



ПЕТАР БОШЊАКОВИЋ

**ЗБИРКА РЕШЕНИХ
ИСПИТНИХ ЗАДАТАКА
ИЗ
АНАЛОГНЕ ЕЛЕКТРОНИКЕ**



**ВИША ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКА ШКОЛА
БЕОГРАД
2005**

Петар Бошњаковић
Збирка решених задатака из аналогне електронике

Рецензенти
Мр Борислав Хаџибабић,
Ненад Толић

Цртежи, обрада и припрема текста
Петар Бошњаковић

Корице
Ненад Толић

Издавач
Виша електротехничка школа, Београд

За издавача
Мр Драгољуб Мартиновић, директор

Наставно веће Више електротехничке школе у Београду одобрило је издавање и примену овог уџбеника у настави.

CIP – каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

621.38(075.8)(076)

БОШЊАКОВИЋ, Петар

Збирка решених испитних задатака из
аналогне електронике / Петар Бошњаковић.

-Београд : Виша електротехничка школа,
2005 (Београд: МСТ Гајић).

– 157 стр. : граф. прикази ; 24 cm

Тираж 200.

ISBN 86-8501-39-4

а) Електронка – Задаци
COBISS.SR-ID 126772236

ПРЕДГОВОР

Ова збирка решених задатака је намењена студентима Више електротехничке школе у Београду који слушају предмет Аналогна електроника. Књига, која садржи четири дела, обликована је тако да читалац може да добије јасну и прецизну представу како се проверава стечено знање и која се знања од кандидата на испиту захтевају. У настојању да се збирка учини приступачном читаоцима са различитим нивоом предзнања, текст је коначно обликован на основу низа консултација са садашњим и дипломираним студентима. Због тога решења задатака садрже и одговарајућу теоријску подлогу.

Први и најобимнији део ове збирке садржи решене задатке са основног, елиминаторног, дела испита. Приказан је поступак анализе аналогних електронских кола са циљем добијања одговора на постављена питања. Други део садржи решења елементарних задатака, којима се проверава познавање основних електронских кола и структура која се срећу у пракси. Трећи део садржи питања за проверу теоријског знања. Одговоре на ова питања студент треба самостално да формулише на основу градива обрађеног на предавањима и доступне литературе.

У прилогу збирке су дати елементи анализе електронских кола и система у фреквенцијском домену.

Захваљујем се рецензентима, Бориславу Хацибабићу и Ненаду Толићу, на корисним саветима у погледу коначног обликовања ове збирке, која ће олакшати студентима савлађивање стручних знања предвиђених наставним програмом школе. Поред тога што представљају подлогу за даље успешно праћење неких стручних предмета на вишим семестрима, ова знања имају и примену у инжењерској пракси.

28.6.2005

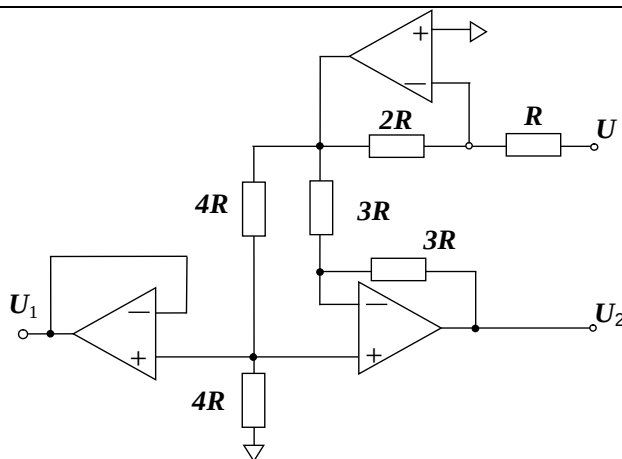
Аутор

САДРЖАЈ

1.	ЗАДАЦИ СА ИСПИТА	
1.1.	ЈАНУАР 2004	1
1.2.	АПРИЛ 2004	17
1.3.	ЈУН 2004	33
1.4.	СЕПТЕМБАР 2004	49
1.5.	ОКТОБАР 2004	67
1.6.	ЈАНУАР 2005	83
2.	ЗАДАЦИ СА КОЛОКВИЈУМА	
2.1.	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	99
2.2.	ЛИНЕАРНА И НЕЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА	109
2.3.	ПОВРАТНА СПРЕГА	112
2.4.	КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА	114
3.	ПИТАЊА ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА	
3.1.	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	127
3.2.	ЛИНЕАРНА И НЕЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА	127
3.3.	ПОВРАТНА СПРЕГА	128
3.4.	ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ	129
4.	ЕЛЕМЕНТИ АНАЛИЗЕ ЕЛЕКТРОНСКИХ КОЛА И СИСТЕМА У ФРЕКВЕНЦИЈСКОМ ДОМЕНУ	
4.1.	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	131
4.2.	ОСНОВНИ ДИНАМИЧКИ ЕЛЕМЕНТИ	137
4.3.	ФИЛТРИ	144
4.4.	ПРИМЕРИ	150

ЗАДАТАК 1.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени, (улазна отпорност $R_{IN} = \infty$; излазна отпорност $R_O = 0$; појачање напона $A_U = \infty$; улазне струје $I_{BP} = I_{BN} = 0$; напон помераја нуле на улазу појачавача $U_{OS} = 0$) одредити општи израз за вредност напона U_1 и U_2 у зависности од вредности напона U



РЕШЕЊЕ

У посматраном колу, складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, важе следеће једначине:

$$I_1 = \frac{U - U_A}{R_1},$$

$$U_3 = U_A - R_2 I_2.$$

Отпорник обезбеђује негативну повратну спрегу у колу операционог појачавача OA3.

Ако је појачавач савршен, његово појачање је бесконачно, па се инвертујући (-) и неинвертујући (+) улаз налазе на истом потенцијалу:

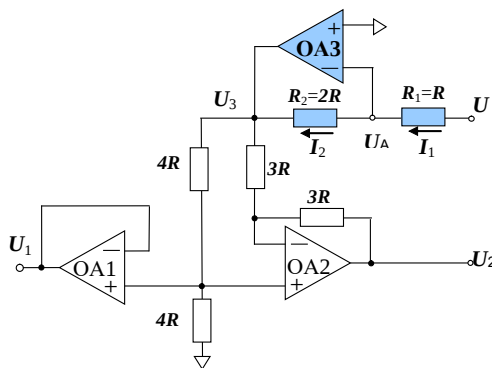
$$U_A = 0 \text{ (привидна нула).}$$

Струје поларизације улаза савршеног операционог појачавача једнаке су нули, на основу чега следи:

$$I_2 = I_1.$$

Према томе, вредност напона U_3 на излазу операционог појачавача OA3, одређена је једначином:

$$U_3 = -\frac{R_2}{R_1} U.$$



Дакле, операциони појачавач OA3 са отпорницима R_1 и R_2 образује инвертујући појачавач. За задате односе отпорности у колу важи:

$$U_3 = -2U.$$

△ Ако су операциони појачавачи OA1 и OA2 савршени, њихове улазне струје су једнаке нули, на основу чега следи:

$$U_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_3 = \frac{1}{2} U_3 = -U.$$

Вредност напона U_1 на излазу савршеног операционог појачавача OA1 једнака је напону на његовом неинвертујућем улазу:

$$U_1 = U_B.$$

Операциони појачавач OA1 у односу на напон U_B делује као неинвертујући појачавач јединичног појачања, На основу претходног разматрања следи:

$$U_1 = -U.$$

△ Вредност напона U_2 на излазу операционог појачавача OA2 се може одредити на основу једначине:

$$U_2 = U_3 - R_5 I_5 - R_6 I_6.$$

Вредност струје I_5 је једнака:

$$I_5 = \frac{U_3 - U_C}{R_5}.$$

Ако је операциони појачавач OA2 савршен његов инвертујући (-) и неинвертујући (+) улаз се налазе на истом потенцијалу:

$$U_C = U_B.$$

Његове улазне струје су једнаке нули, тако да важи:

$$I_5 = I_6.$$

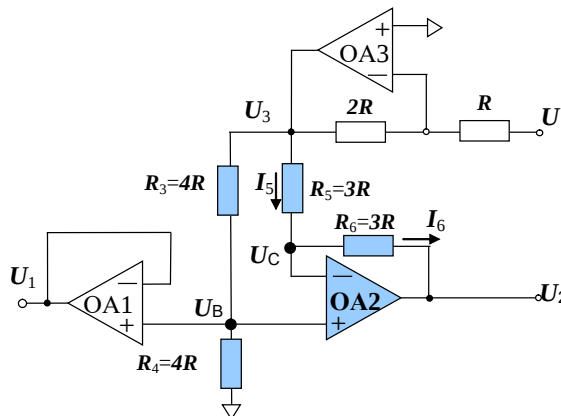
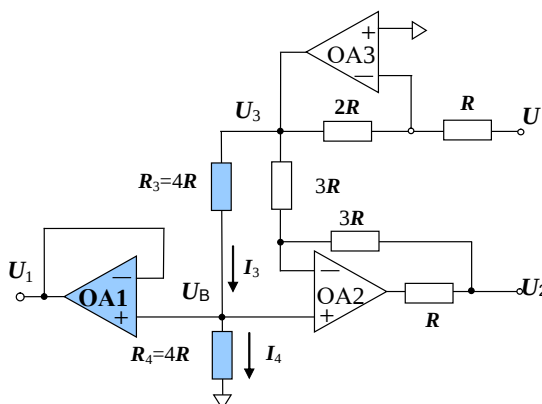
На основу претходног разматрања следи:

$$I_5 = \frac{U_3 - U_C}{R_5} = \frac{-2U + U}{3R} = -\frac{U}{3R}$$

Уношењем задатих и израчунатих вредности у израз за вредност напона U_2 на излазу OA2 добија се:

$$U_2 = U_3 - I_5(R_5 + R_6) = -2U + \frac{U}{3R} 6R = 0.$$

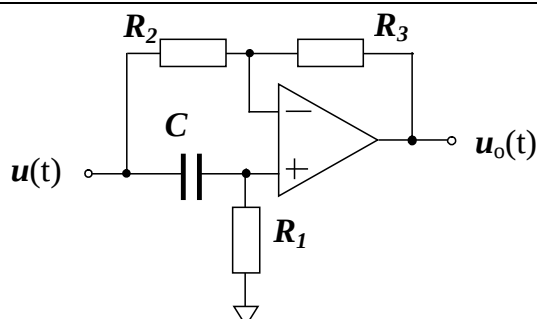
$$U_2 = 0.$$



ЗАДАТАК 2.А.

За приказано коло, под претпоставком да је операциони појачавач савршен, одредити:

- општи израз за фреквенцијску карактеристику,
- општи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику,
- општи израз за фазну фреквенцијску карактеристику.

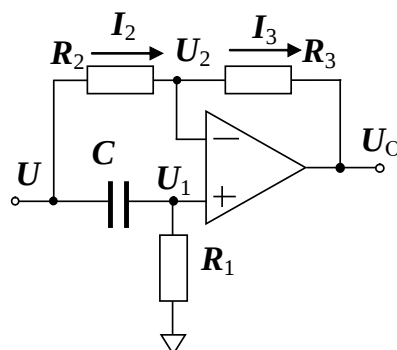

РЕШЕЊЕ

а)

Посматрано коло представља појачавач напона са негативном повратном спрегом, оствареном преко отпорника R_3 . У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, важе једначине:

$$I_2 = \frac{U - U_2}{R_2},$$

$$U_O = U - R_2 I_2 - R_3 I_3.$$



За коло са савршеним операционим појачавачем такође важи:

$$U_2 = U_1 \quad (\text{инвертујући и неинвертујући улаз савршеног операционог појачавача са негативном повратном спрегом се налазе на истом потенцијалу}),$$

$$I_3 = I_2 \quad (\text{улазне струје савршеног операционог појачавача су једнаке нули}),$$

Напон U_1 на неинвертујућем (+) улазу појачавача зависи само од улазног напона U , отпорности R_1 и капацитивности C :

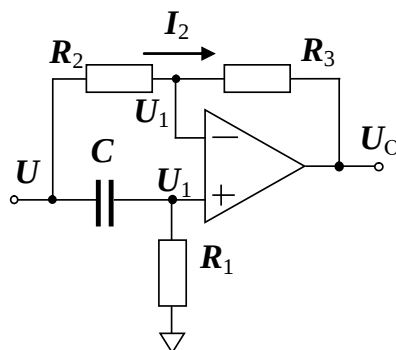
$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + Z_C} U, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C},$$

односно:

$$U_1 = U \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C}.$$

Дакле, у колу са савршеним операционим појачавачем, с обзиром да је напон U_2 на инвертујућем (-) улазу једнак напону U_1 на неинвертујућем улазу, за напон U_O на излазу кола (операционог појачавача) се добија:

$$\begin{aligned}
 U_O &= U_2 - R_3 I_3 = \\
 &= U_1 - R_3 \frac{U - U_1}{R_2} = \\
 &= -\frac{R_3}{R_2} U + \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) U_1 = \\
 &= -\frac{R_3}{R_2} U + \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} U.
 \end{aligned}$$



Даљим сређивањем ове једначине се добија:

$$U_O = U \frac{-\frac{R_3}{R_2} (1 + j\omega R_1 C) + \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} = U \frac{-\frac{R_3}{R_2} + j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C},$$

односно:

$$U_O = -\frac{R_3}{R_2} \frac{1 - j\omega R_1 \frac{R_2}{R_3} C}{1 + j\omega R_1 C} U.$$

Према дефиницији, фреквенцијска карактеристика кола, $W(j\omega)$, је комплексна величина одређена односом комплексних ликова излаза и улаза:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U_I(j\omega)} = -\frac{R_3}{R_2} \frac{1 - j\omega \frac{R_2}{R_3} R_1 C}{1 + j\omega R_1 C}.$$

б)

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола се може представити у облику:

$$W(j\omega) = -\frac{R_3}{R_2} \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)},$$

где је:

$$W_1(j\omega) = 1 - j\omega C R_1 \frac{R_2}{R_3} = W_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$W_2(j\omega) = 1 + j\omega C R_1 = W_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}$$

$$W_1(\omega) = |W_1(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\omega C R_1 \frac{R_2}{R_3}\right)^2}$$

$$W_2(\omega) = |W_2(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega C R_1)^2}$$

$$\varphi_1(\omega) = \arg W_1(j\omega) = \arctg\left(-\omega C R_1 \frac{R_2}{R_3}\right)$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg W_2(j\omega) = \arctg(\omega C R_1)$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика, $W(\omega)$, је модуо фреквенцијске карактеристике:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{R_3}{R_2} \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)} = \frac{R_3}{R_2} \frac{\sqrt{1 + (\omega \frac{R_2}{R_3} R_1 C)^2}}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}}.$$

в)

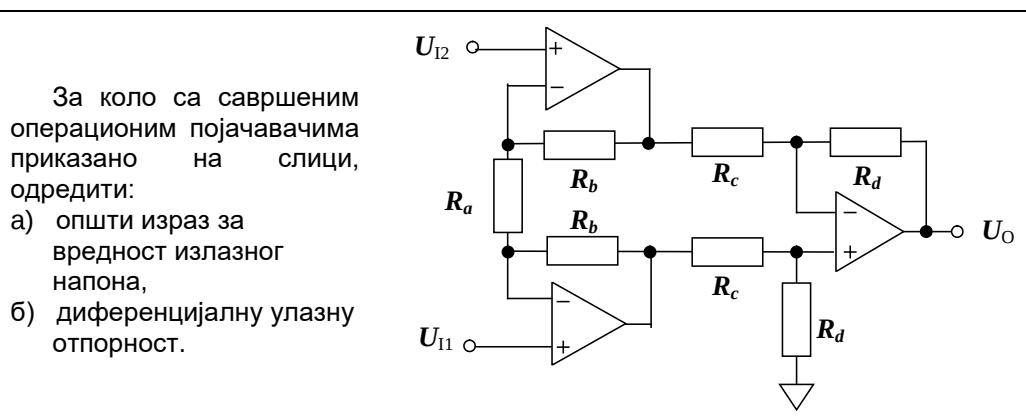
Фазна фреквенцијска карактеристика, $\varphi(\omega)$, је аргумент фреквенцијске карактеристике. У посматраном случају фазна фреквенцијска карактеристика је одређена једначином:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega),$$

одакле следи ($\arctg(-x) = -\arctg x$):

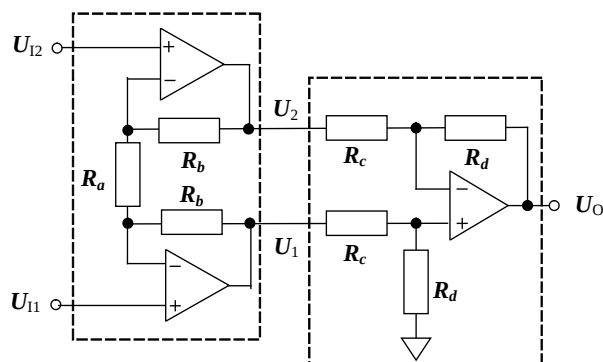
$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega C R_1 \frac{R_2}{R_1} - \arctg \omega C R_1.$$

ЗАДАТАК 3.А.



РЕШЕЊЕ

Посматрано коло се може представити као систем који се састоји из два редно повезана дела: улазног, којим се напони U_{11} и U_{12} пресликавају на напоне U_1 и U_2 , и излазног, којим се напон U_O генерише као линеарна комбинација напона U_1 и U_2 .



а)

За излазни део посматраног кола важе следеће једначине:

$$I_c = I_d = \frac{U_2 - U_c}{R_c},$$

$$U_c = U_d = \frac{R_d}{R_c + R_d} U_1,$$

на основу којих се може одредити израз за вредност излазног напона:

$$U_O = U_c - R_d I_d = U_d - R_d \frac{U_2 - U_d}{R_c},$$

одакле следи:

$$U_O = \frac{R_d}{R_c} (U_1 - U_2),$$

Дакле, излазни део кола представља појачавач разлике два напона -диференцијални појачавач.

△ За улазни део кола важе једначине:

$$U_2 = U_{I2} + R_b I_a,$$

$$U_1 = U_{I1} - R_b I_a,$$

$$I_a = \frac{U_{I2} - U_{I1}}{R_a},$$

на основу којих следи:

$$U_2 = U_{I2} + \frac{R_b}{R_a} (U_{I2} - U_{I1})$$

$$U_1 = U_{I1} - \frac{R_b}{R_a} (U_{I2} - U_{I1}),$$

односно:

$$U_2 - U_1 = \left(1 + 2 \frac{R_b}{R_a}\right) (U_{I2} - U_{I1}).$$

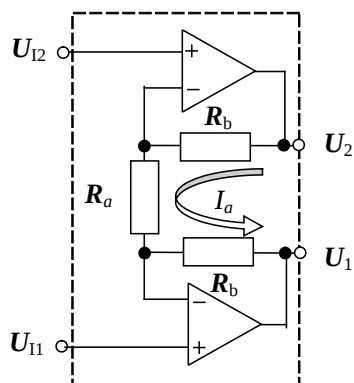
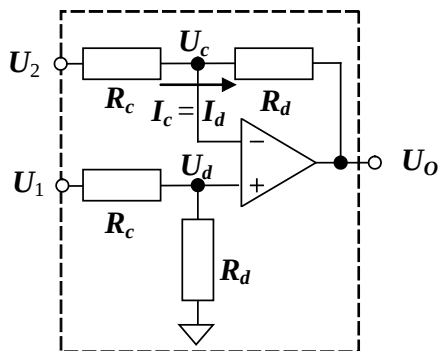
Обједињавањем израза који представљају карактеристике преноса улазног и излазног дела добија се:

$$U_O = \frac{R_d}{R_c} (U_1 - U_2) = \left(1 + 2 \frac{R_b}{R_a}\right) \frac{R_d}{R_c} (U_{I1} - U_{I2}).$$

б)

Ако су операциони појачавачи у улазном делу посматраног кола савршени, улазне отпорности су бесконачно велике.

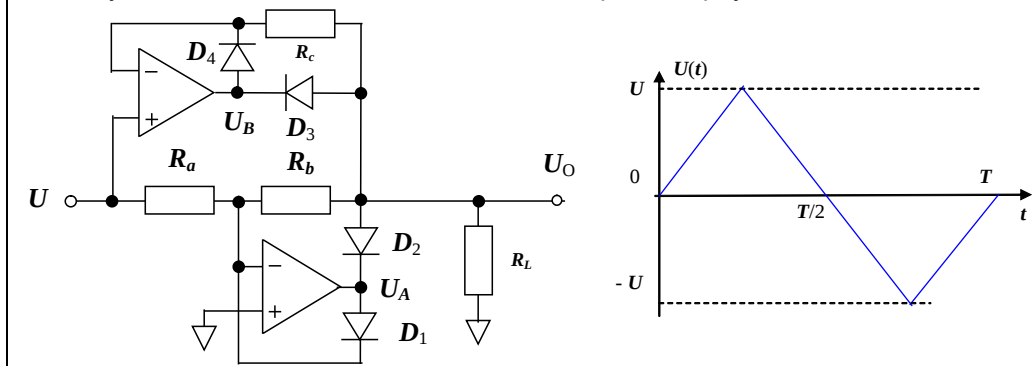
Посматрано коло представља диференцијални појачавач велике улазне отпорности чија се константа преноса (појачање) може подешавати променом вредности само једног отпорника (R_a).
Примењује се у мерној техници (инструментациони појачавач).



ЗАДАТАК 4.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су примењени операциони појачавачи савршени:

- одредити општи израз за карактеристику преноса $U_O(U)$;
- нацртати карактеристику преноса $U_O(U)$ ако за вредности отпорности у колу важи једначина: $R_a = R_b$;
- нацртати дијаграм који приказује таласне облике напона U_O , U_A и U_B при побуди кола наизменичним напонам симетричног троугаоног таласног облика

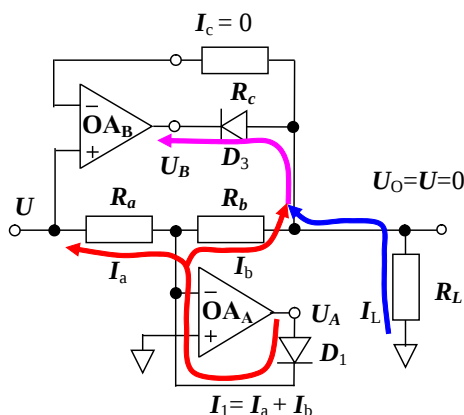

РЕШЕЊЕ

а)

△ Када је улазни напон U негативан, расподела струја и потенцијала у колу је приказана на слици.

Инвертујући улаз операционог појачавача OA_B је на потенцијалу улаза (Негативна повратна спрега се остварује преко диоде D_3 . Диода D_4 је у непроводном стању).

Негативна повратна спрега у колу операционог појачавача OA_A остварује се преко диоде D_1 . Диода D_2 је у непроводном стању.



Према претпоставци, операциони појачавачи су савршени, струја I_c кроз отпорник R_c је једнака нули, па је потенцијал на излазу посматраног кола једнак потенцијалу улаза. Дакле, када је улазни напон U негативан, излазни напон U_O је једнак улазном напону:

$$U_O = U \text{ за } U < 0$$

Напон на излазу операционог појачавача OA_A једнак је напону U_F диоде D_1 поларисане у пропусном смеру:

$$U_A = U_F.$$

Струја коју операциони појачавач OA_A “даје” кроз диоду D_1 је једнака:

$$I_1 = I_a + I_b, \quad I_a = -\frac{U}{R_a}, \quad I_b = -\frac{U}{R_b},$$

$$I_1 = -\frac{U}{R_a \parallel R_b}.$$

Напон на излазу операционог појачавача ОА_В је једнак:

$$U_B = U - U_F.$$

Струја коју операциони појачавач ОА_В “узима” кроз диоду D₃ је једнака:

$$I_3 = I_b + I_L, \quad I_L = -\frac{U}{R_L},$$

$$I_3 = -\frac{U}{R_b \parallel R_L}.$$

△ Када је улазни напон U позитиван, расподела струја и потенцијала у колу је приказана на слици.

Инвертујући улаз операционог појачавача ОА_В је на потенцијалу улаза (негативна повратна спрега се остварује преко диоде D₄). Диода D₃ је у неспроводном стању.

Негативна повратна спрега у колу операционог појачавача ОА_А остварује се преко диоде D₂. Диода D₁ је у неспроводном стању.

Операциони појачавач ОА_А има улогу инвертујућег појачавача

Дакле, када је улазни напон U позитиван, излазни напон U_O је једнак:

$$U_O = -\frac{R_b}{R_a} U \quad \text{за } U > 0$$

Напон на излазу операционог појачавача ОА_А је једнак:

$$U_A = U_O - U_F \quad \text{за } U > 0.$$

Карактеристика преноса $U_O(U)$ анализираних кола је одређена изразом:

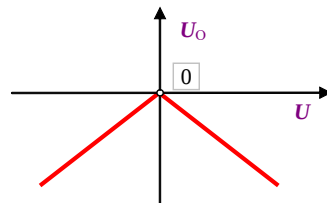
$$U_O = \begin{cases} U & \text{за } U < 0 \\ -\frac{R_b}{R_a} U & \text{за } U \geq 0 \end{cases}, \quad U_A = \begin{cases} U_F & \text{за } U < 0 \\ -\frac{R_b}{R_a} U - U_F & \text{за } U \geq 0 \end{cases}.$$

б)

Ако је $R_a = R_b$ важи:

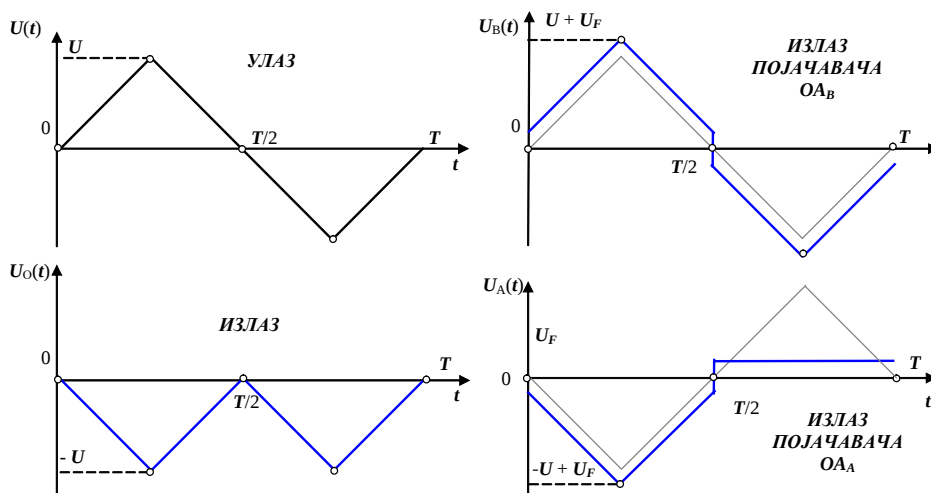
$$U_O = \begin{cases} U & \text{за } U < 0 \\ -U & \text{за } U \geq 0 \end{cases} = -|U|.$$

Карактеристика преноса $U_O(U)$ је приказана на слици.



в)

Дијаграми таласних облика напона $U_O(t)$, U_A и U_B , при побуди кола наизменичним напонам симетричног троугаоног таласног облика, приказани су на слици.

