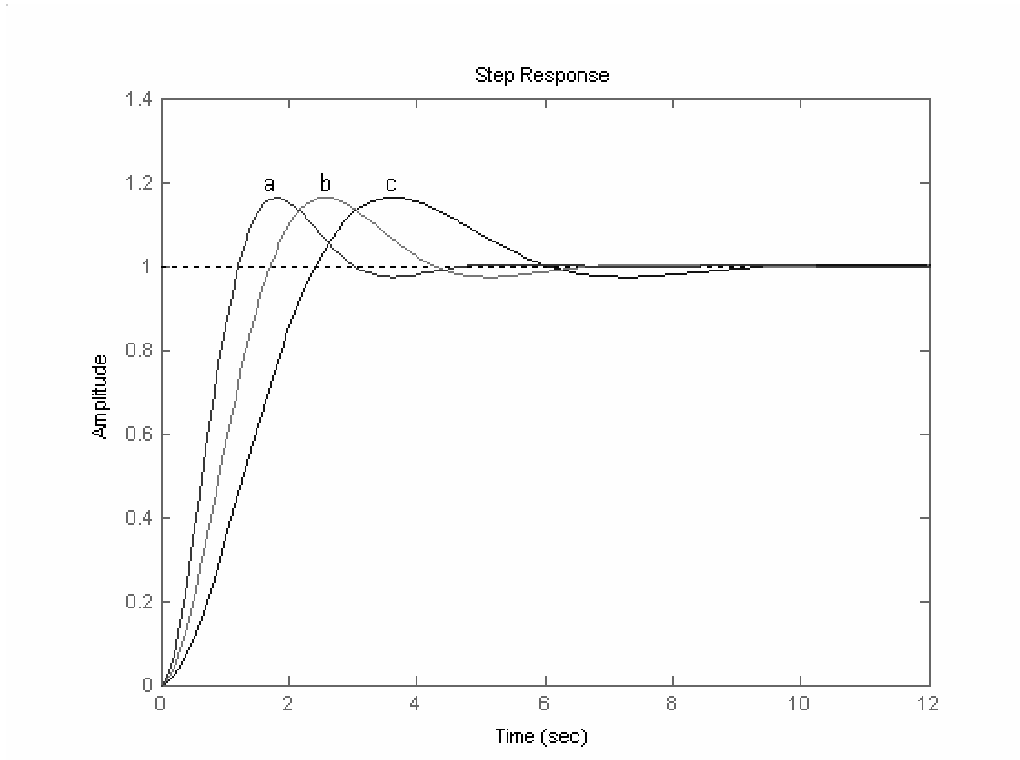
односно

$$\Pi = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} . \tag{4.67}$$

Приметимо да величина прескока зависи од коефицијента пригушења, али не и од фреквенције слободних осцилација. Слика 4.8 приказује одзив система другог реда на јединичну одскочну побуду при раличитим вредностима коефицијента пригушења ξ. При томе је, у свим случајевима, вредност временске константе $T = 1$. Слика 4.9 приказује одзив система другог реда у случају када му се



Сл. 4.8 Одзив система на побуду јединичном одскочном функцијом ($T=1$):
а) $\xi = 0,3$;b) $\xi = 0,5$; c) за $\xi = 0,7$;



Сл. 4.9 Одзив система на побуду јединичном одскочном функцијом (коефицијент пригушења у свим случајевима је $\xi = 0,7$): а) $T = 0,5$; b) $T = 1/\sqrt{2}$; c) $T = 1$

коефицијент пригушења не мења ($\xi = 0,5$), али се мења његова временска константа T. Јасно се уочава да промена вредности временске константе не утиче на величину прекока.

4.4.3 Одзив система када функција преноса има два пола и једну коначну нулу

Ова функција има облик

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2}{z_1} \frac{s + z_1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}. \tag{4.68}$$

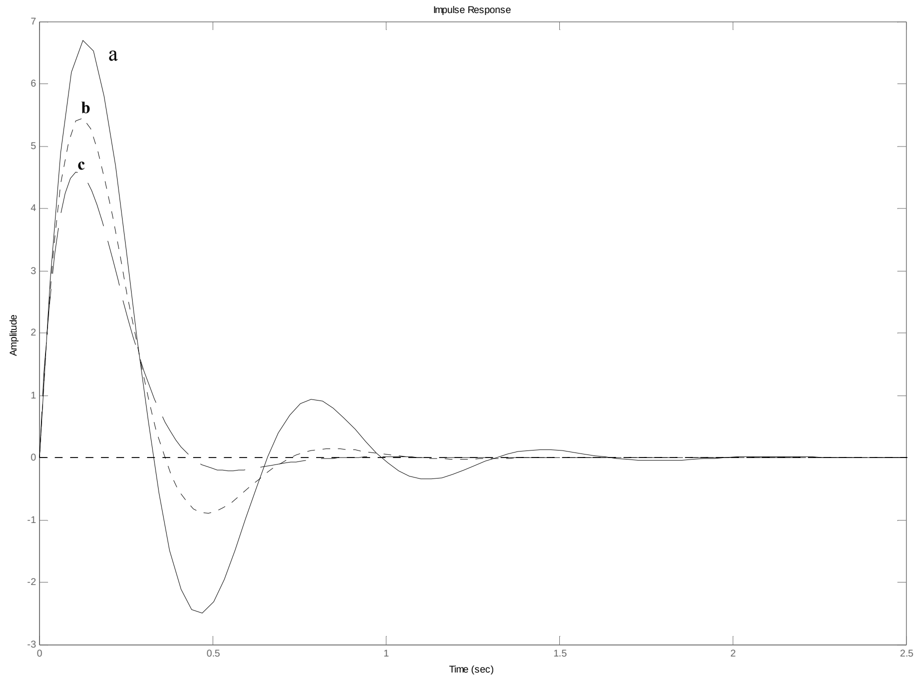
При томе z_1 представља њену реалну нулу. Уколико препишемо исту функцију у растављеном облику

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{s}{z_1} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \tag{4.69}$$

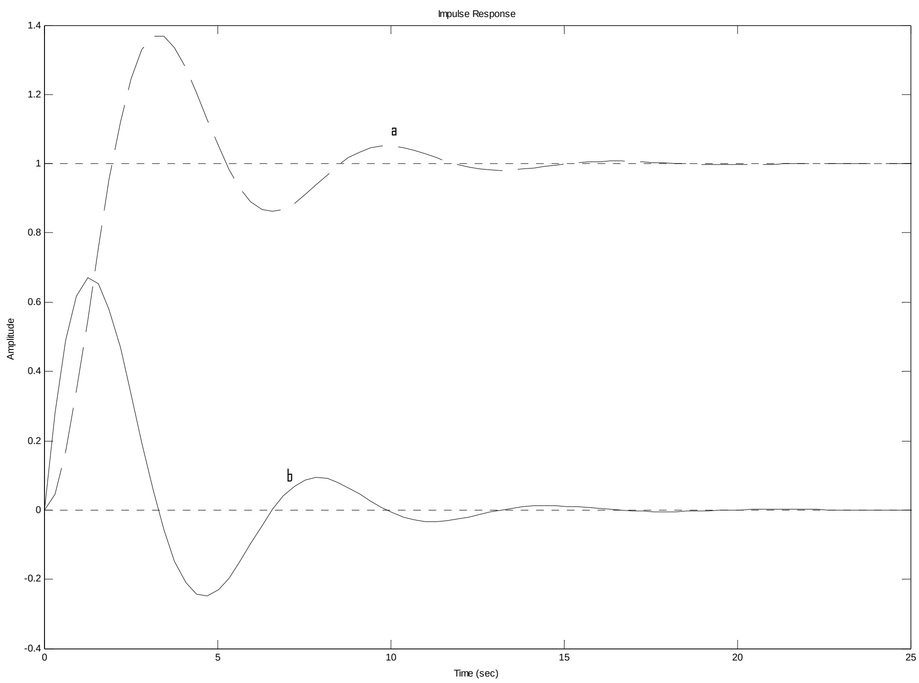
видимо да се она састоји из два члана. Први од њих одговара функцији преноса система другог реда са јединичним коефицијентом статичког појачања, као што је случај у једначини (4.44). Други члан се разликује само у присуству фактора s / z_1. Као што је познато множењу са комплексном променљивом s одговара операција деривирања у временском домену. Уколико означимо одскочни одзив система другог реда са $y_s(t)$ применом теореме о изводу оригинала добијамо да је одскочни одзив $y_z(t)$ система са два пола и једном реалном нулом

$$y_z(t) = y_s(t) + \frac{1}{z_1} \frac{dy_s(t)}{dt}. \tag{4.70}$$

Као што видимо овај одзив се добија сумирањем два сигнала од којих је први одскочни одзив система другог реда, а други његова деривација, односно импулсни одзив нормиран вредношћу реалног пола z_1. Слика 4.10 приказује импулсни одзив система другог реда при различитим вредностима коефицијента пригушења ξ. С обзиром да је импулсни одзив једнак деривацији одскочног одзива по времену, максимуми у одзиву $y_s(t)$ морају настати једновремено кад и прелази кроз нулу у импулсном одзиву, као што се може уочити на слици 4.11.



Сл. 4.10 Импулсни одзив система другог реда при различитим вредностима коефицијента пригушења: a) $\xi = 0,3$; b) $\xi = 0,5$; c) за $\xi = 0,7$



Сл. 4.11 Одзиви система другог реда без коначнх нула на побуду јединичном одскочном функцијом (а), јединичном импулсном функцијом (б). (при томе су параметри система $\xi = 0,3$, $T = 1$)

4.4.4 Одзив система када функција преноса има два комплексна и један реалан пол а нема коначних нула

Постојање реалног пола, поред два комплексна, успорава прелазни процес и смањује прескок при одзиву система на побуду одскочном функцијом. Проверимо ову тврдњу тако што ћемо анализирати понашање два система чије се функције преноса разликују само у присуству реалног пола $-p_3$.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \tag{4.71}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{p_3}{(s^2 + s + 1)(s + p_3)}. \tag{4.72}$$

У конкретном случају, положај комплексних полова је одређен фреквенцијом непригушених осцилација $\omega = 1$ и коефицијентом пригушења $\xi = 1/2$. Као што је познато, одскочни одзив система другог реда без коначних нула добија се након развоја одговарајуће функције преноса у суму парцијалних разломака

$$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

и примене инверзне Лапласове трансформације у облику

$$y(t) = 1 + C_1 e^{-\xi\omega t}\left[\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t) - \varphi_1)\right].$$

Одговарајућа сума парцијалних разломака за случај система који има и додатни реалн пол $-p_3$ има облик

$$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\frac{p_3}{s + p_3}\frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{B}{s + p_3}. \tag{4.73}$$

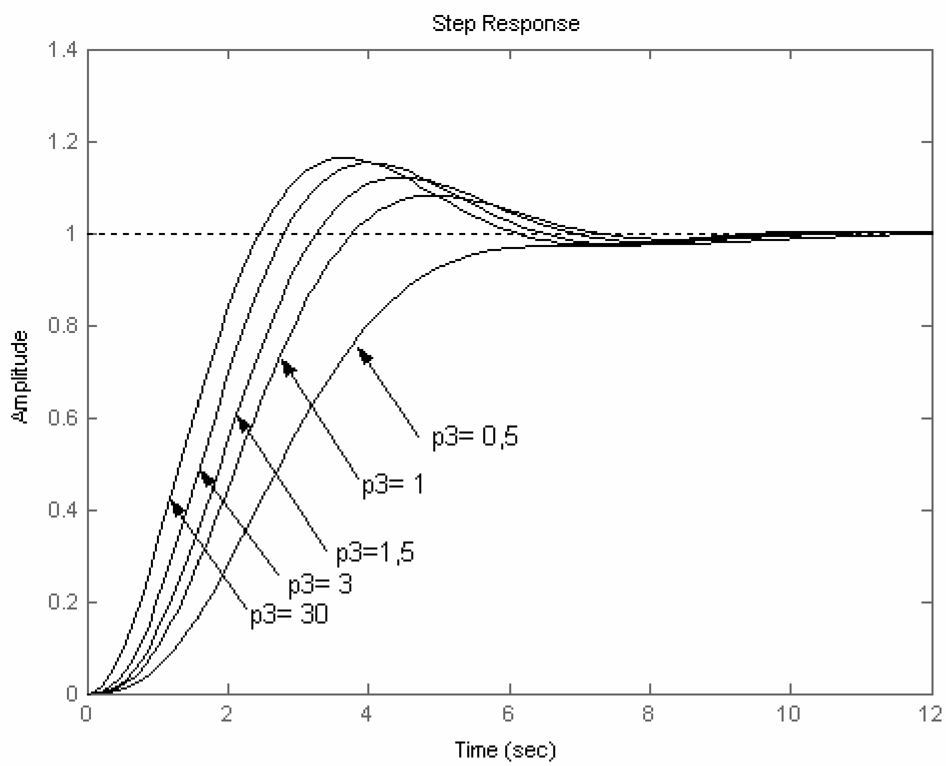
Због тога се у одзиву система $y_{p_3}(t)$ са паром комплексних и једним реалним полом појављује додатни члан

$$y_{p_3}(t) = 1 + C_2 e^{-\xi\omega t}\left[\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t) - \varphi_2)\right] + Be^{-p_3 t}. \tag{4.74}$$

чији је допринос одређен вредношћу коефицијента B

$$B = \lim_{s \to -p_3}(s + p_3)\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}\frac{p_3}{s + p_3}\frac{1}{s} = \frac{-\omega^2}{p_3{}^2 - 2\xi\omega p_3 + \omega^2}. \tag{4.75}$$

Анализом одзива (4.74) уочава се да присуство реалног пола $-p_3$ чија је вредност довољно велика, односно чији је положај довољно далеко од имагинарне осе у комплексној равни, доводи до тога да се његово присуство може занемарити. У том случају временска константа $1/p_3$ апериодичног члана e^{-p_3t} има малу вредност па он исчезава много брже него што одзив (4.74) достигне приметну вредност. С друге стране, имајући у виду резултат описан једначином (4.75), коефицијент B је мали у поређењу са јединицом. Слика 4.12 приказује одзив система описан функцијом преноса (4.72) при различитим вредностима p_3.



Сл. 4.12 Јединични одскочни одзив система са два комплексна и једним реалним полом .

Може се уочити да при вредностима p_3 које су много веће од реалног дела комплексних полова $\xi\omega$ (у конкретном случају је $\xi\omega = 1/2$) одзив система тежи одзиву система описаног функцијом преноса са два комлексна пола (4.71). Смањивањем вредности p_3 видимо да се ефекат недовољног пригушења смањује јер прескок постаје све мањи тако да при вредностима које су блиске вредности $\xi\omega$ исчезава. У конкретном случају, за случај када је $p_3 = \xi\omega$, прескок не постоји, односно његово понашање одговара понашању система са два комлексна пола и коефицијентом пригушења већим од један.

4.4.5 Полови и нуле чији се утицај на прелазни процес може занемарити

Полови чији је положај најближи имагинарној оси у комплексној равни имају највећи утицај на понашање система па се због тога називају доминантни полови. У претходном члану је показано да сви полови функције преноса система који се налазе довољно далеко од имагинарне осе у левој половини комплексне равни имају незнатан утицај на одскочни одзив система. У том смислу може се рећи да важи следеће правило: реалан пол имаће занемарљив утицај на одскочни одзив система ако је његово растојање од имагинарне осе бар шест пута веће од растојања доминантних полова у односу на имагинарну осу.

Уколико се у функцији преноса система појављују полови и нуле блиских вредности онда се комбинација таквог пола и нуле назива дипол. Утицај дипола на одскочни одзив система је незнатан. Ово ћемо показати на примеру функције преноса која садржи нулу $z=-n$ и пол $p=-(n+\Delta)$. При томе је $\Delta \ll n$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(n+\Delta)\omega^2(s+n)}{(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)(s+(n+\Delta))} \tag{4.76}$$

Присуство пола $p=-(n+\Delta)$ у функцији преноса испољава се у постојању члана $Ke^{-(n+\Delta)t}$ у одскочном одзиву. Међутим, постојање нуле $z=-n$ чији је положај близак положају овог пола чини да коефицијент

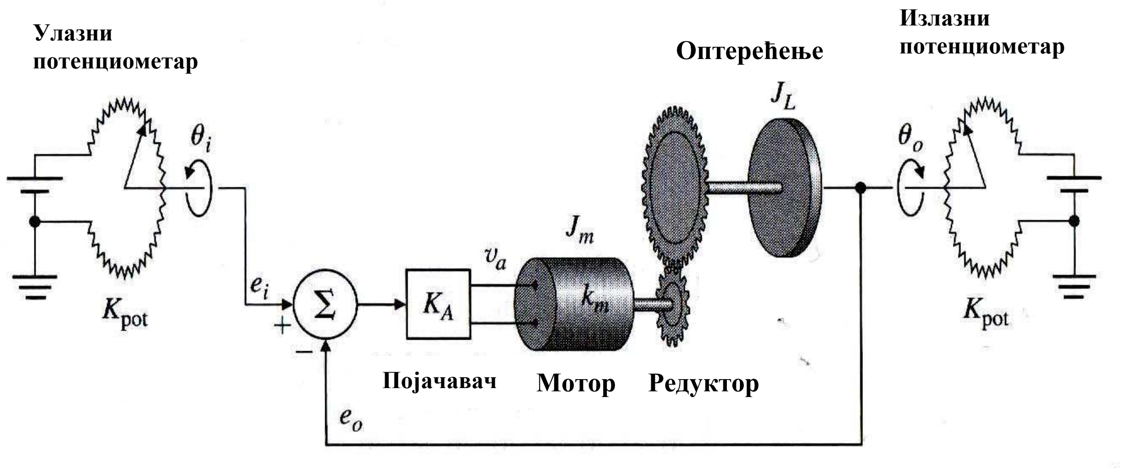
$$K=\lim_{s\to-(n+\Delta)}\bigg|_{\Delta\ll n}(s+(n+\Delta))\frac{(n+\Delta)\omega^2(s+n)}{(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)(s+(n+\Delta))}$$

$$K=\frac{-n(1+\dfrac{\Delta}{n})\Delta\omega^2}{n^2(1+\dfrac{\Delta}{n})^2-2\xi\omega n(1+\dfrac{\Delta}{n})+\omega^2}\approx-\Delta n\frac{\omega^2}{n^2-2\xi\omega n+\omega^2} \tag{4.77}$$

има малу вредност због чега је допринос члана $Ke^{-(n+\Delta)t}$ занемарљив у одскочном одзиву система (4.76).

Очигледно, може се закључити да је при анализи понашања неког система могуће усвојити апроксимативну функцју преноса која се добија занемаривањем полова и нула чији су положаји међусобно блиски као и занемаривањем полова чије су реалне вредности довољно велике у односу на реалне вредности доминантних полова.

ПРИМЕР 4.3: Одредите функцију спрегнутог преноса за позициони сервосистем прказан на слици 4.13



Сл. 4.13 Позициони сервосистем

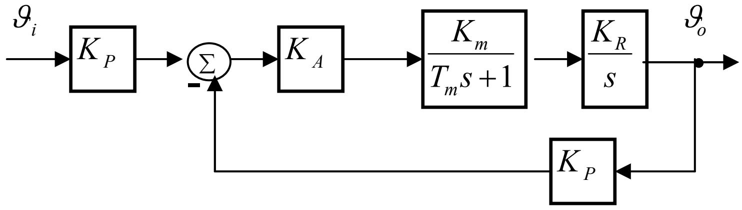
РЕШЕЊЕ: Потенциометри представљају безинерционе елементе па се описују као пропорционални елементи функцијом преноса $G_P = K_P$. Претпоставимо да је употребљен мотор напајан једносмерном струјом. Најчешће су његове динамичке карактеристике такве да се може описати функцијом преноса првог реда

$$G_m = \frac{K_m}{T_m s + 1}.$$

При томе је T_m временска константа, а K_m коефицијент статичког појачања мотора. Брзина осовине на излазу редуктора је много мања од брзине вратила мотора тако да је укупна промена угла на излазу позиционог система самерљива, односно има исти ред величине као и угаони закрет осовине потенциометра на улазу позиционог серво система. С обзиром да природа променљиве на улазу редуктора представља угаону брзину, а на излазу се помоћу потенциометра очитава угаони закрет односно интеграл угаоне брзине на излазу редуктора његова функција преноса мора имати облик

$$G_R = \frac{K_R}{s}$$

При томе K_R означава коефицијент пропорционалности између излазне и улазне угаоне брзине, а дељење са комплексном променљивом обезбеђује да излазна променљива представља интеграл угаоне брзине на излазу редуктора, односно угаону промену његовог положаја. На основу функција преноса појединих елемената система добија се структурни блок дијаграм приказан на слици 4.14



Сл. 4.14 Структурни блок дијаграм позиционог сервосистема приказаног на слици 4.13

Функција спрегнутог преноса, у конкретном случају, одговара функцији преноса апериодског елемента другог реда

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = K_P \frac{K_A \frac{K_m}{T_m s+1}\cdot\frac{K_R}{s}}{1+K_P K_A \frac{K_m}{T_m s+1}\cdot\frac{K_R}{s}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} &= \frac{K_P K_A K_m K_R}{T_m s^2 + s + K_P K_A K_m K_R} \\ &= \frac{1}{\frac{T_m}{K_P K_A K_m K_R}s^2 + \frac{1}{K_P K_A K_m K_R}s+1} \\ &= \frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1}.\end{aligned}$$

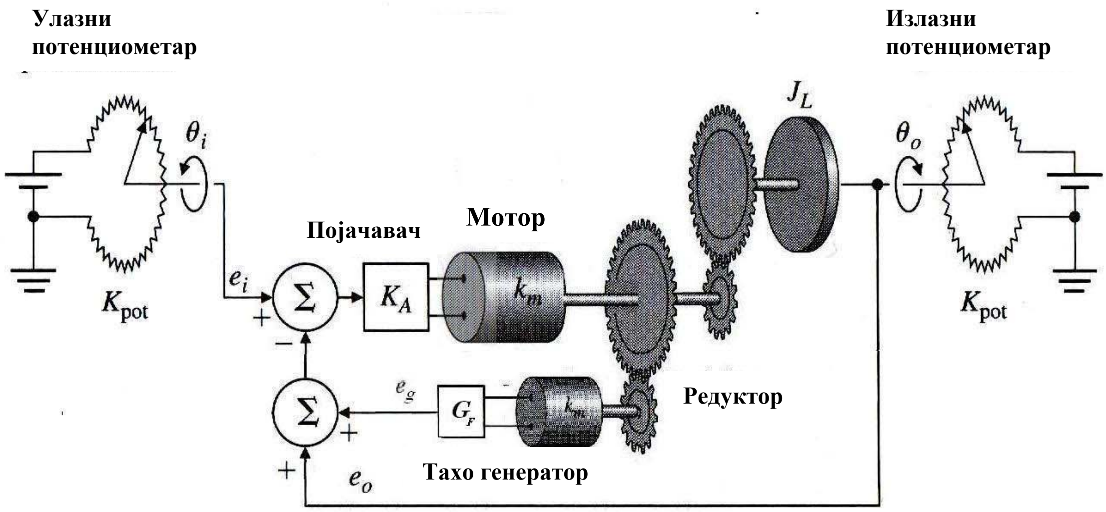
Користећи еквиваленције

$$T_0^2 = \frac{T_m}{K_P K_A K_m K_R}; \qquad 2\xi T_0 = \frac{1}{K_P K_A K_m K_R}$$

могу се одредити временска константа T_0 и коефицијент пригушења ξ конкретног позиционог сервосистема

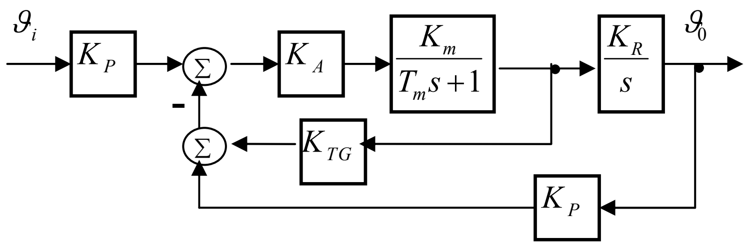
$$T_0 = \sqrt{\frac{T_m}{K_P K_A K_m K_R}}; \qquad \xi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{K_P K_A K_m K_R T_m}}{K_P K_A K_m K_R T_m}.$$

ПРИМЕР 4.4: Одредите функцију спрегнутог преноса за позициони сервосистем са брзинском повратном спрегом приказан на слици 4.15



Сл. 4.15 Позициони сервосистем са брзинском повратном спрегом

РЕШЕЊЕ: Једина разлика у односу на претходни ситем је постојање тахогенератора којим се обезбеђује локална повратна спрега. С обзиром да њено присуство обезбеђује информацију о брзини промене угла на излазу система она се у литературу често назива брзинска повратна спрега.



Сл. 4.16 Структурни блок дијаграм позиционог сервосистема са брзинском повратном спрегом приказаног на Сл. 4.15

Приказани структурни блок дијаграм система са брзинском повратном спрегом омогућава да се одреди функција спрегнутог преноса

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = K_P \frac{K_A \dfrac{K_m}{T_m s+1}\cdot\dfrac{K_R}{s}}{1+K_{TG}K_A\dfrac{K_m}{T_m s+1}+K_P K_A\dfrac{K_m}{T_m s+1}\cdot\dfrac{K_R}{s}}$$

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{K_P K_A K_m K_R}{T_m s^2 + (1 + K_{TG} K_A K_m)s + K_P K_A K_m K_R}$$

која поново одговара функцији преноса апериодског елемента другог реда.

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{1}{\dfrac{T_m}{K_P K_A K_m K_R} s^2 + \dfrac{1 + K_{TG} K_A K_m}{K_P K_A K_m K_R} s + 1}$$

$$= \frac{1}{T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1}$$

Након увођења одговарајућих еквиваленција

$$T_1^2 = \frac{T_m}{K_P K_A K_m K_R}; \qquad 2\xi_1 T_1 = \frac{1 + K_{TG} K_A K_m}{K_P K_A K_m K_R}$$

може се видети да је временска константа ситема остала непромењена,

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_m}{K_P K_A K_m K_R}},$$

односно $T_1 = T_0$, али се због увођења локалне, брзинске, повратне спреге променио коефицијент пригушења

$$\xi_1 = (1 + K_{TG} K_A K_m) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{K_P K_A K_m K_R T_m}}{K_P K_A K_m K_R T_m}$$

односно важи однос

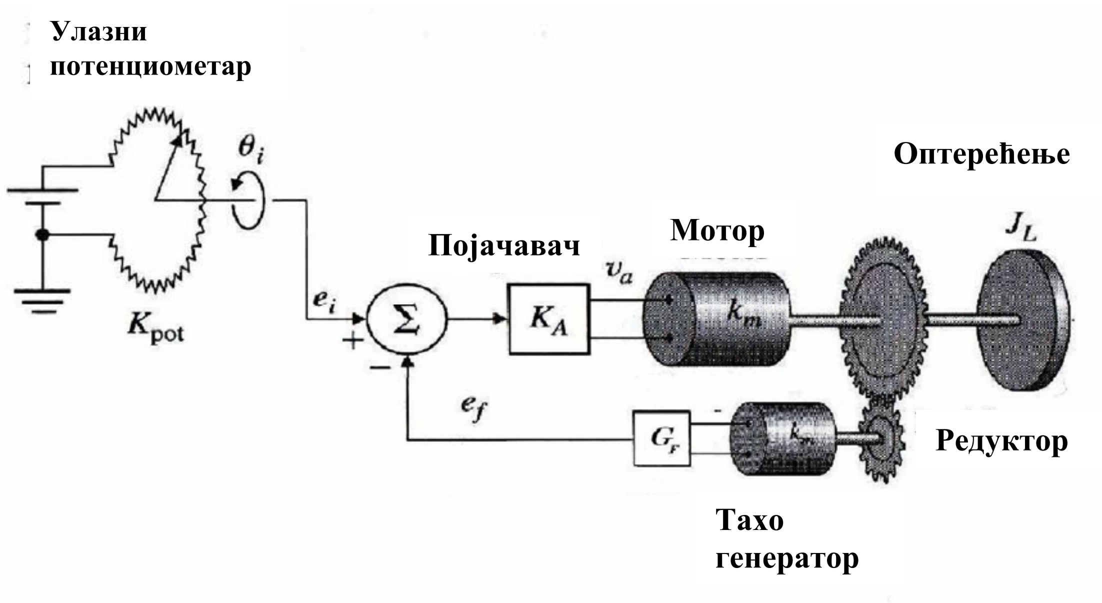
$$\xi_1 = (1 + K_{TG} K_A K_m)\xi.$$

Очигледно, присуство брзинске повратне спреге омогућава подешавање динамичких карактеристика система.

ПРИМЕР 4.5: Одредите функцију спрегнутог преноса за брзински сервосистем прказан на слици 4.17

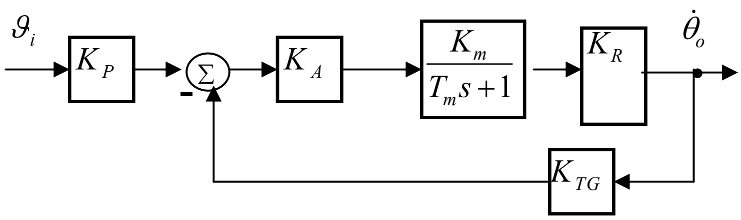
РЕШЕЊЕ: Уколико се потенциометар, мотор, редуктор са оптерећењем, и тахогенератор опишу функцијама преноса

$$G_P = K_P, \quad G_m = \frac{K_m}{T_m s + 1}, \quad G_R = \frac{K_R}{s}, \quad G_{TG} = K_{TG}$$



Сл. 4.17 Брзински сервосистем

при чему је T_m временска константа мотора, а K_m и K_R су коефицијенти статичког појачања мотора и редуктора са оптерећењем добија се структурни блок дијаграм брзинског сервосистема



Сл. 4.18 Структурни блок дијаграм система на слици 4.17

чија функција спрегнутог преноса одговара функцији преноса апериодског елемента првог реда

$$\frac{\dot{\theta}_o(s)}{\theta_i(s)} = K_P \frac{\dfrac{K_m}{T_m s+1}\cdot K_A K_R}{1+K_{TG}K_A\dfrac{K_m}{T_m s+1}K_R}$$

$$= K_P \frac{K_m K_A K_R}{T_m s + (1+K_{TG}K_A K_m K_R)}$$

$$\frac{\dot{\theta}_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\dfrac{K_P K_m K_A K_R}{1 + K_{TG} K_A K_m K_R}}{\dfrac{T_m}{1 + K_{TG} K_A K_m K_R} s + 1}$$
$$= \frac{K_0}{Ts + 1}$$

Користећи еквиваленције

$$K_0 = \frac{K_P K_m K_A K_R}{1 + K_{TG} K_A K_m K_R}; \qquad T = \frac{T_m}{1 + K_{TG} K_A K_m K_R}$$

могу се одредити коефицијент статичког појачања K_0 и временска константа система T .

ПРИМЕР 4.6: Одредите одзив система описаног диференцијалном једначином

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

ако су почетни услови $y(0) = y_{0,}\ \dot{y}(0) = 0.$

РЕШЕЊЕ: Очигледно, ради се о систему без побуде. Одзив настаје због постојања почетних услова који се разликују од нуле $(y(0) = y_0)$. Понашање система у оваквим околностима у литератури се назива слободан одзив система.

При решавању постављеног задатка треба имати у виду облик инверзне Лапласове трансформације деривација неке функције при почетним условима различитим од нуле. С обзиром да је

$$L^{-1}\{\dot{y}\} = sY(s) - y(0^-),$$
$$L^{-1}\{\ddot{y}\} = s^2 Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-),$$

у конкретном случају се добија

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 2\xi\omega[sY(s) - y(0^-)] + \omega^2 Y(s) = 0.$$

Након увођења заданих почетних услова следи

$$s^2 Y(s) - sy_0 + 2\xi\omega[sY(s) - y_0] + \omega^2 Y(s) = 0$$
$$s^2 Y(s) + 2\xi\omega sY(s) + \omega^2 Y(s) = sy_0 + 2\xi\omega y_0,$$

односно

$$\frac{Y(s)}{y_0} = \frac{s + 2\xi\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}.$$

Да би одредили одзив система у временском домену неопходно је да функцију спрегнутог преноса раставимо тако да сума парцијалних разломака садржи Лапласове трансформације елементарних функција. У том смилу можемо написати

$$\frac{s + 2\xi\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} = \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)},$$

односно

$$\frac{s + 2\xi\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} = \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)}.$$

Након примене инверзне Лапласове трансформације

$$L\left\{\frac{Y(s)}{y_0}\right\} = L\left\{\frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)}\right\} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot L\left\{\frac{\omega\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)}\right\},$$

добија се

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{-\xi\omega t}\cos(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega t}\sin(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t),$$

односно

$$\frac{y(t)}{y_0} = \frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(\sqrt{1 - \xi^2}\cos(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t) + \xi\sin(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t)\right)\cos(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t).$$

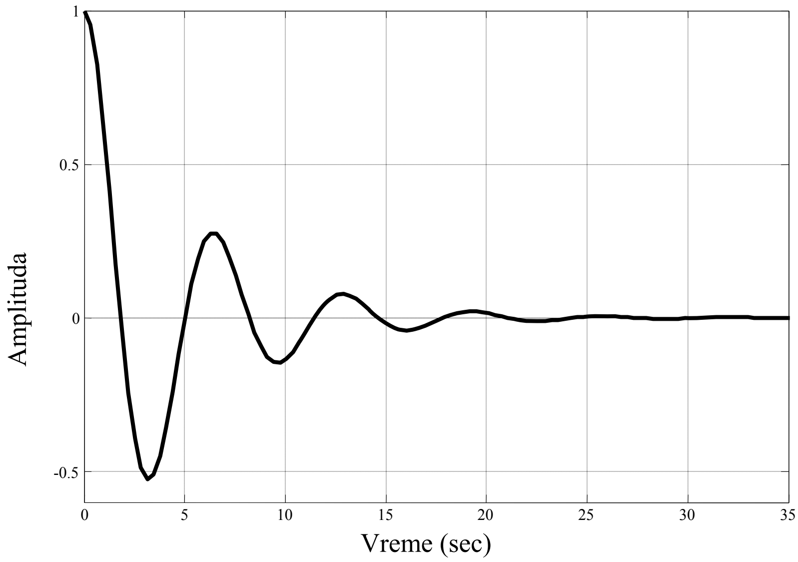
Уколико се усвоји да је $\cos\beta = \xi$, а $\sin\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$ добија се

$$y(t) = y_0\frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(\sin\beta\cos(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t) + \cos\beta\sin(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t)\right),$$

односно

$$y(t) = y_0\frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1 - \xi^2}}\sin(\omega\sqrt{1 - \xi^2}t + \beta).$$

Добијени резултат указује на закључак да одзив система тежи нули у виду хармонијских осцилација чије се амплитуде смањују у складу са експоненцијалним законом. На слици 4.19 приказан је слободан одзив система под претпоставком да је $y(0) = 1$, $\omega = 1$, $\xi = 0,2$.



Сл. 4.19 Слободан одзив система у примеру 4.6

4.5 Интегрални индекси перформансе

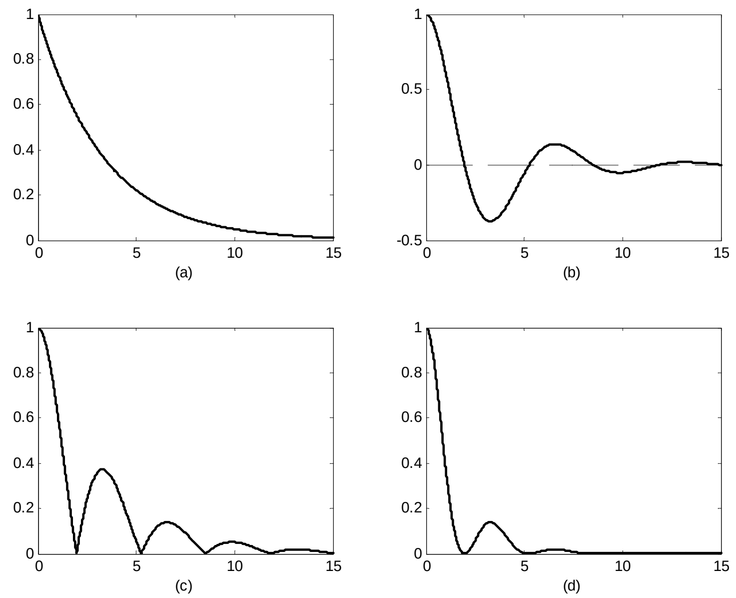
Интегрални индекси перформансе омогућавају да се на јединствен начин оцени динамичко понашање система јер обједињавају информације о релевантним динамичким карактеристикама система као што су претек стабилности и брзина реаговања система. Дефинисани су путем интеграла у којем подинтегрална функција има за аргумент сигнал грешке система

$$I_1(t) = \int_0^{\infty} e(t)dt. \tag{4.78}$$

При томе грешка, у општем случају, представља одступање излазне величине система од жељене вредности. У стабилним системима интеграл (4.78) има коначну вредност. Геометријски, ова вредност представља површину ограничену кривом грешке и временском осом (Сл. 4.20 (а)). Пожељно је да ова површина буде што мања јер су тада прескок и време смирења прелазног процеса мањи. Уколико је познат комплексни лик сигнала грешке $E(s)$ интеграл (4.78) одређујемо на следећи начин

$$I_1(t) = \int_0^{\infty} e(t)dt = \lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e(t)e^{-st}dt = \lim_{s\to 0} E(s). \tag{4.79}$$

Овај критеријум се може примењивати само у случајевима када прелазни процес има апериодични карактер, односно када грешка не мења знак са временом (Сл. 4.20(а)). У случају осцилаторног карактера прелазног процеса грешка мења знак током времена (Сл. 4.20.(б)) па се сабирањем позитивних и негативних вредности одговарајућих површина добија вреност интеграла I_1 која не одражава реалну слику о карактеру прелазног процеса система.



Сл. 4.20 Графички приказ интегралних критеријума

Недостатак овог критеријума може се отклонити уколико се израчуна интеграл апсолутне вредности (Сл. 4.20(ц))

$$I_2(t) = \int_0^{\infty} |e(t)|\, dt, \tag{4.80}$$

али се овај критеријум не примењује због потешкоћа које настају при његовом израчунавању. Најчешће се примењује интегрални критеријум познат као интеграл квадрата грешке (Сл. 4.20(д))

$$I(t) = \int_0^{\infty} e^2(t) dt, \qquad e(t) \to 0 \quad \text{kada} \ t \to \infty, \tag{4.81}$$

јер његова вредност не зависи од знака грешке, а самим тим и од природе прелазног процеса, односно од тога да ли је апериодичан или осцилаторан.

4.6 Резиме

Анализа понашања система управљања треба да омогући стицање увида у величину одступања вредности управљане променљиве у односу на унапред задане вредности. Уколико је ова вредност позната за сваки тренутак времена тада постоји потпуна информација о својствима система којег посматрамо.

Имајући у виду разноликост сигнала који се могу појавити на улазу система, из практичних разлога, усвојени су типични облици њихове промене као што су одскочна, нагибна и параболична функција како би се остварио стандардан приступ при оцени квалитета понашања система. Предложено је и више типова критеријума, односно индекса перформанси, за оцену квалитета понашања система критеријуми за оцену тачности рада система у стационарном стању, критеријуми који служе за оцену брзине одзива система на побуду одговарајућим улазним сигналима и поремећајима, критеријуми за оцену резерве стабилности и интегрални индекси перформансе дефинисани путем интеграла у којем подинтегрална функција има за аргумент сигнал грешке система. Критеријуми прве три групе омогућавају увид у поједине перформансе система. За разлику од њих интегрални критеријуми представљају показатеље који својом вредношћу обједињавају информације о релевантним динамичким карактеристикама система као што су претек стабилности и брзина реаговања система.

С обзиром да конструктивне карактеристике објекта управљања најчешће није могуће мењати адекватан избор регулатора формираног серијском везом компензатора и извршног органа представља једини начин да се утиче на понашање система у целини. У зависности од параметара објекта управљања, захтеваних карактеристика система у целини као и реалних ограничења у случају линеарних континуалних ситема у пракси се користе пропорционални, интегрални и диференцијални закон управљања, или нека од њихових комбинација, за реализацију одговарајућег регулатора.

Квалитет рада система аутоматског управљања у стационарном стању одређује се на основу величине сигнала грешке у присуству стандардних сигнала и поремећаја. Анализа величине грешке у стационарном стању има смисла само уколико је систем стабилан, односно уколико прелазни процес изазван неким сигналом или услед поремећаја исчезава током времена након побуде. Вредност грешке у стационарном стању зависи од структуре и параметара система, одосно од облика функције спрегнутог преноса $W(s)$, функције преноса по сигналу поремећаја као и од типа и величине побудног сигнала и поремећаја. Зависно од реда астатизма функције повратног преноса при одређивању величине сигнала грешке усвојени су погодно дефинисани параметри као што су константа положаја K_p, брзинска константа K_v и константа убрзања K_a. Карактер прелазног режима, односно понашање система у времену непосредно након отпочињања деловања побудног сигнала или поремећаја одређен је конструктивним карактеристикама самог система.

Карактеристике саставних елемената система и начин њиховог повезивања одређују облик и вредности параметара одговарајуће диференцијалне једначине, а самим тим и динамику његовог одзива у присуству побудног и поремећајног сигнала.

Најпогодније је описати динамичка својства система у временском домену вредностима параметара његовог одзива на побуду одскочним сигналом као што су: прескок, време кашњења, време успона, време смирења, период осцилација и доминантна временска константа.

Понашање већине система, након коректно пројектованог регулатора, најчешће се може описати функцијом преноса другог или трећег реда. Због тога је од посебног интереса детаљније разматрање система описаних овим функцијама.

У зависности од распореда полова функције преноса одзив система другог реда на одскочну побуду може бити са прескоком или без њега. Величина прескока одређена је коефицијентом пригушења који се појављује у случају када систем садржи коњугоавно комплексно распоређене полове. Њиховим приближавањем имагинарној оси коефицијент пригушења опада па прескок постаје већи. При томе је фреквенција пригушених осцилација одређена удаљеношћу ових полова од почетка координатног система у коплексној равни.

У случају када систем поседује два пола и једну коначну нулу одзив система садржи два члана. Први од њих одговара одзиву система описаног функцијом преноса система другог реда, а други представља његову деривацију.

Постојање реалног пола у финкцији преноса, поред два комплексна, успорава прелазни процес и смањује прескок при одзиву система на побуду одскочном функцијом.

Присуство реалног пола чија је вредност довољно велика, односно чији је положај довољно далеко од имагинарне осе у комплексној равни, доводи до тога да се његово присуство може занемарити.

Полови чији је положај најближи имагинарној оси у комплексној равни имају највећи утицај на понашање система па се због тога називају доминантни полови. Уколико је растојање реаланог пола бар шест пута веће од растојања доминантних полова у односу на имагинарну осу имаће занемарљив утицај на одскочни одзив система.

Уколико се у функцији преноса система појављују полови и нуле блиских вредности онда се комбинација таквог пола и нуле назива дипол. Утицај дипола на одскочни одзив система је незнатан.

4.7 Питања за проверу знања

1. Шта су то константа положаја, брзинска константа и константа убрзања?
2. Како ред астатизма система утиче на величину грешке у стационарном стању?
3. Дефинишите параметре који одређују одзив система другог реда у прелазном режиму током побуде одскочним сигналом.
4. Одредите одзив система на јединичну одскочну побуду у случају када његова функција преноса поседује само један реалан пол.
5. Одредите одзив система на јединичну одскочну побуду у случају када његова функција преноса поседује пар коњугованокомплексних полова.
6. Када настаје и шта одређује величину прескока у одзиву система другог реда?
7. Какав је одзив система уколико његова функција преноса поседује нулу и два пола?
8. Какав је одзив система ако његова функција преноса поред пара комплексних полова поседује и један реални пол, а нема коначних нула?