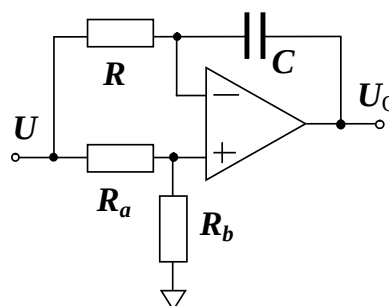


Посматрано коло представља прецизни инвертујући двострани (пуноталасни) усмерач (инвертујуће модуло-коло). Карактеристика преноса $U_O(U)$ зависи од односа отпорности R_a и R_b , а не зависи од карактеристика усмерачких елемената - диода.

ЗАДАТАК 1.Б.

За приказано коло, под претпоставком да је операциони појачавач савршен,

- одредити општи израз за функцију преноса,
- одредити општи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити општи израз за фазну фреквенцијску карактеристику;
- одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$, ако је $R_a = R_b = R$.



РЕШЕЊЕ

а)

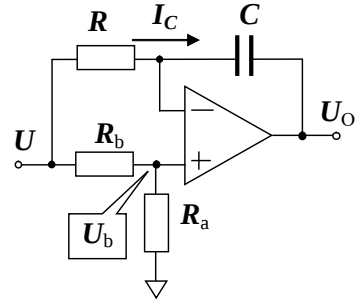
За посматрано коло са савршеним операционим појачавачем, у складу са ознакама и референтним смеровима приказаним на слици, важе једначине:

$$U_b = \frac{R_b}{R_a + R_b} U,$$

$$I_C = \frac{U - U_b}{R},$$

$$U_O = U - (Z_C + R) I_C,$$

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$



На основу претходних једначина се одређује израз за напон U_O на излазу кола (операционог појачавача) :

$$U_O = U - (Z_C + R) \frac{U - U_b}{R} = U - (Z_C + R) \frac{U - U \frac{R_b}{R_a + R_b}}{R}.$$

Сређивањем ове једначине добија се:

$$U_O = U - \left(\frac{1}{sRC} + 1 \right) \frac{R_a}{R_a + R_b} U = U \frac{1}{R_a + R_b} \frac{1}{sRC} [sRC(R_a + R_b) - R_a - sRCR_a] =$$

$$= U(s) \frac{R_a}{R_a + R_b} \frac{1}{sRC} \left(s \frac{R_b}{R_a} RC - 1 \right) = U(s) \frac{R_a}{R_a + R_b} \frac{s \frac{R_b}{R_a} RC - 1}{sRC}.$$

Функција преноса кола представља количник комплексних ликова излаза и улаза:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{R_b}{R_a + R_b} \left(1 - \frac{1}{s \frac{R_b}{R_a} RC} \right) = - \frac{R_a}{R_a + R_b} \frac{1 - s \frac{R_b}{R_a} RC}{sRC}.$$

б)

Фреквенцијска карактеристика $W(j\omega)$ посматраног кола добија се сменом $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{R_b}{R_a + R_b} \left(1 - \frac{1}{j\omega \frac{R_b}{R_a} RC} \right) = - \frac{R_a}{R_a + R_b} \frac{1 - j\omega \frac{R_b}{R_a} RC}{j\omega RC}.$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика $W(\omega)$ одређена је једначином:

$$W(\omega) = \frac{R_b}{R_a + R_b} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega \frac{R_b}{R_a} RC} \right)^2} = \frac{R_a}{R_a + R_b} \sqrt{1 + \left(\omega \frac{R_b}{R_a} RC \right)^2}$$

в)

Фазна фреквенцијска карактеристика је аргумент фреквенцијске карактеристике:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega CR \frac{R_b}{R_a}}.$$

Применом формуле:

$$\arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctg x, x > 0$$

добива се:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega CR \frac{R_b}{R_a}.$$

г)

Када је $R_a = R_b = R$, израз за функцију преноса посматраног кола има облик:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1}{2} \frac{sRC - 1}{sRC},$$

одакле следи:

$$2sRCU_O(s) = U(s)(sRC - 1),$$

односно:

$$2RCsU_O(s) = RCsU(s) - U(s).$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, U(s) \leftrightarrow u(t), U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

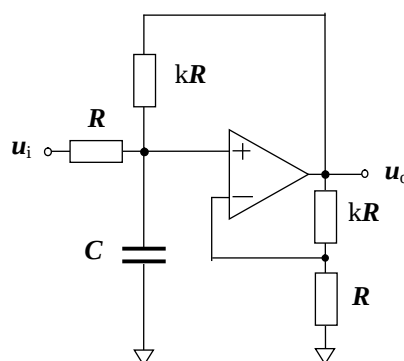
добива се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

$$2RC \frac{du_O}{dt} = RC \frac{du}{dt} - u(t).$$

ЗАДАТАК 2.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је примењени операциони појачавач савршен:

- одредити фреквенцијску карактеристику;
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити фазну фреквенцијску карактеристику;
- одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног $u_i(t)$ и излазног напона $u_O(t)$.



РЕШЕЊЕ

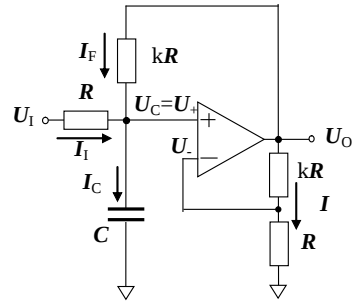
а)

За посматрано коло, у складу са референтним смеровима назначеним на слици, важе следеће једначине:

$$U_C(j\omega) = Z_C(j\omega) \cdot I_C(j\omega), \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$I_I = \frac{U_I - U_C}{R}$$

$$I_F = \frac{U_O - U_C}{kR}$$



За коло са савршеним операционим појачавачем, важе једначине:

$U_- = U_+ = U_C$ (инвертујући и неинвертујући улаз савршеног операционог појачавача са негативном повратном спрегом се налазе на истом потенцијалу),

$I_C = I_I + I_F$ (улазне струје савршеног операционог појачавача су једнаке нули),

$$I = \frac{U_O}{R + kR}$$

На основу претходних једначина одређује се израз за напон U_O на излазу кола (операционог појачавача) у зависности од вредности напона U_C на кондензатору (неинвертујућем улазу операционог појачавача):

$$U_O = (R + kR) \cdot I = (R + kR) \cdot \frac{U_-}{R} = (1 + k)U_C,$$

(операциони појачавач делује као неинвертујући појачавач чије је појачање једнако $1+k$). То омогућује да се одреди израз који описује зависност струје кроз кондензатор, I_C , од улазног напона U_I :

$$I_C = \frac{U_I - U_C}{R} + \frac{(1+k)U_C - U_C}{kR} = \frac{U_I - U_C}{R} + \frac{U_C}{R} = \frac{U_I}{R},$$

а тиме и израз за напон U_C :

$$U_C = Z_C I_C = \frac{Z_C}{R} U_I,$$

односно израз за вредност излазног напона:

$$U_O = (1+k)U_C = \frac{(1+k)Z_C}{R} U_I.$$

Сменом $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, добија се:

$$U_O(j\omega) = \frac{(1+k)}{j\omega RC} U_I(j\omega).$$

Фреквенцијска карактеристика кола $W(j\omega)$ је:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U_I(j\omega)} = \frac{1+k}{j\omega RC}$$

б)

Амплитудска фреквенцијска карактеристика $W(\omega)$ је одређена изразом:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{1+k}{\omega RC}$$

в)

Разлика фаза излазног и улазног сигнала (фазна фреквенцијска карактеристика) савреног интегратора не зависи од учестаности:

$$\phi(\omega) = -\arctg \infty = -\frac{\pi}{2}$$

г)

Сменом $j\omega = s$ добија се израз за функцију преноса посматраног кола:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1+k}{sRC},$$

одакле следи:

$$sRCU_O(s) = (1+k)U(s).$$

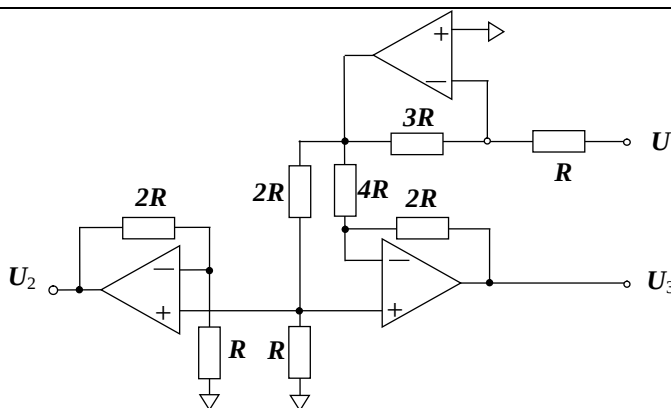
Сменом оператора s оператором диференцирања по времену добија се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

$$RC \frac{du_O}{dt} = (1+k)u(t).$$

Карактеристика анализираниг кола, $W(j\omega)$, одговара карактеристици савреног интегратора (*bootstrap*-интегратор). Повратна спрега обезбеђује да је струја кроз кондензатор одређена само вредношћу улазног напона U , а не зависи од напона на кондензатору.

ЗАДАТАК 3.Б.

За коло са савршеним операционим појачавачима, приказано на слици, одредити општи израз за вредност напона U_2 и U_3 у зависности од вредности напона U



РЕШЕЊЕ

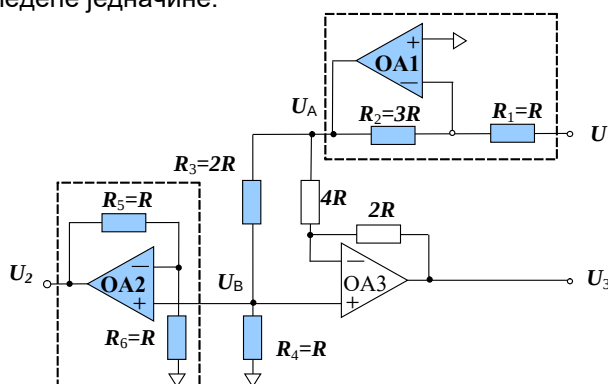
У посматраном колу, складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, важе следеће једначине:

△ Операциони појачавач ОА1 са отпорницима R_1 и R_2 образује инвертујући појачавач:

$$U_A = -\frac{R_2}{R_1} U = -3U.$$

△ Отпорници R_3 и R_4 образују делитељ напона:

$$U_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_A = \frac{1}{3} U_A.$$



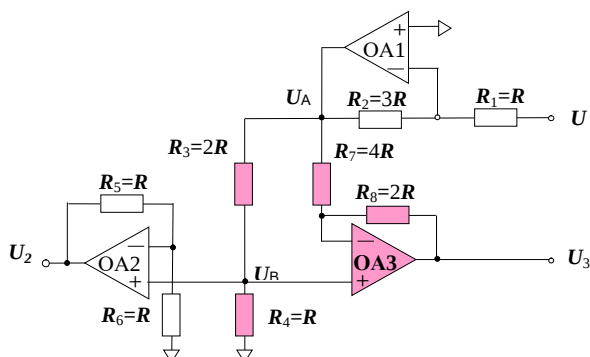
Појачавач ОА2 са отпорницима R_5 и R_6 образује неинвертујући појачавач:

$$U_2 = \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right) U_B = 2U_B.$$

$$U_2 = -2U$$

△ Операциони појачавач ОА3 и отпорници означени са R_3 , R_4 , R_7 и R_8 образују диференцијални појачавач (појачавач разлике два напона) чији су улазу краткоспојени:

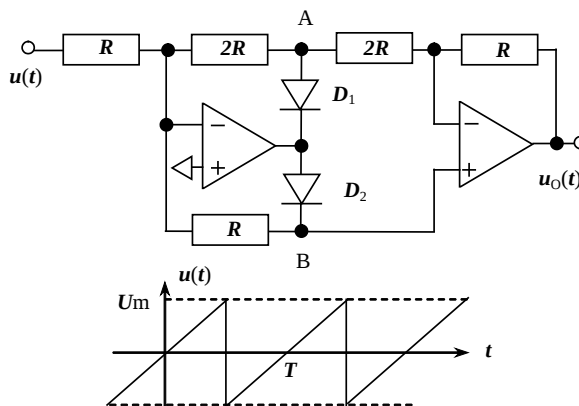
$$U_3 = 0.$$



ЗАДАТАК 4.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су примењени операциони појачавачи савршени,

- а) одредити општи израз за карактеристику преноса $u_o(u)$;
- б) нацртати карактеристику преноса $u_o(u)$;
- в) нацртати дијаграм који приказује таласне облике напона u_o и u_A , при побуди кола наизменичним напонам тестерастог таласног облика амплитуде U_m .

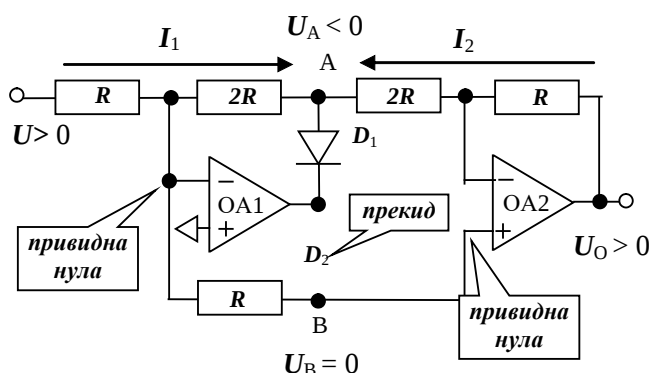


РЕШЕЊЕ

а)

△ Када је улазни напон позитиван, расподела струја и потенцијала у колу је приказана на напона између његових крајева једнак нули). Операциони појачавач ОА2 има улогу инвертујућег појачавача.

У посматраном колу, складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, важе следеће једначине:



$$I_1 = \frac{U}{R},$$

$$U_A = -\frac{2R}{R}U = -2U,$$

$$I_B = 0,$$

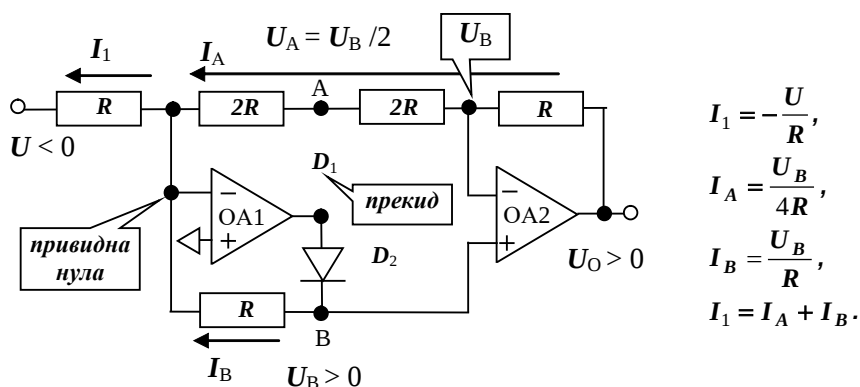
$$U_B = 0$$

$$U_o = -\frac{R}{2R}U_A = -\frac{U_A}{2}.$$

Дакле, када је улазни напон U позитиван, излазни напон U_o је такође позитиван, једнак улазном напону:

$$U_o = U \text{ за } U \geq 0.$$

Када је улазни напон негативан, расподела струја и потенцијала у колу је приказана на слици.



На основу претходних једначина следи:

$$I_1 = +\frac{U_B}{R} + \frac{U_B}{4R} = +\frac{5}{4} \frac{U_B}{R},$$

односно:

$$U_B = -U \frac{4}{5}.$$

Вредност напон U_O се може одредити из једначине:

$$U_O = U_B + RI_A$$

$$U_O = U_B + U_B \frac{1}{4} = U_B \frac{5}{4} = -U$$

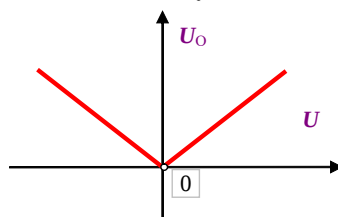
Дакле, када је улазни напон U негативан, излазни напон U_O је позитиван, једнак по величини (интензитету) улазном напону.

$$U_O = -U \text{ за } U < 0$$

Посматрано коло омогућује добијање апсолутне вредности улазног напона.

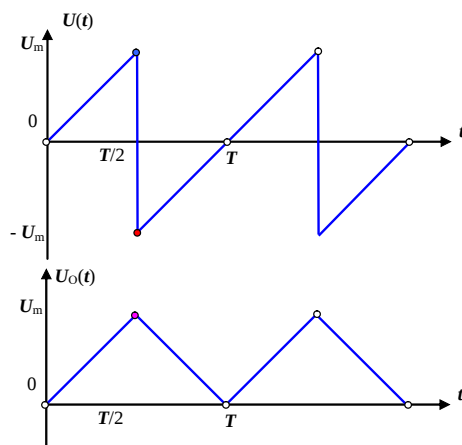
$$U_O = \begin{cases} U & \text{за } U \geq 0 \\ -U & \text{за } U < 0 \end{cases}$$

б) Карактеристика преноса
 $u_O = f(u)$ приказана је на слици



в)

Дијаграм таласних облика напона $u_O(t)$ и $u_A(t)$ при побуди кола биполарним напоном тестерастог таласног облика амплитуде U је приказан на слици.

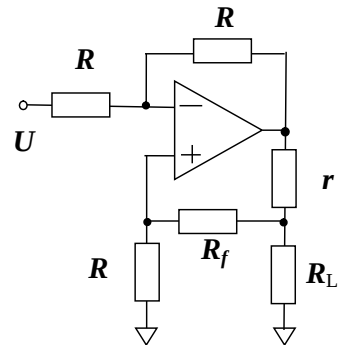


Анализирано коло представља прецизни двострани (пуноталасни) усмерач (модуо-коло). Карактеристика преноса $U_O(U)$ зависи од односа отпорности, а не зависи од карактеристика усмерачких елемената - диода.

АПРИЛ 2004

ЗАДАТАК 1.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен, одредити потребан услов у погледу односа отпорности у колу, да струја кроз отпорник R_L не зависи од његове отпорности.



РЕШЕЊЕ

У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, за коло са савршеним операционим појачавачем важе следеће једначине:

$$U_L = R_L I_L,$$

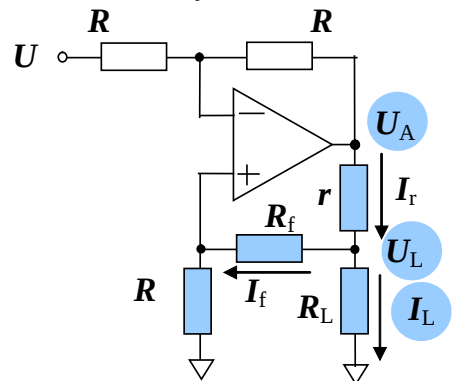
$$I_L = I_r - I_f,$$

$$I_r = \frac{U_A - U_L}{r},$$

$$I_f = \frac{U_L}{R + R_f},$$

на основу којих следи:

$$I_L = I_r - I_f = \frac{U_A - U_L}{r} - \frac{U_L}{R + R_f},$$



Након сређивања, добија се израз за вредност струје I_L у зависности од вредности напона U_A :

$$I_L = \frac{U_A}{r} - \frac{U_L}{r} \left(1 + \frac{r}{R + R_f} \right).$$

До израза који описује зависност напона U_A од улазног напона U и напона U_L долази се на основу анализе мреже преко које се остварује негативна повратна спрега у колу операционог појачавача:

$$U_A = U_- - RI.$$

На основу једначина које одређују вредност струје I :

$$I = \frac{U - U_-}{R},$$

и напона на инвертујућем, односно неинвертујућем улазу операционог појачавача:

$$U_- = U_+ = U_L \frac{R}{R + R_f}.$$

следи:

$$U_A = U_+ - RI = U_L \frac{R}{R + R_f} - \left(U - U_L \frac{R}{R + R_f} \right) = -U + U_L \frac{2R}{R + R_f}.$$

Уношењем изведеног израза за вредност напона U_A у једначину којом је одређена струја I_L добија се:

$$I_L = -\frac{U}{r} + \frac{U_L}{r} \left(\frac{2R}{R + R_f} - 1 - \frac{r}{R + R_f} \right) = -\frac{U}{r} + \frac{U_L}{r} \left(\frac{1}{R + R_f} \right) (2R - R - R_f - r),$$

односно:

$$I_L = -\frac{U}{r} + I_L \frac{R_L}{r} \frac{R - R_f - r}{(R + R_f)}.$$

На основу претходне једначине може се закључити да струја I_L кроз отпорник R_L неће зависити од његове отпорности ако је испуњен услов:

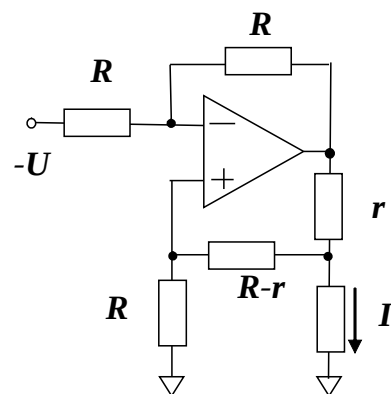
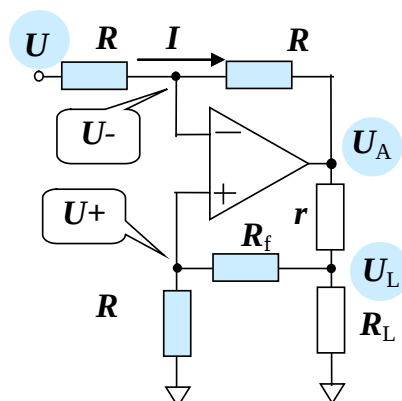
$$R - R_f - r = 0$$

односно:

$$R_f = R - r.$$

Коло приказано на слици представља извор струје управљан напонем (voltage controlled current source – VCCS):

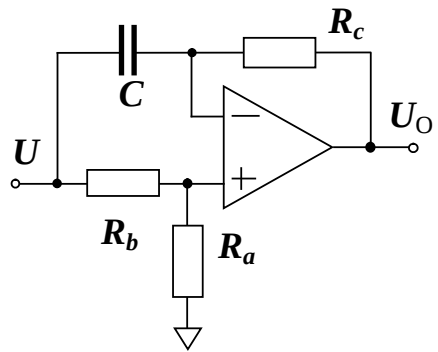
$$I_L = \frac{U}{r}.$$



ЗАДАТАК 2.А.

За приказано коло, под претпоставком да је операциони појачавач савршен,

- одредити општи израз за функцију преноса;
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити фазну фреквенцијску карактеристику;
- ако је $R_a = R_b = R_c = R$, одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_o(t)$.



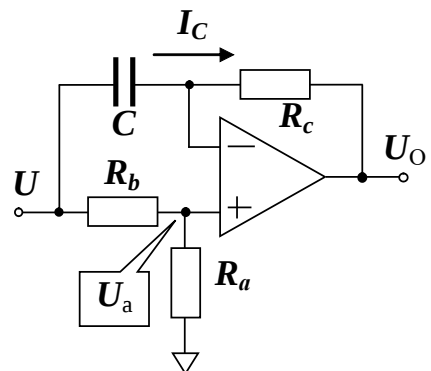
РЕШЕЊЕ

За посматрано коло са савршеним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$I_C = \frac{U - U_a}{Z_C},$$

$$U_a = \frac{R_a}{R_a + R_b} U, \text{ и}$$

$$U_o = U - (Z_C + R_c) I_C.$$



На основу претходних једначина се може одредити израз за напон U_o на излазу кола (операционог појачавача):

$$U_o = U - (Z_C + R_c) \frac{U - U_a}{Z_C} = U - (Z_C + R_c) \frac{U - U \frac{R_a}{R_a + R_b}}{Z_C},$$

$$U_o = U - \left(1 + \frac{R_c}{Z_C}\right) \frac{R_b}{R_a + R_b} U,$$

$$U_o = \frac{R_a}{R_a + R_b} U - \frac{R_c}{Z_C} \frac{R_b}{R_a + R_b} U = U \frac{R_a}{R_a + R_b} \left(1 - \frac{R_b R_c}{R_a Z_C}\right).$$

Сменом $Z_C = \frac{1}{sC}$ и сређивањем ове једначине добија се:

$$U_o(s) = U(s) \frac{R_a}{R_a + R_b} \left(1 - s \frac{R_b R_c}{R_a} C\right).$$

Функција преноса кола има облик:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{R_a}{R_a + R_b} \left(1 - s \frac{R_b}{R_a} R_c C \right).$$

б)

Фреквенцијска карактеристика $W(j\omega)$ посматраног кола добија се сменом $s = j\omega$:

Амплитудска фреквенцијска карактеристика, $W(\omega) = |W(j\omega)|$, је једнака:

$$W(\omega) = \frac{R_a}{R_b + R_a} \sqrt{1 + \left(\omega \frac{R_b}{R_a} R_c C \right)^2}.$$

в)

Фазна фреквенцијска карактеристика $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ је одређена једначином:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega R_c C \frac{R_b}{R_a}$$

г)

У случају када је $R_a = R_b = R_c = R$, израз за функцију преноса посматраног кола има облик:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1}{2} (1 - sRC),$$

одакле следи:

$$2U(s) = U(s)(1 - sRC) = -sRCU(s) + U(s),$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t), \quad sU(s) \leftrightarrow \frac{du}{dt},$$

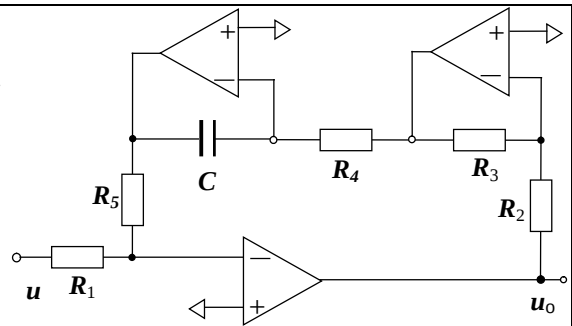
добија се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

$$2u_O(t) = -RC \frac{du}{dt} + u(t).$$

ЗАДАТАК 3.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- одредити општи израз за функцију преноса;
- нацртати логаритамску асимптотску амплитудску фреквенцијску карактеристику.



РЕШЕЊЕ

а)

У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима важе следеће једначине:

$$U_1 = -U_0 \frac{R_3}{R_2},$$

$$U_2 = -U_1 \frac{Z_c}{R_4} = U_0 \frac{R_3 Z_c}{R_2 R_4}$$

$$I_1 + I_5 = 0,$$

на основу којих следи:

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U_2}{R_5} = 0,$$

односно:

$$\frac{U}{R_1} = -\frac{U_0}{R_5} \frac{R_3 Z_c}{R_2 R_4}.$$

Сменом $Z_c = \frac{1}{sC}$ и сређивањем ове једначине добија се:

$$W(s) = \frac{U_0(s)}{U(s)} = -s \frac{R_2 R_4 R_5}{R_3 R_1} C.$$

б)

Логаритамска фреквенцијска карактеристика $W_L(\omega)$ дефинисана је изразом:

$$W_L(\omega) = 20 \log W(\omega).$$

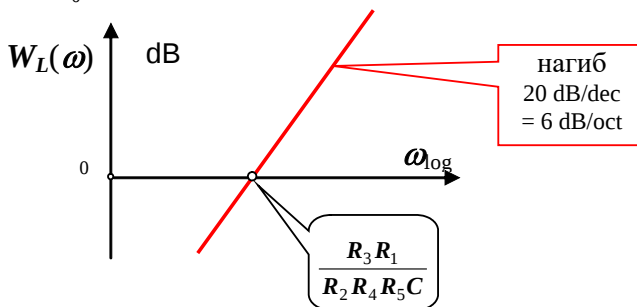
Изражава се у децибелима (dB). У посматраном случају је:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \omega \frac{R_2 R_4 R_5}{R_3 R_1} C.$$

$$W_L(\omega) = 20 \log \omega \frac{R_2 R_4 R_5}{R_3 R_1} C = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0.$$

Графички приказ функције $W_L(\omega)$ је дат на слици.