9. Нацртајте структурни блок дијаграм позиционог серво система и објасните принцип његовог рада.
10. Нацртајте структурни блок дијаграм брзинског серво система и објасните принцип његовог рада.
11. Објасните утицај присуства брзинске повратне спреге на динамичке карактеристике позиционог серво система.
12. Шта представљају интегрални индекси перформансе?

5

СТАБИЛНОСТ СИСТЕМА АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА

Циљ овог поглаља је да се дефинише стабилност система и објасне процедуре, познате под називом алгебарски критеријуми, на основу којих се процењује да ли су испуњени довољни услови да систем буде стабилан.

Синтеза сваког система аутоматског управљања започиње управо постављањем захтева у погледу његове стабилности јер само у случају стабилног система има смисла говорити о његовим карактеристикама у прелазном и стационарном режиму рада. У случају континуалних, временски непроменљивих система дефинисани су погодни критеријуми који омогућавају да се овај, у општем случају веома комплексан задатак, реши примењујући неки од познатих критеријума.

Као што је познато одзив система $y(t)$ састоји се из компоненте прелазног режима (прелазни процес) $y_{pr}(t)$ и компоненте стационарног стања $y_{st}(t)$

$$y(t) = y_{pr}(t) + y_{st}(t)\,. \tag{5.1}$$

Уколико се анализа одзива система обавља у временском домену каже се да је исти стабилан ако и само ако компонента прелазног режима ишчезава након довољно дуго времена

$$\lim_{t\to\infty} y_{pr}(t) = 0\,, \tag{5.2}$$

односно

$$\lim_{t\to\infty}[y(t) - y_{st}(t)] = 0\,. \tag{5.3}$$

У супротном случају линеаран систем је нестабилан или гранично стабилан. Нестабилност подразумева да једна или више променљивих стања попримају бесконачне вредности или постају осцилаторне функције времена када вредност временске променљиве тежи бесконачности ($t \to \infty$). Уколико нека променљива стања, током времена, одступа у коначним границама од очекиване вредности каже се да је систем гранично стабилан.

Исти проблем се може анализирати на основу положаја полова у комплексном домену. Претпоставимо да је функција преноса конкретног система развијена у одговарајућу суму парцијалних разломака. У случају када су положаји полова функције преноса у комплексној равни такви да се налазе лево од имагинарне осе инверзне Лапласове трансформације појединих чланова суме имају такав облик да њихове вреднсти, временом, постају све мање па је систем стабилан. У случају када се један пар коњуговано комплексних полова налази на имагинарној оси одзтив система на импулсну побуду садржаће осцилаторну функцију ограничене амплитуде због чега је систем гранично стабилан. У случају да се реалан пол налази у координатном почетку систем има константан одзив па је такође на граници стабилности. Постојање полова на десној страни од имагинарне осе доводи до појаве одзива чије вредности расту током времена па је систем тада нестабилан. Очигледно, при анализи стабилности система треба поћи од његове карактеристичне једначине. С обзиром да је повећањем реда једначине њено решавање све сложеније развијене су алгебарске методе које омогућавају да се стабилност ситема одреди на основу њених коефицијената.

Потреба да сви полови система имају негативан реални део, односно да буду лево од имагинарне осе доводи до дефиниције неопходног, али не и довољног услова да систем буде стабилан, а то је захтев да сви коефицијенти каркатеристичне једначине буду позитивни. Овај закључак је лако прихватити уколико се има у виду облик карактеристичне једначине у факторизованом облику

$$a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)=0 \tag{5.4}$$

У стабилним системима сви корени ове једначине морају бити негативни: $s_1=-\sigma_1,\ s_2=-\sigma_2, \ldots, s_n=-\sigma_n$. Тада се добија

$$a_n(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)\cdots(s+\sigma_n)=0 \tag{5.5}$$

Очигледно, множењем се добија једначина

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.6}$$

чији сви коефицијенти морају бити већи од нуле.

У присуству коњуговано комплексних полова са негативним реалним деловима, $s_{1,2}=-\sigma \pm j\omega$, у опису карактеристичне једначине система појавиће се члан

$$(s+\sigma-j\omega)(s+\sigma+j\omega)=(s+\sigma)^2+\omega^2. \tag{5.7}$$

тако да ће, у случају када преостали реални полови имају негативне вредности, једначина (5.6) и даље имати све коефицијенте веће од нуле.

Услов да сви коефицијенти карактеристичног полинома буду позитивни уједно је и довољан услов за стабилност система ако његова карактеристична једначина не прелази други ред. У случају система вишег реда неопходне и довољне услове стабилности дају алгебарски критеријуми Рауса и Хурвица.

5.1 Раусов критеријум стабилности

Примена овог критеријума заснива се на формирању шеме коефицијената

$$\begin{array}{c|llll} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & h_{n-1} & & & \end{array} \tag{5.8}$$

Очигледно, прве две врсте ове шеме се формирају на основу коефицијената карактеристичне једначине у складу са приказаним редоследом. Коефицијенти преосталих врста добијају се унакрсним множењем одговарајућих коефицијената двеју врста које им претходе:

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \quad b_{n-5} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \quad c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5.9}$$

При томе је број формираних врста већи за један од реда карактеристичне једначине. Приликом формирања врста шеме (5.8) дозвољено је множење, односно дељење, свих чланова неке врсте истом позитивном константом јер то нема утицај на коначан резултат. Прва колона ове шеме назива се Раусова колона. Суштина овог критеријума заснива се на чињеници да је број промена знака коефицијената у Раусовој колони управо једнак броју корена карактеристичне једначине који имају позитивне реалне делове. Имајући у виду наведену чињеницу следи дефиниција критеријума стабилности: Да би систем био стабилан, потребно је и довољно да сви коефицијенти Раусове колоне, формиране на бази карактеристичне једначине система, буду истог знака.

При одређивању стабилности, на основу развијених колона могу настати три различита случаја. У првом случају сви елементи прве колоне су различити од нуле. У другом случају постоје елементи прве колоне који су једнаки нули. Трећи случај представља ситуација када су сви елементи неке врсте једнаки нули.

1) СЛУЧАЈ КАДА СУ СВИ ЕЛЕМЕНТИ ПРВЕ КОЛОНЕ РАЗЛИЧИТИ ОД НУЛЕ

ПРИМЕР 5.1: Претпоставимо да систем има карктеристичну једначину:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

РЕШЕЊЕ: Развојем одговарајуће шеме добијају се колоне

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

Коефицијенти b_1 и c_1 рачунају се у складу са (5.9)

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2}, \qquad c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0 .$$

При томе је неопходно да буде испуњен услов $a_2 a_1 \geq a_0 a_3$ да би систем био стабилан.

ПРИМЕР 5.2: Претпоставимо да систем има карктеристичну једначину:

$$s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0 .$$

Одредите да ли се неки од коренова карактеристичне једначине налази десно од имагинарне осе.

РЕШЕЊЕ: Формирањем одговарајуће шеме добија се седам врста. Вредности свих коефицијената Раусове колоне изузев у претпоследњој врсти су већи од нуле. С обзиром да овај коефицијенат има вредност мању од нуле закључујемо да постоје две промене знака, односно два корена карактеристичне једначине који се налазе десно од имагинарне осе у комплексној равни. Ово можемо лако проверити користећи програмски пакет MATLAB. Као резултат извршења програмске линије

```
>> roots([1 4 3 2 1 4 4])
```

добија се резултат

```
ans =
        -3.2644
         0.6797 + 0.7488i
         0.6797 - 0.7488i
        -0.6046 + 0.9935i
        -0.6046 - 0.9935i
        -0.8858
```

који јасно указује на постојање коњуговано комплексног пара полова са реалним делом већим од нуле . Одговарајућа шема коефицијената за случај овог система има облик.

$$
\begin{array}{llll}
s^6: & 1 & 3 & 1 \quad 4 \\
s^5: & 4 & 2 & 4 \quad 0 \\
s^4: & \frac{5}{2}=\frac{4\cdot 3-1\cdot 2}{4} & 0=\frac{4\cdot 1-4\cdot 1}{4} & 4=\frac{4\cdot 4-1\cdot 0}{4} \\
s^3: & 2=\frac{\frac{5}{2}\cdot 2-4\cdot 0}{\frac{5}{2}} & -\frac{12}{5}=\frac{\frac{5}{2}\cdot 4-4\cdot 4}{\frac{5}{2}} & 0 \\
s^2: & 3=\frac{2\cdot 0-\frac{5}{2}\cdot(-\frac{12}{5})}{2} & 4=\frac{2\cdot 4-\frac{5}{2}\cdot 0}{2} & \\
s^1: & -\frac{76}{15}=\frac{3\cdot(-\frac{12}{5})-8}{3} & 0 & \\
s^0: & 4=\frac{-\frac{76}{15}\cdot 4-0}{-\frac{76}{15}} & &
\end{array}
$$

2) СЛУЧАЈ КАДА НЕКИ ЕЛЕМЕНТИ ПРВЕ КОЛОНЕ ИМАЈУ НУЛТУ ВРЕДНОСТ

У случају када неки од елемената прве колоне имају вредност нула неопходно је уместо нуле увести малу позитивну константу $\varepsilon > 0$ која тежи нули. Након тога треба наставити са оценом стабилности како је већ објашњено и демонстрирано у претходним примерима водећи рачуна о граничној вредности уведене константе.

ПРИМЕР 5.3: Претпоставимо да систем има карктеристичну једначину:

$$s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

РЕШЕЊЕ: Формирањем одговарајуће шеме добија се шест врста.

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

При томе су

$$c_1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (4 - \frac{12}{\varepsilon}) \to -\infty \,,$$

$$d_1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} = 6$$

Поново уочавамо постојање две промене предзнака коефицијената због постојања коефицијента $c_1 \to -\infty$. Ово указује на постојање два корена карактеристичне једначине чији су реални делови већи од нуле па чине систем нестабилним.

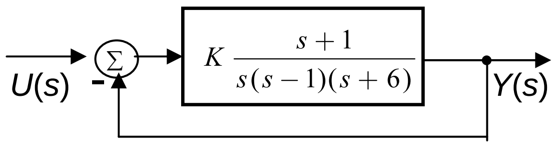
Провера уз помоћ програмског пакета MATLAB

```
>> roots([1 2 2 4 11 10])
```

даје као резултат извршења наведене програмске линије вредности свих пет полова.

```
ans =
        0.8950 + 1.4561i
        0.8950 - 1.4561i
       -1.2407 + 1.0375i
       -1.2407 - 1.0375i
       -1.3087
```

ПРИМЕР 5.4: Нека систем има структуру приказану сликом 5.1. Потребно је одредити које вредности константе пропорционалности K обезбеђују да систем буде стабилан.



Sl. 5.1 Структурна шема система у примеру 5.4

РЕШЕЊЕ**:** Карактеристична једначина система је

$$1+K\frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}=0$$

односно

$$s^3+5s^2+(K-6)s+K=0$$

Одговоарајуће колоне су

$$\begin{array}{lcc} s^3: & 1 & K-6 \\ s^2: & 5 & K \\ s^1: & (4K-30)/5 & \\ s^0: & K & \end{array}$$

За стабилност система неопходно је да буде испуњен услов

$$\frac{4K-30}{5}>0 \quad \text{и} \quad K>0$$

односно $K>7,5$.

Функција спрегнутог преноса у конкретном случају има облик

$$F(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(K-6)s+K}.$$

Уколико у радном прозору програма MATLAB дефинишемо вектор

```
denT =  [1 5 K-6 K],
```

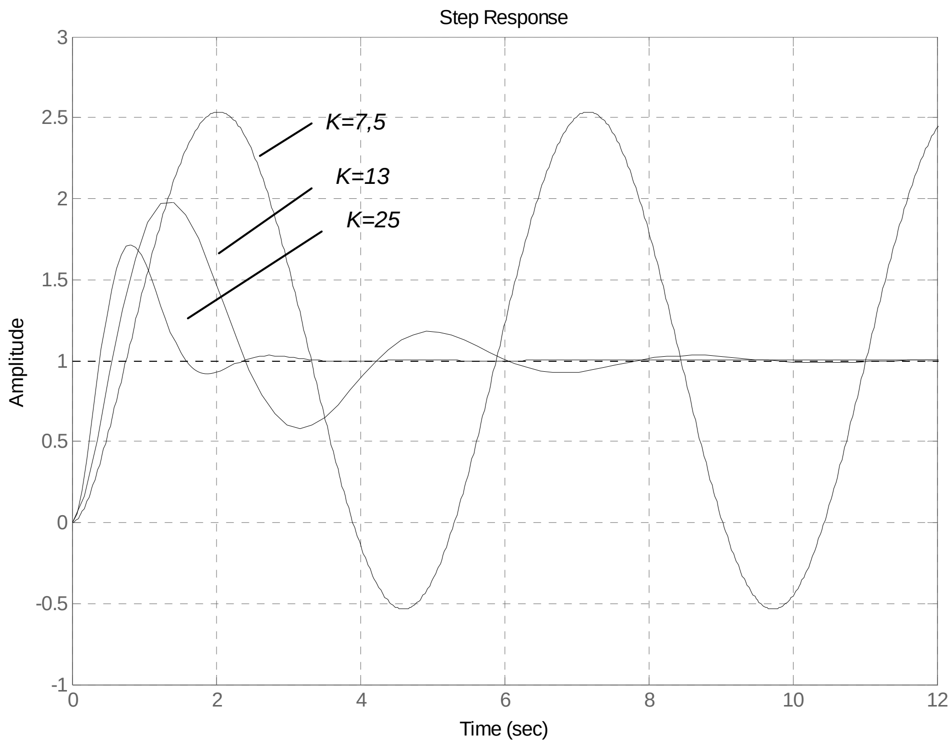
који представља коефицијенте имениоца функције спрегнутог преноса могуће је, користећи функцију **roots**, израчунати корене карактеристичне једначине, односно полове функције спрегнутог преноса

```
roots(denT).
```

За K = 7,5 корени су -5 и $\pm j$1,22 и каже се да је систем гранично стабилан јер поседује коњугованокомплексни пар полова на самој имагинарној оси. Ова чињеница се може предвидети применом Раусовог критеријума јер је за случај K = 7,5 трећи елемент прве колоне управо због тога нула . Уколико се усвоји вредност K = 13 полови система са затвореном повратном спрегом су -4,06 и -0,47±j1,7. Даљим повећањем константе пропорционалности коњуговано комплексни полови система са затвореном повратном спрегом удаљавају се од имагинарне осе у комплексној равни, односно вредност њиховог реалног дела постаје већа. У случају када је K = 25 полови имају вредности -1,90 и -1,54±j3,27. У случајевима када је K > 7,5 полови система су распоређени лево од имагинарне осе па је система стабилан. Уколико желимо да установимо како изгледа прелазни одзив конкретног система на степ побуду потребно је у радном прозору програмског пакета MATLAB унети следеће линије кода

```
denT =  [1 5 K-6 K];
numT = [K K];
sysT = tf(numT,denT);
step(sysT);
```

Зависно од вредности константе K добија се одзив приказан на слици 5.2.



Sl. 5.2 Одзив система у примеру 5.4 на степ побуду при различитим вредностима појачања К

3) СЛУЧАЈ КАДА СВИ ЕЛЕМЕНТИ НЕКЕ ВРСТЕ ИМАЈУ НУЛТЕ ВРЕДНОСТИ

Понекад се током примене Раусовог критеријума дешава да комплетна врста, односно сви њени елементи имају нулте вредности. Ово је сигуран индикатор постојања парова коњуговано комплексних вредности међу коренима карактеристичне једначине који се налазе на имагинарној оси у комплексној равни. У овом случају неопходно је, при одређивању стабилности система, прво формирати одговарјући полином користећи коефицијенте врсте која се налази непосредно испод врсте чије су све вредности једнаке нули. При томе је ред формираног полинома одређен редоследом врсте из које се узимају коефицијенти (последња врста у Раусовој шеми одговара полиному нултог реда; прва изнад њега полиному првог реда и тако редом). Током формирања помоћног полинома комплексне промењљиве се уносе уз одговарајуће коефицијенте тако што њихове потенције опадају сваки пут за два почевши од комплексне промењиве чија потенција одговара реду помоћног полинома. Након тога неопходно је деривирати помоћни полином по комплексној промењивој како би се коначно добио полином чије ћемо коефицијенте искористити за формирање врсте чије су све вредности биле једнаке нули. Међутим, корени помоћног полинома су такође корени карактеристичне једначине и због тога морају бити посебно тестирани. Појаснимо овај поступак на једном једноставном примеру.

ПРИМЕР 5.5: Претпоставимо да систем има карктеристичну једначину:

$$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12 = 0$$

РЕШЕЊЕ: Формирањем одговарајуће шеме добија се шест врста

$$\begin{array}{llll}
s^5: & 1 & 11 & 28 \\
s^4: & 5 & 23 & 12 \\
s^3: & 6,4 & 25,6 & 0 \\
s^2: & 3 & 12 & \\
s^1: & 0 & 0 & \leftarrow a(s) = 3s^2 + 12 \\
s^1: & 6 & 0 & \leftarrow \dfrac{da(s)}{ds} = 6s \\
s^0: & 12 & &
\end{array}$$

Као што видимо након четири формиране врсте појављује се врста чије су све вредности једнаке нули. Због тога је неопходно да се формира помоћни полином означен као $a(s) = 3s^2 + 12$ чијим деривирањем по комплексној промењљивој добијамо коначни полином чије ћемо коефицијенте искористити како би се формирала недостајућа врста (врста чије су све вредности једнаке нули).

С оозиром да су све вредности овако добијене прве колоне истог предзнака сви корени карактеристичне једначине имају негативне реалне делове изузев оних који се налазе на самој имагинарној оси. Ово је лако уочити уколико уместо нулте вредности у првој колони уведемо малу константу $\varepsilon > 0$. Тада немамо промену предзнака коефицијената прве колоне. Међутим, уколико уведемо $\varepsilon < 0$ имаћемо две промене предзнака што значи да имамо два пола са позитивним реалним делом, односно који се налазе десно од имагинарне осе. Уколико претпоставимо да је $\varepsilon = 0$ тада постоје два пола на имагинарној оси. Заиста, ако запишемо полином $a(s) = 3s^2 + 12$ у форми

$$a(s) = 3(s^2 + 4)$$

јасно је да се његовим изједначавањем са нулом добијају решења $s_{1,2} = \pm j2$. Ово је у складу са нашим очекивањем да ситем чију стабилност анализирамо поседује два пола на имагинарној оси. Заиста ако, користећи MATLAB, израчунамо корене карактеристичне једначине

```
>> roots([1 5 11 23 28 12])
```

добићемо полове функције спрегнутог преноса

```
ans =
       -3.0000
        0.0000 + 2.0000i
        0.0000 - 2.0000i
       -1.0000
       -1.0000.
```

Видимо да међу решењима постоје и два пола која су смештена на имагинарној оси у комплексној равни због чега је конкретан систем на осцилаторној граници стабилности.

5.2 Хурвицов критеријум стабилности

Оцена стабилности система применом Хурвицовог критеријума заснива се, као и у случају Раусовог критеријума, на познавању карактеристичне једначине система. При томе се прво формира Хурвицова детерминанта:

$$\Delta_h = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Након формирања прве две врсте све остале се формирају тако што се претходне две врсте препишу и помере за једно место у десно. На упражњена места детерминанте уписују се нуле. Поступак се понавља све док се не формира детерминанта чији је ред једнак реду карактеристичне једначине. У резултату се добија детерминанта која на главној дијагонали садржи све коефицијенте карактеристичне једначине осим a_n.

Уколико су сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте већи од нуле карактеристична једначина одговарајућег линеарног система ће имати све корене са негативним реалним делом, односно биће испуњен потребан и довољан услов да систем буде стабилан. Ово практично значи да је за стабилност система потребно и довољно да буду испуњени следећи услови:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = a_{n-1} > 0\,, \\ &\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1} > 0\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Последњи дијагонални минор управо представља Хурвицову детерминанту $\Delta_n = \Delta_h$. Лако га је израчунати на основу предпоследњег минора јер су сви елементи задње колоне, осим последњег, једнаки нули.

У случају када је последњи дијагонални минор Δ_n једнак нули, а сви претходни минори су већи од нуле систем је гранично стабилан. При томе су могућа три случаја: $a_0 = 0$, $\Delta_{n-1} = 0$ и $\Delta_{n-1} = a_0 = 0$. У првом случају ($a_0 = 0$) карактеристична једначина садржи корен који се налази у координатном почетку комплексне равни. Систем се тада налази на апериодичној граници стабилности. У случају када је $\Delta_{n-1} = 0$ систем има пар коњугованокомплексних полова на имагинарној оси због чега се налази на осцилаторној граници стабилности.

Већ је наглашено да је за стабилност система првог и другог реда потребно и довољно да сви коефицијенти карактеристичне једначине буду позитивни. За стабилност система трећег реда чија је карактеристична једначина

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0\,,$$

потребно је, у складу са Хурвицовим критеријумом, да буду испуњени следећи услови

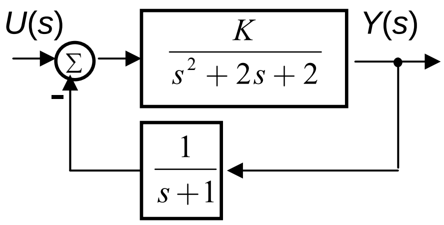
$$\Delta_1 = a_2 > 0\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0\,,$$

$$a_3 > 0\,.$$

Очигледно, за системе трећег реда није довољно да сви коефицијенти буду већи од нуле већ је потребно да буде испуњен и услов $a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$. Повећањем реда система број додатних услова расте. Практично већ код система петог реда наилази се на значајне потешкоће у одређивању услова стабилности, применом Хурвицовог критеријума, без примене рачунара. Раусов критеријум, у том случају, представља прикладније решење. И поред тога, може се рећи да оба критеријума имају озбиљан недостатак јер дају само информацију о томе да ли је систем стабилан или не. У случају стабилног система недостаје информација о томе колика је резерва стабилности, односно колико је систем далеко од тога да постане нестабилан. С друге стране, у случају нестабилног система, недостаје увид у сазнање како да се поступи, односно који параметар и у којој мери треба променити да се обезбеди стабилност система. У тражењу одговора на ово питање дошло се до формулације других критеријума који су погоднији из аспекта инжењерске праксе.

ПРИМЕР 5.6: Применом Хурвицовог критеријума стабилности, одредити вредности параметра *K*, тако да систем приказан на слици 5.3 буде стабилан.



Sl 5.3 Структурна шема система у примеру 5.6

РЕШЕЊЕ: Одредимо најпре функцију спрегнутог преноса. За систем на слици 5.3. добија се

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{K}{s^2+2s+2}}{1+\dfrac{1}{s+1}\dfrac{K}{s^2+2s+2}},$$

односно

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\left(s+1\right)}{s^3+3s^2+4s+(K+2)}.$$

С обзиром да је карактеристична једначина система

$$s^3+3s^2+4s+(K+2)=0$$

добија се Хурвицова детерминанта

$$\Delta=\begin{bmatrix}3 & K+2 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 3 & K+2\end{bmatrix}.$$

Да би систем био стабилан треба да су испуњени следећи услови:

1) $\Delta_1=3>0$,

2) $\Delta_2=3\cdot 4-(K+2)>0\rightarrow \quad K<10$

3) $\Delta_3=K+2>0\rightarrow \quad K>-2$.

Уочимо да постоји двоструко ограничење у погледу избора вредности коефицијента статичког појачања K

$$-2<K<10.$$

Шта ова ограничења практично значе најбоље се може видети из одзива система на јединичну одскочну функцију при различитим вредностима коефицијента појачања K.

Уколио усвојимо да је појачање $K = 10$ добиће се карактеристична једначина система

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 12 = 0$$

за коју се користећи MATLAB

```
>> roots([1 3 4 12])
```

добијају полови функције спрегнутог преноса

```
ans =
       -3.0000
       -0.0000 + 2.0000i
       -0.0000 - 2.0000i
```

Видимо да међу решењима постоје и два пола која су смештена на имагинарној оси у комплексној равни због чега је конкретан систем на осцилаторној граници стабилности. Ово практично значи да ће се у одзиву система појавити компонента осцилаторног карактера чија се амплитуда не мења током времена.

Аналогним поступком за случај када је усвојено појачање $K = 6$ добијају се полови функције спрегнутог преноса

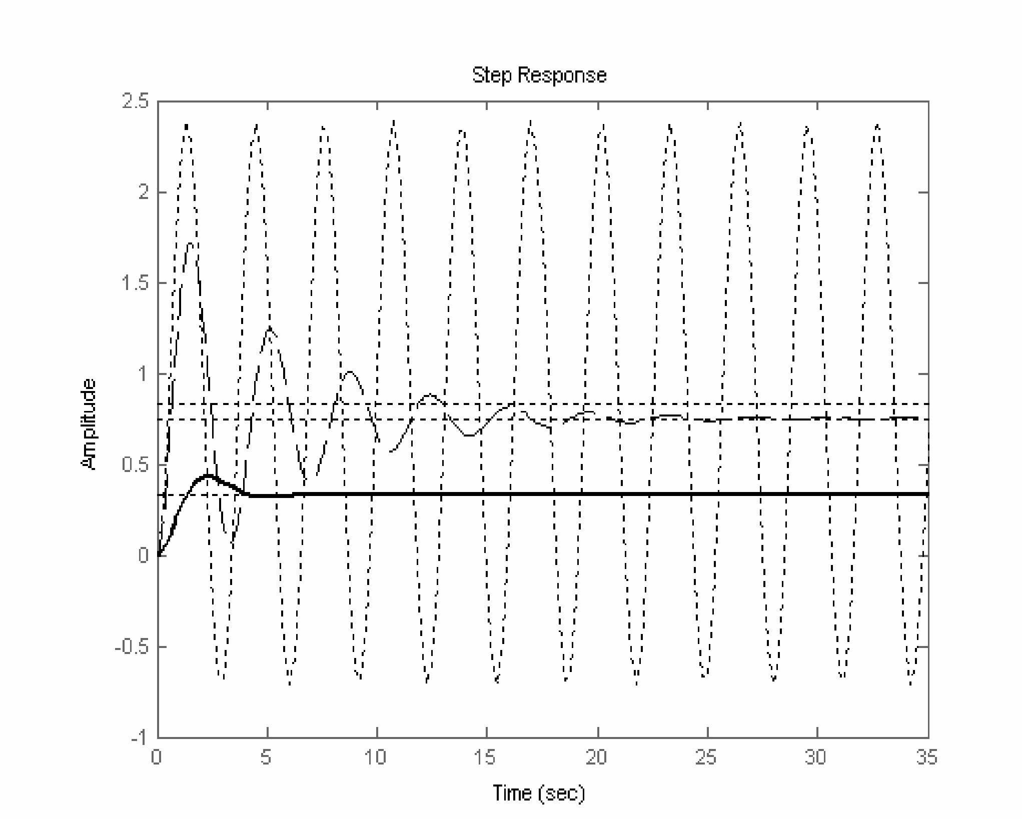
```
ans =
        -2.6344
        -0.1828 + 1.7330i
        -0.1828 - 1.7330i
```

Смањењем појачања коњуговано комплексни полови се померају у лево у односу на имагинарну осу што значи да ће се у одзиву појавити осцилаторна компонента чија амплитуда исчезава током времена.

Даљим смањивањем појачања, односно усвајањем вредности $K = 1$, добијају се полови функције спрегнутог преноса

```
ans =
        -1.6823
        -0.6588 + 1.1615i
        -0.6588 + 1.1615i
```

Пар коњугованокомплексних полова још више се удаљава од имагинарне осе што значи да осцилаторни карактер прелазног процеса још брже исчезава. Слика 5.4 приказује одзиве ситема при наведеним појачањима у присуству јединичне одскочне функције на његовом улазу.



Сл. 5.4 Одзив система у примеру 5.6 на побуду јединичном одскочном функцијом при различитим вредностима појачања K: непригушене осцилације за случај $K=10$; пригушене осцилације приказане испрекиданом линијом за случај $K=6$ и пригушене осцилације приказане пуном линијом за случај $K=1$.

Приметимо, на крају, да разлике у стационарном стању настају као резултат чињенице да функција повратног преноса конкретног система има астатизам нултог реда

$$W(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{K}{s^2+2s+2},$$

због чега се у одзиву појављује грешка која зависи од вредности коефицијента статичког појачања K (види једначину (4.18)).

5.3 Резиме

Синтеза сваког система аутоматског управљања започиње управо постављањем захтева у погледу његове стабилности јер само у случају стабилног система има смисла говорити о његовим карактеристикама у прелазном и стационарном режиму рада.

Уколико се анализа одзива система обавља у временском домену каже се да је исти стабилан ако и само ако компонента прелазног режима ишчезава након довољно дуго времена

У комплексном домену, ово одговара захтеву да се полови функције преноса система налазе лево од имагинарне осе. У случају када се један пар коњуговано комплексних полова налази на имагинарној оси одзтив система на импулсну побуду садржаће осцилаторну функцију ограничене амплитуде због чега је систем гранично стабилан. У случају да се реалан пол налази у координатном почетку систем има константан одзив па је такође на граници стабилности. Постојање полова на десној страни од имагинарне осе доводи до појаве одзива чије вредности расту током времена па је систем тада нестабилан. Очигледно, при анализи стабилности система треба поћи од његове карактеристичне једначине.

Неопходан, али не и довољан услова да систем буде стабилан, представља захтев да сви коефицијенти каркатеристичне једначине буду позитивни.

Услов да сви коефицијенти карактеристичног полинома буду позитивни уједно је и довољан услов за стабилност система ако његова карактеристична једначина не прелази други ред. У случају система вишег реда неопходне и довољне услове стабилности дају алгебарски критеријуми Рауса и Хурвица.

Оцена стабилности система на основу Раусовог критеријума заснива се на чињеници да је број промена знака коефицијената у Раусовој колони управо једнак броју корена карактеристичне једначине који имају позитивне реалне делове. Да би систем био стабилан, потребно је и довољно да сви коефицијенти Раусове колоне, формиране на бази карактеристичне једначине система, буду истог знака.

Оцена стабилности система применом Хурвицовог критеријума заснива се, као и у случају Раусовог критеријума, на познавању карактеристичне једначине система. При томе се прво формира Хурвицова детерминанта. У резултату се добија детерминанта која на главној дијагонали садржи све коефицијенте карактеристичне једначине осим a_n .

Уколико су сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте већи од нуле карактеристична једначина одговарајућег линеарног система ће имати све корене са негативним реалним делом, односно биће испуњен потребан и довољан услов да систем буде стабилан.

5.4 Питања за проверу знања

1. Како се мења компонента одзива изазвана поремећајном променљивом у случају када је систем стабилан, а како када је исти на граници стабилности?
2. Какав је распоред полова у случају ганично стабилног система?
3. Шта је неопходан услов да систем буде стабилан?
4. Дефинишите Раусов критеријум стабилности за систем четвртог реда?
5. Како изгледа Хурвицова детерминанта у случају када се систем налази на граници апериодске стабилности?
6. Одредите услове стабилноси за систем четвртог реда користећи Хурвицов критеријум?

6

АНАЛИЗА СИСТЕМА У ФРЕКВЕНЦИЈСКОМ ДОМЕНУ

Циљ поглавља је да се упознају поступци анализе система аутоматског управљања у фреквенцијском домену засновани на примени Бодеових дијаграма и Никвистовог критеријума.

У претходним поглављима описани су поступци анализе система, у временском и комплексном домену, засновани на познавању његовог математичког модела. Међутим, уколико његово понашање није у складу са конкретним потребама, а модел система није познат, неопходно је применити експерименталне технике како би се сазнало нешто више о природи система и могућностима деловања у смислу добијања жељених карактеристика. Анализа система у фреквенцијском домену представља управо један од погодних поступака за решавање проблема на основу резултата добијених експерименталним путем. У том смислу размотримо најпре како изгледа одзив неког линеарног континуалног система у случају побуде хармонијским сигналом.

ПРИМЕР 6.1: Одредити одзив ситема чија је функција преноса

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

уколико је на његов улаз доведен сигнал $u(t) = \sin(10t)$:

РЕШЕЊЕ: Имајући у виду да је Лапласова трансформација улазног сигнала

$$L\left\{u(t) = \sin(10t)\right\} = \frac{10}{s^2 + 10^2}$$

одзив се добија инверзном Лапласовом трансформацијом функције

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{10}{s^2+10^2}\ .$$

Најпре раставимо ову функцију у суму парцијалних разломака како би уз помоћ таблица Лапласових трансформација лакше одредили жељено решење

$$\frac{1}{s+1}\frac{10}{s^2+10^2} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2+10^2}$$

$$= \frac{A_0 s^2 + A_0 10^2 + A_1 s^2 + A_2 s + A_1 s + A_2}{(s+1)(s^2+10^2)}$$
$$= \frac{(A_0 + A_1)s^2 + (A_2 + A_1)s + (A_0 10^2 + A_2)}{(s+1)(s^2+10^2)}.$$

Из услова за егзистенцију наведене једнакости

$$A_0 + A_1 = 0$$
$$A_1 + A_2 = 0$$
$$A_2 + 10^2 A_0 = 10$$

добијају се коефицијенти

$$A_0 = \frac{10}{101}, \quad A_1 = -A_0, \quad A_2 = A_0,$$

на основу којих се дефинише сума парцијалних разломака

$$Y(s) = \frac{10}{101} \cdot \frac{1}{(s+1)} - \frac{10}{101} \cdot \frac{s}{(s^2+10^2)} + \frac{10}{101} \cdot \frac{1}{(s^2+10^2)}$$

$$Y(s) = \frac{10}{101} \cdot \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{101} \cdot \frac{10}{(s^2+10^2)} - \frac{10}{101} \cdot \frac{s}{(s^2+10^2)}$$
$$= \frac{10}{101} \cdot \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot \left(\frac{10}{(s^2+10^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{101}} - \frac{s}{(s^2+10^2)} \cdot \frac{10}{\sqrt{101}} \right).$$

Директном применом таблица Лапласових трансформација добија се одзив система на задану побуду у временском домену

$$y(t) = \frac{10}{101} \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot \left(L^{-1}\left(\frac{10}{(s^2+10^2)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{101}} - L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+10^2)}\right) \cdot \frac{10}{\sqrt{101}} \right)$$
$$= \frac{10}{101} \cdot e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot \left(\sin(10t) \cdot \frac{1}{\sqrt{101}} - \cos(10t) \cdot \frac{10}{\sqrt{101}} \right).$$

С обзиорм да је $\left(\frac{1}{\sqrt{101}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{101}}\right)^2 = 1$

могуће је увести супституције

$$\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{101}}, \quad \sin(\beta) = -\frac{10}{\sqrt{101}},$$

односно може се написати

$$\sin(10t) \cdot \frac{1}{\sqrt{101}} - \cos(10t) \cdot \frac{10}{\sqrt{101}} = \sin(10t) \cdot \cos(\beta) + \cos(10t) \cdot \sin(\beta).$$

тако да је коначно решење

$$y(t) = \frac{10}{101} \cdot e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot \sin(10t + \beta) .$$

При томе је $\beta = tg^{-1}(-10) \simeq -84,2^0$

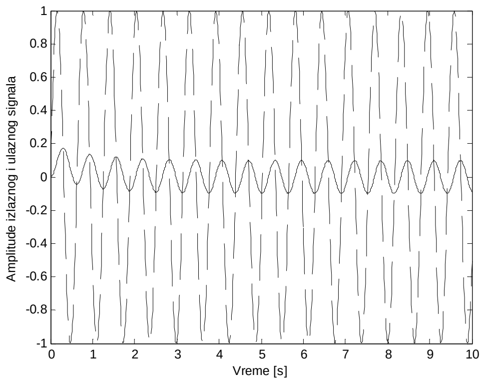
Очигледно, коначно решење садржи два члана

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$
$$y_1(t) = \frac{10}{101} \cdot e^{-t}$$
$$y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot \sin(10t + \beta).$$

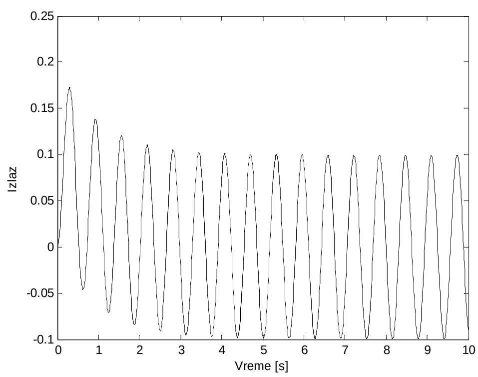
од којих први $y_1(t)$ настаје као резултат понашања система у прелазном режиму рада, а други $y_2(t)$ представља одзив у стационарном стању.

Поредећи добијено решење за $y_2(t)$ са обликом улазног сигнала $u(t)$ одмах се уочава да сигнал на излазу система има исту фреквенцију, амплитуду која је приближно десет пута мања у односу на амплитуду улазног сигнала и фазни помак одређен вредношћу угла β.

На слици 6.1 приказани су сигнали на улазу и излазу система као и њихови међусобни односи. Сигнал на улазу ситема приказан је испрекиданом линијом на слици 6.1(а). Промене излазног сигнала приказане су пуном линијом.



(а)



(б)

Сл. 6.1 Промене сигнала на улазу и излазу система у примеру 6.1: а)односи између сигнала на улазу и излазу система, б) сигнал на излазу система.

На слици 6.1(а) могу се јасно уочити односи између амплитуда улазног и излазног сигнала као и постојање фазног кашњења које настаје проласком сигнала кроз систем. Слика 6.1(б) приказује промене излазног сигнала током прелазног процеса. Јасно се уочава исчезавање прелазног процеса описаног функцијом $y_1(t)$.

Претпоставимо општи случај, односно анализирајмо одзив система описаног функцијом преноса $G(s)$ када је на његов улаз доведен синусни сигнал $u(t)$ са амплитудом чија је вредност *A*, а фреквенција ω_0:

$$u(t) = A\sin(\omega_0 t). \tag{6.1}$$

С обзиром да је његова Лапласова трансформација

$$L\{u(t) = A\sin(\omega_0 t)\} = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^{\,2}} \tag{6.2}$$

одзива система у комплексном домену, за случај нултих почетних услова, добија се као производ

$$Y(s) = G(s)\frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^{\,2}}. \tag{6.3}$$

Уобичајеним поступком, као и у примеру 6.1, добио би се одзив система у временском домену. Може се показати да стационарна компонента његовог одзива има облик

$$y(t) = AM \cdot \sin(\omega_0 t + \beta) \tag{6.4}$$

при чему M представља модул функције преноса, а β фазно кашњење. Њихове вредности се рачунају користећи једначине

$$M = |G(j\omega_0)| = |G(s)|_{s=j\omega_0} = \sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega_0)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[G(j\omega_0)]\}^2}, \tag{6.5}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega_0)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega_0)]}\right] = \measuredangle G(j\omega_0). \tag{6.6}$$

Запис $G(j\omega)$ означава функцију преноса система у фреквенцијском домену и добија се једноставним увођењем супституције $s = j\omega$ у функцију преноса $G(s)$. Очигледно, вредности модула и фазног кашњења зависе од облика функције преноса система и мењају се променом фреквенције улазног синусног сигнала. Управо ова чињеница омогућава да се експерименталним путем одреде карактеристике система. При томе је неопходно да се на улаз система доведе сигнал синусног облика константне амплитуде. Подаци о амплитудама одзива и фазном кашњењу система, при различитим фреквенцијама, омогућавају да се нацртају одговарајући дијаграми из којих се могу одредити ред система, вредности коефицијента појачања и временске константе.

Уколико се сигнали на улазу и излазу система опишу у поларном облику

$$Y(j\omega_0) = A_Y e^{j(\omega_0 t+\beta)}, \qquad U(j\omega_0) = A_U e^{j(\omega_0 t)} \tag{6.7}$$

добија се опис функције преноса при фреквенцији ω_0

$$G(j\omega_0) = \frac{A_Y e^{j(\omega_0 t+\beta)}}{A_U e^{j(\omega_0 t)}} = Me^{j\beta}. \tag{6.8}$$

Лако се уочава да је однос између амплитуда сигнала на излази и улазу система и модула функције преноса дефинисан релацијом

$$M(\omega_0) = \frac{A_Y}{A_U}. \tag{6.9}$$

Очигледно, постоји више могућности да се графички прикажу његове карактеристике. Први начин представља приказ у поларном координатном систему. При томе се за сваку фреквенцију израчунава одговарајући модул $M(\omega)$ који се наноси под углом β у равни функције $G(j\omega)$. Други начин подразумева приказ модула $M(\omega)$ и фазе $\beta(\omega)$ на одвојеним карактеристикама, у правоуглом координатном суистему, као функције у којима је независно промењљива вредност фреквенције ω. Међутим, имајући у виду могући опсег независно промењљиве ω, чешће се примењује трећи начин, односно приказ у функцији логаритма фреквенције $\log(\omega)$. При томе се модул функције преноса изражава у децибелима

$$\left|G(j\omega)\right|_{db} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right|. \tag{6.10}$$

Примена логаритмовања омогућује да се при цртању одговарајућих дијаграма примени метод суперпозиције јер се операције множења замењују сабирањем, а дељење одузимањем.

С обзиром да је логаритам комлексног броја такође комплексан број аритметичке операције се обављају одвојено на реалним и комплексним бројевима. Уколико је, на пример, систем у фреквенцијском домену описан производом функција преноса

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega), \tag{6.11}$$

користећи запис комплексног броја у поларном облику добија се

$$\left|G(j\omega)\right|e^{j\beta(\omega)} = \left|G_1(j\omega)\right|e^{j\beta_1(\omega)}\cdot\left|G_2(j\omega)\right|e^{j\beta_2(\omega)}. \qquad (6.12)$$

Након логаритмовања последње једначине имамо на обе стране суму реалних и комплексних бројева

$$\log\left|G(j\omega)\right| + j\beta(\omega)\cdot\log e = \log\left|G_1(j\omega)\right| + \log\left|G_2(j\omega)\right| + j(\beta_1(\omega)+\beta_2(\omega))\cdot\log e\,.$$

Очигледно, модул $M(\omega)$ и фазно кашњење $\beta(\omega)$ добијају се као суме

$$M(\omega) = \log\left|G_1(j\omega)\right| + \log\left|G_2(j\omega)\right| \qquad (6.13)$$

$$\beta(\omega) = \beta_1(\omega) + \beta_2(\omega)\,. \qquad (6.14)$$

Уколико се овако добијена вредност модула помножи са 20 добија се његова вредност изражена у децибелима. Добијање описаних резултата на овај начин постаје, у графичком смислу, једноставније јер се уместо операције множења користи сабирање.

Појаснимо природу мерне јединице *decibel*. Она је у пракси погоднија од јединице *Bel* која заправо представља логаритам односа снаге на излазу и улазу појачавача када је снага на излазу десет пута већа у односу на снагу сигнала доведеног на његов улаз

$$1[Bel] = \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\Bigg|_{P_2=10P_1}. \qquad (6.15)$$

Имајући у виду правила која се односе на логаритмовање јасно је да ће појачање снаге за 100 пута одговарати вредности 2 *Bel*-а, за 1000 пута 3 *Bel*-а и тако даље. Како је јединица *decibel* десет пута мања од јединице *Bel* при дефинисању појачања снаге A_P у *decibel*–има користи се једначина

$$A_P[dB] = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right). \qquad (6.16)$$

Тако појачању снаге за два пута одговара појачање снаге A_P у *decibel*–има од $+3dB$. Свако додатно појачање за два пута уноси додатних $+3dB$ тако да појачањима снаге за 4 и 8 пута одговарају појачања снаге A_P у *decibel*–има од $+6dB$ и $+9dB$. Појачањима за 10, 100 и 1000 пута тако одговарју појачања снаге A_P у *decibel*–има од $+10dB$, $+20dB$ и $+30dB$. Смањење снаге за 2 и 10 пута, у *decibel*–има, аналогно се изражава као додатно слабљење од $-3dB$ и $-10dB$.