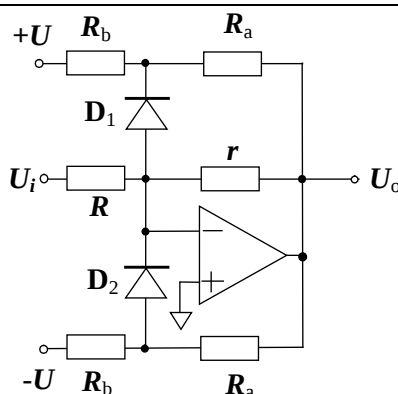
Посматрано коло делује као савршени инвертујући диференцијатор.



ЗАДАТАК 44.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су елементи у колу савршени:

- одредити општи израз за вредност напона $U_O(U_I, U)$ на излазу кола;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_O(U_I, U)$ ако све отпорности у колу имају једнаке вредности ($R = R_a = R_b = r$);
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_O(U_I, U)$ ако је: $R = R_a = R_b$, $r = \infty$;



РЕШЕЊЕ

а)

Операциони појачавач делује као инвертујући појачавач, при чему је негативна повратна спрега остварена преко отпорника r и нелинеарне, диодно-отпорничке мреже. Инвертујући улаз савршеног операционог појачавача са негативном повратном спрегом налази се на истом потенцијалу као и неинвертујући улаз.

Када је улазни напон U_I једнак нули, напон на излазу операционог појачавача U_O мора такође да буде једнак нули. Ако се претпостави да је напон U_O , на пример, позитиван, то значи да кроз отпорник r тече струја која има смер ка чвору А која, међутим, не може да "отиче" кроз отпорник R , јер су његови крајеви на истом потенцијалу, не може да "прође" кроз савршену диоду D_2 у смеру катода-анода, а не може да "отиче" ни кроз савршену диоду D_1 јер је њена катода (тачка В), преко отпорника R_a и R_b доведена на виши

потенцијал од потенцијала аноде (тачка А). Аналогним разматрањем показује се да при $U_I = 0$ напон U_O не може да буде ни негативан.

△ Претполаризација остварена преко отпорника R_b обезбеђује да су за мале вредности улазног напона обе диоде инверзно поларисане. Напон U_O на излазу опарационог појачавача је тада сразмеран улазном напону U_I :

$$U_O = -\frac{r}{R} U_I.$$

Карактеристика $U_O(U_I)$ пролази кроз координатни почетак. Константа нагиба карактеристике у околини координатног почетка је једнака:

$$k_1 = -\frac{r}{R}.$$

Да би диода D_1 доспела у проводно стање потребно је да, при повећању улазног напона U_I , напон U_O на излазу опарационог појачавача опадне до вредности $-U_{OG}$ при којој је напон у тачки В једнак нули:

$$\frac{U_{OG}}{R_a} = \frac{U}{R_b};$$

при чему у овом стању кола важи:

$$U_{OG} = -\frac{r}{R} U_{IG},$$

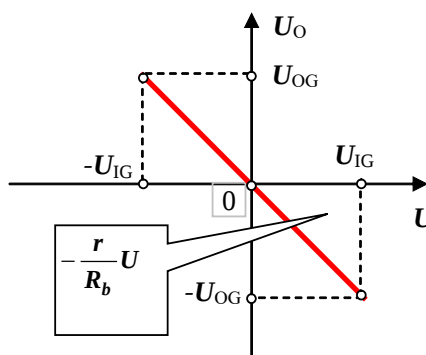
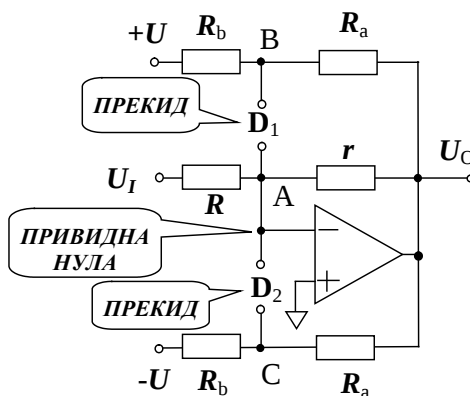
где је U_{IG} гранична вредност интензитета улазног напона, која одговара граници области пропорционалности карактеристике улаз-излаз.

На основу претходног разматрања може се одредити израз за граничну вредност улазног напона:

$$U_{IG} = \frac{R_a R}{R_b r} U,$$

односно израз за одговарајућу граничну вредност излазног напона:

$$U_{OG} = \frac{R_a}{R_b} U.$$



△ Коло је симетрично. Изведени закључци важе и када је улазни напон негативан.

△ При довољно великој позитивној вредности улазног напона диода D_1 је директно поларисана и представља кратак спој.

$$U_O = -\frac{r \parallel R_a}{R} U_I - \frac{r \parallel R_a}{R_b} U, \quad U \geq U_{IG}.$$

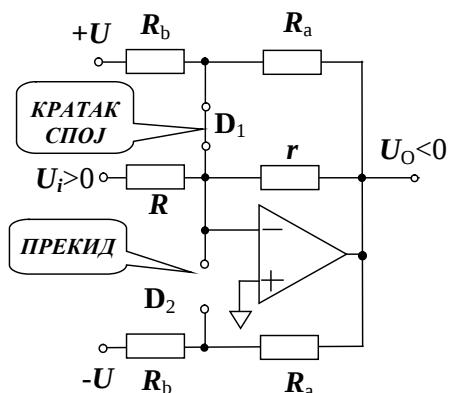
Константа нагиба улазно-излазне карактеристике за $U_I \geq U_{IG}$ једнака је:

$$k_2 = \frac{\Delta U_O}{\Delta U_I} = -\frac{r \parallel R_a}{R}$$

△ Коло је симетрично. Слично разматрање важи када је улазни напон негативан.

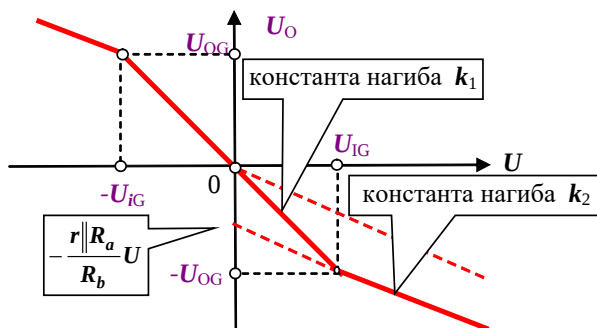
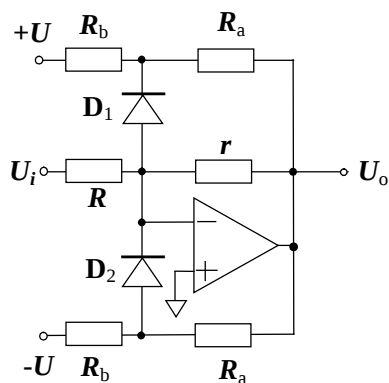
$$U_O = -\frac{r \parallel R_a}{R} U_I + \frac{r \parallel R_a}{R_b} U, \quad U \leq -U_{IG}$$

$$U_O = \begin{cases} -\frac{r \parallel R_a}{R} U_I - \frac{r \parallel R_a}{R_b} U, & \text{за } U_I > U_{IG} \\ -\frac{r}{R} U_I, & \text{за } |U_I| \leq U_{IG}, \quad U_{IG} = \frac{R_a R}{R_b r} U \\ -\frac{r \parallel R_a}{R} U_I + \frac{r \parallel R_a}{R_b} U, & \text{за } U_I < -U_{IG} \end{cases}$$



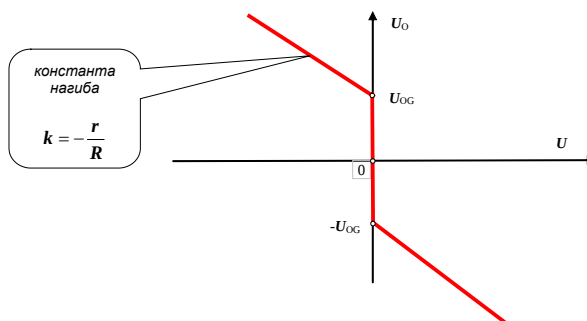
б)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола је дат на слици. Вредност улазног напона U_{IG} која одговара преломним тачкама карактеристике (границе области сразмерности) одређена је потребним условом да је напон на катоди диоде D_1 , односно аноди диоде D_2 , једнак нули, када је струја кроз одговарајућу диоду једнака нули



в)

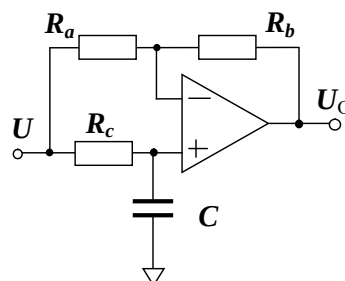
Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола када је $r = \infty$ је дат на слици.



ЗАДАТАК 1.Б.

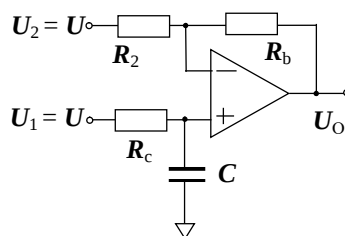
За приказано коло, под претпоставком да је операциони појачавач савршен.

- одредити општи израз за функцију преноса;
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити фазну фреквенцијску карактеристику;
- одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног и излазног напона у случају $R_a = R_b = R_c = R$.



РЕШЕЊЕ

Посматрано коло се може посматрати као систем са два улаза на која је доведен исти сигнал. Такво коло, са савршеним операционим појачавачем, представља линеаран систем за који важи принцип суперпозиције.



Одзив кола се може наћи као збир одзива на појединачну побуду, када је други улаз спојен са прикључком за референтни потенцијал (масом):

$$U_{O1} = U_O \Big|_{U_2 = 0},$$

$$U_{O2} = U_O \Big|_{U_1 = 0},$$

$$U_O = U_{O1} + U_{O2}.$$

△ Када је напон U_2 једнак нули, коло се своди на редну везу пасивног RC -филтра и неинвертујућег појачавача:

$$U_{O1} = \frac{Z_C}{R_c + Z_C} \left(1 + \frac{R_b}{R_a} \right) U = U \frac{1}{1 + j\omega R_c C} \left(1 + \frac{R_b}{R_a} \right),$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

△ Када је напон U_1 једнак нули, коло се своди на инвертујући појачавач:

$$U_{O2} = -\frac{R_b}{R_a} U.$$

На основу принципа суперпозиције следи:

$$U_O = U_{O1} + U_{O2} = \frac{1 + \frac{R_b}{R_a} - \frac{R_b}{R_a} (1 + j\omega R_c C)}{1 + j\omega R_c C}.$$

Сређивањем овог израза добија се:

$$U_O = U \frac{1 - j\omega R_c \frac{R_b}{R_a} C}{1 + j\omega R_c C}.$$

Функција преноса посматраног кола одређена је једначином:

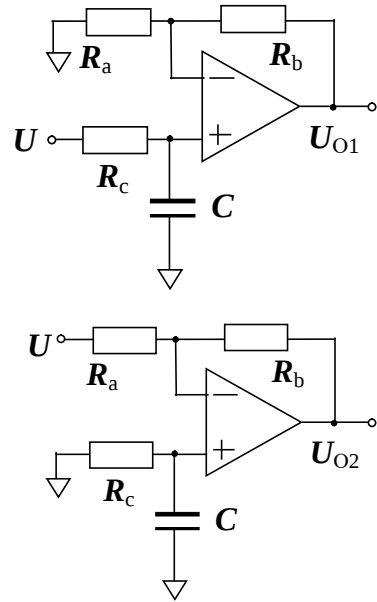
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1 - sR_c C \frac{R_b}{R_a}}{1 + sR_c C}.$$

б)

У посебном случају када је $R_a = R_b = R_c = R$, амплитудска фреквенцијска карактеристика кола је једнака:

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \left(\omega R_c C \frac{R_b}{R_a} \right)^2}{1 + (\omega R_c C)^2}} = 1.$$

Амплитудска карактеристика посматраног кола не зависи од учестаности.



в)

Фазна фреквенцијска карактеристика је одређена једначином:

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega CR$$

г)

У случају када су све отпорности у колу једнаке, израз за функцију преноса посматраног кола има облик:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1 - sRC}{1 + sRC},$$

на основу којег следи:

$$U_O(s)(1 + sRC) = U(s)(1 - sRC),$$

односно:

$$RCsU_O(s) + U_O(s) = -RCsU(s) + U(s),$$

Сменом:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

добиа се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

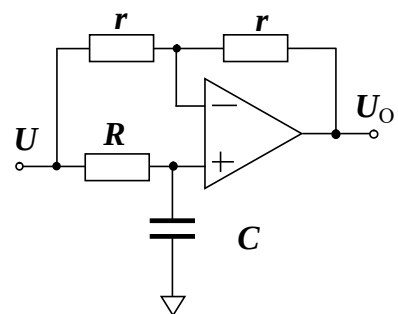
$$RC \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = -RC \frac{du}{dt} + u(t).$$

Коло приказано на слици омогућује остваривање помераја фазе улазног сигнала без утицаја на његову амплитуду (фреквенцијски независни померач фазе). Разлика фаза излазног и улазног сигнала зависи само од временске константе $\tau = RC$.

$$W(s) = \frac{1 - sRC}{1 + sRC},$$

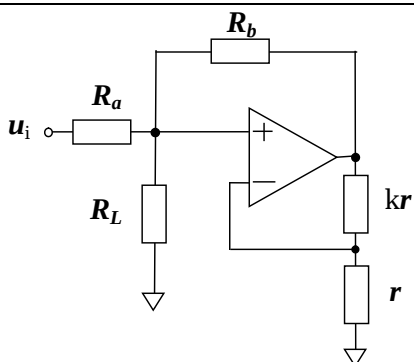
$$W(\omega) = 1$$

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega CR$$



ЗАДАТАК 2.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачаваач савршен, одредити потребан услов у погледу односа отпорности у колу, да струја кроз отпорник R_L не зависи од његове отпорности

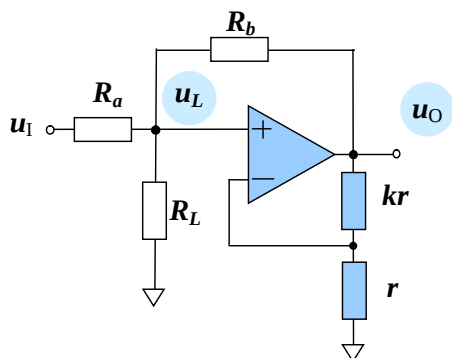


РЕШЕЊЕ

У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, за коло са савршеним операционим појачаваачима важи:

$$U_O = U_L \left(1 + \frac{kr}{r} \right) = U_L (1 + k)$$

(операциони појачаваач са повратном спрегом оствареном преко отпорника r и kr делује као неинвертујући појачаваач чије је појачање једнако $1+k$).



У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, за коло са савршеним операционим појачаваачима важи:

$I_L = I_a + I_b$ (први Кирхофов закон за чвор А, улазна струја савреног појачаваача је једнака нули),

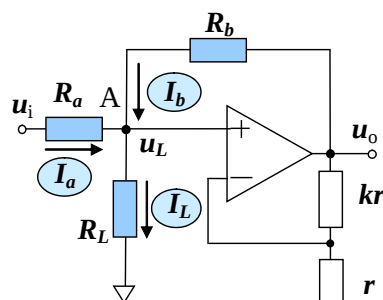
$$I_a = \frac{U_i - U_L}{R_a},$$

$$I_L = \frac{U_L}{R_a} \text{ и}$$

$$I_b = \frac{U_O - U_L}{R_b}.$$

Сређивањем израза за вредност струје I_L :

$$I_L = \frac{U_i - U_L}{R_a} + \frac{U_O - U_L}{R_b} = \frac{U_i}{R_a} - \frac{U_L}{R_a} + \frac{kU_L}{R_b},$$

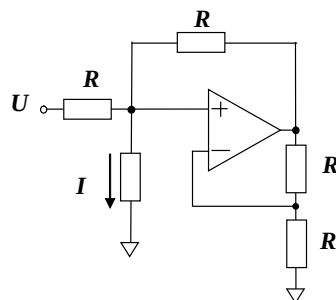


долази се до потребног услова да струја кроз отпорник R_L не зависи од његове отпорности:

$$R_b = kR_a$$

Коло приказано на слици представља извор струје управљан напонем:

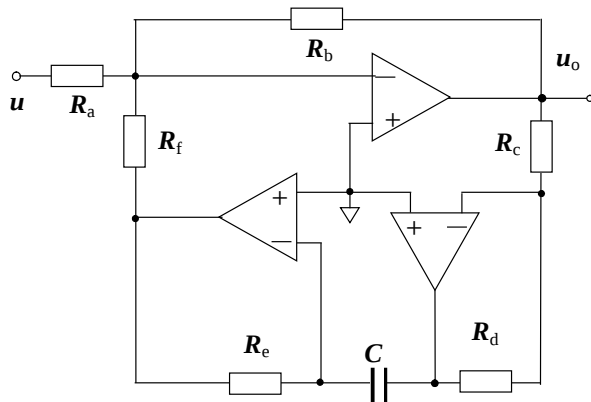
$$I = \frac{U}{R}.$$



ЗАДАТАК 3.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- одредити општи израз за функцију преноса;
- нацртати логаритамску асимптотску фреквенцијску карактеристику.



РЕШЕЊЕ

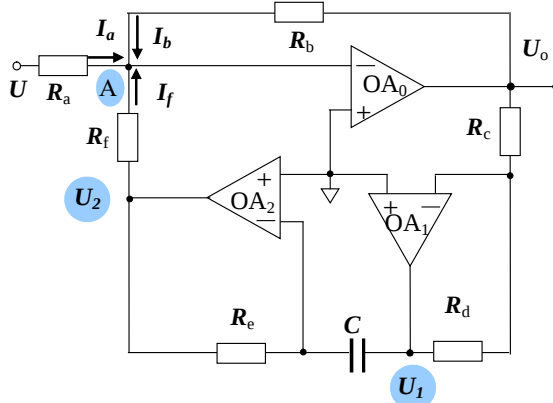
У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима важе следеће једначине:

$$I_a + I_b + I_f = 0 \text{ (чвор A),}$$

$$U_1 = -U_0 \frac{R_d}{R_c},$$

$$U_2 = -U_1 \frac{R_e}{Z_c},$$

на основу којих се може одредити веза између напона на улазу и излазу посматраног кола.



Напон U_2 на излазу операционог појачавача OA_2 једнозначно је одређен напонам U_O на излазу кола:

$$U_2 = -U_1 \frac{R_e}{Z_c} = U_O \frac{R_d R_e}{R_c Z_c}.$$

На основу једначине која проистиче из првог Кирхофовог закона примењеног на чвор А:

$$\frac{U}{R_a} + \frac{U_O}{R_b} + \frac{U_2}{R_f} = 0,$$

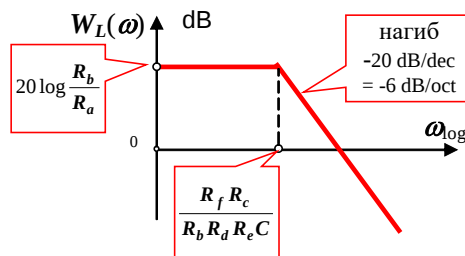
слиеди:

$$\frac{U}{R_a} = -\frac{U_O}{R_b} - \frac{U_O}{R_f} \frac{R_d R_e}{R_c Z_c} = -\frac{U_O}{R_b} \left(1 + \frac{R_b R_d R_e}{R_f R_c Z_c} \right) = -\frac{U_O}{R_b} \left(1 + j\omega \frac{R_b R_d R_e}{R_f R_c} C \right).$$

Функција преноса посматраног кола одређена је једначином:

$$W(s) = \frac{U_O}{U} = -\frac{R_b}{R_a} \frac{1}{1 + j\omega \frac{R_b R_d R_e}{R_f R_c} C}.$$

Логаритамска асимптотска фреквенцијска карактеристика је приказана на слици.



ЗАДАТАК 4.Б.

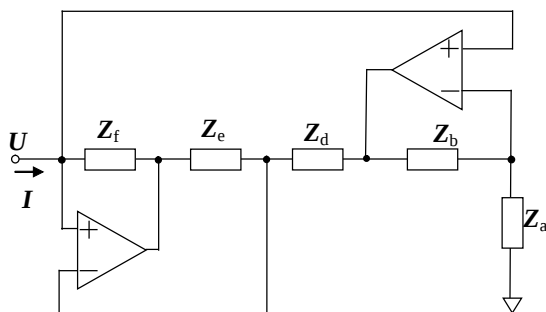
У колу приказаном на слици примењени су операциони појачавачи који се могу сматрати савршеним.

Ако напон U представља улазну (управљачку), а струја I излазну (управљану) величину:

- а) одредити општи израз за функцију преноса:

$$W(s) = \frac{I(s)}{U(s)};$$

- б) нацртати логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику преноса за случај $Z_a = Z_d = Z_e = Z_f = R$, $Z_b = 1/j\omega C$.



РЕШЕЊЕ

а)

У складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима важе следеће једначине:

$$I_e = I_d = \frac{U_2 - U}{Z_d},$$

$$I_b = I_a = \frac{U}{Z_a},$$

$$U_1 = U - Z_e I_d,$$

$$I = I_f = \frac{U - U_1}{Z_f},$$

на основу којих следи:

$$U_2 = \frac{Z_b + Z_a}{Z_a} U.$$

Сменом израза за струју I_d у једначини за напон U_1 добија се:

$$U_1 = U - Z_e \frac{U_2 - U}{Z_d} = U - Z_e \frac{\left(1 + \frac{Z_b}{Z_a}\right) U - U}{Z_d} = U \left(1 - \frac{Z_e Z_b}{Z_d Z_a}\right).$$

на основу којег се може одредити израз за вредност улазне струје I :

$$I = \frac{U - U_1}{Z_f} = U_1 \frac{Z_b Z_e}{Z_a Z_d Z_f},$$

одакле следи:

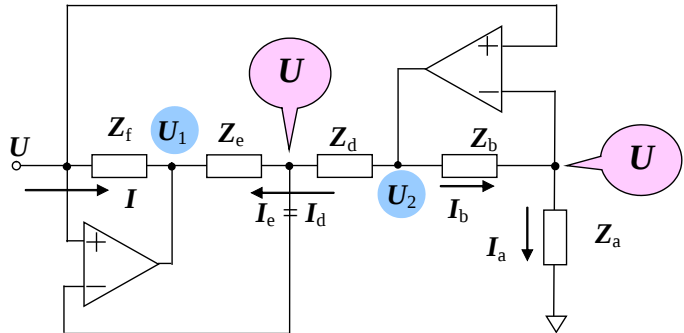
$$W(s) = \frac{I_I(s)}{U_I(s)} = \frac{Z_b Z_e}{Z_a Z_d Z_f}$$

б)

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола када прикључени напон U представља улазну (управљачку) величину (побуду), а струја I излазну (управљану) величину (одзив), је комплексна величина, $W(j\omega)$, одређена количником комплексних ликова струје и напона, која заправо представља улазну адмитансу:

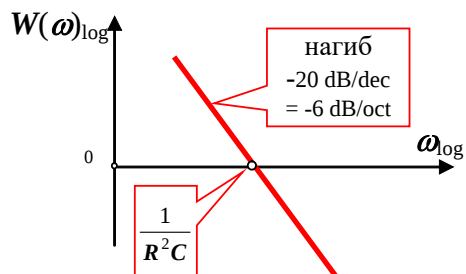
$$W(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = Y(j\omega).$$

За случај $Z_f = Z_d = Z_e = Z_a = R$, $Z_b = 1/j\omega C$, добија се



$$W(j\omega) = \frac{Z_b Z_e}{Z_a Z_d Z_f} = \frac{1}{j\omega R^2 C}.$$

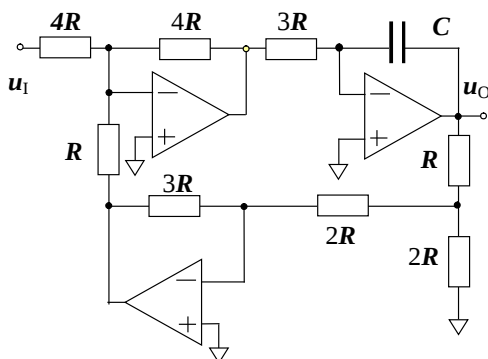
Логаритамска фреквенцијска карактеристика је приказана на слици.



ЗАДАТАК 1.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени: (улазна отпорност $R_{IN} = \infty$; излазна отпорност $R_O = 0$; појачање напона $A_U = \infty$; улазне струје $I_{BP} = I_{BN} = 0$; напон помераја нуле на улазу појачавача $U_{OS} = 0$)

- одредити функцију преноса, $W(j\omega)$,
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику, $W(\omega)$;
- одредити фазну фреквенцијску карактеристику, $\varphi(\omega)$.



РЕШЕЊЕ

а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$U_1 = -R_2 I_2,$$

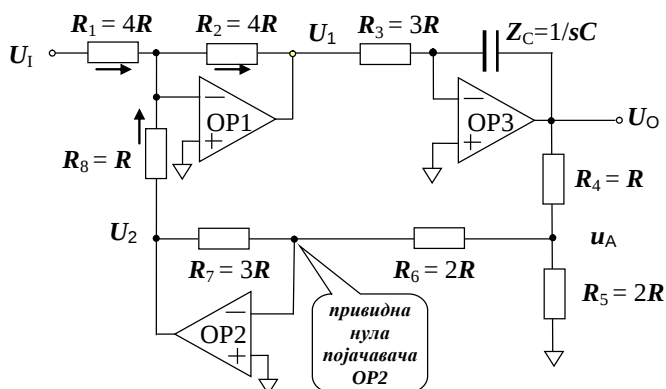
$$I_2 = I_1 + I_8,$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1},$$

$$I_8 = \frac{U_2}{R_8},$$

$$U_O = -\frac{Z_C}{R_3} U_1, Z_C = \frac{1}{sC}$$

$$U_2 = -\frac{R_7}{R_6} U_A.$$



Отпорници у мрежи која повезује појачаваче ОП3 и ОП2 образују делитељ напона којим се на улаз инвертујућег појачавача (који образују појачавач ОП2 и отпорници R_6 и R_7) доводи напон:

$$U_A = \frac{R_6 \parallel R_5}{R_4 + R_6 \parallel R_5} U_O.$$

Сређивањем ових једначина добија се:

$$U_1 = -\frac{R_2}{R_1} U_I - \frac{R_2}{R_8} U_2 = -U_I - 4U_2,$$

$$U_A = \frac{2R \parallel 2R}{R + 2R \parallel 2R} U_O = \frac{U_O}{2}$$

$$U_2 = -\frac{3U_O}{4},$$

$$U_1 = -3sRCU_O = -U_I + 3U_O.$$

Функција преноса кола је одређена односом комплексних ликова излаза и улаза:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{1}{3(1 + sRC)}.$$

б)

Фреквенцијска карактеристика $W(j\omega)$ посматраног кола добија се сменом $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U_I(j\omega)} = \frac{1}{3(1 + j\omega RC)}$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика $W(\omega)$ је апсолутна вредност (модуо) фреквенцијске карактеристике:

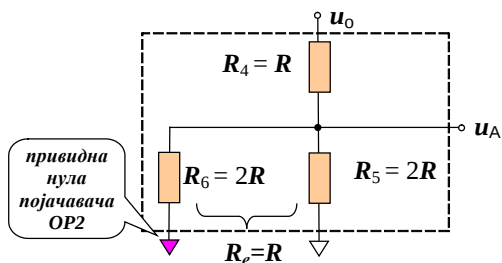
$$W(\omega) = \frac{1}{3\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

в)

Фазна фреквенцијска карактеристика, $\varphi(\omega)$, је аргумент функције преноса:

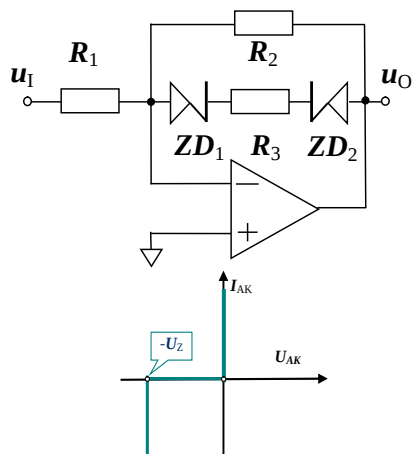
$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega RC.$$

ЗАДАТАК 2.А.



За коло приказано на слици, под претпоставком да су диоде ZD_1 и ZD_2 савршене Ценер-диоде са занемарљиво малим падом напона при директној поларизацији и напонам инверзног пробоја једнаким U_Z , као и да је операциони појачавач савршен:

- одредити општи израз за вредност напона $u_O(u_I)$ на излазу кола;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $u_O(u_I)$ ако су све отпорности у колу једнаке;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $u_O(u_I)$ ако је отпорност R_3 једнака нули.

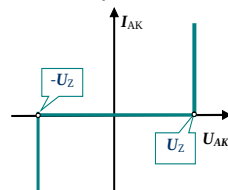
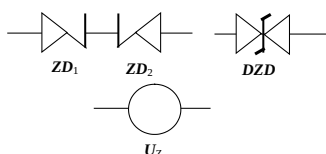


РЕШЕЊЕ

Две редно повезане, супротно оријентисане Ценер-диоде, делују као једна симетрична Ценер-диода чија су карактеристика и еквивалентно коло у области пробоја приказани на слици. Смер деловања извора напона U_Z одређен је физичким смером струје, односно смером деловања спољашњег извора напона.

Симетрична Ценер-диода

$$U_{ZZ} = U_{(ZO)} + U_{(TO)} = U_Z$$



Посматрано коло је симетрично у односу на поларитет улазног сигнала:

$$u_O(-u_I) = -u_O(u_I).$$

Улазно-излазна карактеристика, $u_O(u_I)$, је симетрична у односу на координатни почетак.

а)

► Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачем, када кроз грану у којој се налазе Ценер -диоде не протиче струја, важи формула:

$$u_O = -\frac{R_2}{R_1} u_I.$$

► Гранична вредност улазног напона одређена је условом:

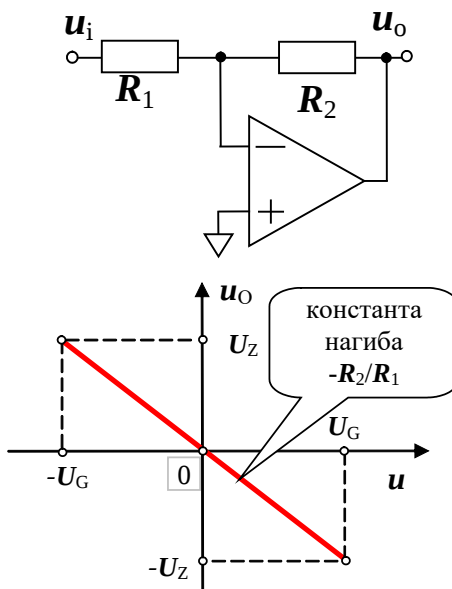
$$|u_O| = U_Z.$$

На основу релације:

$$U_Z = \left| -\frac{R_2}{R_1} U_G \right|,$$

слиди:

$$U_G = \frac{R_1}{R_2} U_Z.$$



Када је $|u_I| > U_G$, део улазне струје протиче кроз грану у којој се налазе Ценер-диода и отпорник R_3 .

Нагиб (стрмина) карактеристике $u_O(u_I)$ у делу који одговара условима када се двојна Ценер -диода налази у стању пробоја, мањи је него у делу када је $|u_I| \leq U_G$.

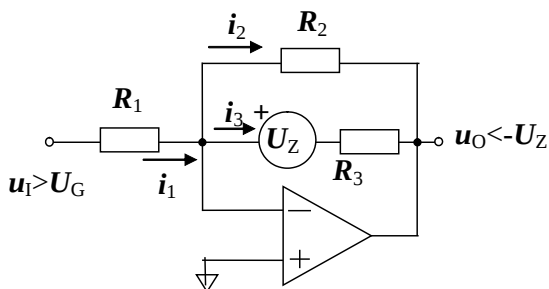
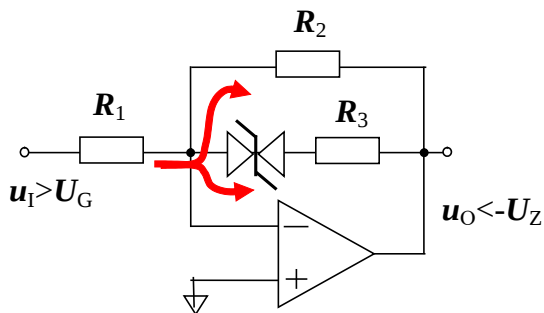
Нагиб карактеристике је утолико мањи, уколико је отпорност R_3 мања. Ако би отпорност R_3 била једнака нули, напон се не би мењао са променама улазног напона: нагиб карактеристике би био једнак нули.

У посматраном колу, складу са ознакама и референтним смеровима назначеним на слици, важе следеће једначине:

$$i_1 = i_2 + i_3,$$

$$i_1 = \frac{u_I}{R_1},$$

$$u_O = -R_2 i_2 = -U_Z - R_3 i_3$$



на основу којих следи:

$$\frac{u_I}{R_1} = -\frac{u_O}{R_2} - \frac{U_Z + u_O}{R_3}.$$

Сређивањем ове једначине добија се:

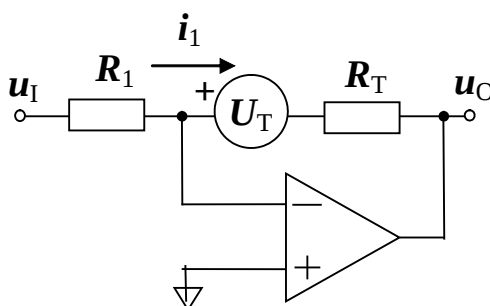
$$u_O = -\frac{R_2 \parallel R_3}{R_1} u_I - \frac{R_2 \parallel R_3}{R_3} U_Z.$$

До резултата се може доћи и применом Тевененове теореме, тако што се две гране у колу повртне спреге операционог појачавача замене једном граном:

$$U_T = \frac{R_2}{R_2 + R_3} U_Z, \quad u_i > U_G$$

$$R_T = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

$$u_O = -U_T - R_T i_1.$$



Сређивањем претходне једначине добија се:

$$u_O = -\frac{R_T}{R_1} u_I - U_T$$

а)

На основу претходног разматрања, зависност напона $u_O(u_I)$ на излазу кола од вредности улазног напона u_I се може представити изразом:

$$u_O = \begin{cases} -U_T - \frac{R_T}{R_1} u_i & \text{за } u_i > U_G \\ -\frac{R_2}{R_1} u_i & \text{за } |u_i| \leq U_G \\ U_T - \frac{R_T}{R_1} u_i & \text{за } u_i < -U_G \end{cases},$$

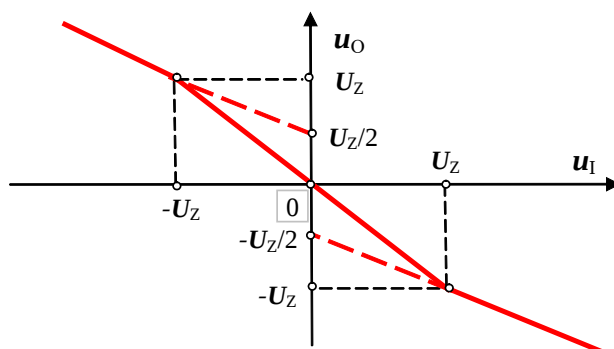
где је:

$$U_T = \frac{R_2}{R_2 + R_3} U_Z, \quad R_T = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$U_G = \frac{R_1}{R_2} U_Z.$$

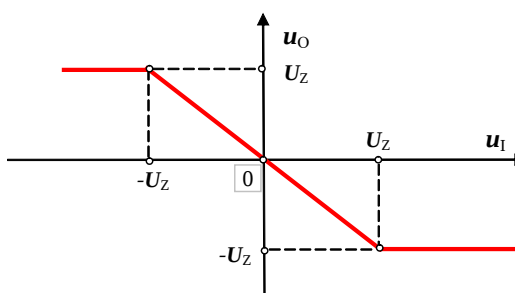
б)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола, $u_o(u_i)$, када су све отпорности у колу једнаке, дат је на слици.



в)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола, $u_o(u_i)$, ако је отпорност R_3 једнака нули, дат је на слици.

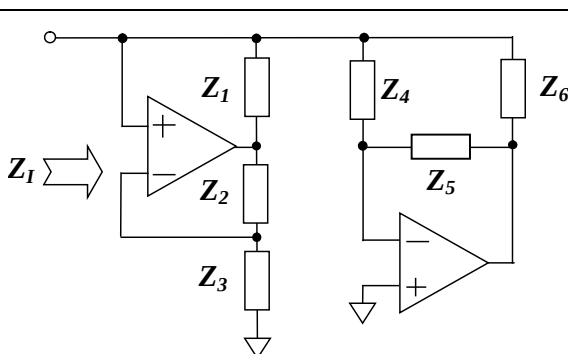


ЗАДАТАК 3.4.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

а) одредити општи израз за улазну импедансу кола, Z_1 , под претпоставком да су импедансе Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 и Z_6 познате;

б) одредити израз за улазну импедансу Z_1 ако је $Z_1 = Z_3 = Z_4 = Z_6 = R, Z_2 = 2R, Z_5 = 1/j\omega C$.



РЕШЕЊЕ

а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$I = I_1 + I_4 + I_6,$$

$$I_1 = \frac{U - U_1}{Z_1},$$

$$I_4 = \frac{U}{Z_4},$$

$$I_6 = \frac{U - U_2}{Z_6},$$

$$U_1 = U \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right),$$

$$U_2 = -U \frac{Z_5}{Z_4},$$

на основу којих следи:

$$I = -\frac{U}{Z_1} \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{U}{Z_4} + \frac{U}{Z_6} + \frac{U}{Z_6} \frac{Z_5}{Z_4}.$$

Сређивањем ове једначине добија се израз за вредност улазне струје у зависности од улазног напона и импеданси Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 и Z_6 :

$$I = U \frac{Z_1 Z_3 Z_6 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_5 - Z_2 Z_4 Z_6}{Z_1 Z_3 Z_4 Z_6},$$

на основу којег следи општи израз за вредност улазне импедансе Z_1 :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{Z_1 Z_3 Z_4 Z_6}{Z_1 Z_3 Z_6 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_5 - Z_2 Z_4 Z_6}.$$

б)

Сменом $Z_1 = Z_3 = Z_4 = Z_6 = R$, $Z_2 = 2R$, $Z_5 = 1/j\omega C$ добија се:

$$Z = j\omega R^2 C$$

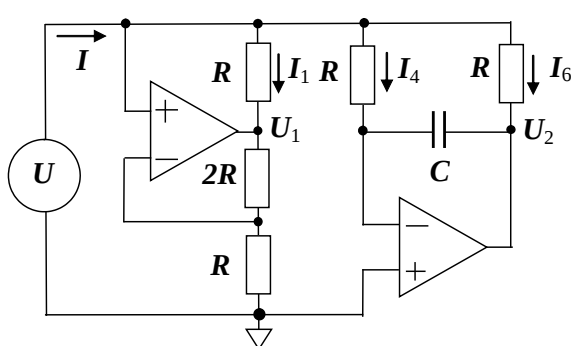
ПРОВЕРА

У посматраном случају операциони појачавач ОА₁ има улогу неинвертујућег појачавача чије је појачање једнако 3:

$$U_1 = 3U.$$

Операциони појачавач ОА₂, у чијој грани повратне спреге се налази кондензатор, делује као инвертујући интегратор:

$$U_2(j\omega) = -\frac{1}{j\omega RC} U(j\omega).$$



$$I_1 = -\frac{2U}{R}$$

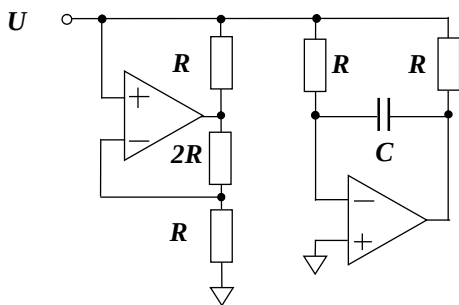
(за усвојене референтне
смерове струја I_1 је негативна !),

$$I_4 = \frac{U}{R}$$

$$I_6 = \frac{U}{R} + \frac{U}{j\omega R^2 C},$$

$$I = \frac{1}{j\omega R^2 C} U.$$

$$Z = \frac{U}{I} = j\omega R^2 C$$



Коло приказано на слици
се понаша као индуктивно
оптерећење:

$$L_e = R^2 C.$$

(активна индуктивност).

ЗАДАТАК 4.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачаваач савршен:

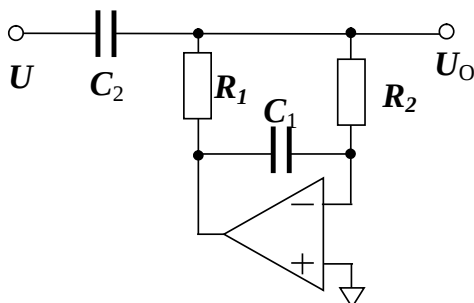
а) одредити општи израз за функцију преноса кола.

Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

б) одредити општи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику;

в) нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику;

г) одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног $u_i(t)$ и излазног напона $u_o(t)$.



РЕШЕЊЕ

а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачем, у линеарном режиму рада важе једначине:

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{U_O - U_1}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{U_O}{R_2},$$

$$U_1 = -U_O \frac{Z_{C1}}{R_2},$$

$$U_O = U - Z_{C2} I.$$

на основу којих следи:

$$I = U_O \frac{R_1 + R_2 + Z_{C1}}{R_1 R_2}, \text{ односно}$$

$$U_O = U - U_O \frac{Z_{C2}}{R_1 R_2} (R_1 + R_2 + Z_{C1}) = U \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + Z_{C2} (R_1 + R_2) + Z_{C1} Z_{C2}}.$$

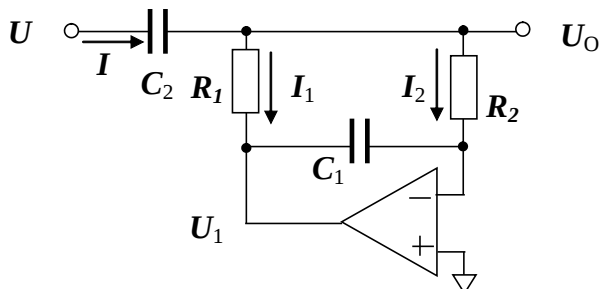
Сменом:

$$Z_{C1} = \frac{1}{sC_1}, \quad Z_{C2} = \frac{1}{sC_2},$$

добија се:

$$U_O = U \frac{sR_1 C_1 sR_2 C_2}{sC_1 R_1 sC_2 R_2 + sC_1 (R_1 + R_2) + 1}.$$

Функција преноса посматраног кола је одређена једначином:



$$W(s) = \frac{sR_1C_1sR_2C_2}{sC_1R_1sC_2R_2 + sC_1(R_1 + R_2) + 1}.$$

б)

У посебном случају, када је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

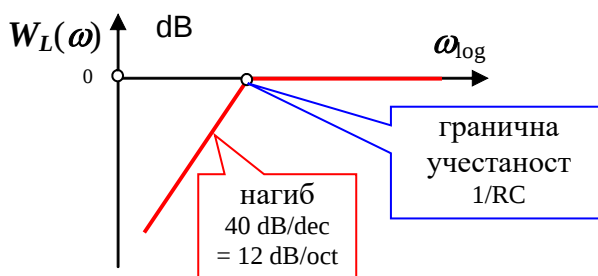
$$W(s) = \frac{(sRC)^2}{(sRC)^2 + 2sRC + 1} = \left(\frac{sRC}{1 + sRC} \right)^2.$$

Посматрано коло представља динамички систем другог реда. Амплитудска фреквенцијска карактеристика је одређена изразом:

$$W(\omega) = \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}.$$

в)

Асимптотска логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика је приказана на слици.



Посматрано коло представља активни филтер другог реда, пропусник високих учестаности.

г)

На основу израза за функцију преноса посматраног кола следи:

$$s^2(CR)^2 U_O + 2sRCU_O + U_O = s^2(CR)^2 U.$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

добива се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

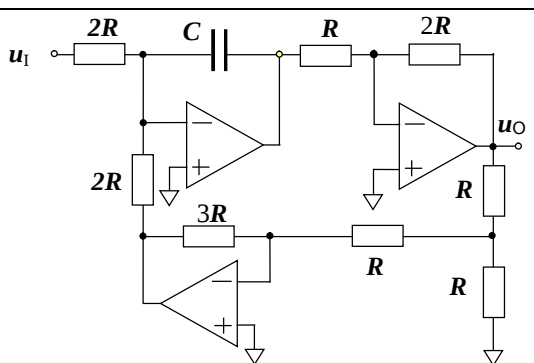
$$(CR)^2 \frac{d^2 u_O}{dt^2} + 2RC \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = (CR)^2 \frac{d^2 u}{dt^2},$$

која представља математички модел динамичког система другог реда.

ЗАДАТАК 1.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- одредити функцију преноса, $W(j\omega)$;
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику, $W(\omega)$;
- одредити фазну фреквенцијску карактеристику, $\varphi(\omega)$;



РЕШЕЊЕ

а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$U_1 = -Z_C I_C, \quad Z_C = \frac{1}{sC}$$

$$I_C = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{U_1}{2R},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{2R}$$

$$U_O = -2U_1,$$

$$U_A = \frac{U_O}{3},$$

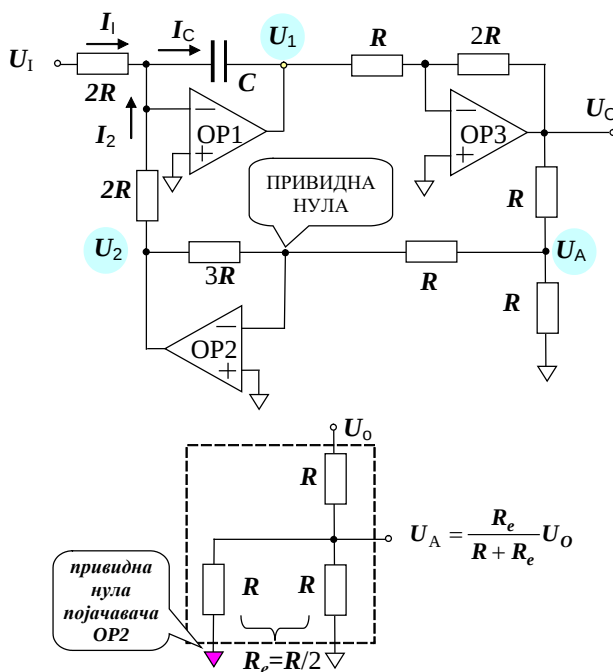
$$U_2 = -3U_A,$$

на основу којих следи:

$$U_2 = -U_O$$

$$U_1 = \frac{-U_i + U_O}{2sRC} = -\frac{U_O}{2}$$

$$-sRCU_O = -U_1 + U_O.$$



$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + sRC}$$

б)

Амплитудска фреквенцијска карактеристика, $W(\omega) = |W(j\omega)|$ је једнака:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = |W(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}.$$

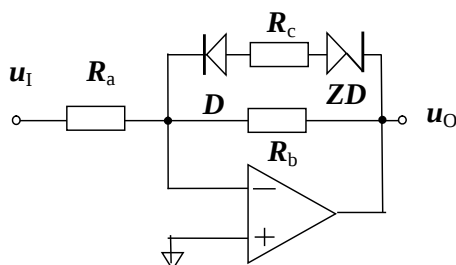
в)

Фазна фреквенцијска карактеристика, $W(\omega) = \arg W(j\omega)$, је једнака:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega RC.$$

ЗАДАТАК 2.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су диоде **D** и **ZD** савршене (при директној поларизацији напон између аноде и катоде је занемарљиво мали, динамичка отпорност Ценер-диоде у области пробоја је једнака нули), као и да је операциони појачавач савршен:



а) одредити општи израз за вредност напона $u_O(u_I)$;

б) нацртати улазно-излазну карактеристику, $u_O(u_I)$, ако су све отпорности у колу једнаке.

в) нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $u_O(u_I)$ ако је $R_a = R_b$, а отпорност R_c једнака нули.

РЕШЕЊЕ

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, када кроз грану у којој се налази Ценер-диода не протиче струја, напон на излазу кола је једнак:

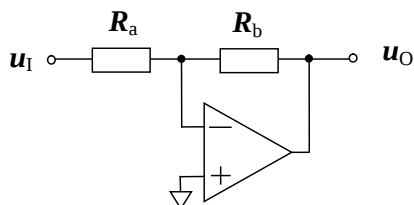
$$u_O = -\frac{R_b}{R_a} u_I.$$

Вредност улазног напона, U_G , која одговара граници ове области рада одређена је условом:

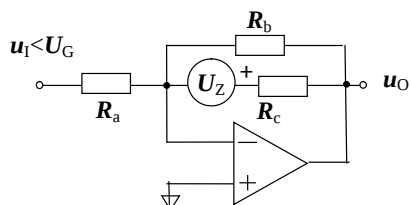
$$u_O(U_G) = U_Z = -\frac{R_b}{R_a} U_G,$$

на основу којег следи:

$$U_G = -\frac{R_a}{R_b} U_Z.$$



Када је $u_I \leq U_G$, паралелно са отпорником R_b делује грана која садржи диоде и отпорник R_c , при чему је савршена сигнална диода поларисана у директном, а Ценер-диода у инверзном смеру.



Применом Тевененове теореме посматрано коло се трансформише у коло приказано на слици.

$$U_T = \frac{R_b}{R_b + R_c} U_Z$$

$$R_T = R_b \parallel R_c = \frac{R_b R_c}{R_b + R_c}$$

за које важи:

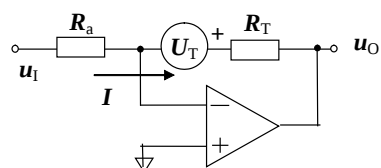
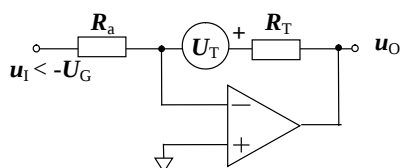
$$u_O = U_T - R_T I,$$

и

$$I = \frac{u_I}{R_a},$$

односно:

$$u_O = U_T - \frac{R_T}{R_a} u_I.$$



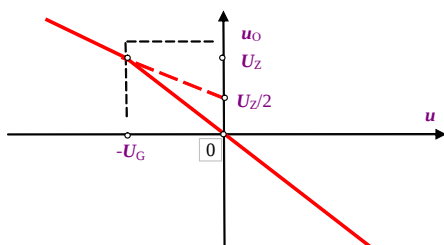
У општем случају, вредност напона на излазу кола је одређена изразом:

$$u_O = \begin{cases} U_T - \frac{R_T}{R_a} u_I & \text{за } u_I < -U_G \\ -\frac{R_b}{R_1} u_I & \text{за } u_I \geq -U_G \end{cases},$$

$$U_T = \frac{R_b}{R_b + R_c} U_Z, \quad U_G = -\frac{R_a}{R_b} U_Z.$$

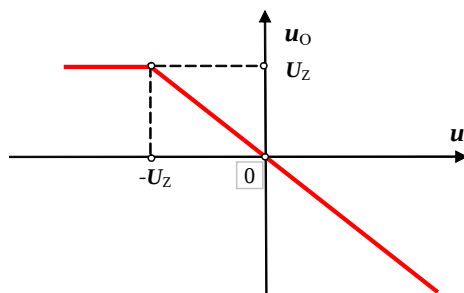
б)

Када су све отпорности у колу једнаке улазно-излазна карактеристика, $u_O(u)$, има облик приказан на слици



в)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола, $u_O(u_I)$, ако је отпорност R_3 једнака нули, је дат на слици.



ЗАДАТАК 3.Б.

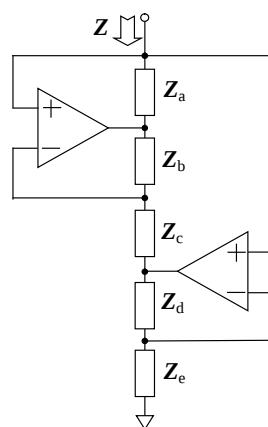
За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

а) одредити општи израз за улазну импедансу кола, Z , под претпоставком да су импедансе Z_a, Z_b, Z_c, Z_d и Z_e познате;

б) одредити израз за вредност улазне импедансе Z у случају ако је:

$$Z_a = Z_c = Z_d = Z_e = R,$$

$$Z_b = 1/j\omega C.$$



РЕШЕЊЕ

а)

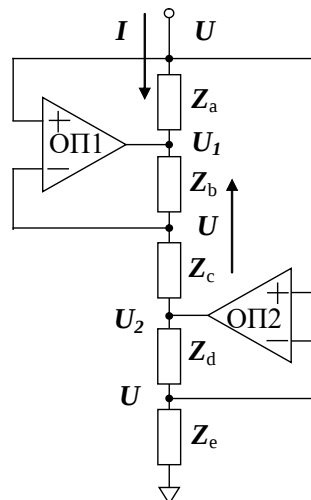
Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$U_2 = \frac{Z_d + Z_e}{Z_e} U,$$

$$I_b = I_c = \frac{U_2 - U}{Z_c},$$

$$U_1 = U - Z_b I_b,$$

$$I = I_a = \frac{U - U_1}{Z_a}.$$



Решавањем прве три једначине може се одредити израз за вредност напона на излазу појачавача ОП₁:

$$U_1 = U - Z_b \frac{U_2 - U}{Z_c} = U - Z_b \frac{\left(1 + \frac{Z_d}{Z_e}\right)U - U}{Z_c} = U \left(1 - \frac{Z_b Z_d}{Z_c Z_e}\right),$$

а потом и израз који описује зависност улазне струје од улазног напона и параметара кола:

$$I = \frac{U - U_1}{Z_a} = U \frac{Z_b Z_d}{Z_a Z_c Z_e},$$

на основу којег следи:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{Z_a Z_c Z_e}{Z_b Z_d}.$$

б)

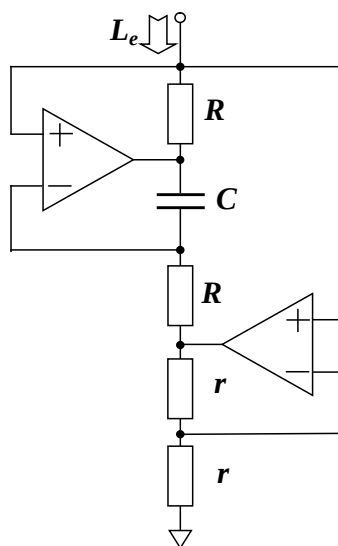
Када је $Z_a = Z_c = Z_d = Z_e = R$, $Z_b = 1/j\omega C$, добија се:

$$Z(j\omega) = j\omega R^2 C$$

Коло приказано на слици се понаша као индуктивно оптерећење:

$$L_e = R^2 C.$$

(активна индуктивност).