Међутим, модул $M(\omega)$ не представља однос снаге већ однос излазне и улазне величине (на пример помак, брзину, силу, напон, струју итд) тако да повећање тог односа за 10 пута одговара повећању снаге за 100 пута, што износи 2 *Bel*-а или 20 *decibel*-а. Због тога се при изражавању вредности модула функције преноса у *decibel*-има користи једначина (6.10)

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right|.$$

У том случају повећању односа између улазне и излазне величине за 2 и 10 пута одговарају вредности $+6dB$ и $+20dB$, а слабљењу за исти износ одговарају истоветне вредности, али са предзнаком минус, односно $-6dB$ и $-20dB$.

С обзиром да је Боде *(Hendrik Wade Bode (1905-1982))* предложио процедуру за цртање логаритамских дијаграма промене модула и фазе у литератури се, за њих, често користи назив Бодеови дијаграми.

6.1 Конструкција логаритамских дијаграма промене модула и фазе

Претпоставимо да нам је позната функција преноса $G(s)$ како бисмо лакше описали конструкцију, односно поступак цртања дијаграма. Најпогодније је да ова функција буде у факторизованом облику

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K(T_1 s+1)(T_2 s+1)^p \ldots}{s^r (T_a s+1)(T_b^2 s^2 + 2\xi T_b s+1)\ldots.} \\ &= \frac{K}{s^r}\cdot\frac{1}{(T_a s+1)}\cdot\frac{1}{(T_b^2 s^2 + 2\xi T_b s+1)}(T_1 s+1)(T_2 s+1)^p \cdots \ . \end{aligned} \tag{6.17}$$

Тада се цртање логаритамских дијаграма промене модула и фазе своди на графичко збрајање познатих облика дијаграма одговарајућих чланова функције преноса у факторизованом облику. Као што видимо, на основу једначине (6.17), сваки од ових чланова може се сврстати у једну од следеће три класе полинома:

1. $Ks^n,$ (6.18)

2. $(Ts+1)^{\pm 1},$ (6.19)

3. $(T^2 s^2 + 2\xi Ts+1)^{\pm 1}.$ (6.20)

Анализирајмо, најпре, поступак цртања логаритамских дијаграма за сваки од ових чланова.

Прву класу, као што видимо, представља сингуларитет у координатном почетку комплексне равни. Уколико експонент *n* има предзнак већи од нуле сингуларитет представља нулу функције преноса. У супротном случају, односно уколико је његов предзнак негативан, значи да се ради о полу чији је ред одређен управо вредношћу овог експонента. Претпоставимо да је *n=-1*, односно да функција има облик

$$G(s) = \frac{K}{s}.$$

Тада су модул функције преноса и фазно кашњење одређени једначинама

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10} K - 20\log_{10}\omega \quad \text{и} \tag{6.21}$$

$$\beta(\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\left\{G(j\omega)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{G(j\omega)\right\}} = \frac{-\frac{K}{\omega}}{0}. \tag{6.22}$$

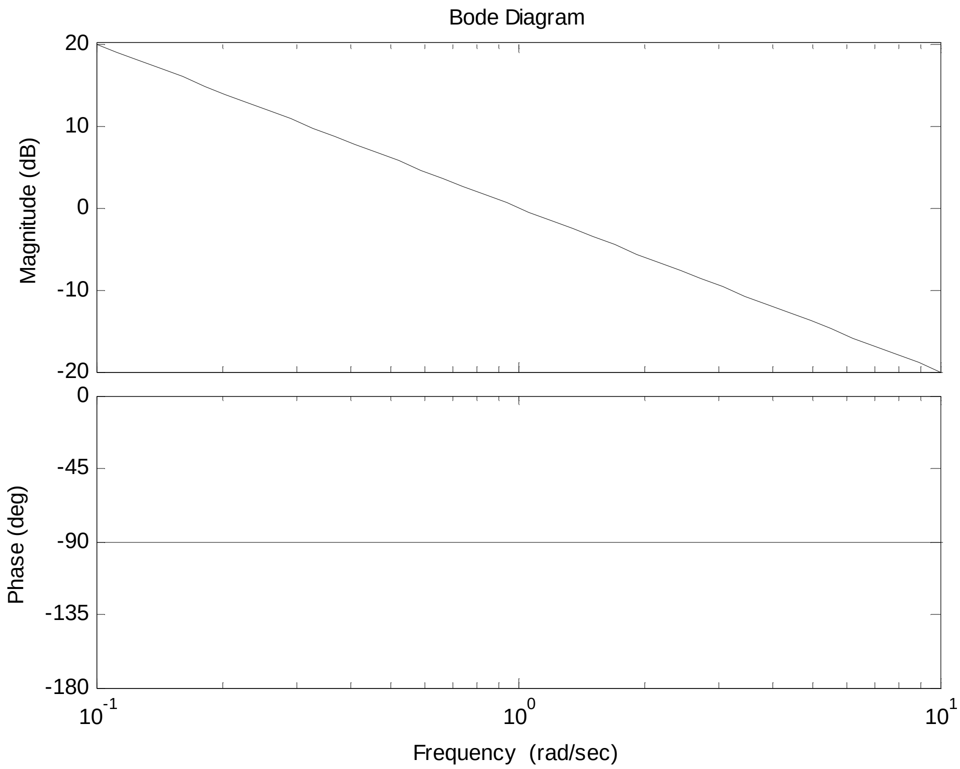
Очигледно, фазно кашњење има константну вредност на свим фреквенцијама, односно $\beta(\omega) = -90^0$. Анализом једначине (6.21) лако је уочити да дијаграм промене модула $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ одговара једначини праве са негативним нагибом. Уколико претпоставимо да је $\omega = 1$ добија се

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10} K. \tag{6.23}$$

При десет пута већој фреквенцији ова вредност биће

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10} K - 20, \tag{6.24}$$

односно добиће се ордината која је мања за 20 децибела. Другим речима, нагиб праве износи -20 децибела по декади ($-20dB/dec$). У случају када је коефицијент статичког појачања $K = 1$ вредност функције $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ износи $0dB$, односно права пресеца апсцису у тачки која одговара вредности $\omega = 1$. Уколико је вредност $K > 1$ одговарајући дијаграм промене модула $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ добија се једноставним померањем апсцисне осе на доле за вредност $20\log_{10} K$. У супротном случају, осносно када је $K < 1$ ову осу треба померити на горе. Одговарајући дијаграми промене модула и фазе приказани су на слици 6.2. У општем случају сингуларитет *n*-тог реда уноси фазно кашњење $\beta(\omega) = n \cdot 90^0$. При томе је нагиб функције $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ одређен вредношћу $n \cdot 20dB/dec$. На слици 6.2 приказани су дијаграми који одговарају функцији са једним полом у координатном почетку и статичким појачањем $K = 1$.



Сл. 6.2 Дијаграми промене модула и фазе за систем са функцијом преноса s^{-1}.

При анализи дијаграма промене модула и фазе чланова функције преноса облика $(Ts+1)^{\pm 1}$ размотримо најпре функцију

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}. \tag{6.25}$$

Одговарајући модул и фазно кашњење одређени су једначинама

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2} \text{ и} \tag{6.26}$$

$$\beta(\omega) = \tan^{-1}\frac{\operatorname{Im}\left\{G(j\omega)\right\}}{\operatorname{Re}\left\{G(j\omega)\right\}} = \frac{-\omega T}{1}. \tag{6.27}$$

При ниским фреквенцијама, када је $\omega T \ll 1$, из (6.26) следи

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log_{10}1 = 0, \tag{6.28}$$

односно права $\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 0dB$ представља једну асимптоту дијаграма промене модула $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$. Друга асимптота се добија из услова $\omega T \gg 1$. Тада из (6.26) следи

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log_{10}\omega T = 20\log_{10}(1/T) - 20\log_{10}\omega. \tag{6.29}$$

Уколико претпоставимо да је $\omega = 1/T$ добија се

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 0dB. \tag{6.30}$$

При десет пута већој фреквенцији ова вредност биће

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}(1/T) - 20\log_{10}(10/T) = -20dB. \tag{6.31}$$

односно добиће се ордината која је мања за 20 децибела. Ово значи да другу асимптоту дијаграма промене модула $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ представља права која пролази кроз тачку $\omega = 1/T$ под нагибом од $-20dB/dec.$

Уводећи, у једначини (6.26), претпоставку да је $\omega = 1/T$ добија се

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{2} = -3dB. \tag{6.32}$$

Ова вредност представља највеће одступање у односу на асимптотске праве.

При анализи промене фазног кашњења на основу функције (6.27) може се закључити да су асимптоте при ниским и високим фреквенцијама

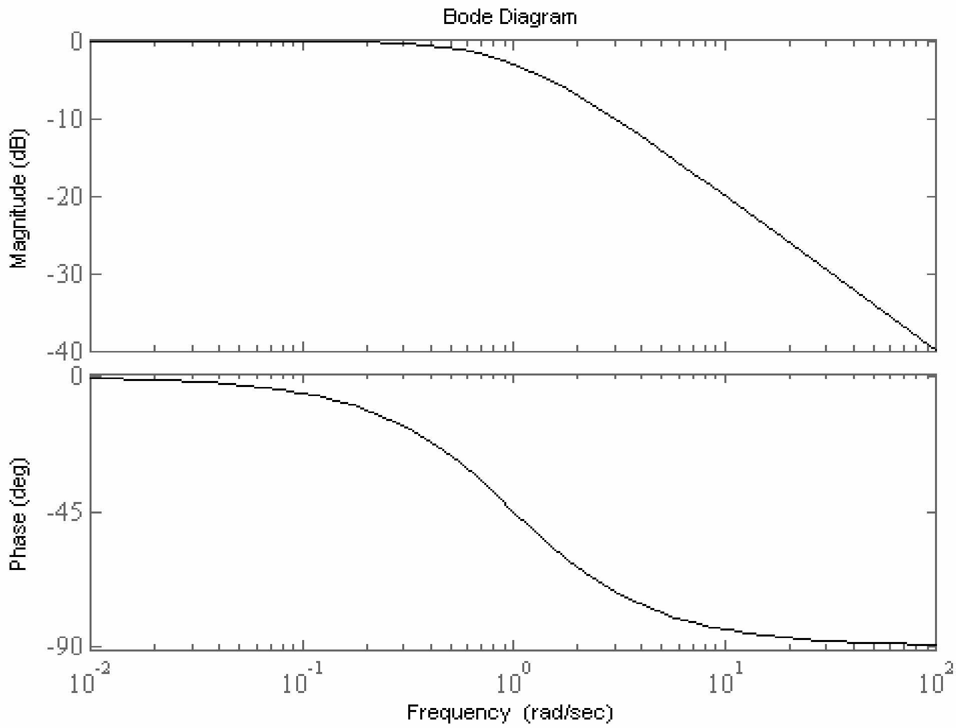
$\beta(\omega) = 0^0$ за $\omega T \ll 1$ и

$\beta(\omega) = -90^0$ за случај $\omega T \gg 1$.

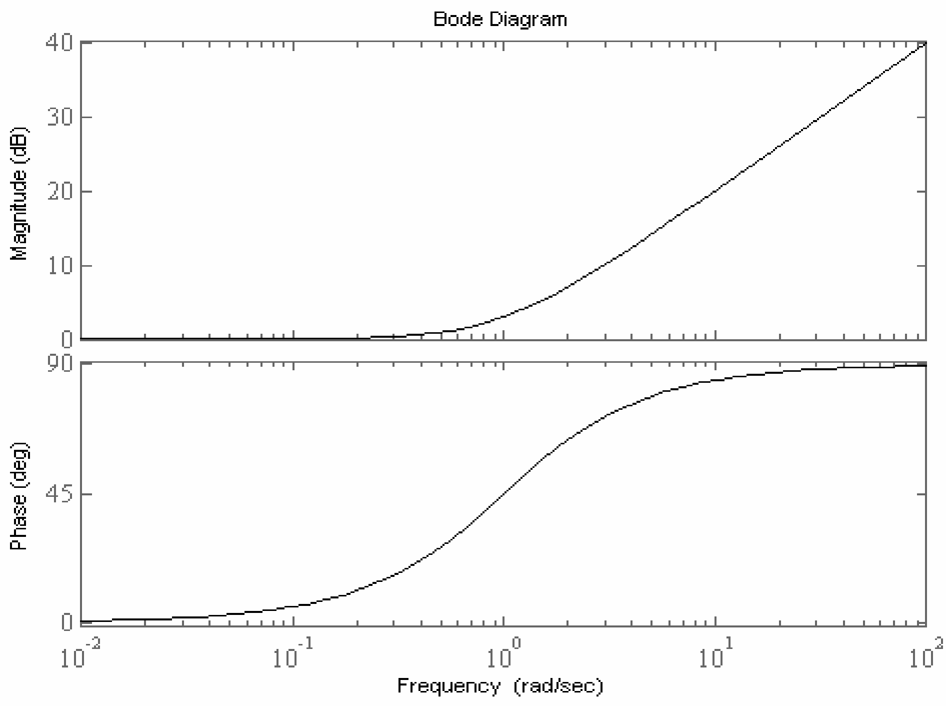
При $\omega = 1/T$ добија се вредност $\beta(\omega) = -45^0$. Одговарајући дијаграми промене модула и фазе приказани су на слици 6.3. У случају функције

$$G(s) = (Ts+1) \tag{6.33}$$

добили би се дијаграми, приказани на слици 6.4, који по свом облику изгледају као слика у огледалу у односу на дијаграме приказане на слици 6.3.



Сл. 6.3 Дијаграми промене модула и фазе за систем са функцијом преноса $(Ts+1)^{-1}$.



Сл. 6.4 Дијаграми промене модула и фазе за систем са функцијом преноса $(Ts+1)$.

При анализи дијаграма промене модула и фазе чланова функције преноса облика $(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)^{\pm 1}$ размотримо најпре функцију

$$G(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2Ts + 1}. \tag{6.34}$$

С обзиром да је коефицијент пригушења $\xi = 1$ јасно је да се ради о функцији која има двоструки пол $p_{1,2} = -1/T$, односно може се записати као

$$G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^2}.$$

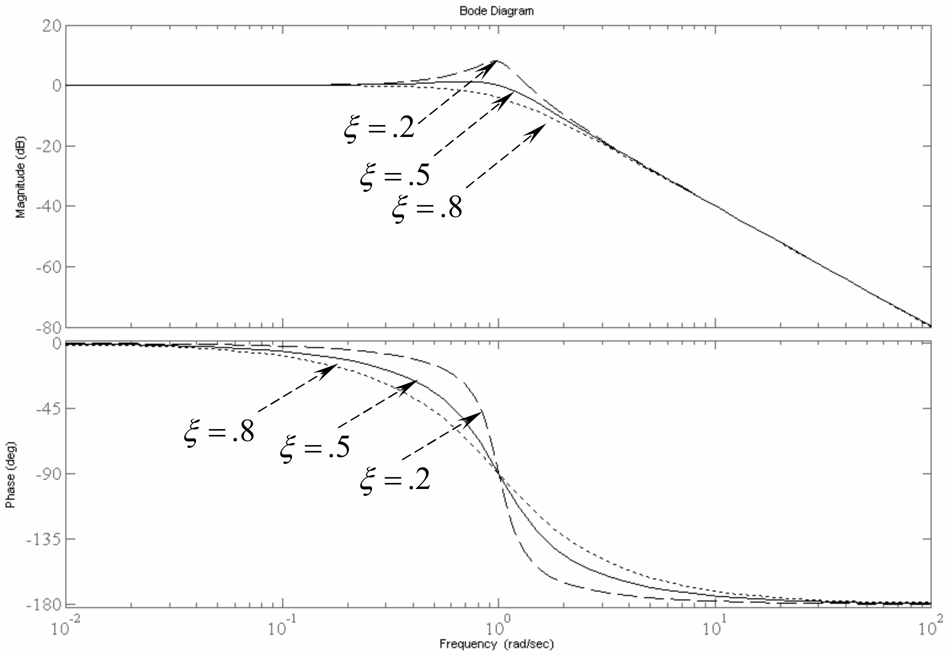
Другим речима, $G(s)$ представља редну везу елемената чије су функције преноса описане једначином (6.25). Можемо закључити да се одговарајући дијаграми функције (6.32) добијају удвостручавањем вредности дијаграма промене модула и фазе за функцију (6.25). Тако ће укупна промена фазног кашњења $\beta(\omega)$ бити у опсегу од 0^0 до -180^0. При томе ће асимптота модула $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$, на фреквенцијама већим од $\omega = 1/T$ пролазити кроз ову тачку под нагибом од $-40dB/dec.$ На фреквенцијама нижим од ове асимптота је одређена вредношћу $\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 0dB,$ а највеће одступање у односу на асимптоте износи $\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -40\log_{10}\sqrt{2} = -6dB.$

Модул и фазно кашњење функције (6.32), за случај када је коефицијент пригушења $0 < \xi < 1$, одређени су једначинама

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log_{10}[(1-\omega^2T^2)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2]^{1/2} \text{ и} \tag{6.35}$$

$$\beta(\omega) = \tan^{-1}\frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} = \frac{-2\xi\omega T}{1-\omega^2T^2}. \tag{6.36}$$

Промена коефицијента пригушења, у домену $0 < \xi < 1,$ највише утиче на промену облика карактеристика у околини преломне фреквенције $\omega = 1/T.$ Смањивањем коефицијента пригушења, као што се види на слици 6.5, промена модула поприма облик надвишења што је својствено резонантним колима. При томе се мења само нагиб одговарајуће фазне карактеристике. Одговарајући дијаграми функције $(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)$ добили би се множењем дијаграма приказаних на слици 6.5 са вредношћу -1.



Сл. 6.5 Дијаграми промене модула и фазе за систем са функцијом преноса $(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^{-1}$.

ПРИМЕР 6.2: Нацртати Бодеове дијаграме модула и фазе за систем са функцијм преноса

$$G(s) = \frac{2000(s+0,5)}{s(s+10)(s+50)}.$$

РЕШЕЊЕ: Уколико се прегрупишу коефицијенти унутар функције $G(s)$ добија се

$$G(s) = \frac{2000 \cdot 0,5(\frac{s}{0,5}+1)}{10 \cdot 50 s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{50}+1)},$$

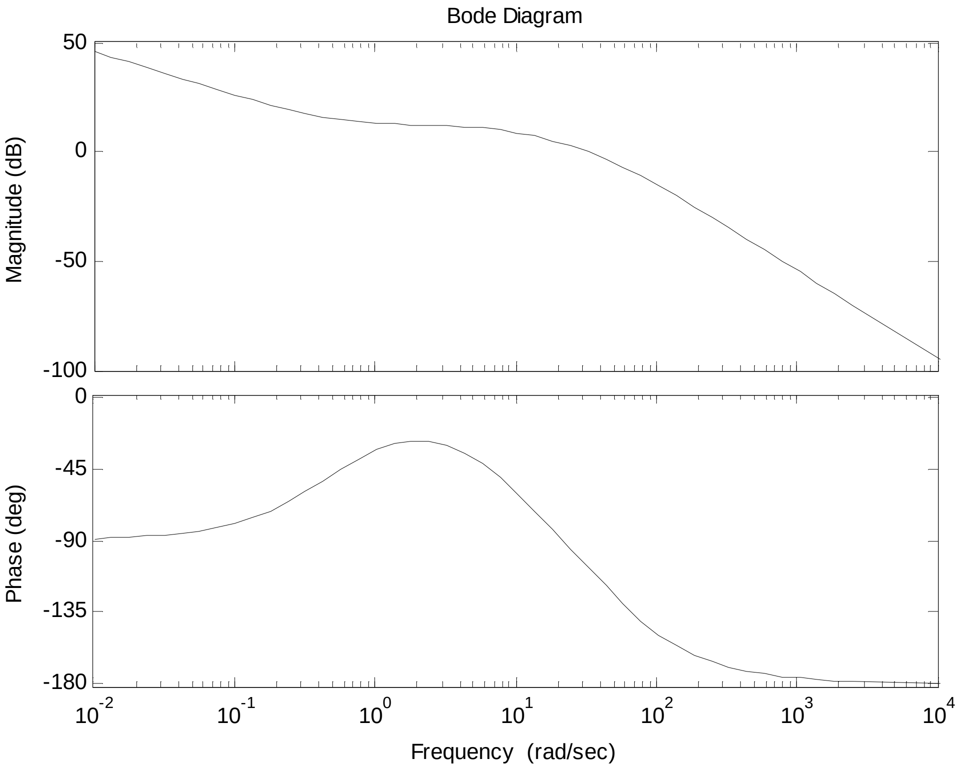
односно

$$G(s) = \frac{2(2s+1)}{s(0,1s+1)(0,02s+1)}.$$

Имајући у виду општи запис функције преноса (6.17) можемо написати

$$G(s) = \frac{K(T_1 s+1)}{s(T_2 s+1)(T_3 s+1)}.$$

тако да се сада могу уочити вредности коефицијента појачања $K=2$ и временских константи $T_1=2$, $T_2=0,1$ и $T_3=0,02$. Одговарајући дијаграми су приказани на слици 6.6.