ЗАДАТАК 4.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен:

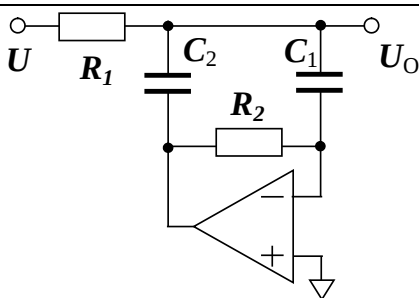
а) одредити општи израз за функцију преноса кола.

Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

б) одредити општи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику;

в) нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику;

г) одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног $u_i(t)$ и излазног напона $u_o(t)$.



а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{U_O - U_1}{Z_{C1}},$$

$$I_2 = \frac{U_O}{Z_{C2}},$$

$$U_1 = -U_O \frac{R_2}{Z_{C2}},$$

$$U_O = U - R_1 I.$$

на основу којих се добија израз којим је струја I изражена у зависности од излазног напона U_O :

$$I = U_O \frac{Z_{C1} + Z_{C2} + R_2}{Z_{C1} Z_{C2}}.$$

што омогућује са се излазни напон U_O изрази у зависности од улазног напона U :

$$U_O = U - U_O \frac{R_1}{Z_{C1} Z_{C2}} (R_2 + Z_{C2} + Z_{C1}) = U \frac{Z_{C1} Z_{C2}}{R_1 R_2 + R_1 (Z_{C1} + Z_{C2}) + Z_{C1} Z_{C2}}$$

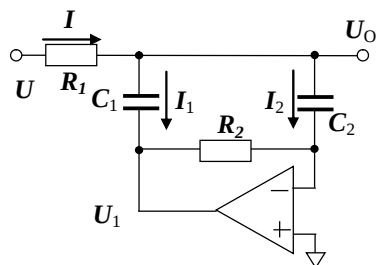
Након замене:

$$Z_{C1} = \frac{1}{sC_1}, \quad Z_{C2} = \frac{1}{sC_2},$$

добија се:

$$U_O = U \frac{1}{sC_1 R_1 sC_2 R_2 + sR_1 (C_1 + C_2) + 1},$$

одакле следи:



$$W(s) = \frac{1}{sC_1 R_1 sC_2 R_2 + sR_1(C_1 + C_2) + 1}$$

$$W(s) = \frac{1}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + sR_1(C_1 + C_2) + 1}$$

б)

Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$ добија се:

$$W(s) = \frac{1}{(sRC)^2 + 2sRC + 1} = \left(\frac{1}{1 + sRC} \right)^2$$

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола одређена је изразом:

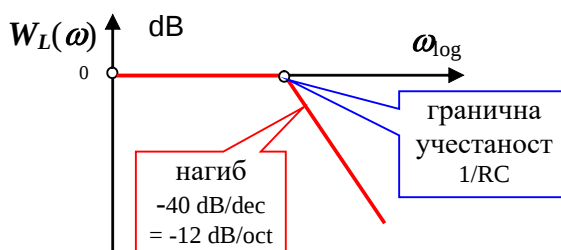
$$W(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + j\omega RC} \right)^2$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика је:

$$W(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

в)

Асимптотска логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика приказана је на слици.



Посматрано коло представља активни филтер другог реда, пропусник ниских учестаности.

г)

На основу израза за функцију преноса посматраног кола следи:

$$s^2 T^2 U_O + 2sTU_O + U_O = U, \quad T = RC.$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

добија се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

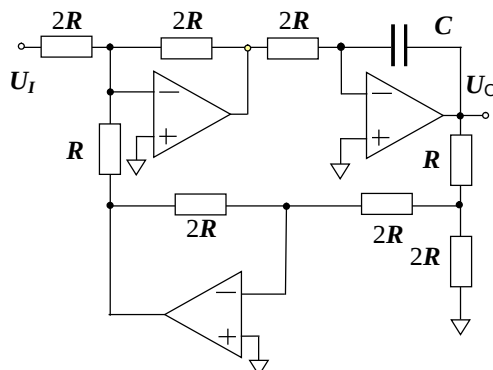
$$T^2 \frac{d^2 u_O}{dt^2} + 2T \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = u(t),$$

која одговара динамичком систему другог реда.

ЗАДАТАК 1.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

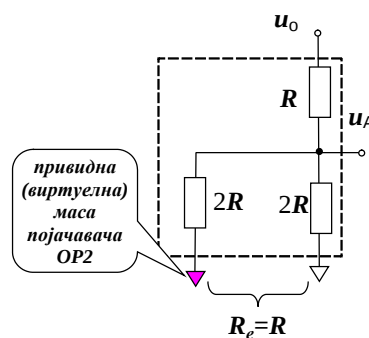
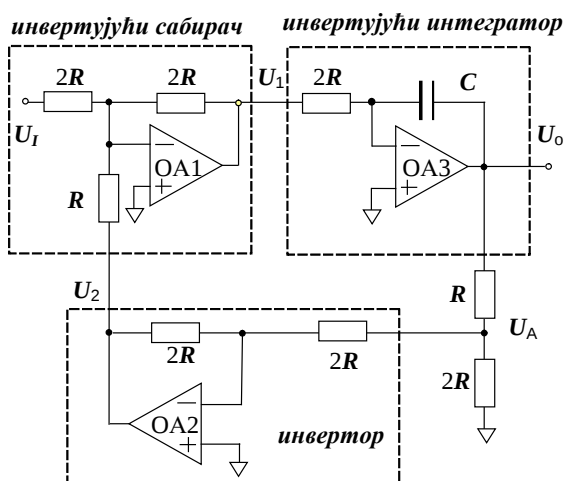
- одредити функцију преноса;
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити граничну учестаност пропусног опсега,
- одредити разлику фаза излазног и улазног сигнала на граничној учестаности,
- нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.



РЕШЕЊЕ

Посматрано коло се може анализирати као систем са повратном спрегом који садржи:

- инвертујући сабирач (OA1),
- инвертујући интегратор (OA3),
- ослабљивач, који образује отпорничка мрежа која повезује излаз појачавача OA3 са инвертујућим улазом појачавача OA2, и
- инвертујући појачавач јединичног појачања – инвертор (OA2).



Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарним условима рада, важе једначине:

$$U_1 = -U_I - 2U_2 \quad (\text{карактеристика преноса инвертујућег сабирача}),$$

$$U_O = -\frac{U_1}{2sRC} \quad (\text{карактеристика преноса инвертујућег интегратора}),$$

$$U_A = \frac{U_O}{2} \quad (\text{карактеристика преноса отпорничког делитеља напона}),$$

$$U_2 = -U_A \quad (\text{карактеристика преноса инвертујућег појачавача}),$$

које представљају математички модел посматраног система.

Ако се напон U_2 на излазу појачавача ОА2 исказе у зависности од излазног напона U_O ,

$$U_2 = -\frac{U_O}{2},$$

може се, преко једначине која описује зависност напона U_1 на излазу сабирача (појачавача ОА1) од улазног и излазног напона:

$$U_1 = -U_I + U_O,$$

и једначине која описује однос напона U_1 и U_O :

$$U_1 = -2sRCU_O.$$

одредити однос напона на улазу U_I и напона U_O на излазу кола. Изједначавањем десних страна последње две једначине добија се израз:

$$-2sRCU_O = -U_I + U_O,$$

на основу којег следи израз за функцију преноса система:

$$W(s) = \frac{1}{1 + s2RC},$$

која одговара динамичком систему првог реда.

б)

Фреквенцијска карактеристика, $W(j\omega)$, једнака је:

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega 2RC}.$$

Посматрано коло се понаша као филтер пропусник ниских учестаности. Амплитудска фреквенцијска карактеристика је одређена једначином:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega RC)^2}}.$$

в)

Гранична учестаност пропусног опсега је учестаност при којој је слабљење једнако $\frac{1}{\sqrt{2}}$. На основу услова:

$$W(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\omega_g RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

слиеди:

$$\omega_g = \frac{1}{2RC}.$$

г)

Фазна фреквенцијска карактеристика посматраног система одређена једначином:

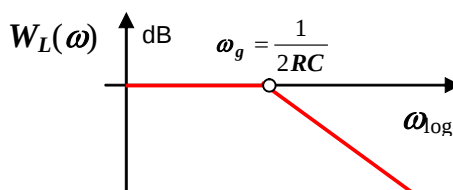
$$\varphi(\omega) = -\arctg 2\omega RC,$$

на основу које слиеди:

$$\varphi(\omega_g) = -\frac{\pi}{4}.$$

д)

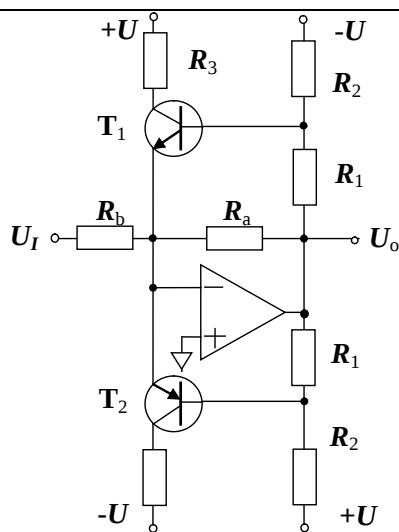
Графички приказ асимптотске логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике је дат на слици.



ЗАДАТАК 2.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком:

- ◆ да је операциони појачавач савршен,
 - ◆ да се инверзне струје засићења колекторског споја (I_{CBO}) транзистора T_1 и T_2 могу занемарити,
 - ◆ да транзистори T_1 и T_2 имају једнаке и познате вредности параметара:
- а) објаснити функцију кола и одредити општи израз за вредност напона U_O на излазу;
 - б) нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_O(U_I)$ ако све отпорности у колу имају једнаке вредности;
 - в) нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_O(U_I)$ када је $R_a = \infty$, а остале отпорности у колу имају међусобно једнаке вредности.



РЕШЕЊЕ

а)

Негативна повратно спрега у колу савршеног операционог појачавача, остварена преко отпорника R_a обезбеђује да је потенцијал инвертујућег улаза операционог појачавача једнак нули (привидна нула, виртуелна маса – VM).

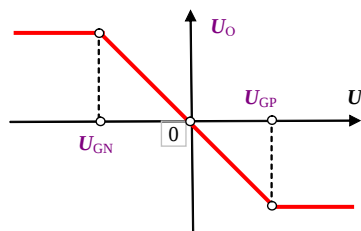
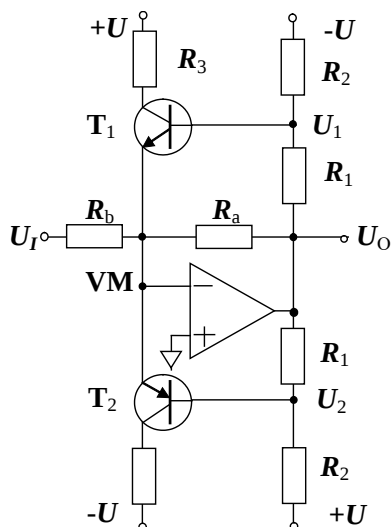
Када је улазни напон U_i једнак нули струја кроз отпорник R_b је једнака нули, па излазни напон U_o мора бити једнак нули. Наиме, да би напон U_o био позитиван, потребно је да транзистор T_2 води. То би значило да је напон U_2 негативан (по интензитету једнак напону U_{EB} директно поларисаног споја емитор-база транзистора T_2), што је немогуће, јер је база транзистора T_2 преко отпорника R_2 повезана на извор позитивног напона $+U$, а преко отпорника R_1 повезана на излаз појачавача, који је према учињеној претпоставци такође на позитивном потенцијалу. Аналогним разматрањем се показује да напон U_o не може бити ни негативан. Дакле, када је улазни напон U_i једнак нули, напон U_1 је негативан, а напон U_2 позитиван, оба транзистора су закована.

За мале вредности улазног напона, док један од транзистора не доспе у проводно стање, коло се понаша као инвертујући појачавач.

Да би PNP транзистор T_2 доспео у проводно стање, с обзиром на позитивну поларизацију његове базе преко отпорника R_2 , потребно је да, при повећању интензитета позитивног улазног напона U_i , напон U_2 постане негативан и достигне вредност напона прага вођења $-U_{EBT2}$.

Да би NPN транзистор T_1 доспео у проводно стање, с обзиром на негативну поларизацију његове базе преко отпорника R_2 , потребно је да, при промени улазног напона U_i у негативном смеру, напон U_1 постане позитиван и достигне вредност напона прага вођења U_{EBT1} . Када један од транзистора проводи, напон на излазу кола се не мења, (занемарујући мале промене услед промена напона база емитор при повећању струје колектора), без обзира на повећање интензитета улазног напона.

На основу претходног разматрања, може се закључити да посматрано коло представља инвертујући појачавач – ограничавач. Одговарајући облик карактеристике улаз-излаз је приказан на слици. Ако се може сматрати да транзистори имају једнака својства, функција $U_o(U_i)$ је непарна. Потребно је одредити вредност граничног напона при којој настаје прелом карактеристике.



За мале вредности интензитета улазног напона важи:

$$U_1 = \frac{-R_1 U + R_2 U_O}{R_1 + R_2} < U_{BET1} \quad (\text{транзистор } T_1 \text{ је закочен}),$$

$$U_2 = \frac{R_1 U + R_2 U_O}{R_1 + R_2} > -U_{EBT2} \quad (\text{транзистор } T_2 \text{ је закочен}),$$

$$U_O = -\frac{R_a}{R_b} U_1 \quad (\text{инвертујући појачавач}).$$

где је U_{BET1} напон прага вођења NPN-транзистора T_1 (напон база-емитор при којем се радна тачка транзистора T_1 налази на граници области закочења и активне области. При даљем повећању интензитета (негативног) улазног напона транзистор T_1 почиње да проводи струју у смеру колектор-емитор. U_{EBT2} је напон емитор-база који одговара прагу вођења PNP-транзистора T_2 (напон емитор-база при којем радна тачка транзистора T_2 доспева у активну област - транзистор почиње да проводи струју у смеру емитор-колектор).

Гранична вредност позитивног улазног напона, U_{GP} , одређена је условом:

$$U_2(U_{GP}) = U_{EBT2}, \text{ односно:}$$

$$\frac{R_1 U - R_2 \frac{R_a}{R_b} U_{GP}}{R_1 + R_2} = -U_{EBT2},$$

на основу којег следи:

$$U_{GP} = \frac{R_b}{R_a} \frac{R_1 U + (R_1 + R_2) U_{EBT2}}{R_2}.$$

Гранична вредност негативног улазног напона, U_{GN} , одређена је условом:

$$U_1(U_{GN}) = U_{BET1}, \text{ односно:}$$

$$\frac{-R_1 U - R_2 \frac{R_a}{R_b} U_{GN}}{R_1 + R_2} = U_{BET1},$$

на основу којег следи:

$$U_{GN} = -\frac{R_b}{R_a} \frac{R_1}{R_2} \left[U + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U_{BET1} \right].$$

Према томе, за напон на излазу кола важи израз:

$$U_O = \begin{cases} -U_{ON} & \text{за } U > U_{GP} \\ -\frac{R_a}{R_b} U_I & \text{за } U_{GN} \leq U \leq U_{GP}, \\ U_{OP} & \text{за } U < U_{GN} \end{cases}$$

у којем $-U_{ON}$ представља доњи (негативни) ниво ограничавања, који одговара напону U_{GP} :

$$U_{ON} = \frac{R_1}{R_2} U + (1 + \frac{R_1}{R_2}) U_{EBT2},$$

а U_{OP} горњи (позитивни), који одговара напону U_{GP} :

$$U_{OP} = \frac{R_1}{R_2} U + (1 + \frac{R_1}{R_2}) U_{EBT1}.$$

б)

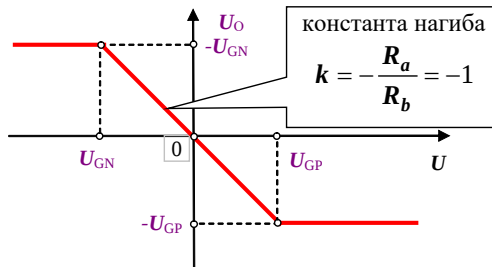
Када су све отпорности у колу једнаке важи:

$$U_O = -U_I, \quad U_1 = \frac{-U - U_I}{2}, \quad U_2 = \frac{U - U_I}{2}.$$

На основу претходних једначина следи:

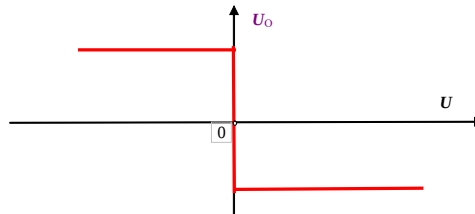
$$U_{GP} = U + 2U_{EBT},$$

$$U_{GN} = -U - 2U_{EBT}.$$



в)

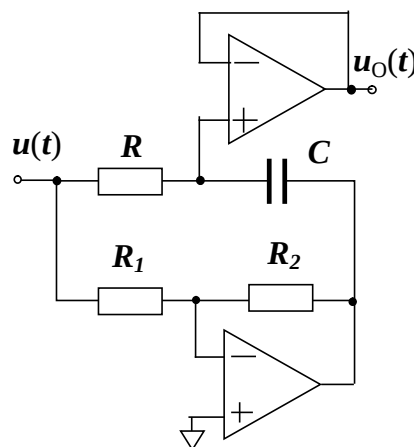
Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола када је $R_a = \infty$ је дат на слици.



ЗАДАТАК 3.А.

У колу приказаном на слици, примењени операциони појачавачи се могу сматрати савршеним.

- Одредити општи израз за функцију преноса кола.
Ако је $R_1 = R_2 = R$:
- нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити општи израз за фазну фреквенцијску карактеристику;
- написати диференцијалну једначину која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_o(t)$.


РЕШЕЊЕ

а)

За коло на слици, са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$U_2 = -\frac{R_2}{R_1} U \quad (\text{савршени инвертујући појачавач } A_2),$$

$$U_0 = U - RI \quad (\text{савршени јединични појачавач } A_1),$$

$$I = \frac{U - U_2}{R + Z_C}, \quad Z_C = \frac{1}{sC},$$

на основу којих се добија:

$$U_0 = U \frac{1 - sR \frac{R_2}{R_1} C}{1 + sRC}.$$

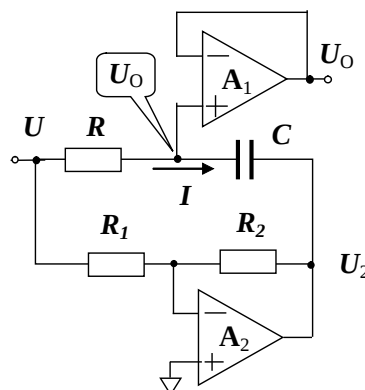
Функција преноса посматраног кола, $W(s)$, има облик:

$$W(s) = \frac{U_0(s)}{U(s)} = \frac{1 - sR \frac{R_2}{R_1} C}{1 + sRC}$$

б)

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола, $W(j\omega)$, је одређена једначином:

$$W(j\omega) = \frac{U_0(j\omega)}{U(j\omega)} = W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1 - j\omega R \frac{R_2}{R_1} C}{1 + j\omega RC}.$$



Амплитудска фреквенцијска карактеристика посматраног кола, $W(\omega)$, одређена је једначином:

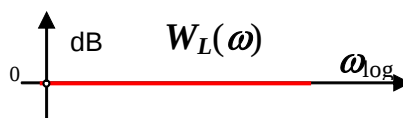
$$W(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \left(\omega RC \frac{R_2}{R_1}\right)^2}{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Ако је $R_1 = R_2$, следи:

$$W(\omega) = 1,$$

$$W_L(\omega) = 0.$$

Графички приказ логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике је дат на слици. Амплитуда излазног сигнала не зависи од учестаности.



в)

Фазна фреквенцијска карактеристика посматраног кола је одређена изразом:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega CR \frac{R_2}{R_1} - \arctg \omega CR.$$

Ако је $R_1 = R_2 = R$, добија се:

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega CR.$$

г)

На основу израза за функцију преноса кола следи:

$$U_O(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{1 - sRC}{1 + sRC} U(s),$$

односно:

$$U_O(s)(1 + sRC) = U(s)(1 - sRC).$$

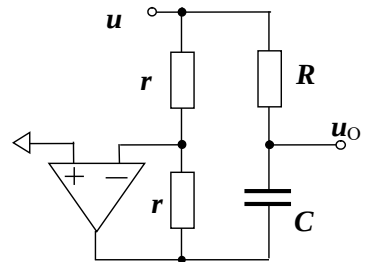
$$U_O(s) + RC \cdot sU_O(s) = U(s) - RC \cdot sU(s)$$

Однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_o(t)$ описан је диференцијалном једначином:

$$u_o(t) + RC \frac{du_o}{dt} = u(t) - RC \frac{du}{dt}.$$

Приказано коло се понаша као фреквенцијски независан “померац фазе”. Сигнал на излазу кола има исту амплитуду као и улазни сигнал, независно од његове учестаности, али је фазно померен за угао $\varphi(\omega)$ одређен временском константом RC .

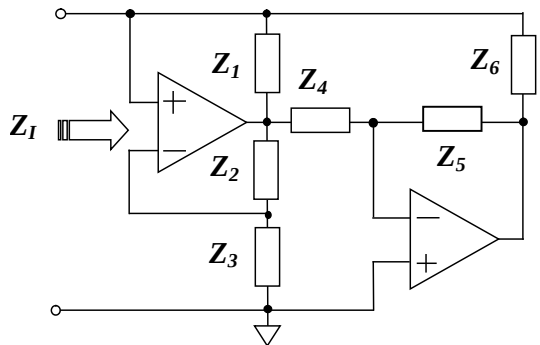
$$\varphi(\omega) = -2\arctg\omega CR$$



ЗАДАТАК 4.А.

За коло са савршеним операционим појачавачима приказано на слици:

- одредити општи израз за улазну импедансу кола, Z_I , под претпоставком да су импедансе Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 и Z_6 познате;
- одредити израз за вредност улазне импедансе Z_I ако је $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_6 = R$, $Z_5 = 1/j\omega C$.



РЕШЕЊЕ

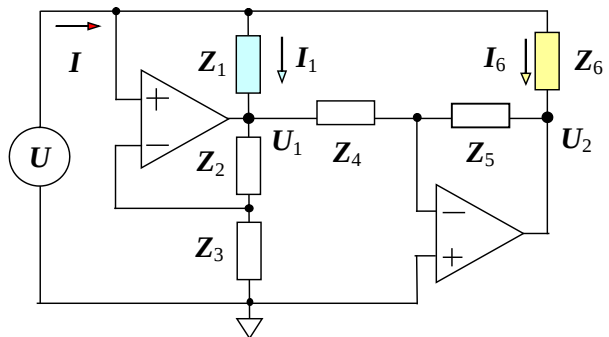
а)

Према ознакама на слици, за посматрано коло важи следећи систем једначина:

$$I(j\omega) = I_1(j\omega) + I_6(j\omega),$$

$$I_1(j\omega) = \frac{U(j\omega) - U_1(j\omega)}{Z_1(j\omega)},$$

$$I_6(j\omega) = \frac{U(j\omega) - U_2(j\omega)}{Z_6(j\omega)}$$



$$U_1(j\omega) = \left(1 + \frac{Z_2(j\omega)}{Z_3(j\omega)}\right) U(j\omega),$$

$$U_2(j\omega) = -\frac{Z_5(j\omega)}{Z_4(j\omega)} U_1(j\omega),$$

који представља математички модел којим је описано стање система при побуди хармонијским сигналом. Његовим решавањем добијају се изрази за струје I_1 и I_6 које образују улазну струју I :

$$I_1 = -\frac{Z_2}{Z_1 Z_3} U,$$

$$I_6 = \frac{1 + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) \frac{Z_5}{Z_4}}{Z_6} U = \frac{Z_3 Z_4 + (Z_2 + Z_3) Z_5}{Z_3 Z_4 Z_6} U,$$

чијим уврштавањем у прву једначину се добија израз за вредност улазне струје у зависности од улазног напона и параметара кола:

$$I = \frac{Z_1 Z_3 Z_4 + (Z_2 + Z_3) Z_1 Z_5 - Z_2 Z_4 Z_6}{Z_1 Z_3 Z_4 Z_6} U,$$

на основу којег следи општи израз за вредност улазне импедансе:

$$Z_I = \frac{U}{I} = \frac{Z_1 Z_3 Z_4 Z_6}{Z_1 Z_3 Z_6 + (Z_2 + Z_3) Z_1 Z_5 - Z_2 Z_4 Z_6}.$$

б)

Када је $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_6 = R$ $Z_5 = 1/j\omega C$, добија се:

$$Z_I = \frac{R^4}{R^3 + 2R^2 \frac{1}{j\omega C} - R^3},$$

$$Z_I = \frac{1}{2} j\omega R^2 C.$$

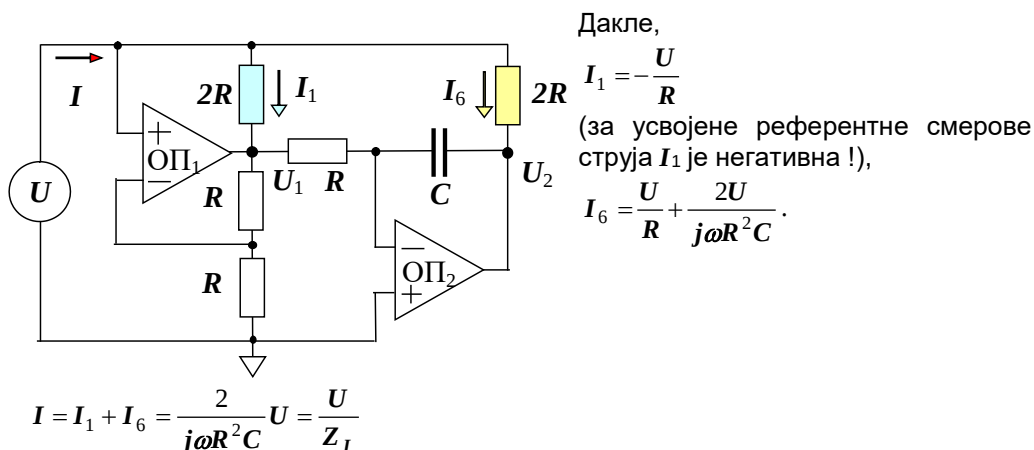
ПРОВЕРА

У посматраном случају, када су све отпорности у колу једнаке, операциони појачавач ОП₁ има улогу неинвертујућег појачавача чије је појачање једнако 2:

$$U_1 = 2U.$$

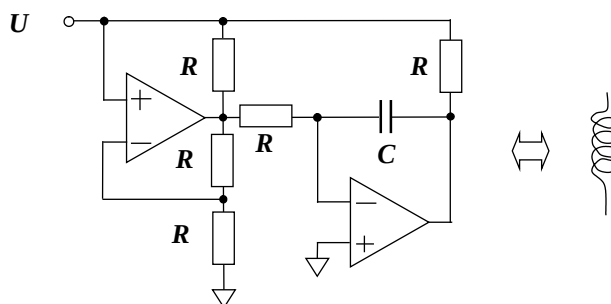
Операциони појачавач ОП₂, у чијој грани повратне спреге се налази кондензатор, делује као инвертујући интегратор:

$$U_2(j\omega) = -\frac{1}{j\omega RC} U_1(j\omega) = -\frac{2}{j\omega RC} U(j\omega).$$



Коло приказано на слици представља активну индуктивност.

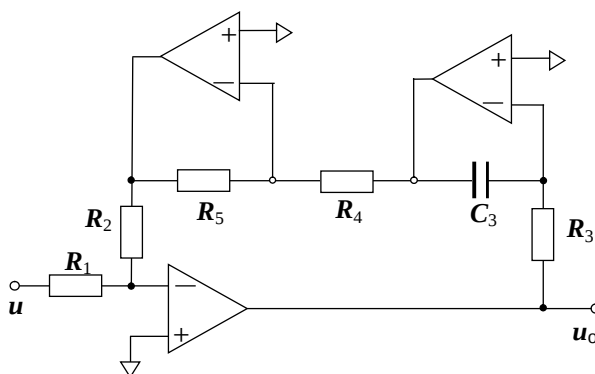
$$L_e = \frac{1}{2} R^2 C.$$



ЗАДАТАК 1.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- одредити функцију преноса;
- одредити амплитудску фреквенцијску карактеристику;
- одредити фазну фреквенцијску карактеристику;
- нацртати логаритамску асимптотску фреквенцијску карактеристику појачања.



РЕШЕЊЕ

а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

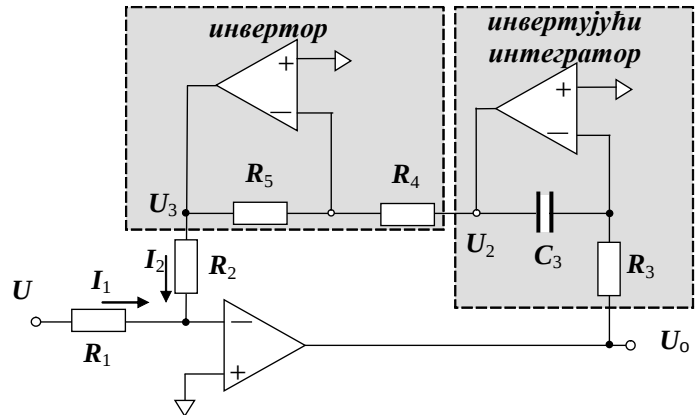
$$U_2 = -\frac{U_0}{sR_3C_3},$$

$$U_3 = -\frac{R_5}{R_4}U_2,$$

$$I_1 + I_2 = 0,$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{U_3}{R_2},$$



на основу којих следи:

$$\frac{U}{R_1} + \frac{R_5 U_0}{sR_4 R_3 R_2 C_3} = 0,$$

односно:

$$U_0 = -s \frac{R_2 R_3 R_4}{R_1 R_5} C_3 U.$$

Посматрано коло представља инвертујући савршени диференцијатор:

$$W(s) = -s \frac{R_2 R_3 R_4}{R_1 R_5} C_3.$$

б)

Амплитудска фреквенцијска карактеристика је:

$$W(\omega) = \omega \frac{R_2 R_3 R_4}{R_1 R_5} C_3.$$

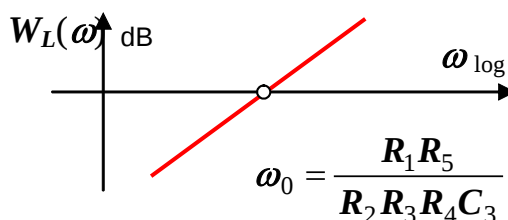
в)

Сигнал на излазу савреног инвертујућег интегратора заостаје за улазним сигналом за $\pi/2$:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

г)

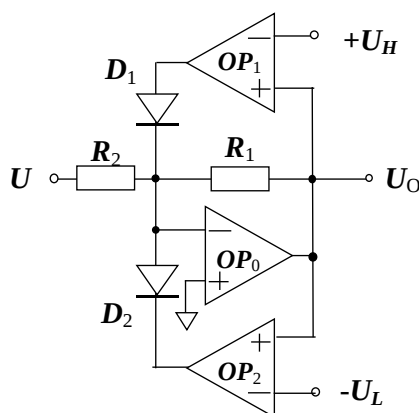
Графички приказ
логаритамске амплитудске
фреквенцијске карактеристике
је дат на слици.



ЗАДАТАК 2.Б.

У колу приказаном на слици, примењени су савршени операциони појачавачи:

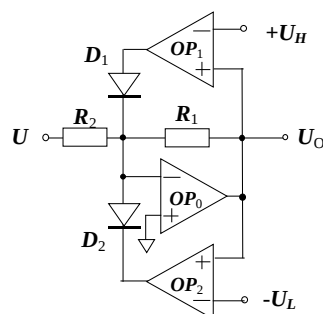
- објаснити рад кола и одредити општи израз за вредност напона U_O у зависности од вредности напона U , U_L , U_H и отпорности R_1 и R_2 ;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_O(U)$ ако је $R_1 = R_2 = R$, $U_H = 5 \text{ V}$, $U_L = -10 \text{ V}$.



РЕШЕЊЕ

Да би диода D_1 доспела у проводно стање, потребно је да излаз појачавача OP_1 буде позитиван, односно да излазни напон U_O буде већи од напона U_H .

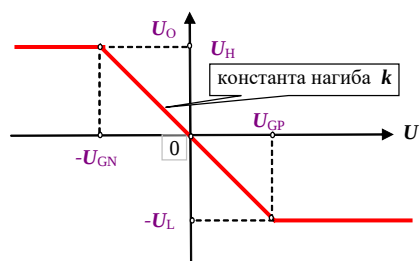
Да би диода D_2 доспела у проводно стање, потребно је да излаз појачавача OP_2 буде негативан, односно да излазни напон U_O буде мањи од напона $-U_L$.



$$U_O = \begin{cases} -U_L & \text{за } U > U_{GP} \\ kU & \text{за } -U_{GN} < U < U_{GP} \\ U_H & \text{за } U \leq -U_{GN} \end{cases}$$

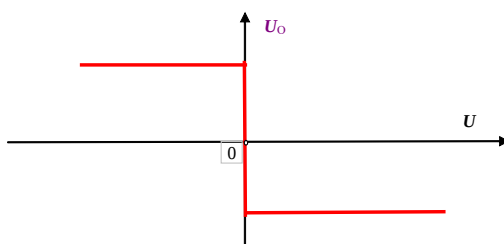
$$U_{GP} = \frac{R_1}{R_2} U_L, \quad U_{GN} = \frac{R_1}{R_2} U_H,$$

$$k = -\frac{R_2}{R_1}$$



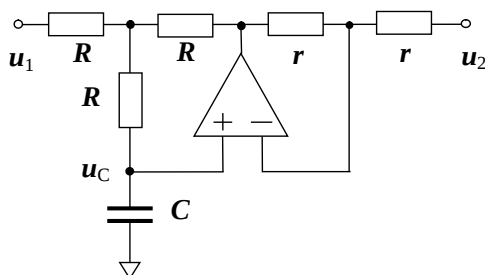
в)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола за случај $R_a = \infty$ је дат на слици.

**ЗАДАТАК 3.Б.**

За коло са савршеним операционим појачавачем, приказано на слици, одредити израз за вредност напона на крајевима кондензатора:

$$U_C(s) = U_C[s, C, R, r, U_1(s), U_2(s)]$$

**РЕШЕЊЕ**

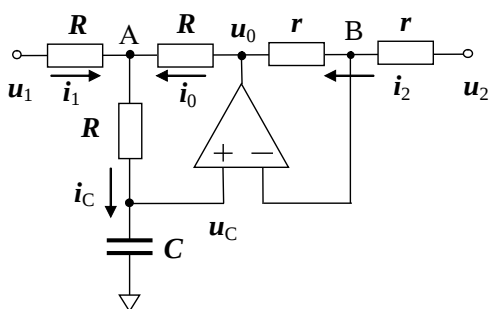
За коло са савршеним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$I_C = I_1 + I_0,$$

$$U_C = I_C Z_C, \quad Z_C = \frac{1}{sC}$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R},$$

$$I_0 = \frac{U_0 - U_A}{R},$$



$$U_A = U_C \frac{R + Z_C}{Z_C} = U_C \left(1 + \frac{R}{Z_C} \right).$$

на основу којих следи:

$$I_C = \frac{U_1 - 2U_A + U_0}{R} = \frac{U_1 + U_0}{R} - 2U_C \frac{Z_C + R}{RZ_C}.$$

Сређивањем овог израза добија се веза између напона U_C и напона U_1 и U_0

$$RZ_C I_C = RU_C = (U_1 - 2U_A + U_0)Z_C = (U_1 + U_0)Z_C - 2U_C(Z_C + R),$$

односно:

$$U_C(3R + 2Z_C) = (U_1 + U_0)Z_C.$$

Негативна повратна спрега у колу операционог појачавача обезбеђује:

$$U_B = U_C.$$

На основу једначина:

$$U_0 = U_C - rI_2,$$

$$I_2 = \frac{U_2 - U_C}{r},$$

следи:

$$U_0 = 2U_C - U_2.$$

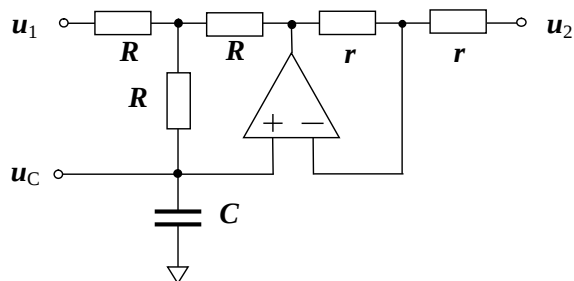
Сређивањем се добија:

$$U_C = (U_1 - U_2) \frac{Z_C}{3R},$$

односно:

$$U_C(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{3sRC}.$$

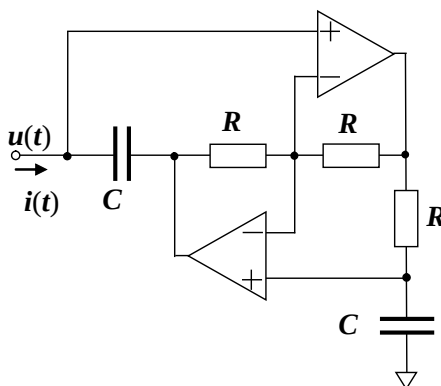
Посматрано коло омогућује остваривање операције интегралења разлике два сигнала (диференцијални интегратор) применом само једног операционог појачавача.



ЗАДАТАК 4.Б.

У приказаном колу су примењени операциони појачавачи који се могу сматрати савршеним.

- Одредити општи израз за улазну импедансу, Z_1 .
- написати диференцијалну једначину која описује однос напона и струје,



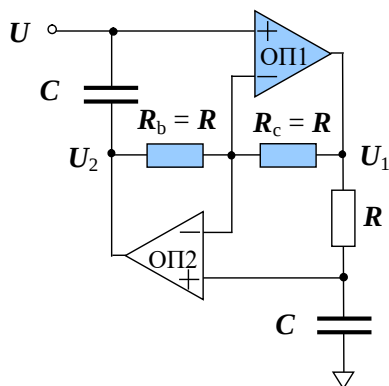
РЕШЕЊЕ

а)

За коло са савршеним операционим појачавачима у линеарним условима рада, важи следеће разматрање.

△ Појачавач ОП1 представља инвертујући појачавач на чијем улазу делује напон U_2 (излазни напон појачавача ОП2) док је на неинвертујући улаз појачавача доведен улазни сигнал кола - напон U (поларисани инвертујући појачавач)

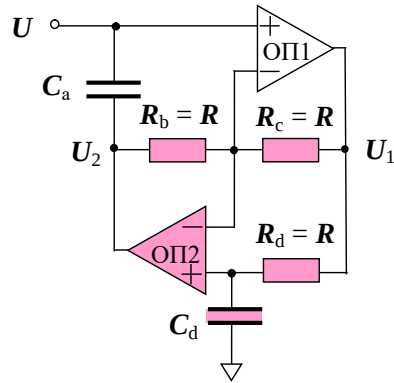
$$U_1 = \left(1 + \frac{R_c}{R_b}\right)U - \frac{R_c}{R_b}U_2.$$



△ Појачавач ОП2 делује као “комплексни” диференцијални појачавач чији су улази краткоспојени и прикључени на излаз појачавача ОП1:

$$U_2 = U_1 \frac{Z_e}{R_d + Z_e} \left(1 + \frac{R_b}{R_c}\right) - \frac{R_b}{R_c} U_1 =$$

$$= U_1 \left[\frac{Z_e}{R_d + Z_e} \left(1 + \frac{R_b}{R_c}\right) - \frac{R_b}{R_c} \right].$$



За задате вредности елемената важи:

$$U_1 = 2U - U_2,$$

$$U_2 = U_1 \frac{1 - sT}{1 + sT},$$

$$T = RC.$$

Сређивањем се добија:

$$U_2 = U(1 - sT).$$

Улазна струја I једнака је:

$$I = \frac{U - U_2}{Z_a} = s^2 CTU,$$

одакле следи:

$$Z_i = \frac{U}{I} = \frac{1}{s^2 CT},$$

односно:

$$Z_i = \frac{U}{I} = -\frac{1}{\omega^2 C^2 R}$$

б)

На основу израза за улазну импедансу кола:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{R}{(sT)^2}$$

следи:

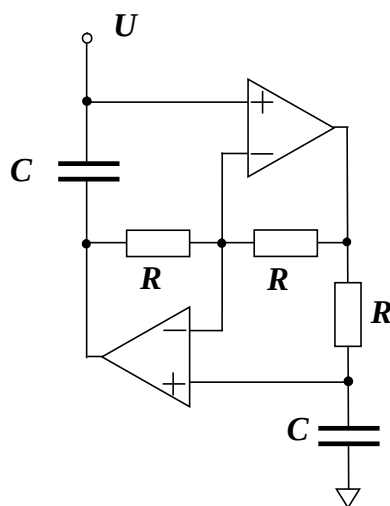
$$s^2 T^2 U(s) = RI(s).$$

Однос улазног напона, $u(t)$, и улазне струје, $i_o(t)$ описан је диференцијалном једначином:

$$(RC)^2 \frac{du}{dt} = R i(t).$$

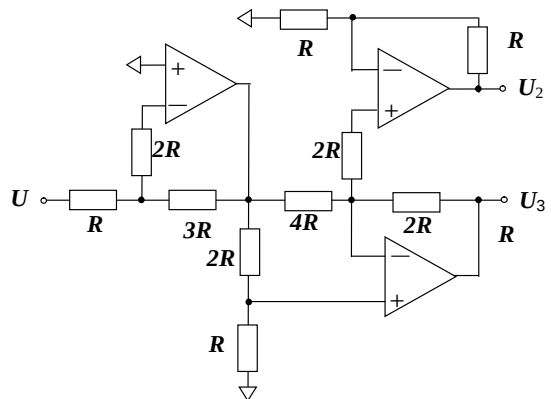
Коло приказано на слици представља фреквенцијски зависну негативну отпорност.

$$R_e = -\frac{1}{R\omega^2 C^2}$$



ЗАДАТАК 1.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени и да се коло налази у линеарном режиму рада, одредити општи израз за вредност напона U_2 и U_3 у зависности од вредности улазног напона U .



РЕШЕЊЕ

а)

Савршени операциони појачавач ОП1 делује као инвертујући појачавач чије је појачање једнако:

$$A_1 = -\frac{R_2}{R_1} = -3.$$

(улазна струја савреног појачавача је једнака нули – потенцијал тачке А је једнак потенцијалу инвертујућег улаза операционог појачавача са негативном повратном спрегом = привидна нула).

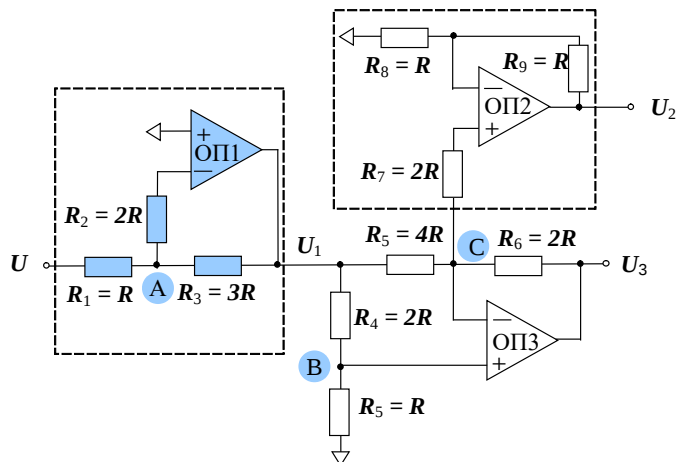
$$U_1 = -3U.$$

Отпорници $R_4 = 2R$ и $R_5 = R$ образују делитељ напона (улазна отпорност савреног операционог појачавача је бесконачно велика, а улазна струја је једнака нули):

$$U_B = \frac{R_5}{R_4 + R_5} U_1 = \frac{1}{3} U_1.$$

Негативна повратна спрега у колу операционог појачавача ОП3 (остварена преко отпорника R_6) обезбеђује да се тачке В и С налазе на истом потенцијалу:

$$U_C = U_B = -U.$$



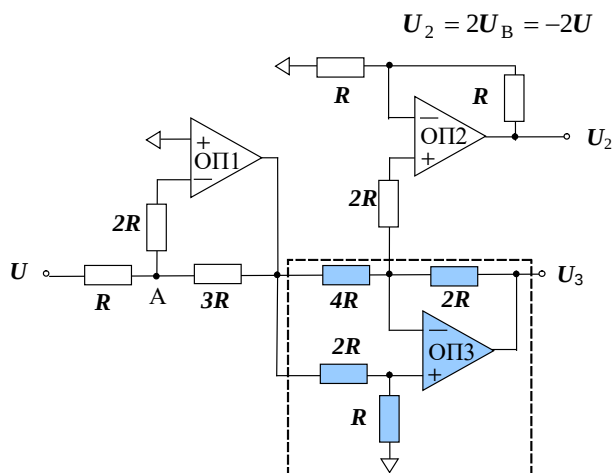
У односу на напон у тачки С, савршени операциони појачавач ОП2 делује као неинвертујући појачавач чије је појачање једнако:

$$A_2 = 1 + \frac{R_9}{R_8} = 2.$$

(улазна струја савреног појачавача је једнака нули → пад напона на отпорнику R_7 је једнак нули → напон на неинвертујућем улазу појачавача ОП2 једнак је напону U_C).

Операциони појачавач ОП3 заправо представља диференцијални појачавач (појачање једнако 0,5) чији су улази краткоспојени:

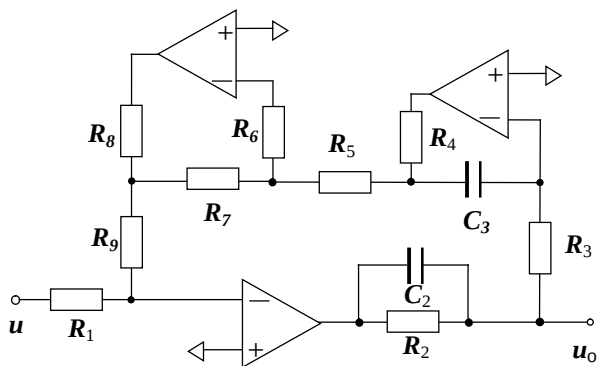
$$U_3 = 0$$



ЗАДАТАК 2.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- одредити општи израз за функцију преноса;
- нацртати логаритамску асимптотску фреквенцијску карактеристику.



РЕШЕЊЕ

а)

Према ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачима у линеарном режиму рада, важе једначине:

✓ савршени операциони појачавач ОП2 делује као инвертујући интегратор:

$$U_2 = -\frac{U_0}{sR_3C_3}$$

(отпорност R_4 делује као излазна отпорност операционог појачавача бесконачно великог појачања, са негативном повратном спрегом оствареном преко кондензатора C_3).

- ✓ савршени операциони појачавач ОПЗ делује као инвертор:

$$U_3 = -\frac{R_7}{R_5} U_2,$$

(улазна струја савршеног појачавача је једнака нули – потенцијал тачке А је једнак потенцијалу инвертујућег улаза операционог појачавача са негативном повратном спрегом = привидна нула)

- ✓ негативна повратна спрега остварена у колу савршеног операционог појачавача ОП1 обезбеђује да се његов инвертујући улаз напази на нултом потенцијалу, на основу чега следи:

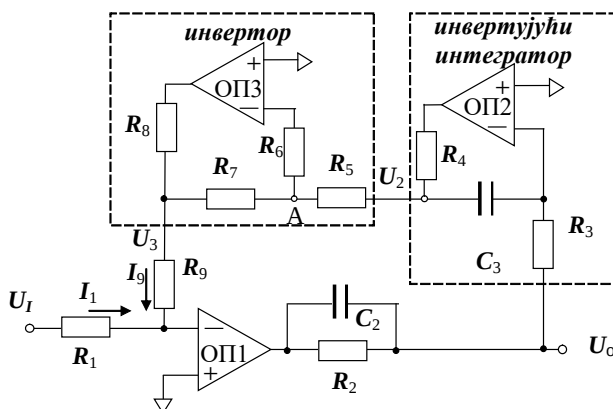
$$I_1 = \frac{U_I}{R_1}, \quad I_9 = \frac{U_3}{R_9}, \quad I_1 + I_9 = 0$$

Сређивањем ових једначина добија се:

$$\frac{U_I}{R_1} + \frac{R_7 U_O}{s R_3 R_5 R_9 C_3} = 0,$$

односно:

$$U_O = -U_I s \frac{R_3 R_5 R_9}{R_1 R_7} C_3$$



Посматрано коло представља инвертујући диференцијатор:

$$W(s) = -s \frac{R_3 R_5 R_9}{R_1 R_7} C_3.$$

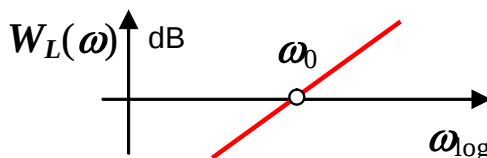
б)

$$W(j\omega) = -j \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{R_1 R_7}{R_3 R_5 R_9 C_3}$$

$$W(\omega) = \omega \frac{R_3 R_5 R_9}{R_1 R_7} C_3$$

в)

Графички приказ
логаритамске амплитудске
фреквенцијске карактеристике
је дат на слици.



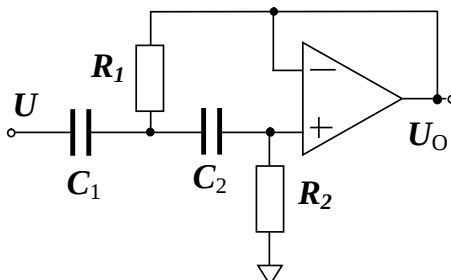
ЗАДАТАК 3.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен,

- а) одредити општи израз за функцију преноса кола.

Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

- б) одредити општи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику;
в) нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику;
г) одредити општи израз за фазну фреквенцијску карактеристику.

**РЕШЕЊЕ**

а)

За коло на слици, са идеалним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$U_- = U_+ = U_O,$$

$$I_1 + I_O = I_2,$$

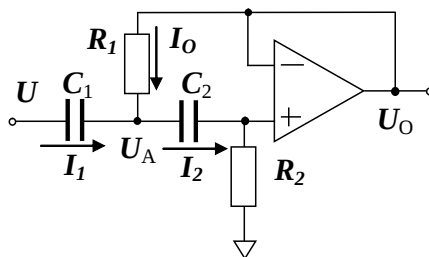
$$I_2 = \frac{U_O}{R_2},$$

$$I_1 = \frac{U - U_A}{Z_{C1}},$$

$$I_O = \frac{U_O - U_A}{R_1},$$

$$U_A = I_2(R_2 + Z_{C2}),$$

$$Z_{C1} = \frac{1}{sC_1}, \quad Z_{C2} = \frac{1}{sC_2}$$



На основу ових једначина може се одредити израз за вредност напона U_A у зависности од вредности излазног напона U_O :

$$U_A = I_2(R_2 + Z_{C2}) = \frac{U_O}{R_2}(R_2 + Z_{C2}) = U_O \frac{1 + sC_2 R_2}{sC_2 R_2}.$$

$$\frac{U_O}{R_2} = \frac{U - U_A}{Z_{C1}} + \frac{U_O - U_A}{R_1},$$

$$sR_1 C_2 U_O = U - U_A + (U_O - U_A)sR_1 C_1.$$

Сређивањем последњег израза добија се једначина:

$$Us^2 R_1 C_1 R_2 C_2 = U_O [s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + sR_1(C_1 + C_2) + 1],$$

на основу које следи израз за функцију преноса кола

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + s R_1 (C_1 + C_2) + 1}.$$

Анализирано коло представља филтер другог реда, пропусник високих учестаности.

б)

Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$, функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{(sRC)^2}{(sRC)^2 + 2sRC + 1} = \frac{(sRC)^2}{(1 + sRC)^2} = \left(\frac{sRC}{1 + sRC} \right)^2$$

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола одређена је изразом:

$$W(j\omega) = \left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right)^2 = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

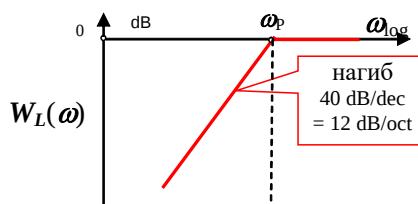
Амплитудска фреквенцијска карактеристика одређена је једначином:

$$W(\omega) = \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}$$

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика дефинисана је изразом:

$$W_L(dB) = 20 \log W(\omega) = 40 \log \omega RC - 20 \log [1 + (\omega RC)^2]$$

Графички приказ асимптотске логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике посматраног кола је дат на слици.



Гранична учестаност пропусног опсега (преломна учестаност асимптотске амплитудске фреквенцијске карактеристике) једнака је:

$$\omega_P = \frac{1}{RC}$$

в)

Фазна фреквенцијска карактеристика посматраног кола одређена је једначином:

$$\varphi(\omega) = \pi - 2 \arctg \omega CR.$$

На основу једначине којом је одређена функција преноса кола:

$$Us^2 R_1 C_1 R_2 C_2 = U_O \left[s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + s R_1 (C_1 + C_2) + 1 \right]$$

добија се једначина:

$$U(s) s^2 R^2 C^2 = U_O(s) (s^2 R^2 C^2 + s 2RC + 1),$$

односно

$$(RC)^2 s^2 U(s) = (RC)^2 s^2 U_O(s) + 2RCsU(s) + U(s)$$

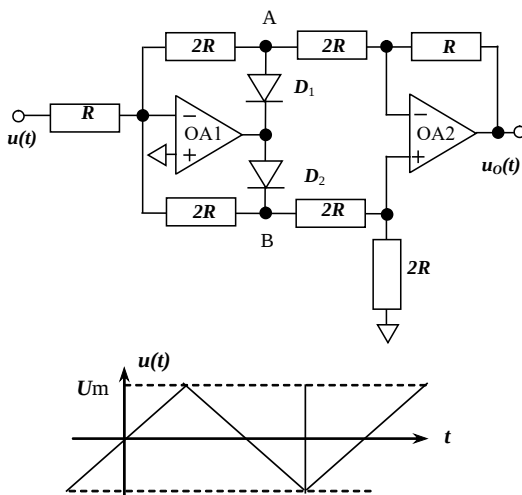
Однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_o(t)$ описан је диференцијална једначином:

$$(RC)^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = (RC)^2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + 2RC \frac{du_o}{dt} + u_o(t)$$

ЗАДАТАК 4.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени,

- одредити општи израз за карактеристику преноса $U_O(U)$;
- нацртати карактеристику преноса $U_O(U)$;
- нацртати дијаграм који приказује таласне облике напона U_O и U_A , при побуди кола наизменичним напонам троугаоног таласног облика амплитуде U_m .