Сл 6.6 Дијаграми промене модула и фазе за систем у примеру 6.2

Дијаграм промене модула функције преноса добијамо тако што прво нацртамо асимптоте полова $p_2=-1/T_2$, $p_3=-1/T_3$ које полазе из тачака $\omega_2=10$, $\omega_3=50$ на $\log\omega$ оси под углом од $-20dB/dec$ као и праву која пролази кроз тачку $\omega_0=1$ под истим углом а одговара полу у координатном почетку комплексне равни. Поред тога, потребно је нацртати асимптоту која одговара нули $n=-1/T_1$ и полази из тачке $\omega_1=0,5$ на $\log\omega$ оси под углом од $+20dB/dec$. Коначан облик дијаграма промене модула функције преноса добија се збрајањем свих карактеристика. С лева на десно прво имамо праву која одговара полу у координатном почетку комплексне равни због чега ће нагиб карактеристике бити $-20dB/dec$. С обзиром да се у тачки $\omega_1=0,5$

појављује асимптота под нагибом $+20dB/dec$ резултујућа асимптотска карактеристика, од ове фреквенције, има нулту вредност. На фреквенцији $\omega_2 = 10$, појављује се асимптота са нагибом од $-20dB/dec$ што је уједно и резултујућа карактеристика до фреквенције $\omega_3 = 50$. Након ове фреквенције, због појаве још једне асимптоте од $-20dB/dec$, резултујућа карактеристика има нагиб од $-40dB/dec$. Коначни облик карактеристике добија се спуштањем $\log\omega$ осе за износ од $20\log_{10} 2dB$ како би се увео ефекат који уноси постојање појачања $K = 2$.

Фазна карактеристика система се добија суперпонирањем, односно сабирањем фазних карактеристика које одговарају половима и нулама на већ поменутим фреквенцијама. С обзиром да систем има једну нулу и три пола од којих је један смештен у координатном почетку комплексне равни фазна карактеристика започиње од нивоа -90^0. Укупан фазни помак, у области високих фреквенција, асимптотски тежи нивоу од -180^0.

У досадашњем излагању приказани су *системи минималне фазе*, односно системи који немају ни један пол или нулу десно од имагинарне осе у комплексној равни. Међутим, уколико функција повратног преноса садржи неки пол или нулу десно од имагинарне осе у комплексној равни систем припада класи *система неминималне фазе*. Дијаграми промене модула оваквих система подударају се са дијаграмима система минималне фазе, али се њихови фазни дијаграми разликују. Ово је лако разумети ако размотримо једноставне примере као што су чланови фреквенцијске функције преноса $1-Tj\omega$ и $1+Tj\omega$. Лако је уочити се фазни дијаграм члана $1-Tj\omega$ мења од 0 до -90^0. Међутим, тај дијаграм у случају члана $1+Tj\omega$ мења се од 0 до 90^0. При томе су њихови модули подударни. Ово треба имати увиду током експерименталног одређивања функције преноса снимањем одзива система на побуду хармонијским сигналом различитих фреквенција. Очигледно није довољно регистровати само промену модула, односно амплитудно фреквенцијску карактеристику већ треба снимити и промену фазне карактеристике како би се констатовало да ли је у питању систем минималне или неминималне фазе. Наведимо на крају да већина система аутоматског управљања припада класи система минималне фазе.

6.2 Процена стабилности система у фреквенцијском домену

Анализом карактеристика система у временском домену уочен је утицај промене статичког појачања на њихову стабилност. Његовим појачањем, у већини случајева, систем постаје нестабилан. Међутим, у случају система трећег и вишег реда уочено је да систем постаје нестабилан и када се појачање смањи испод неке вредности. На пример, уколико је карактеристични полином $s^3 + 3s^2 + 4s + (K-2) = 0$ статичко појачање мора имати вредност $2 < K < 10$ да би систем био стабилан. Примена алгебарских критеријума омогућава да одредимо услове, али не и резерву стабилности која обезбеђује да систем остане стабилан и у присутву поремећаја, као што је, на пример, промена амбијенталних услова.

Анализа система у фреквенцијском домену довела је до појаве графоаналитичких критеријума који омогућавају да се процени и резерва стабилности. Ово значајно сазнање уочио је Никвист (Harry Nyquist) 1932. године испитујући динамичка својства електронских појачавача са повратном спрегом на основу промена њихових амплитудних и фазних карактеристика. Након тога, 1938. године, руски научник А. В. Михајлов указао је на могућност одређивања динамичких карактеристика система аутоматског управљања применом метода анализе у фреквенцијском домену.

Оцена стабилности система у фреквенцијском домену најчешће се остварује на основу Никвистовог критеријума. При томе се разматрају облици амплитудне и фазне карактеристике ситема са отвореним колом повратне спреге (функција повратног преноса). Ове карактеристике се могу лако снимити експерименталним путем што нуди могућност да се наведени критеријум примени и у случају када функција преноса система није позната. Претпоставимо да функција повратног преноса има облик

$$W(s) = \frac{s-1}{s-0,5}. \tag{6.37}$$

Као што видимо, у конкретном случају, систем са отвореним колом повратне спреге је нестабилан због присуства пола $p = 0,5$ десно од имагинарне осе.

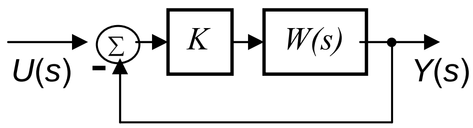
Претпоставимо, на даље, да је затворена јединична повратна спрега (види поглавље 3.2, Сл. 3.19) односно да систем има функцију спрегнутог преноса

$$F(s)=\frac{W(s)}{1+W(s)}. \tag{6.38}$$

Тада се за конкретну функцију $W(s)$ добија

$$F(s)=\frac{s-1}{2s-1,5}. \tag{6.39}$$

Као што видимо систем и након затварања повратне спреге остаје нестабилан због присуства пола $p=0,75.$ Проверимо могућност стабилизације система увођењем појачања K у директну грану кола повратне спреге, слика 6.7.



Сл. 6.7 Систем са могућношћу подешавања резерве стабилности променом појачања K

У том случају се добија функција спрегнутог преноса

$$F(s)=\frac{K(s-1)}{(K+1)s-(K+0,5)}. \tag{6.40}$$

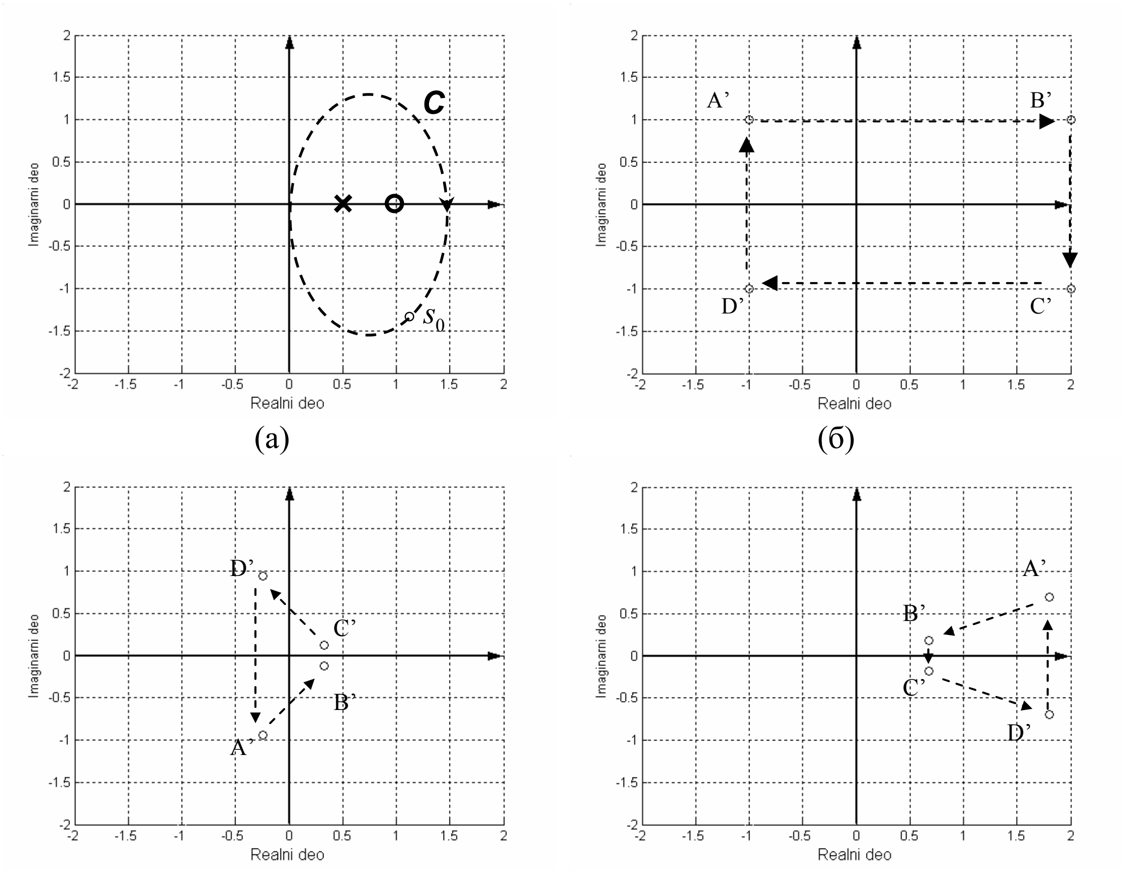
Применом алгебарских критеријума стабилности може се показати да је за стабилност ситема неопходно да буде испуњен услов $-1<K<-0,5.$ Ово практично значи да у директној грани треба увести инверзију и слабљење сигнала у износу који не прелази половину нивоа добијеног на излазу суматора (поредбеног елемента). Намеће се питање како да на основу распореда нула и полова функције повратног преноса $W(s)$ утврдимо да ли ће систем бити стабилан након затварања петље повратне спреге.

Тражећи одговор на ово питање Никвист је пошао од Кошијеве (Cauchy) теореме аргумента познате из теорије функција комплексне варијабле. Пре него што наведемо ову теорему погледајмо најпре како изгледа пресликавање из комлексне равани у раван комплексне функције $W(s)$.

На слици 6.8(а) приказани су пол и нула функције описане једначином (6.37). Анализирајмо шта се дешава када комплексна променљива има вредност која одговара тачки s_0 на контури C. С обзиром да се комплексна проенљива састоји из реалног и имагинарног дела, $s=\sigma+j\omega$, вредност функције $W(s)$ ће такође имати комплексни облик. Уколико редом уврстимо све вредности са контуре C добићемо у равни $W(s)$ контуру чији геометријски облик управо зависи од облика функције $W(s)$. Покажимо то на пар једноставних примера. Претпоставимо, за почетак, да имамо функцију

$$W_N(s)=s-1, \tag{6.41}$$

која садржи само нулу у тачки $n=1$.



Сл. 6.8 Пресликавање из s-равни у раван функције W(s)

Претпоставимо да контура C има облик правоугаоника са теменима чије су координате $A=(0,j1)$, $B=(3,j1)$, $C=(3,-j1)$, $D=(0,-j1)$. Уколико истим редом извршимо пресликавање ових вредности користећи функцију $W_N(s)$ у њеној равни добија се контура приказана на слици 6.8(б). Видимо да пресликана темена A', B', C', D' имају исти редослед као и одговарајућа темена A, B, C, D у равни комплесне променљиве s. При томе је сачуван облик контуре. Настала је само транслација свих тачака у лево. Приметимо да контура у $W_N(s)$ равни обухвата координатни почетак у смеру обиласка контуре у равни комплексне променљиве, односно у смеру кретања казаљке на сату.

Претпоставимо, за разлику од претходног случаја, да комплексна функција садржи само пол $p = 0,5$, односно да има облик

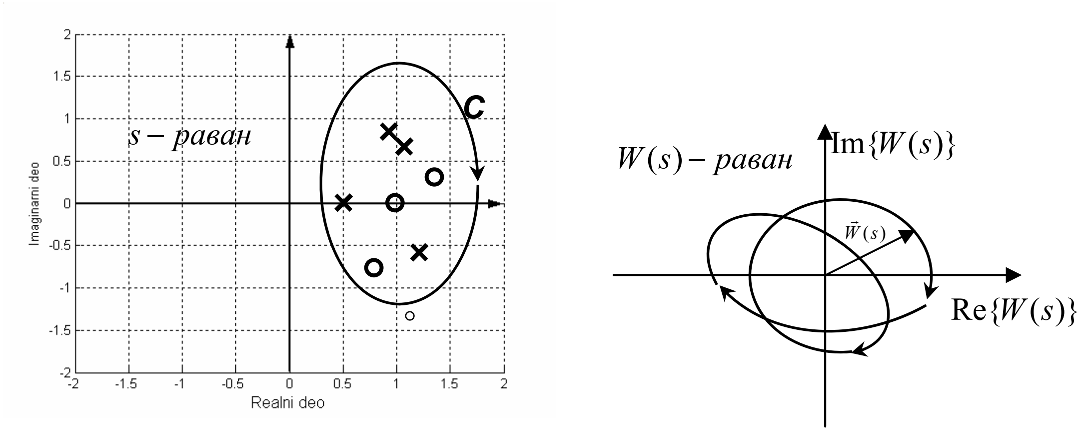
$$W_P(s) = \frac{1}{s - 0,5}. \tag{6.42}$$

Уколико претпоставимо да контура C има облик правоугаоника са истим теменима њиховим пресликавањем у равни функције $W_P(s)$ добијамо контуру измењеног облика приказану на слици 6.8(в). Пресликана темена (A', B', C', D') распоређена су обрнутим редоследом. При томе контура обухвата координатни почетак у $W_P(s)$ равни, али га обилази у смеру који је супротан обиласку контуре у равни комплексне променљиве, односно у смеру супротно од кретања казаљке на сату.

Уколико се истоветна контура усвоји током пресликавања које се реализује на основу функције описане једначином (6.37) у равни функције $W(s)$ добија се контура приказана на слици 6.8(г). С обзром да ова функција има једнаки број полова и нула добијена контура не обухвата координатни почетак у $W(s)$ равни.

По Кошијевој теореми аргумента, ако у равни комплексног аргумента s обиђемо једном контуру C, на којој функција $W(s)$ нема ни полова ни нула, и то у смеру кретања казаљке на сату, тада ће вектор $W(s)$ у својој равни учинити у истом смеру $N - P$ обртаја око кординатног почетка, где је N број нула, а P број полова функције $W(s)$ који се налазе унутар контуре C. На слици 6.9 се види илустративни приказ ове тврдње. Другим речима, прираштај аргумента у равни $W(s)$ дуж контуре C биће

$$\Delta \arg_C W(s) = (N - P)2\pi. \tag{6.43}$$



(а) (б)

Сл. 6.9 Пресликавање контуре из *s*-равни у раван функције W(s)

Никвистов критеријум полази од функције повратног преноса система

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{6.44}$$

која се добија свођењем система на структуру са јединачном повратном спрегом чија је карактеристична једначина

$$1 + W(s) = 0. \tag{6.45}$$

Уколико на основу једначина (6.44) и (6.45), напишемо функцију

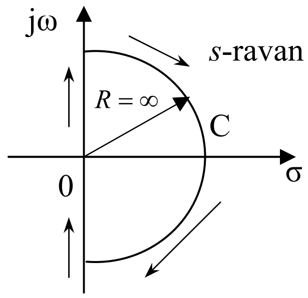
$$F(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} = \frac{P(s)}{D(s)} \tag{6.46}$$

уочавамо да је бројилац $P(s)$ карактеристични полином система са затвореном повратном спрегом па његове нуле представљају корене карактеристичне једначине (6.45). При томе се полином $D(s)$ у имениоцу функције $F(s)$ појављује и у имениоцу функције повратног преноса $W(s)$. Очигледно, нуле полинома $D(s)$ представљају полове функције повратног преноса. Полазећи од услова да је за стабилност система неопходно и довољно да карактеристична једначина система има све корене са негативним реалним деловима произлази захтев да функција $F(s)$ нема нуле десно од имагинарне осе у *s*-равни.

С обзиром да је степен полинома $D(s)$ у имениоцу функције повратног преноса већи или, у крајњем случају, једнак степену полинома $N(s)$ у бројиоцу лако је закључити да су степени полинома у бројиоцу и имениоцу функције $F(s)$ исти.

Да бисмо извели Никвистов критеријум, уочимо контуру C (Сл. 6.10), која се *састоји* из имагинарне осе и полукруга бесконачног полупречника у s-равни. За сада претпоставимо случај да функција $F(s)$ нема нула ни полова на контури C.

Претпоставимо општи случај, односно да је посматрани систем нестабилан када му је повратна спрега прекинута. Ово значи да функција повратног преноса $W(s)$ има полове десно од имагинарне осе у s-равни (унутар контуре C). Нека је број тих полова P. С обзиром да су полови функције $W(s)$ истовремено и полови функције $F(s)$ то значи да ће, у овом случају, и функција $F(s)$ имати P полова унутар контуре C. С друге стране, у случају стабилног система, број нула функције $F(s)$ унутар контуре C биће једнак нули (N=0).



Сл. 6.10 Контура Никвистовог критеријума

У складу са Кошијеовом теоремом аргумента произлази да је у стабилном систему, при једном обиласку контуре C у смеру кретања казаљке на сату (Сл. 6.10), прираштај аргумента функције $F(s)$.

$$\Delta \arg_C F(s) = P2\pi. \tag{6.47}$$

При томе је P број полова функције повратног преноса $W(s)$ који се налазе десно од имагинарне осе у s-равни. Другим речима, при једном обилажењу контуре C у негативном смеру вектор $F(s)$ обрнуће се P пута око координатног почетка у својој равни и то у позитивном смеру.

С обзиром да су реални полиноми у бројиоцу и имениоцу функције $F(s)$ истог степена, дуж полукруга бесконачног полупречника на Сл. 6.10 вредност функције $F(s)$ је једнака некој реалној константи, па је прираштај њеног аргумента дуж овог дела контуре C једнак нули. Према томе, у стабилном систему ће бити

$$\Delta \arg F(j\omega) = P2\pi, \qquad -\infty \le \omega \le \infty. \tag{6.48}$$

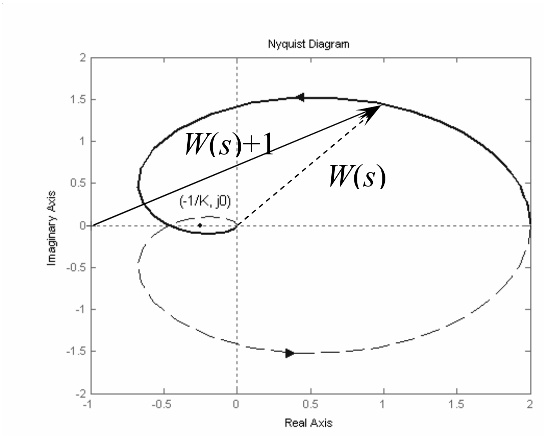
С обзиром да функција $F(s)$ припада класи реалних рационалних функција, прираштај аргумента функције $F(j\omega)$ дуж негативног дела једнак је прираштају аргумента дуж позитивног дела имагинарне осе s-равни, па се (6.48) може заменити еквивалентним условом

$$\Delta \arg F(j\omega) = P\pi, \qquad 0 \le \omega \le \infty,$$

односно

$$\Delta \arg[1 + W(j\omega)] = P\pi, \qquad 0 \le \omega \le \infty. \tag{6.49}$$

Посматрајмо сада раван вектора $W(j\omega)$ (Сл. 6.11). Ако за разне вредности ω од 0 до ∞ израчунамо реални и имагинарни део од $W(j\omega)$ у равни $W(j\omega)$ добили би одговарајућу криву, која се назива Никвистова крива. Свака тачка ове криве одређена је модулом и аргументом фреквенцијске функције повратног преноса $W(j\omega)$. Због тога, у равни $W(j\omega)$ ова крива представља у ствари амплитуднофазну фреквенцијску карактеристику система у отвореном колу повратне спреге.



Сл. 6.11 Никвистова крива

Један од могућих изгледа ове карактеристике приказан је на Сл. 6.11. Испрекидана линија означава део криве који би се добио за негативне вредности ω и он је увек симетричан у односу на реалну осу делу криве за позитивне вредности ω. Почетак вектора $1+W(j\omega)$ налази се у тачки $(-1, j0)$ $W(j\omega)$ равни, а његов врх исписује амплитуднофазну фреквенцијску карактеристику када се фреквенција мења од 0 до ∞. Из услова стабилности следи да укупан угао ротације вектора $1+W(j\omega)$ око тачке $(-1,j0)$ треба да буде $P\pi$. С обзиром да је стабилност система условљена бројем ротација вектора $1+W(j\omega)$ око тачке $(-1, j0)$ она се назива *критична тачка*.

На основу претходних објашњења може се прецизно формулисати Никвистов критеријум: *Да би систем са повратном спрегом био стабилан, потребно је и довољно да се, при промени фреквенције ω од 0 до ∞, вектор, чији се почетак налази у тачки (-1, j0), а врх на амплитуднофазној фреквенцијској карактеристици $W(j\omega)$ система са отвореним колом повратне спреге, обрне у позитивном смеру (супротно од кретања казаљке на сату) за угао $P\pi$. При томе је P број полова функције повратног преноса система $W(s)$ који имају позитивне реалне делове. Другим речима, потребно је да амплитуднофазна карактеристика $W(j\omega)$ обухвата критичну тачку (-1, j0) у позитивном смеру $P/2$ пута*.

У случају када је систем са отвореним колом повратне спреге стабилан, односно када је $P = 0$ укупан угао ротације вектора $[1 + W(j\omega)]$ око критичне тачке $(-1, j0)$ треба да буде једнак нули. Тада важи следећи критеријум: *Ако је систем са отвореним колом повратне спреге стабилан, тада је за стабилност система, када му се повратна спрега прикључи, довољно да критична тачка (-1, j0) лежи ван амплитуднофазне фреквенцијске карактеристике система са прекинутом повратном спрегом.*

У сложенијим случајевима могу се појавити потешкоће у одређивању обухвата критичне тачке. Одређивање броја обухвата, односно суђење о стабилности система помоћу Никвистовог критеријума, може се извршити помоћу правила прелаза, које је уочио и формулисао Ја. З. Ципкин.

Назовимо прелаз карактеристике $W(j\omega)$ преко реалне осе на делу лево од тачке $(-1, j0)$, односно на делу $(-\infty, -1)$, при порасту ω позитивним, ако карактеристика сече осу одозго на доле, а негативним, ако је сече одоздо на горе. Тада се Никвистов критеријум може преформулисати на следећи начин: *Систем ће бити стабилан ако је разлика између броја позитивних и негативних прелаза амплитуднофазне фреквенцијске карактеристике система са отвореним колом повратне спреге на делу реалне осе $(-\infty, -1)$ при промени фреквенције ω од 0 до ∞, једнака $P/2$, при чему P означава број полова функције повратног преноса система који имају позитивне реалне делове.*

Ако амплитуднофазна фреквенцијска карактеристика почиње на делу реалне осе ($-\infty$, -1), за $\omega=0$ или се на овом делу реалне осе завршава при $\omega=\infty$, тада се сматра да карактеристика чини један полупрелаз.