РЕШЕЊЕ

а)

Када је улазни напон позитиван важе следеће једначине:

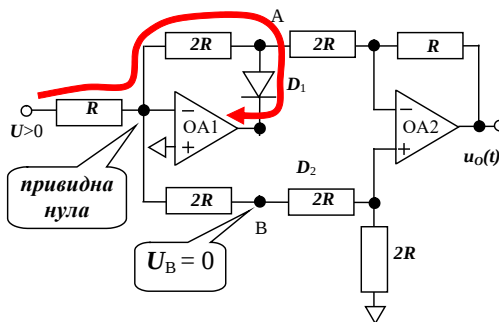
$$U_A = -\frac{2R}{R}U = -2U$$

$$U_B = 0,$$

$$U_O = -\frac{R}{2R}U_A = -\frac{U_A}{2},$$

на основу којих следи:

$$U_O = U, \quad U \geq 0$$



Када је улазни напон негативан важе следеће једначине:

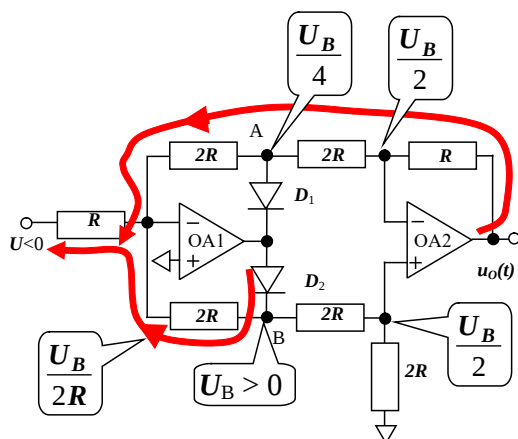
$$\frac{U_B}{2R} + \frac{U_B}{8R} = -\frac{U}{R}$$

$$U_B = -\frac{8}{5}U$$

$$U_O = \frac{U_B}{2} \left(1 + \frac{R}{4R}\right) = \frac{5}{8}U_B,$$

на основу којих следи:

$$U_O = -U, \quad U < 0$$

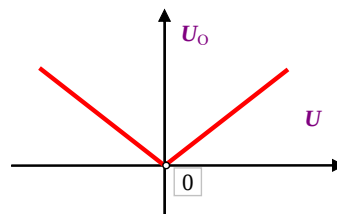


Карактеристика преноса $U_O(U)$ анализираниг кола је одређена изразом:

$$U_O = \begin{cases} U & \text{за } U \geq 0 \\ -U & \text{за } U < 0 \end{cases} = |U|.$$

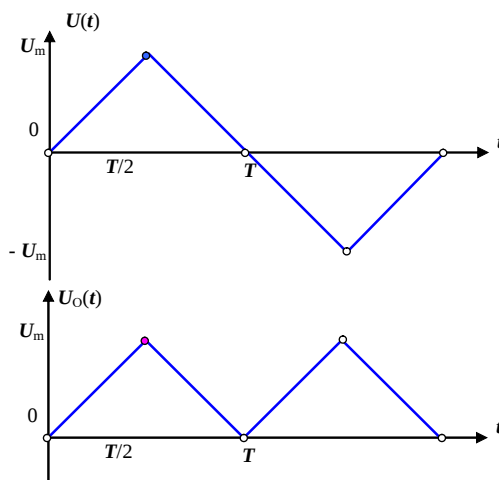
б)

Карактеристика преноса $u_O = f(u)$ приказана је на слици



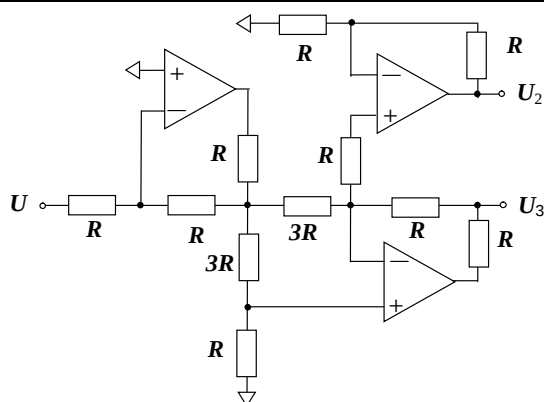
в)

Дијаграм таласних облика напона $u_O(t)$ и $u_A(t)$ при побуди кола наизменичним напонам троугаоног таласног облика амплитуде U_m је приказан на слици.



ЗАДАТАК 1.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени и да се коло налази у линеарном режиму рада, одредити општи израз за вредност напона U_2 и U_3 у зависности од вредности улазног напона U .

**РЕШЕЊЕ**

а)

Савршени операциони појачавач ОП1 делује као инвертујући појачавач чије је појачање једнако:

$$A_1 = -\frac{R_2}{R_1} = -1.$$

Отпорност R_3 делује као унутрашња (излазна) отпорност операционог појачавача бесконачно великог појачања, са негативном повратном спрегом оствареном преко отпорника R_2 .

$$U_1 = A_1 U = -\frac{R_2}{R_1} U = -U.$$

У односу на напон у тачки В, савршени операциони појачавач ОП2 делује као неинвертујући појачавач чије је појачање једнако:

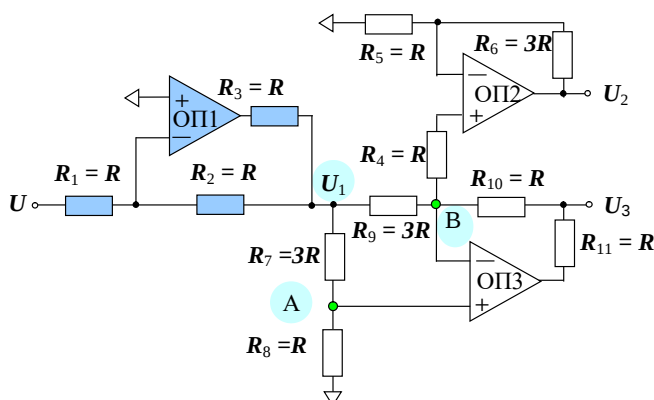
$$A_2 = 1 + \frac{R_6}{R_5} = 4.$$

(улазна струја савршеног појачавача ОП2 је једнака нули $\rightarrow$ пад напона на отпорнику R_4 је једнак нули $\rightarrow$ напон на неинвертујућем улазу појачавача ОП2 једнак је напону U_B).

$$U_2 = A_2 U_B = 4U_B$$

Негативна повратна спрега у колу операционог појачавача ОП3 (остварена преко отпорника R_{10}) обезбеђује да се тачке В и А налазе на истом потенцијалу:

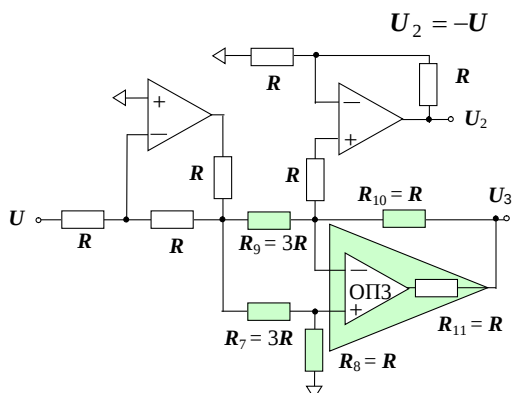
$$U_B = U_A$$



$$U_A = \frac{R_8}{R_8 + R_7} U_1 = \frac{1}{4} U_1.$$

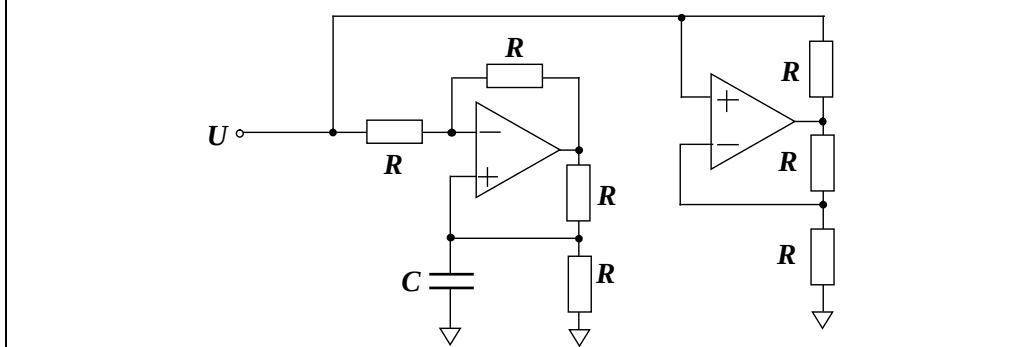
Операциони појачавач ОПЗ представља диференцијални појачавач (појачање једнако 1/3) чији су улази краткоспојени:

$$U_3 = 0$$



ЗАДАТАК 2.Б.

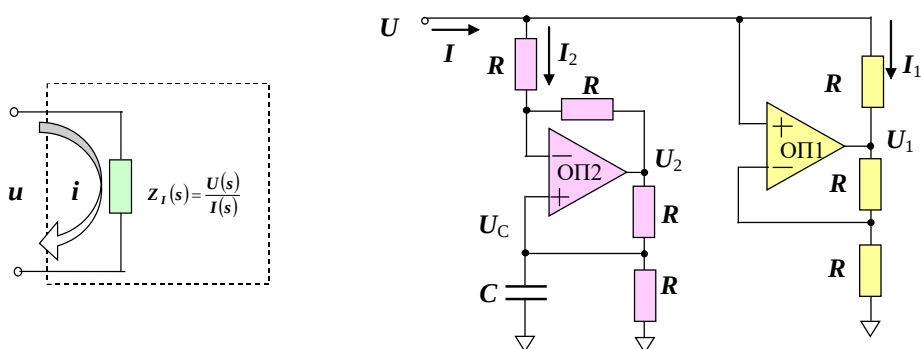
У колу приказаном на слици, примењени операциони појачавачи се могу сматрати савршеним. Одредити израз за вредност улазне импедансе Z_1 .



РЕШЕЊЕ

а)

Улазна импеданса кола је, према дефиницији, једнака количнику комплексних ликова улазног напона U и улазне струје I .



Струја I једнака је збиру струја I_1 и I_2 . Да би се одредила њена вредност потребно је одредити зависност струја I_1 и I_2 од улазног напона U .

За коло операционог појачавача ОП1 важе следеће једначине:

$$I_1 = \frac{U - U_1}{R}.$$

$$U_1 = U \left(1 + \frac{R}{R} \right) = 2U.$$

на основу којих следи:

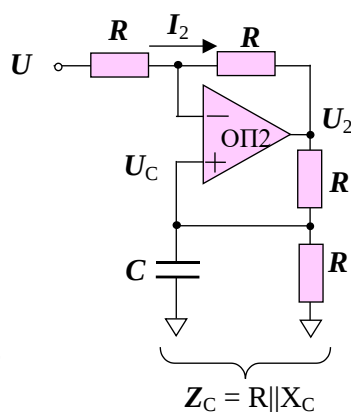
$$I_1 = -\frac{U}{R}, \text{ негативна отпорност}$$

За коло операционог појачавача ОП2 важе следеће релације:

$$I_2 = \frac{U - U_C}{R} = \frac{U_C - U_2}{R}.$$

$$U_2 = U_C \left(1 + \frac{R}{Z_C} \right).$$

где Z_C означава импедансу паралелне везе кондензатора C и отпорника R :



На основу претходних једначина следи:

$$U - U_C = U_C - U_2 = U_C - U_C \left(1 + \frac{R}{Z_C} \right)$$

Сређивањем добија се израз за вредност напона на неинвертујућем улазу појачавача ОП2:

$$U_C = U \frac{Z_C}{Z_C - R},$$

на основу којег се одређује зависност струје I_2 од улазног напона U :

$$I_2 = \frac{U - U_C}{R} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \frac{\frac{R}{1+sRC}}{\frac{R}{1+sRC} - R} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R - R - sRC} = \frac{U}{R} + \frac{U}{sR^2C}.$$

На основу изведених израза за струје I_1 и I_2 добија се израз који описује зависност струје I од улазног напона U :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{sR^2C},$$

на основу којег следи:

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = j\omega R^2 C.$$

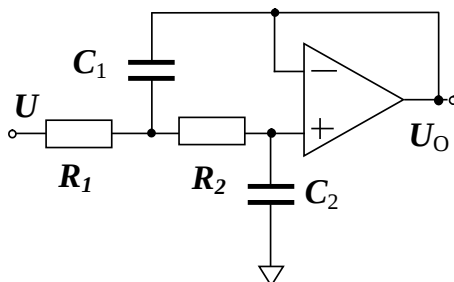
ЗАДАТАК 3.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен,

- а) одредити општи израз за функцију преноса кола.

Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

- б) одредити општи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику;
в) нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику;
г) одредити општи израз за фазну фреквенцијску карактеристику.



РЕШЕЊЕ

- а)

За коло са савршеним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, за назначене смерове струја, важе једначине:

$$U_- = U_+ = U_O,$$

$$I_O = \frac{U_O - U_A}{Z_{C1}}, \quad Z_{C1} = \frac{1}{sC_1}$$

$$I_1 = \frac{U - U_A}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{U_O}{Z_{C2}}, \quad Z_{C2} = \frac{1}{sC_2}$$

$$I_2 = I_1 + I_O,$$

$$U_A = I_2(R_2 + Z_{C2}),$$

На основу ових једначина следи:

$$U_A = I_2(R_2 + Z_{C2}) = \frac{U_O}{Z_{C2}}(R_2 + Z_{C2}), \text{ и}$$

$$\frac{U_O}{Z_{C2}} = \frac{U - U_A}{R_1} + \frac{U_O - U_A}{Z_{C1}}.$$

Сређивањем последњег израза добија се:

$$sR_1C_2U_O = U - U_A + (U_O - U_A)sR_1C_1.$$

Сређивањем:

$$U_O(sR_1C_2 - sR_1C_1) + U_A(1 + sR_1C_1) = U$$

и сменом:

$$U_A = U_O(1 + sC_2R_2),$$

добија се једначина:

$$U_O(sR_1C_2 - sR_1C_1 + s^2R_1C_1R_2C_2 + 1 + sR_1C_1 + sR_2C_2) = U,$$

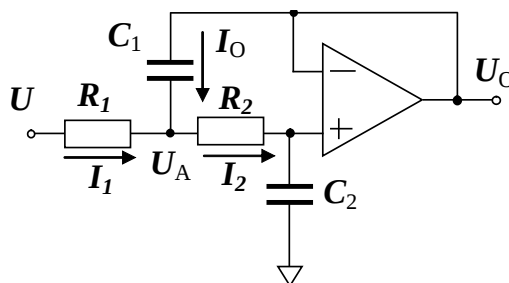
односно:

$$U = U_O[s^2R_1C_1R_2C_2 + sC_2(R_1 + R_2) + 1],$$

на основу које следи израз за функцију преноса кола:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2R_1C_1R_2C_2 + sC_2(R_1 + R_2) + 1}.$$

б)



Ако је $R_1 = R_2 = R$, и $C_1 = C_2 = C$, функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{1}{(sRC)^2 + 2sRC + 1} = \frac{1}{(1 + sRC)^2}$$

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола одређена је изразом:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)^2} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика одређена је једначином:

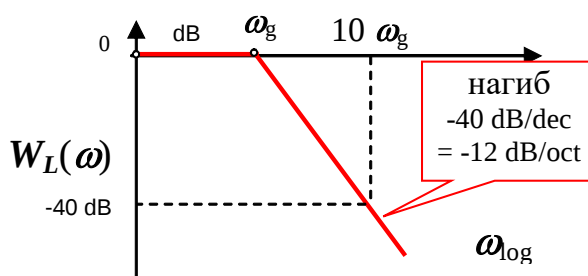
$$W(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

в)

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика једнака је:

$$W_L(dB) = -20 \log[1 + (\omega RC)^2]$$

Графички приказ асимптотске логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике посматраног кола приказан је на слици.



Преломна учестаност једнака је:

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

г)

Фазна фреквенцијска карактеристика посматраног кола је одређена једначином:

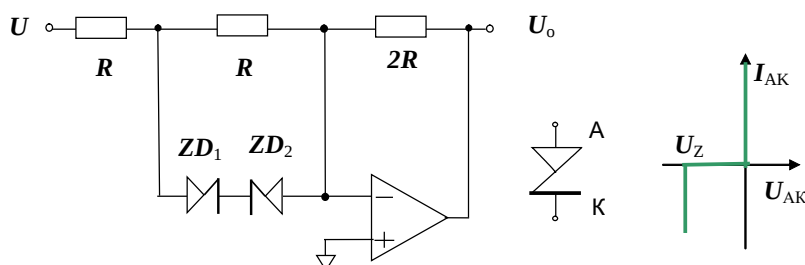
$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega CR - \arctg \omega CR$$

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega CR$$

ЗАДАТАК 4.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су ZD_1 и ZD_2 савршене Ценер-диоде (динамичка отпорност у режиму пробоја и пад напона при директној поларизацији су занемарљиво мали), као и да је операциони појачавач савршен:

- одредити општи израз за вредност напона U_o на излазу кола у зависности од вредности улазног напона U , напона пробоја U_Z ;
- израчунати вредност излазног напона ако је $U = 7,5 \text{ V}$, $U_Z = 2.5 \text{ V}$;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_o(U)$;
- нацртати одзив кола на побуду наизменичним периодичним сигналом симетричног троугаоног облика амплитуде $7,5 \text{ V}$.

**РЕШЕЊЕ**

а)

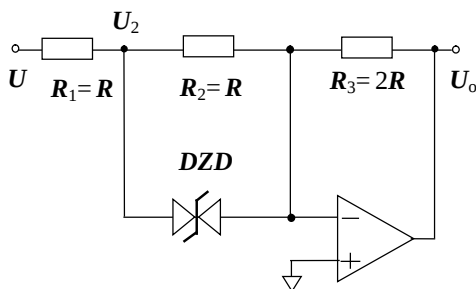
Могућа су два стања у колу, зависно од стања двоструке симетричне Ценер-диоде DZD:

- ❖ диода DZD не води,
- ❖ диода DZD води.

Када је улазни напон једнак нули, излазни напон је такође једнак нули: карактеристика улаз-излаз пролази кроз координатни почетак.

Са становишта поларитета улазног напона U , структура кола је симетрична, па је и улазно-излазна карактеристика кола симетрична у односу на координатни почетак.

За мале вредности улазног напона U , струја кроз грану кола у којој се налазе Ценер-диоде је једнака нули. Коло се понаша као инвертујући појачавач:



$$A = -\frac{R_3}{R_1 + R_2} = -1.$$

Овакво стање постоји у колу све док је улазни напон мањи од вредности при којој је пад напона на отпорнику R_2 једнак напону пробоја двојне Ценер-диоде U_Z .

$$U_2(U_G) = \frac{U_G}{R_1 + R_2} R_2 = U_Z.$$

$$U_G = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) U_Z = 2U_Z$$

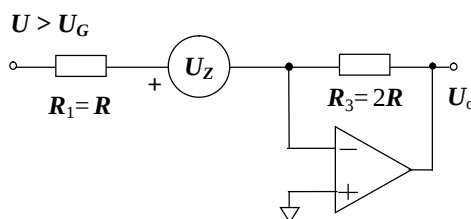
$$U_O = -U \quad \text{за} \quad |U| \leq U_G$$

Када је улазни напон позитиван и по интензитету већи од граничне вредности улазна струја је једнака:

$$I = \frac{U - U_Z}{R_1},$$

па је напон U_O на излазу појачавача једнак:

$$U_O = -R_3 I = -\frac{R_3}{R_1} (U - U_Z) = -2(U - U_Z).$$

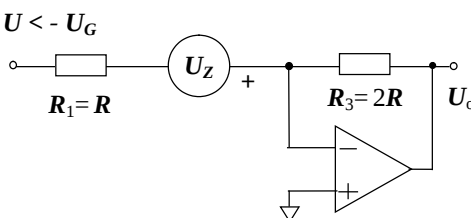


Када је улазни напон негативан, а по интензитету већи од граничне вредности улазна струја је једнака:

$$I = \frac{U + U_Z}{R_1},$$

па је напон U_O на излазу појачавача једнак:

$$U_O = -R_3 I = -\frac{R_3}{R_1} (U + U_Z) = -2(U + U_Z).$$



Карактеристика преноса $U_O(U)$ посматраног кола је одређена изразом:

$$U_O = \begin{cases} -2U + 2U_Z & \text{за } U > 2U_Z \\ -U & \text{за } |U| \leq U_G \\ -2U - 2U_Z & \text{за } U < -2U_Z \end{cases}.$$

б)

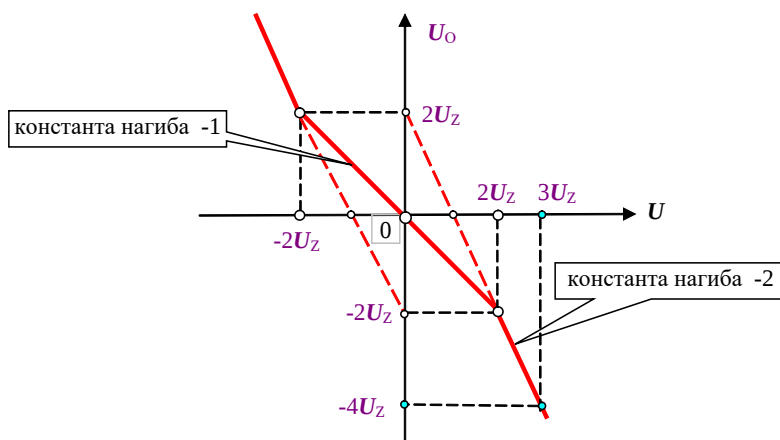
За задате вредности:

$$U = 7,5 \text{ V} > U_G = 2U_Z = 5 \text{ V},$$

$$U_O(7,5V) = -10V.$$

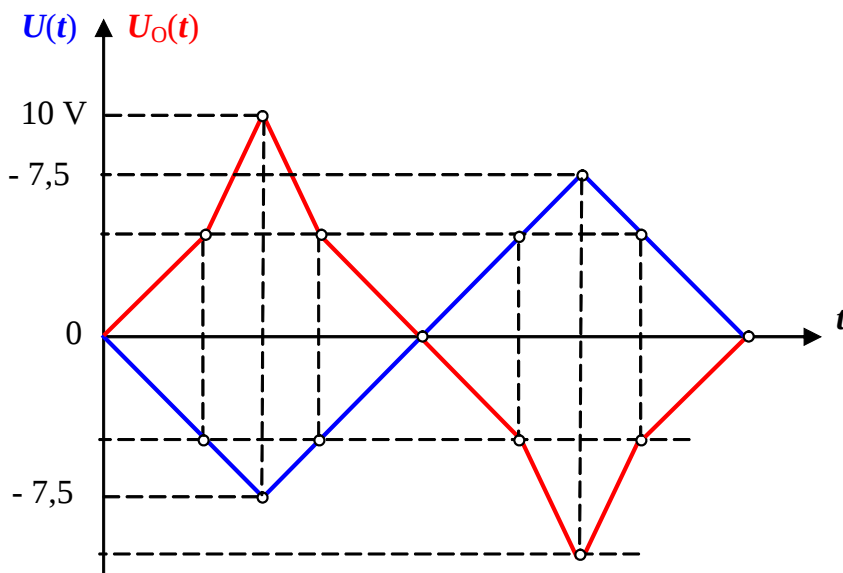
в)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола је дат на слици.



г)

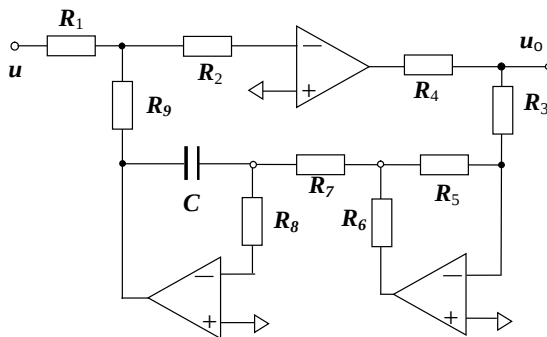
Одзив кола на побуду наизменичним периодичним сигналом симетричног троугаоног таласног облика амплитуде $7,5V$ је приказан на слици.



ЗАДАТАК 1.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- а) одредити општи израз за функцију преноса;
- б) нацртати логаритамску асимптотску фреквенцијску карактеристику.

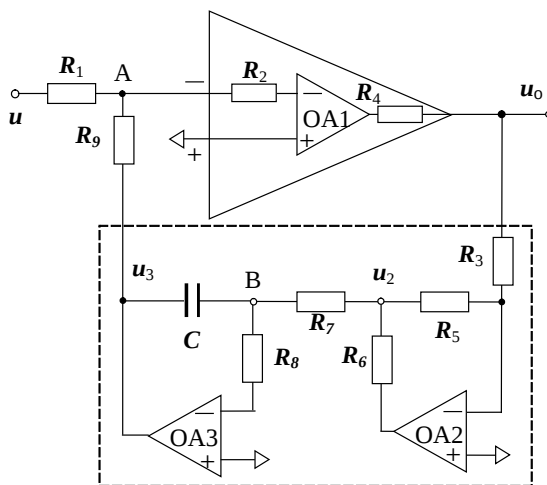


РЕШЕЊЕ

а)

Приказано коло се може представити као операциони појачавач великог појачања (OA₁) са негативном повратном спрегом оствареном преко мреже која садржи појачаваче OA₂ и OA₃.

Улазна струја савреног појачавача је једнака нули па се може занемарити пад напона на отпорности R_2 . Тачка А се налази на нултом потенцијалу. Отпорност R_4 делује као излазна отпорност појачавача са негативном повратном спрегом. Бесконечно велико појачање савреног операционог појачавача обезбеђује да се присуство отпорности R_4 може занемарити при одређивању излазног напона.



Коло повратне спреге се састоји од редне (каскадне) везе инвертујућег појачавача (OA₂) и инвертујућег интегратора (OA₃):

$$U_2 = -\frac{R_5}{R_3} U_0 \text{ (отпорност } R_6 \text{ делује као излазна отпорност појачавача OA}_2\text{),}$$

$$U_3 = -\frac{1}{sR_7C}U_2 \text{ (тачка В налази се на нултом потенцијалу),}$$

Када се овај део кола посматра као мрежа са два приступа за коју важи правило алгебре преноса:

$$U_3 = W(s)U_0,$$

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s),$$

$$W_1(s) = -\frac{R_5}{R_3}, \quad W_2(s) = -\frac{1}{sR_7C},$$

следи:

$$W(s) = \frac{R_5}{sR_3R_7C}.$$

Анализирано коло се своди на систем приказан на слици, за који важи ($U_A=0$):

$$\frac{U(s)}{R_1} + \frac{U_3(s)}{R_9} = 0,$$

(улазна струја савреног операционог појачавача је једнака нули).

$$\frac{U(s)}{R_1} + \frac{W(s)U_0(s)}{R_9} = 0,$$

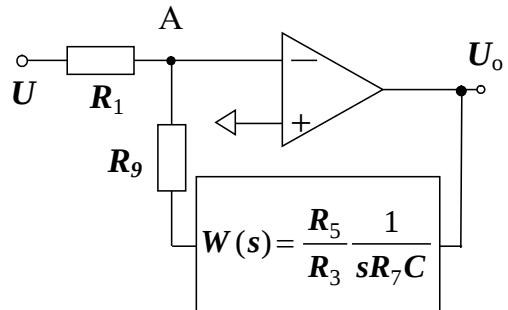
$$U_0(s) = -\frac{R_9}{W(s)R_1}U(s).$$

Према томе, функција преноса система у целини је:

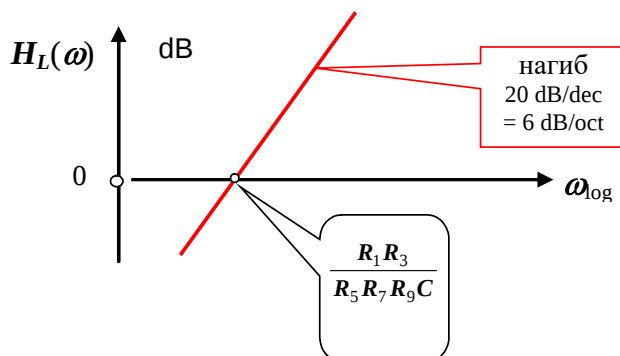
$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U(s)} = -s \frac{R_3R_7R_9}{R_1R_5}C$$

б)

Графички приказ функције $H_L(\omega)$ је дат на слици.