Функција $W(s)$ се увек може изразити у облику $W(s)=KW_1(s)$, при чему K представља коефицијент статичког појачања система са отвореним колом повратне спреге. Тада се уместо карактеристике $W(j\omega)$, при формулацији Никвистовог критеријума, може користити карактеристика $W_1(j\omega)=W(j\omega)/K$, уз напомену да улогу критичне тачке преузима тачка ($-1/K$, $j0$) на реалној оси равни $W(j\omega)/K$. У овом случају, променом појачања K, критична тачка ($-1/K$, $j0$) помера се дуж негативног дела реалне осе равни $W(j\omega)/K$, односно мења своју позицију у односу на карактеристику $W(j\omega)/K$. На тај начин могуће је установити граничну вредност за K, односно при ком појачању систем постаје нестабилан.

Приликом цртања Никвистове криве пожељно је имати у виду њен квалитативни изглед у околини вредности $\omega=\infty$. Ако су полиноми у бројиоцу и имениоцу функције $W(s)$ степена m и n, онда је увек $m \le n$. Претпоставимо да је n-m=l. Ако l није једнако нули, у околини вредности $\omega=\infty$ функција $W(j\omega)$ се понаша као

$$W(j\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{K}{(j\omega)^l}=0\ \angle -l\pi/2. \tag{6.50}$$

То значи да када $\omega\to\infty$ карактеристика $W(j\omega)$ завршава у координатном почетку, прилазећи му под углом од $-l\pi/2$ rad у односу на позитивни део реалне осе. При томе је l разлика степена полинома у бројиоцу и имениоцу функције повратног преноса. Када је $l=0$, карактеристика се завршава у некој тачки на позитивном делу реалне осе.

Подсетимо да се претходно разматрање искључиво односило на системе чије функције повратног преноса немају ни нула ни полова на имагинарној оси s-равни.

У најопштијем случају (види поглавље 3.3, једначина (3.16)) функција повратног преноса је дата у облику

$$W(s)=\frac{K_r N(s)}{s^r D_0(s)}=\frac{K_r(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+1)}{s^r(a_n s^{n-r}+a_{n-1}s^{n-r-1}+\ldots+a_1 s+1)}, \tag{6.51}$$

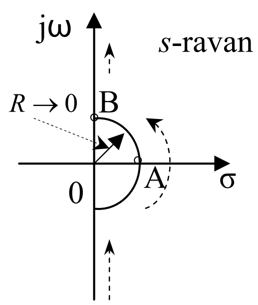
при чему су полиноми $D_0(s)$, $N(s)$, једнаки јединици за s=0, K_r пredстављa коефицијент појачања функције повратног преноса, а r означава ред астатизма. Тада је

$$W(j\omega)=\frac{K_r N(j\omega)}{(j\omega)^r D_0(j\omega)}, \tag{6.52}$$

па функција $W(j\omega)$ има бесконачни модуо за $\omega = 0$. То значи да при условима када $\omega \to 0$ гране карактеристике $W(j\omega)$ одлазе у бесконачност па је немогуће говорити о положају тачке (-1, j0) "ван карактеристике" или "унутар карактеристике".

Да би се избегле тешкоће које настају када функција $W(s)$ поседује сингуларитет типа пола у координатном почетку s-равни, овај сингуларитет се заобилази полукругом (Сл. 6.12), чији полупречник тежи нули. Напоменимо да се на исти начин врши обилажење сингуларитета функције повратног преноса, када се ови сингуларитети налазе на било ком делу имагинарне осе s-равни.

Према томе, за анализу стабилности система који поседује астатизам неопходно је амплитуднофазну фреквенцијску карактеристику $W(j\omega)$, добијену при промени фреквенције ω од 0 до ∞, односно при промени s од тачке B до бесконачности дуж позитивног дела имагинарне осе, допунити кривом у $W(s)$ равни, која одговара вредностима за s на луку AB (Сл. 6.12).



Сл . 6.12 Обилажење сингуларитета на имагинарној оси у s-равни

Ако дуж лука AB уведемо супституцију $s=\mathrm{R}e^{j\vartheta}$, где $\mathrm{R}\to 0$, а $\vartheta \in [0,\pi/2]$ биће

$$W(\mathrm{R}e^{j\vartheta})=\frac{K_r N(\mathrm{R}e^{j\vartheta})}{(\mathrm{R}e^{j\vartheta})^r D_0(\mathrm{R}e^{j\vartheta})}. \tag{6.53}$$

С обзиром да је $D_0(0) = N(0) =1$, када $\mathrm{R}\to 0$, добија се да је

$$W(s)\big|_{AB}=\lim_{R\to 0}\frac{K_r}{\mathrm{R}^r}\mathrm{e}^{-jr\vartheta}=\infty\ \angle\text{-}r\vartheta. \tag{6.54}$$

У тачки *A* угао $\vartheta=0$ и њој, према (6.54) у $W(s)$ равни одговара тачка у бесконачности на позитивном делу реалне осе. У тачки *B* угао $\vartheta=\pi/2$ и њој, у $W(s)$ равни одговара нека тачка у бесконачности на правој која пролази кроз координатни почетак и заклапа угао $-r\pi/2$ у односу на позитивни део реалне осе. Очигледно, ова права је увек једна од оса $W(s)$ равни, а лук *AB*, пресликава се из *s*-равни, у одговарајући лук на централном кругу бесконачно великог полупречника у $W(j\omega)$ равни. Тај лук полази у негативном смеру из тачке у бесконачности на позитивном делу реалне осе и има централни угао једнак $r\pi/2$, односно обухвата онолико квадраната $W(j\omega)$ равни, колики је ред астатизма посматраног система.

ПРИМЕР 6.3: Одредите стабилност система ако је функција повратног преноса

$$W(s)=\frac{K}{(2s^2+2s+1)(s-1/4)}\,. \tag{6.55}$$

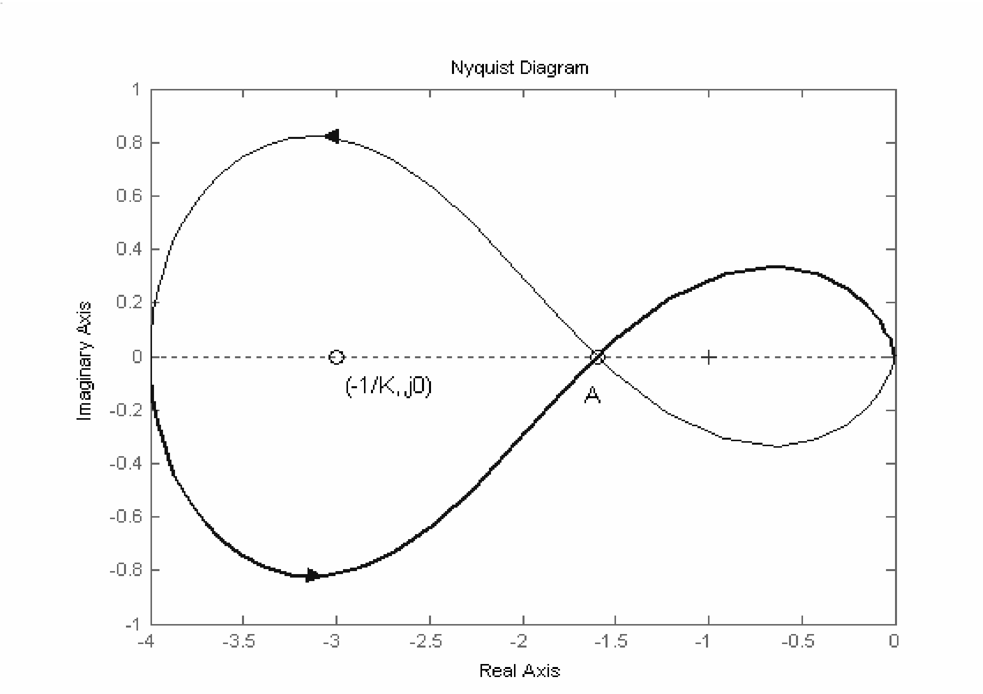
РЕШЕЊЕ: Нацртаћемо одговарајући дијаграм у равни $W(j\omega)/K$. При томе треба одмах уочити да је разлика реда полинома у бројиоцу и имениоцу (m-n= -3) што значи да у случају стабилног система са затвореним колом повратне спреге Никвистова крива прилази координатном почетку под углом $-3\pi/2$ када фреквенција ω тежи $+\infty$. Њен почетак одређује се из услова $\omega=0$ и налази се у тачки $(-4, j0)$. Поред тога уочавамо да систем поседује бар један пол који се налази десно од имагинарне осе, односно у тачки $(1/4, j0)$. Уколико за преостала два пола напишемо једнакост

$$2s^2+2s+1=T^2s^2+2\xi Ts+1 \tag{6.56}$$

одмах уочавамо да су $T=\sqrt{2}$, а $\xi=\sqrt{2}/2$. Имајући у виду позната решења једначине $T^2s^2+2\xi Ts+1=0$, односно

$$p_{1,2}=-\xi/T\pm j\sqrt{1-\xi^2}\Big/T$$

јасно је да су ови полови $p_{1,2}=-1/2\pm j1/2$. Чињеница да је $\xi=\sqrt{2}/2$ јасно указује да полови леже на симетралама углова које заклапају осе координатних система, односно да имају једнаке реалне и имагинарне делове. С обзиром да постоји само један пол десно од имагинарне осе неопходан и довољан услов да систем са затвореним колом повратне спреге буде стабилан је да Никвистова крива обилази критичну тачку $(-1/K, j0)$ са десне стране, односно обухвата је у смеру супротно кретању казаљке на сату ½ пута када се ω мења од 0 до $+\infty$. Облик одговарајуће криве приказање на слици 6.13.



Сл.6.13 Никвистова крива за ситем чија је функција повратног преноса описана једначином (6.55)

Координате тачке A у којој Никвистова крива пресеца реалну осу одређују се из услова да је имагинарни део функције повратног преноса $W(j\omega)$ једнак нули. На тај начин добијају се вредности ω које треба уврстити у реални део функције повратног преноса како би се добиле жељене координате.

Други начин да ово учинимо је да одредимо функцију спрегнутог преноса

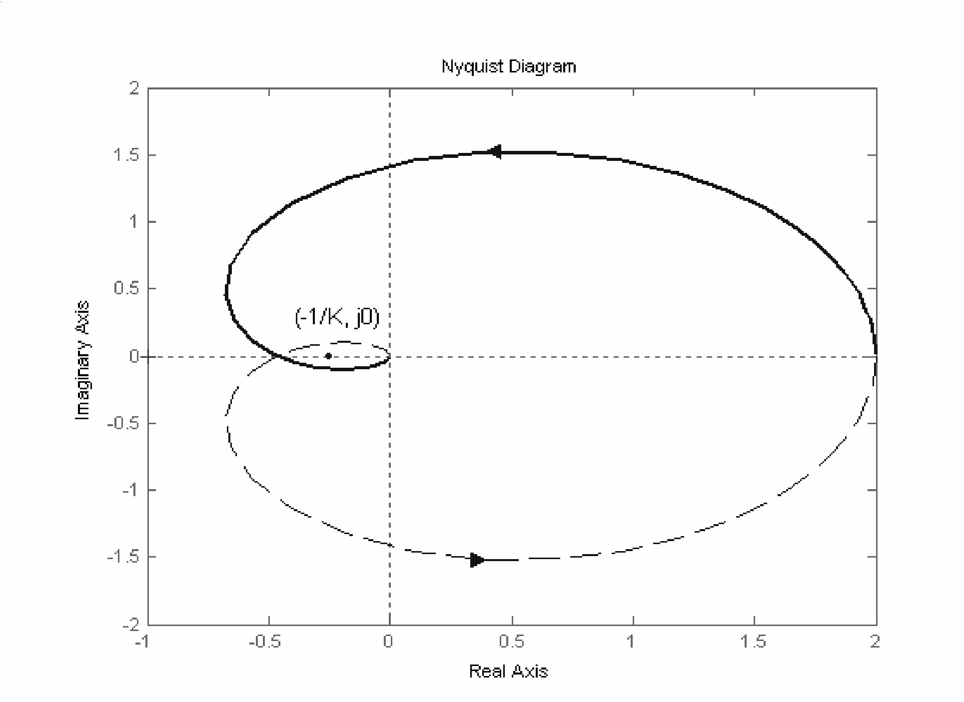
$$F(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{K}{2s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^3 + (K - \frac{1}{4})},$$

након чега се применом неког од алгебарских критеријума стабилности добија услов: $-4 < (1/K) < -1,6$. Другим речима појачање K мора да буде у интервалу одређеном границама $1/4 < K < 5/8$. Очигледно Никвистова крива сече реалну осу у тачки A са координатама (-1,6; j0).

ПРИМЕР 6.4: Одредите стабилност система ако је функција повратног преноса

$$W(s) = K\frac{(s+2)(s+10)}{(s-1)(s-2)(s+5)}. \tag{6.57}$$

РЕШЕЊЕ: У складу са чињеницом да функција повратног преноса има два пола десно од имагинарне осе Никвистова крива мора, при порасту фреквенције ω од 0 до $+\infty$, обићи критичну тачку $(-1/K, j0)$ једном са десне стране, односно у смеру супротно од кретања казаљке на сату. С обзиром да је разлика реда полинома у бројиоцу и имениоцу (m-n =-1) Никвистова крива, у случају стабилног система са затвореним колом повратне спреге, прилази координатном почетку под углом $-\pi/2$ када фреквенција ω тежи $+\infty$. Испрекидана линија на Сл. 6.14 приказује део криве који се добија при промени фреквенције ω од 0 до $-\infty$.

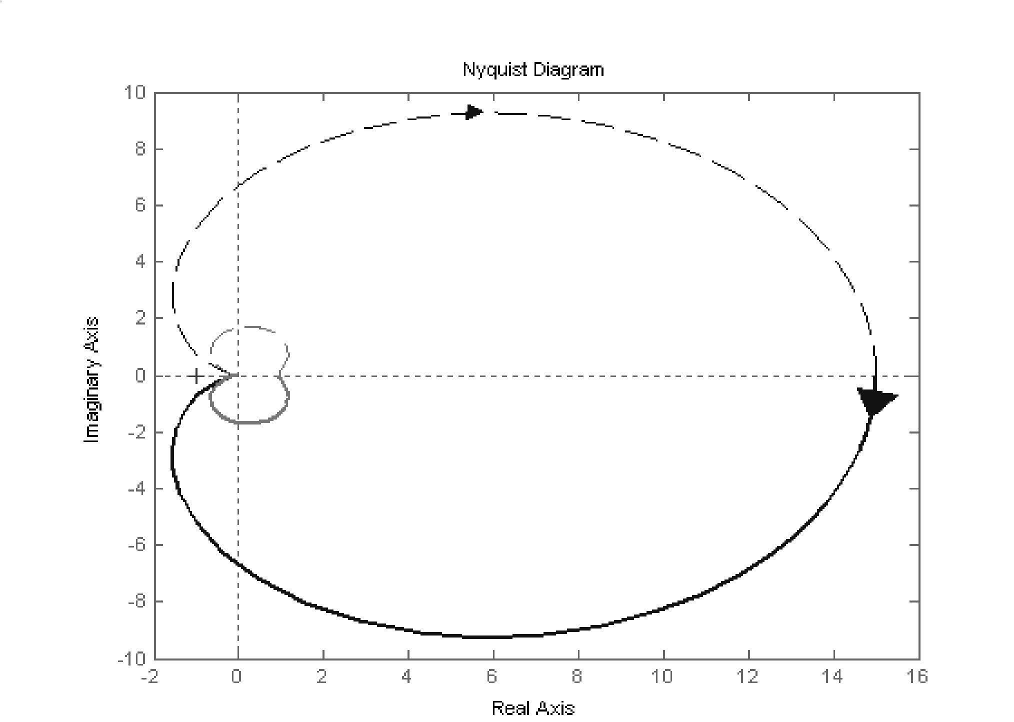


Сл. 6.14 Никвистова крива за ситем чија је функција повратног преноса описана једначином (6.57)

ПРИМЕР 6.5: Одредите стабилност система чија је функција повратног преноса

$$W(s) = K\frac{1}{s^2+10s+20}. \tag{6.58}$$

РЕШЕЊЕ: У складу са чињеницом да функција повратног преноса има полове $p_1 = -7,24$; $p_2 = -2,76$ лево од имагинарне осе Никвистова крива не сме ни једном да обухвати критчну тачку $(-1/K, j0)$ да би ситем био стабилан након затварња повратне спреге. У конкретном случају она полази из неке тачке на позитивном делу реалне осе и завршава под углом $-\pi$ када фреквенција ω тежи $+\infty$ јер је разлика реда полинома у бројиоцу и имениоцу (*m*-*n* = -2). На слици 6.15 су приказане две криве. Мања, односно ужа крива која одговара појачању $K = 20$ и шира која одговара појачању $K = 300$. У случају појачања $K = 20$ крива полази из тачке чије су координте $(1, j0)$. Повећањем појачања крива се шири и за вредност $K = 300$ полази из тачке $(15, j0)$. Испрекидане линија на Сл. 6.15 приказује део кривих које се добијају при промени фреквенције ω од 0 до $-\infty$.



Сл. 6.15 Никвистове криве за ситем чија је функција повратног преноса описана једначином (6.58)

Уочимо да зависно од облика функције повратног преноса и вредности одговарајућег коефицијента статичког појачања систем може бити: апсолутно стабилан, условно стабилан, критично стабилан или нестабилан.

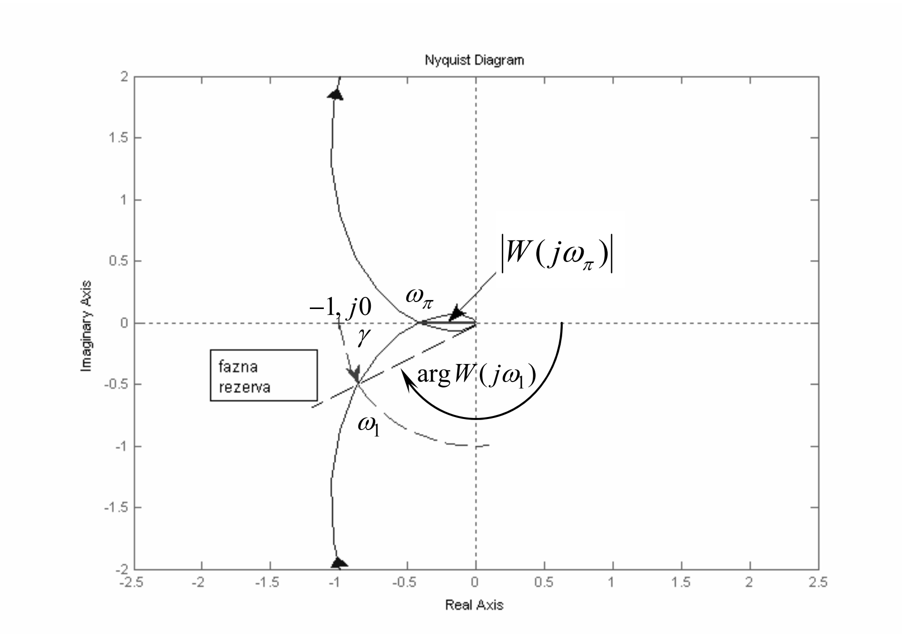
У примеру 6.5 приказан је Никвистов дијаграм апсолутно стабилног система. Без обзира на вредност појачања K овај ситем је увек стабилан. Међутим, ово је само теоријски тачно. Практично при довољно великом појачању K критична тачка $(-1/K, j0)$ наћи ће се близу координатног почетка и систем ће постати нестабилан. Један разлог за овакво понашање система је чињеница да су функције преноса изведене под претпоставком да су ситеми линеарни, што није тачно у случају екстремно великих појачања. Други разлог представља чињеница да су при дефинисању функција преноса система занемарени полови који долазе до изражаја тек при врло великим фреквенцијама (полови који су јако удаљени од имагинарне осе у комплексној равни).

Зависно од вредности појачања K систем описан у примеру 6.4 (Сл. 6.14) може бити стабилан, нестабилан или критично стабилан. У примеру 6.3 (Сл. 6.13) приказан је случај условно стабилног система. У режиму рада система са затвореним колом повратне спреге коефицијент појачања K функције повратног преноса, у пракси, није увек константан, односно мења се у одређеним границама Условно стабилни системи могу зато постатити нестабилни па треба избегавати њихову примену у пракси уколико је то могуће.

У случају система са локалним повратним спрегама неопходно је најпре испитати стабилност локалне повратне спреге. У пракси треба настојати да сва кола локалних повратних спрега буду стабилна сама за себе како би се избегао феномен условне стабилности. На тај начин обезбеђује се да систем добро функционише у широком дијапазону радних услова.

Из до садашњег текста уочава се да удаљеност Никвистове криве од критичне тачке (-1, j0) одређује стабилност система. С тим у вези уведени су појмови фазне и амплитудне резерве стабилности. Фазну резерву стабилности представља угао γ (Сл. 6.16) мерен дуж лука који полази из критичне тачке $(-1, j0)$, а завршава у тачки Никвистове криве где њен модуо има јединичну вредност. Уколико фреквенцију када је модуо функције повратног преноса једнак јединици означимо са ω_1 фазну резерву израчунавамо у степенима на основу једначине

$$\gamma = 180 + \arg W(j\omega_1), \qquad |W(j\omega_1)| = 1. \tag{6.59}$$



Сл. 6.16 Илустрација амплитудне и фазне резерве стабилности

Фреквенција ω_1 се назива пресечна фреквенција појачања јер је одређена пресеком Никвистове криве и јединичне кружнице са центром у координатом почетку $W(j\omega)$ равни. Фазна резерва γ у стабилним ситемима има позитивну, а у нестабилним негативну вредност. Уколико је $\gamma = 0$ систем се налази на граници стабилности. Оптимална вредност фазне резерве припада интервалу између 30 и 60 степени.

Амплитудна резерва стабилности или претек појачања дефинише се као реципрочна вредност модула фреквенцијске функције повратног преноса при фреквенцији ω_π за коју је аргумент ове функције једнак -180^0, односно

$$d = \frac{1}{|W(j\omega_\pi)|}, \qquad \arg W(j\omega_\pi) = -180^0. \tag{6.60}$$

У стабилним системима $d > 1$, а у нестабилним $d < 1$. Уколико је $d = 1$ систем се налази на граници стабилноси. Оптимална вредност амплитудне резерве стабилности припада интервалу $d \in [2, 6]$. Фреквенција ω_π се назива пресечна фреквенција фазе.

Као мера претека стабилности у фреквенцијском подручју чешће се користи бројна вредност претека фазе.

6.3 Параметри одзива система у фреквенцијском домену

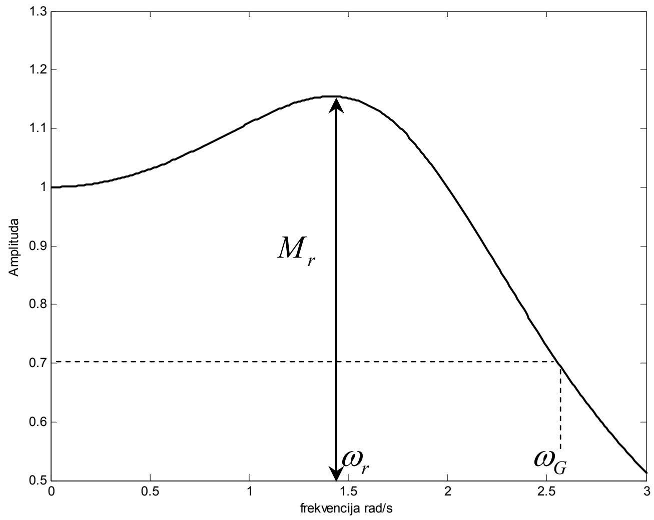
Већ је истакнуто да се модул функције преноса мења са променом фреквенције ω и представља однос амплитуда излазног и улазног сигнала. Уколико се усвоји јединична вредност амплитуде улазног сигнала онда промена модула функције преноса заправо представља промену амплитуде излазног сигнала, односно амплитудну карактеристику. Због тога се у литератури, уместо израза промена модула функције преноса, чешће користи назив амплитудна фреквенцијска карактеристика.

Амплитудна и фазна фреквенцијска карактеристика садрже потпуну информацију о динамичким својствима система. Користећи бројне вредности параметара који карактеришу ове карактеристике могуће је успоставити везу са одговарјућим парамтерима који описују понашање система у временском домену.

Оцена стабилности у виду претека фазе и појачања, односно одговор на питање колико је систем далеко од границе стабилности добија се, као што смо видели, управо на основу амплитудне и фазне резерве карактеристика система са отвореним колом повратне спреге у фреквенцијском домену.

Међутим, брзина реаговања, квалитет репродукције улазних сигнала и филтарске карактеристике система процењују се на основу параметара који одређују фреквенцијске карактеристике система са затвореном повратном спрегом. Ови параметри су познати, у литератури, под називима пропусни опсег, резонантна фреквенција, резонантни врх, селективност и временско кашњење.

Пропусни опсег: Идеалан систем, на свом излазу, би требао да верно репродукује улазни сигнал. Ово значи да би његова амплитудна карактеристика требала да буде равна и једнака јединици све до релативно високих фреквенција. Квалитет система управо је одређен ширином његовог пропусног опсега, односно његовом горњом граничном фреквенцијом ω_G. Ова фреквенција се одређује као тачка на $\log\omega$ оси у којој амплитудна карактерстика има вредност 0,707 или $-3dB$. Уколико амплитудна карактеристика има резонантни врх понекад је погодно да се ω_G дефинише као фреквенција на којој ова карактеристика поново има вредност један, односно $0dB$. Пропусни опсег система одређује филтарска и динамичка својства система. Шумови и поремећаји који делују на систем углавном заузимају ужи опсег фреквенција. Уколико систем поседује шири пропусни опсег присуство ових шумова се може појавити у променама излазног сигнала. Тада је неопходно да се на улазу система угради одговарајући филтар како би се спречило или смањило деловање ових шумова и поремећаја на понашање система у целини. Често су карактеристике појединих делова система, као на пример временске константе извршних механизама, такве да систем поседује филтерске способности па је фреквенцијски спектар шумова и поремећаја изван његовог пропусног опсега.



Сл. 6.17 Типичан изглед амплитудне фреквенцијске карактеристиоке

Резонантни врх (M_r): Одређен је вредношћу максимума амплитудне карактеристике система са затвореном повртаном спрегом. Може се користити за оцену претека стабилности аналогно претеку фазе и појачања који се дефинишу на основу фреквенцијских карактеристика система са отвореним колом повратне спреге.

Резонантна фреквенција (ω_r): Одређена је положајем резонантног врха, односно представља фреквенцију на којој се појављује резонатни врх.

Селективност: Представља способност ситема да елиминише утицај шума или поремећаја чији фреквенцијски спектар пада у домен фреквенција непосредно иза пропусног опсега или на његовој граници. Изражава се величином нагиба амплитудне фреквенцијске карактеристике у околини граничне фреквенције ω_G.

Временско кашњење: Квалитет репродукције сигнала, поред пропусног опсега, зависи и од облика фазне карактеристике унутар фреквенцијског спектра улазног сигнала. При томе се за добру репродукцију захтева да ова карактеристика буде линеарна. С обзиром да њен нагиб одређује временско кашњење које систем уноси при обради сигнала важи једначина

$$T_K = -\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}. \tag{6.61}$$

6.4 Одређивање константе грешке на логаритамским дијаграмима

Током анализе понашања система у временском домену истакнуто је да величина грешке у стационарном стању зависи од фактор појачања K_r и реда астатизма функције повртаног преноса $W(s)$. Оба ова параметра, а самим тим и величина грешке у стационарном стању могу се успешно оценити користећи логаритамске дијаграме промене модула функције повратног преноса. Подсетимо се да је ово функција преноса система са отвореним колом повратне спреге.

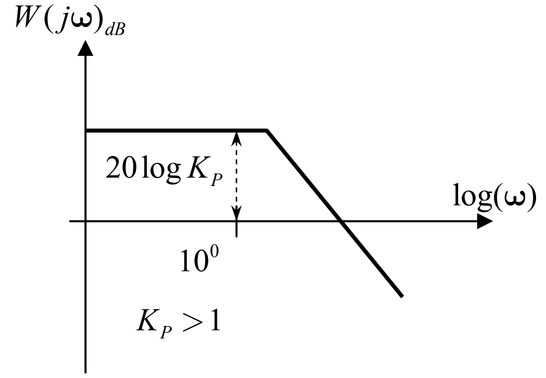
У случају да функција повратног преноса

$$W(s) = \frac{K_r(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + 1)}{s^r(a_n s^{n-r} + a_{n-1}s^{n-r-1} + \ldots + a_1 s + 1)}$$

има нулти ред астатизма, односно $r = 0$, коефицијент појачања K_r има значење константе положаја K_p. Облик одговарајућег асимптотског логаритамског дијаграма (Сл. 6.18) за једну овакву функцију је такав да се вредност модула на најнижим фреквенцијама не мења, односно има вредност $\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 20\cdot\log_{10} K_p$.

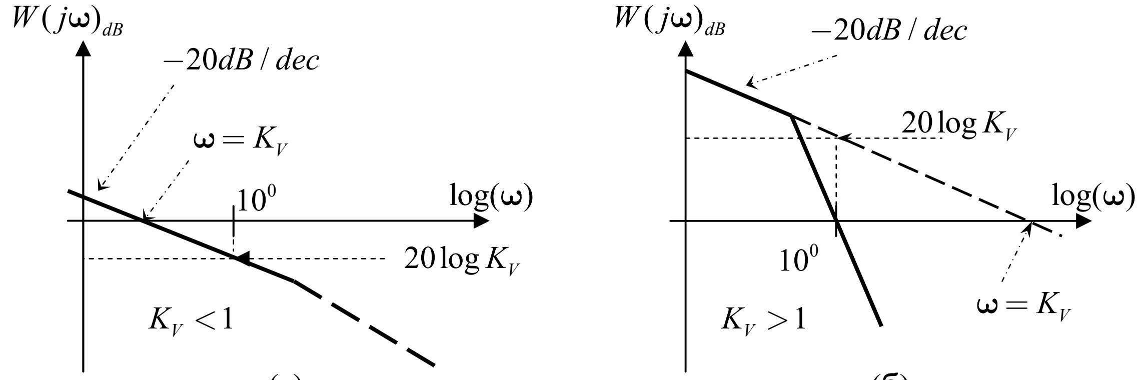
Уколико функција повратног преноса има астатизам првог реда $r = 1$, коефицијент појачања K_r има значење брзинске константе K_v. Тада је асимптотска карактеристика промене њеног модула, при ниским фреквенцијама, описана једначином

$$\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10} K - 20\log_{10}\omega\,, \tag{6.62}$$



Сл. 6.18 Одређивање константе положаја на основу асимптотског логаритамског дијаграма

односно има нагиб $-20dB/dec$. Њен облик је приказан на слици 6.19. Вредност брзинске константе може се одредити директно са одговарајућег логаритамског дијаграма на један од следећих два начина. Ако у једначини (6.62) уведемо $\omega = 1$, добија се $\left|W(j1)\right|_{dB} = 20\log_{10} K = 20\log_{10} K_v = (K_v)_{dB}$, односно вредност брзинске константе у децибелима можемо очитати као ординату почетне праве са нагибом од $-20dB/dec$ у тачки $\omega = 1$ на $\log\omega$ оси. Ако у једначини (6.62) уведемо $\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 0$, добија се $20\log_{10} K = 20\log_{10}\omega$, односно $K = K_v = \omega$ што значи да се брзинска константа може очитати као бројна вредност фреквенције при којој почетна права овог дијаграма сече $\log\omega$ осу. Уколико је најнижа преломна фреквенција мања од $1rad/\sec$ неопходно је продужити почетну праву тако да пресече $\log\omega$ осу као на слици 6.19(б).



Сл. 6.19 Одређивање брзинске константе на основу асимптотског логаритамског дијаграма

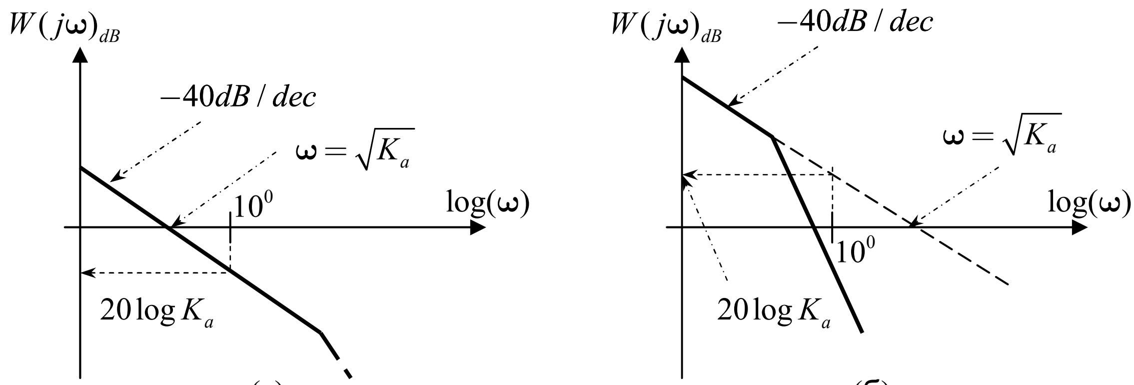
Сличну процедуру неопходно је применити и при одређивању константе убрзања K_a у системима астатизма другог реда $r = 2$. Тада се карактеристика промене модула функције повратног преноса, при ниским фреквенцијама, може апроксимирати правом

$$\left|W(j\omega)\right|_{dB} \approx 20\log_{10}(K/\omega^2) = 20\log_{10} K - 40\log_{10}\omega\,, \tag{6.63}$$

чији је нагиб $-40dB/dec$. Њен облик је приказан на слици 6.20. Вредност константе убрзања може се очитати као ордината ове праве која, у случају када је вредност прве преломне фреквенције већа од $1rad/\sec$, одговара фреквенцији $\omega = 1$, на $\log\omega$ оси. У случају када је вредност прве преломне фреквенције мања од $1rad/\sec$, неопходно је продужити почетну праву тако да пресече $\log\omega$ осу као на слици 6.20(б). Други начин се заснива на чињеници да је након смене $\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 0$, у једначини (6.63)

$$20\log_{10} K = 20\log_{10}\omega^2,$$

односно $K = K_a = \omega^2$. Вредност константе убрзања K_a, у том случају, бројно је једнака квадрату фреквенције при којој почетна права сече $\log\omega$ осу под углом од $-40dB/dec$.



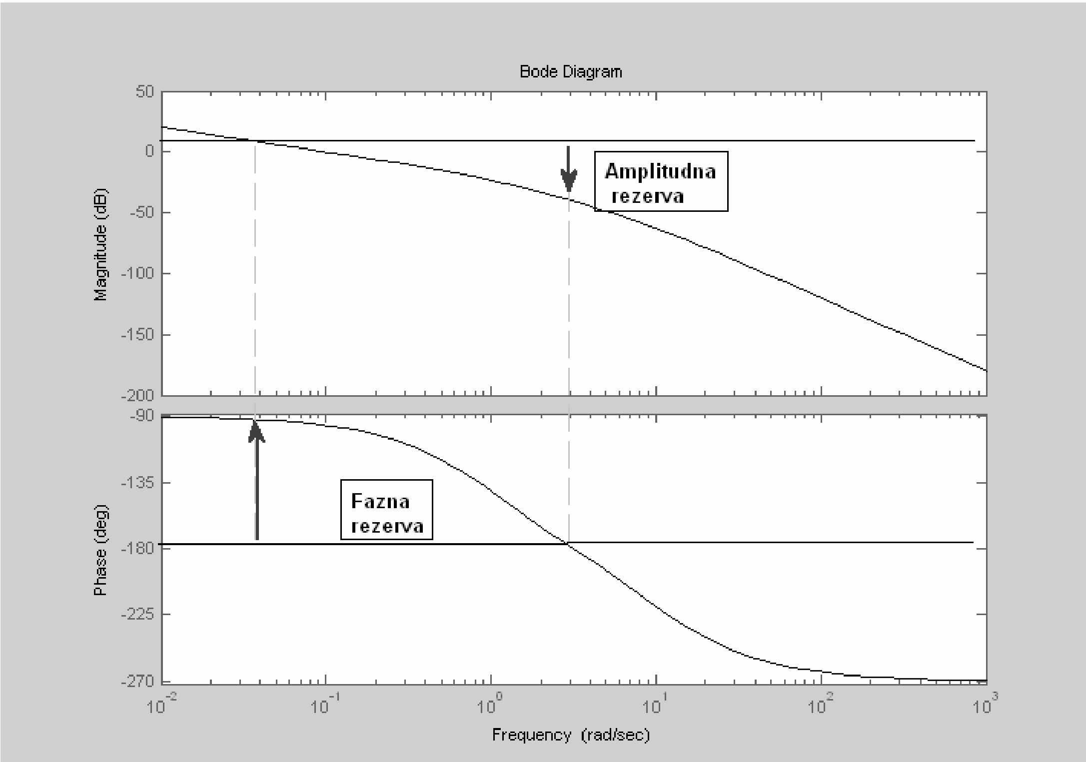
Сл. 6.20 Одређивање константе убрзања на основу асимптотског логаритамског дијаграма

6.5 Претек стабилности на логаритамским дијаграмима

Претек стабилности се такође може одредити на основу логаритамских дијаграма промене модула и аргумента функције повратног преноса. При томе је неопходно уочити везу између карактеристичних тачака Никвистове криве и одговарајућих логаритамских дијаграма. Сетимо се да је при дефинисању амплитудне резерве неопходно уочити тачку у којој Никвистова крива пресеца негативни део релне осе у $W(j\omega)$ равни. Имајући у виду да је тада вредност аргумента функције $\arg W(j\omega) = -\pi$ овом делу реалне праве, на фазно фреквенцијском дијаграму, одговара права $-\pi$. С обзиром да је за јединичну вредност модула функције преноса $20\log_{10}|W(j\omega)| = 0$ пресек амлитудне фреквенцијске карактеристике са $\log\omega$ осом одговара пресеку Никвистове криве са јединичном кружницом у $W(j\omega)$ равни. Другим речима ова оса одговара јединичној кружници на Никвистовом дијаграму.

Поступак очитавања амплитудне и фазне резерве стабилности илустрован је на слици 6.21 за случај система чија је функција повратног преноса

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 10s}. \tag{6.64}$$



Сл. 6.21 Одређивање амплитудне и фазне резерве стабилности на логаритамским дијаграмима функције $W(s)$.

Видимо да се амплитудна резерва стабилности лако очитава као вредност модула функције преноса на фреквенцији када фазнофреквенцијска карактеристика сече праву $-\pi$. Одговарајућа фазна резерва стабилности означена је вектором чији се почетак налази на правој $-\pi$, а његов врх завршава на фазној фреквенцијској карактеристици дуж нормале која пролази кроз тачку на којој амплитудна карактеристика пресеца $\log\omega$ осу. У конкретном случају вредност фазне резерве је већа од нуле. При томе негативна вредност амплитудне резерве у децибелима одговара вредности функције повратног преноса која је мања од један па се може закључити да приказани дијаграми одговарају ситему који је стабилан.

Повећањем коефицијента статичког појачања амплитудна карактеристика би се померала на горе, а њен пресек са $\log\omega$ осом у десно. При томе би вредности обе резерве стабвилности опадале. У случају када пресек амплитудне карактеристике настане на истој фреквенцији када фазна карактеристика пресеца праву $-\pi$ настају услови при којима се систем налази на граници стабилности. Даљим порстом појачања амплитудна резерва постаје већа од нуле што значи да је модул функције повратног преноса постао већи од један. При томе фазна резерва постаје негативна па се може рећи да је ситем тада нестабилан.

6.6 Резиме

У претходним поглављима описани су поступци анализе система, у временском и комплексном домену, засновани на познавању његовог математичког модела. Анализа система у фреквенцијском домену омогућава да се сазна нешто више о природи система и могућностима деловања у смислу добијања жељених карактеристика у условима када овај модел није познат. При томе се користе експериментало добијене карактеристике, познате под називом Бодеови дијаграми. Логаритамски приказ ових карактеристика омогућава да се лако примене графички поступци при њиховом формирању на основу познатог математичког модела, односно функције преноса система.

Примена алгебарских критеријума омогућава да одредимо услове, али не и резерву стабилности која обезбеђује да систем остане стабилан и у присутву поремећаја, као што је, на пример, промена амбијенталних услова.

Анализа система у фреквенцијском домену довела је до појаве графоаналитичких критеријума који омогућавају да се процени и резерва стабилности. При томе се разматрају облици амплитудне и фазне карактеристике ситема са отвореним колом повратне спреге (функција повратног преноса). При томе се најчешће користи Никвистов критеријум.

Зависно од облика функције повратног преноса и вредности одговарајућег коефицијента статичког појачања систем може бити: апсолутно стабилан, условно стабилан, критично стабилан или нестабилан.

Удаљеност Никвистове криве од критичне тачке управо одређује стабилност система. С тим у вези уведени су појмови фазна и амплитудна резерва стабилности. Као мера претека стабилности у фреквенцијском подручју најчешће се користи бројна вредност претека фазе.

Користећи бројне вредности параметара, који одређују фреквенцијске карактеристике система са затвореном повратном спрегом, као што су пропусни опсег, резонантна фреквенција, резонантни врх, селективност и нагиб фазне фреквенцијске карактеристике могуће је одредити брзину реаговања, квалитет репродукције улазних сигнала и филтарске карактеристике система, односно успоставити везу са одговарјућим парамтерима који описују понашање система у временском домену.

Током анализе понашања система у временском домену истакнуто је да величина грешке у стационарном стању зависи од фактора појачања K_r и реда астатизма функције повртаног преноса $W(s)$. Оба ова параметра, а самим тим и величина грешке у стационарном стању могу се успешно оценити користећи логаритамске дијаграме промене модула функције повратног преноса. Поред ових параметара логаритамске карактеристике, такође ,омогућавају да се одреде амплитудна и фазна резерва стабилности система.

При томе се амплитудна резерва стабилности лако очитава као вредност модула функције преноса на фреквенцији када фазнофреквенцијска карактеристика сече праву $-\pi$. Одговарајућа фазна резерва стабилности одређује се као вектор чији се почетак налази на правој $-\pi$, а његов врх завршава на фазној фреквенцијској карактеристици дуж нормале која пролази кроз тачку на којој амплитудна карактеристика пресеца $\log\omega$ осу.

6.7 Питања за проверу знања

1. Шта је децибел?
2. Дефинишите вредност модула функције преноса у децибелима?
3. Шта су Бодеови дијаграми?
4. Како промена коефицијента пригушења утиче на облик Бодеових дијаграма који одговарају систему чија функција преноса садржи само два пола?
5. Како изгледа функција преноса у случају система неминималне фазе?
6. Објасните како изгледа Никвистова крива уколико припадајућа функција повратног преноса нема полове који се налазе десно од имагинарне осе у комплексној равни.
7. Како изгледа Никвистова крива уколико припадајућа функција повратног преноса има један пол десно од имагинарне осе у комплексној равни, а при томе је систем стабилан када се затвори коло повратне спреге.
8. Дефинишите амплитудну ифазну резерву система.
9. Дефинишите параметре одзива система у фреквенцијском домену.
10. Како се одређују константе грешке помоћу логаритамских дијаграма?
11. Како се одређује претек стабилности помоћу логаритамских дијаграма?

ИНДЕКС