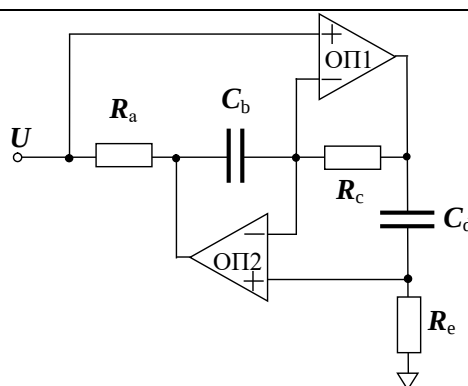
Посматрано коло делује као савршени инвертујући диференцијатор.



ЗАДАТАК 2.А.

У колу приказаном на слици, примењени су операциони појачавачи, ОП1 и ОП2, који се могу сматрати савршеним.

Одредити израз за вредност улазне импедансе Z_1



РЕШЕЊЕ

За коло са савршеним операционим појачавачима у линеарним условима рада, важе једначине:

$$U_b = U, \quad U_e = U_b,$$

$$U_1 = \frac{Z_d + R_e}{R_e} U_e, \quad Z_d = \frac{1}{sC_d}$$

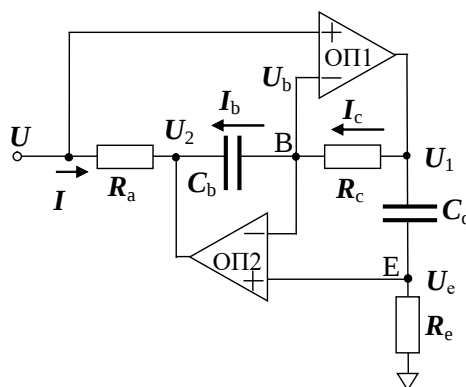
$$I_c = \frac{U_1 - U_b}{R_c},$$

$$I_b = I_c,$$

$$U_2 = U_b - Z_b I_b, \quad Z_b = \frac{1}{sC_b}$$

$$I = \frac{U - U_2}{R_a},$$

Сређивањем се добија:



$$U_2 = U + U \frac{Z_b}{R_c} \left(1 - \frac{Z_d + R_e}{R_e} \right) = U \left(1 - \frac{Z_b Z_d}{R_c R_e} \right)$$

Улазна струја I је једнака:

$$I = \frac{U - U_2}{R_a} = \frac{Z_b Z_d}{R_a R_c R_e} U,$$

одакле следи:

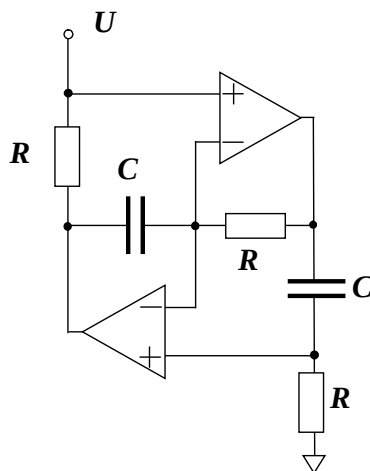
$$Z_i = \frac{U}{I} = \frac{R_a R_c R_e}{Z_b Z_d},$$

$$Z_i(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R_a R_c R_e C_b C_d s^2.$$

$$Z_i(\omega) = R_a R_c R_e C_b C_d \omega^2.$$

Коло приказано на слици се понаша као фреквенцијски зависна негативна отпорност.

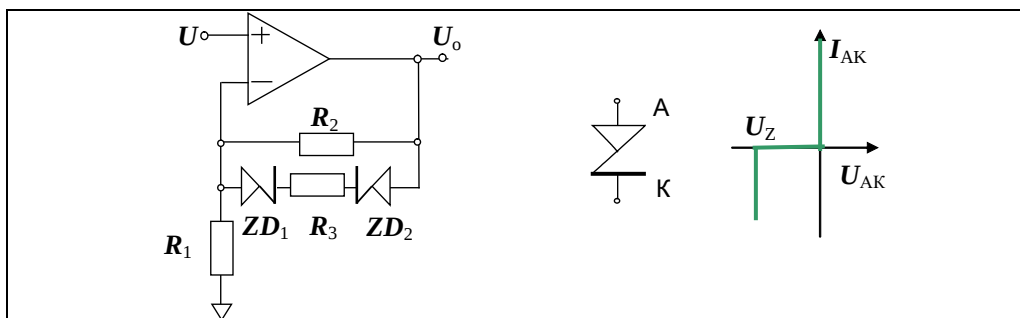
$$R_e = -R^3 \omega^2 C^2$$



ЗАДАТАК 3.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су ZD_1 и ZD_2 савршене Ценер-диоде (динамичка отпорност у режиму пробоја и пад напона при директној поларизацији су занемарљиво мали), као и да је операциони појачавач савршен

- одредити општи израз за вредност напона U_O на излазу кола у зависности од вредности улазног напона U , напона пробоја U_Z и односа отпорности R_1 , R_2 и R_3 ;
- израчунати вредност излазног напона ако је $U = 5 \text{ V}$, $U_Z = 2.5 \text{ V}$ и $R_1 = R_2 = R_3 = R$;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_O(U)$.



РЕШЕЊЕ

а)

Са становишта поларитета улазног напона U , структура кола је симетрична, па је и улазно-излазна карактеристика кола симетрична у односу на координатни почетак - функција $U_o(U)$ је непарна:

$$U_o(-U) = -U_o(U) .$$

Довољно је анализирати одзив кола на побуду ненегативним напонам.

За мале вредности улазног напона U , струја кроз грану кола у којој се налазе Ценер-диоде је једнака нули. Коло се понаша као неинвертујући појачавач:

$$U_o = U \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

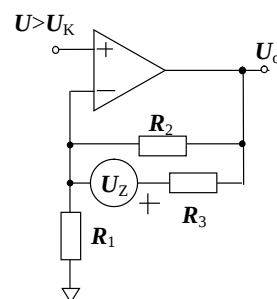
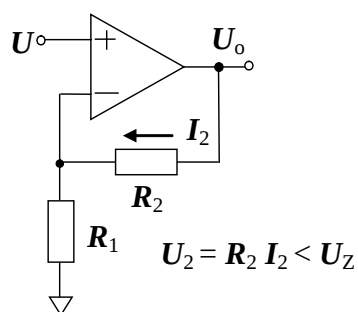
Овакав модел се може применити уколико је пад напона на отпорнику R_2 мањи од напона пробоја двојне Ценер-диоде, U_Z . Вредност улазног напона U_K која дефинише границу ове области одређена је условом:

$$U_2 = R_2 I_2 = R_2 \frac{U_K}{R_1} = U_Z ,$$

односно:

$$U_K = U_Z \frac{R_1}{R_2} .$$

Еквивалентно коло које одговара стању када је улазни напон U већи од напона U_K је приказано на слици.

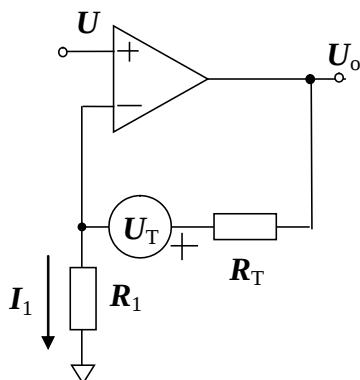


Применом Тевененове теореме, добија се једноставнији модел, за који важи:

$$U_T = U_Z \frac{R_2}{R_2 + R_3}, R_T = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1},$$

$$U_O = U + U_T + R_T I_1.$$



Према томе, овај део карактеристике, за $U \geq U_K$, одређен је једначином:

$$U_O = U \left(1 + \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1} \right) + U_T; U \geq U_K,$$

$$U_O = \begin{cases} U \left(1 + \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1} \right) + U_T; U > U_K \\ U \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right); |U| \leq U_K \\ U \left(1 + \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1} \right) - U_T; U < -U_K \end{cases}, U_T = U_Z \frac{R_2}{R_2 + R_3}, U_K = U_Z \frac{R_1}{R_2}$$

б)

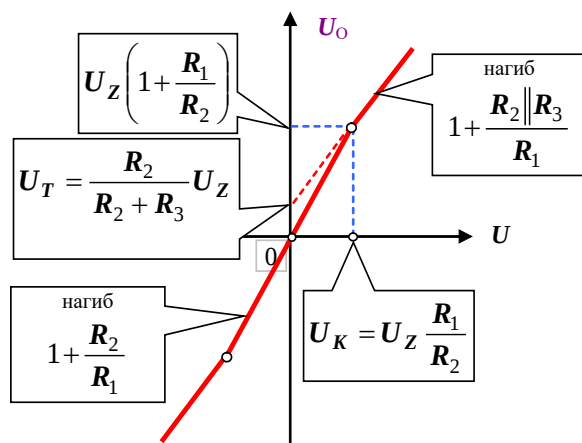
За задате вредности ($U = 5 \text{ V}$, $U_Z = 2.5 \text{ V}$ и $R_1 = R_2 = R_3 = R$) добија се:

$$U_K = U_Z = 2.5 \text{ V}, U_T = 1.25 \text{ V},$$

$$U_O(5 \text{ V}) = 8.75 \text{ V}.$$

в)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола је дат на слици.

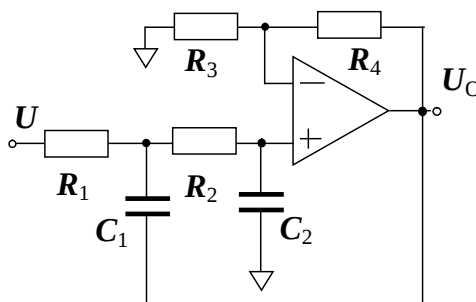


ЗАДАТАК 4.А.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен:

- а) одредити општи израз за функцију преноса кола.
Ако је $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

- б) одредити општи израз за фреквенцијску карактеристику;
в) одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног и излазног напона.


РЕШЕЊЕ

а)

За коло са савршеним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, за назначене смерове струја, важе једначине:

$$U_O = U_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = k U_2, \quad k = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)$$

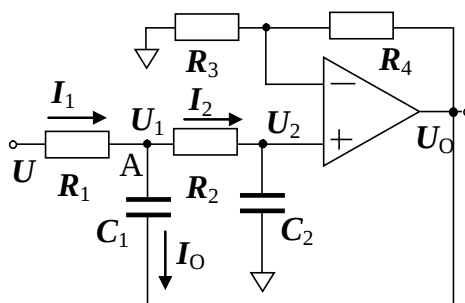
$$I_1 = I_O + I_2,$$

$$I_1 = \frac{U - U_1}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2}, \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2},$$

$$I_O = \frac{U_1 - U_O}{Z_1}, \quad Z_1 = \frac{1}{sC_1},$$

$$U_1 = U_2 \frac{R_2 + Z_2}{Z_2},$$



На основу ових једначина следи:

$$\frac{U - U_1}{R_1} = \frac{U_1 - U_O}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2}.$$

Сређивањем последњег израза добија се једначина:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{Z_1} - \frac{U_O}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2},$$

из које следи:

$$\begin{aligned}\frac{U}{R_1} &= U_2 \frac{R_2 + Z_2}{R_1 Z_2} + U_2 \frac{R_2 + Z_2}{Z_1 Z_2} - U_2 \frac{k}{Z_1} + U_2 \frac{1}{Z_2} = \\ &= \frac{U_2}{R_1} \left[\frac{R_2 + Z_2}{Z_2} + R_1 \frac{R_2 + Z_2}{Z_1 Z_2} - \frac{k R_1}{Z_1} + \frac{R_1}{Z_2} \right],\end{aligned}$$

$$U = U_2 \left[\frac{R_2 + Z_2}{Z_2} + R_1 \frac{R_2 + Z_2}{Z_1 Z_2} - \frac{k R_1}{Z_1} + \frac{R_1}{Z_2} \right],$$

Даљим сређивањем добија се једначина:

$$\begin{aligned}U &= \frac{U_O}{k} \left[1 + \frac{R_2}{Z_2} + \frac{R_1 R_2}{Z_1 Z_2} + \frac{R_1}{Z_1} - \frac{k R_1}{Z_1} + \frac{R_1}{Z_2} \right] = \\ &= \frac{U_O}{k} [1 + s R_2 C_2 + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s R_1 C_1 (1 - k) + s R_1 C_2],\end{aligned}$$

на основу које следи израз за функцију преноса кола:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{k}{1 + s[R_1 C_1 (1 - k) + C_2 (R_1 + R_2)] + s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}.$$

б)

Ако је $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, и $C_1 = C_2 = C$, функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{2}{1 + sRC + (sRC)^2}.$$

в)

Полазећи од израза за функцију преноса кола добија се једначина:

$$(sRC)^2 U_O(s) + sRC U_O(s) + U_O(s) = 2U(s),$$

односно:

$$(RC)^2 s^2 U_O(s) + RCs U_O(s) + U_O(s) = 2U(s).$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

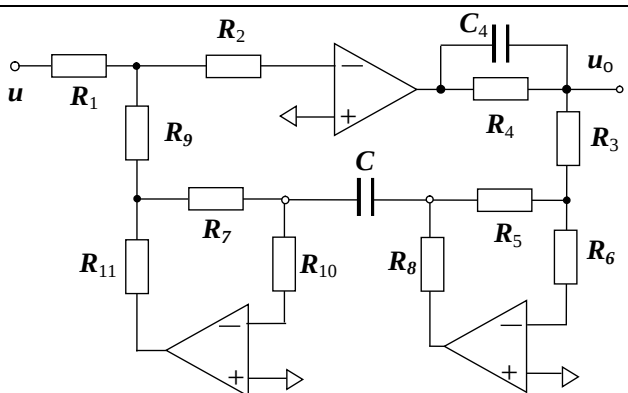
добија се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

$$(RC)^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du_0}{dt} + u_0(t) = 2u(t).$$

ЗАДАТАК 1.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су операциони појачавачи савршени:

- одредити општи израз за функцију преноса;
- нацртати логаритамску асимптотску фреквенцијску карактеристику.


РЕШЕЊЕ

а)

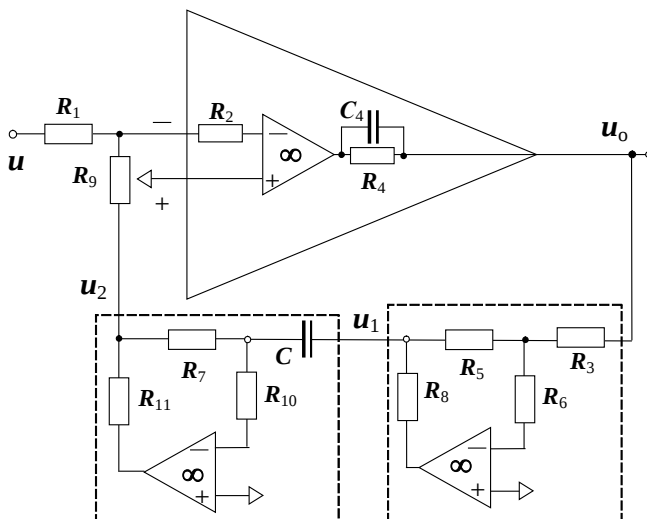
Посматрано коло се може посматрати као систем са негативном повратном спрегом приказан на слици.

$$W_1(s) = \frac{U_1}{U_0} = -\frac{R_5}{R_3},$$

$$W_2(s) = \frac{U_2}{U_1} = -sR_7C,$$

$$\frac{U(s)}{R_1} + \frac{W_1(s)W_2(s)U_0(s)}{R_9} = 0,$$

$$U_0(s) = -\frac{R_9}{W_1(s)W_2(s)R_1} U(s),$$



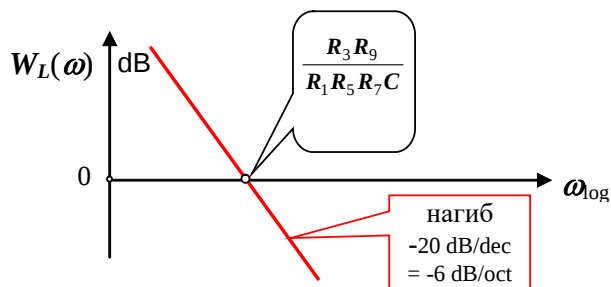
$$W(s) = \frac{U_0(s)}{U(s)} = -\frac{R_3R_9}{sR_1R_5R_7C} = -\frac{1}{sR_EC},$$

$$R_E = \frac{R_1R_5R_7}{R_3R_9}.$$

в)

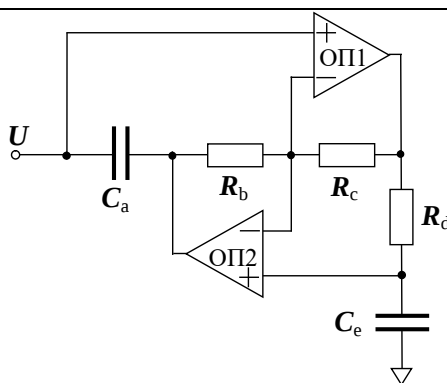
Графички приказ функције $W_L(\omega)$ је дат на слици.

Посматрано коло делује као савршени инвертујући интегратор.

**ЗАДАТАК 2.Б.**

У колу приказаном на слици, примењени операциони појачавачи, ОП1 и ОП2, се могу сматрати савршеним.

Одредити израз за вредност улазне импедансе Z_I

**РЕШЕЊЕ**

а)

За коло са савршеним операционим појачавачима у линеарним условима рада, важе једначине:

$$U_b = U, \quad U_b = U_e,$$

$$U_1 = \frac{R_d + Z_e}{Z_e} U_e, \quad Z_e = \frac{1}{sC_e}$$

$$I_c = \frac{U_1 - U_b}{R_c},$$

$$I_b = I_c,$$

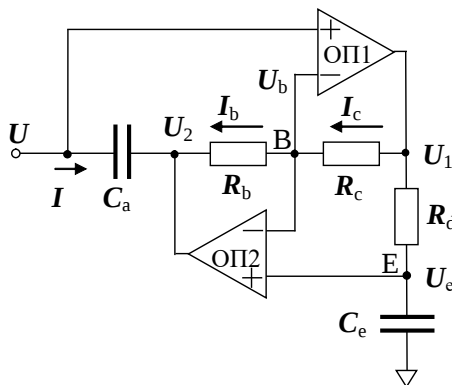
$$U_2 = U_b - R_b I_b,$$

$$I = \frac{U - U_2}{Z_a}, \quad Z_a = \frac{1}{sC_a}$$

$$Z_i = \frac{U}{I}$$

Сређивањем се добија:

$$U_2 = U + U \frac{R_b}{R_c} \left(1 - \frac{R_d + Z_e}{Z_e} \right) = U \left(1 - \frac{R_b R_d}{R_c Z_e} \right)$$



Улазна струја I једнака је:

$$I = \frac{U - U_2}{Z_a} = \frac{R_b R_d}{Z_a R_c Z_e} U,$$

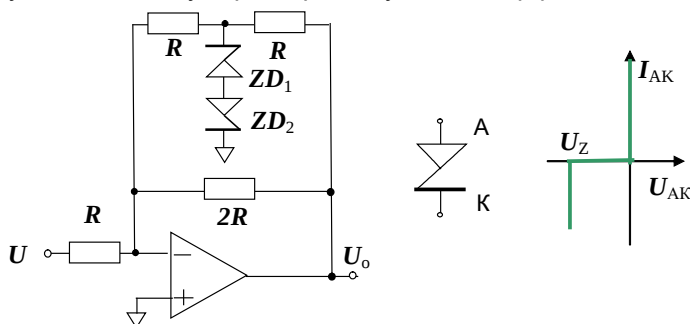
одакле следи:

$$Z_i = \frac{U}{I} = \frac{R_c}{C_a R_b R_d C_e s^2}$$

ЗАДАТАК 3.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да су ZD_1 и ZD_2 савршене Ценер-диоде (динамичка отпорност у режиму пробоја и пад напона при директној поларизацији су занемарљиво мали), као и да је операциони појачаваач савршен:

- одредити општи израз за вредност напона U_o на излазу кола у зависности од вредности улазног напона U , напона пробоја U_Z и отпорности у колу;
- израчунати вредност излазног напона ако је $U = 7,5 \text{ V}$, $U_Z = 2,5 \text{ V}$;
- нацртати улазно-излазну карактеристику кола, $U_o(U)$.



РЕШЕЊЕ

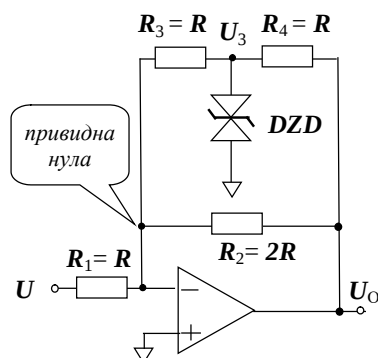
а)

Могућа су два стања у колу, зависно од стања двоструке симетричне Ценер-диоде DZD:

- ❖ диода DZD не води,
- ❖ диода DZD води.

Са становишта поларитета улазног напона U , структура кола је симетрична, функција $U_o(U)$ је непарна:

$$U_o(-U) = -U_o(U).$$



■ За мале вредности улазног напона U , струја кроз грану кола у којој се налазе Ценер-диоде једнака је нули. Коло се понаша као инвертујући појачавач:

$$A_1 = -\frac{R_2 \parallel (R_3 + R_4)}{R_1} = -1.$$

Овакво стање постоји у колу све док је улазни напон мањи од вредности при којој је пад напона на отпорнику R_3 једнак напону пробоја двојне Ценер-диоде U_Z .

$$|U_3(U_G)| = \left| \frac{U_O(U_G)}{R_3 + R_4} R_3 \right| = U_Z.$$

$$U_G = \left(1 + \frac{R_2 + R_4}{R_3}\right) \frac{R_1}{R_2} U_Z = 2U_Z$$

■ Стање у колу када је улазни напон позитиван и по интензитету већи од граничне вредности $2U_Z$ приказано је на слици. Применом првог Кирхофовог закона добија се:

$$\frac{U}{R_1} = \frac{U_Z}{R_3} - \frac{U_O}{R_2}$$

$$U_O = -\frac{R_2}{R_1} U + \frac{R_2}{R_3} U_Z = -2(U - U_Z), U > 2U_Z.$$

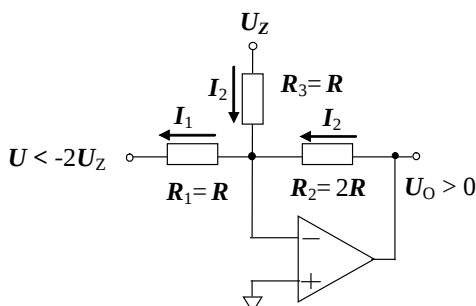
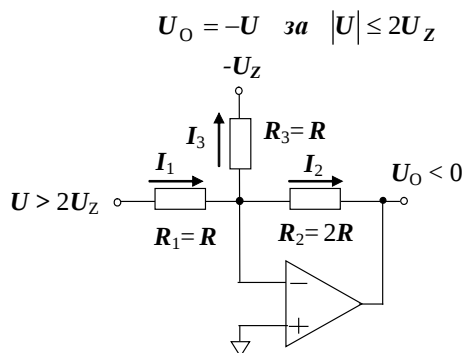
■ Стање у колу када је улазни напон негативан, а по интензитету већи од граничне вредности $2U_Z$ приказано је на слици. Применом првог Кирхофовог закона добија се:

$$\frac{U}{R_1} = -\frac{U_Z}{R_3} - \frac{U_O}{R_2}.$$

$$U_O = -\frac{R_2}{R_1} U - \frac{R_2}{R_3} U_Z = -2(U + U_Z), U < -2U_Z$$

Карактеристика преноса $U_O(U)$ посматраног кола је одређена изразом:

$$U_O = \begin{cases} -2U + 2U_Z & \text{за } U > 2U_Z \\ -U & \text{за } |U| \leq U_G \\ -2U - 2U_Z & \text{за } U < -2U_Z \end{cases}.$$



б)

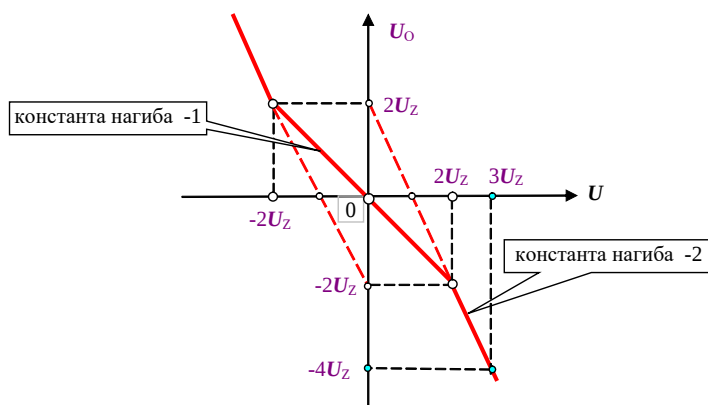
За задате вредности:

$$U = 7,5 \text{ V} > U_G = 2U_Z = 5 \text{ V},$$

$$U_O(7,5\text{V}) = -10 \text{ V}.$$

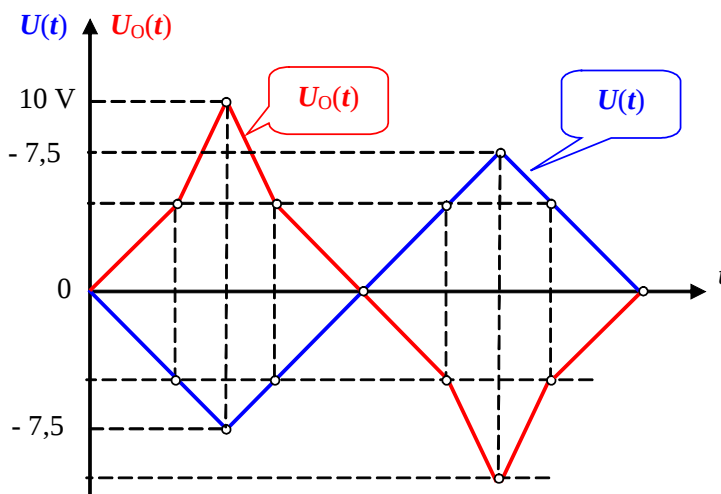
в)

Графички приказ улазно-излазне карактеристике кола је дат на слици.



г)

Одзив кола на побуду наизменичним периодичним сигналом симетричног троугаоног таласног облика амплитуде 7,5 V је приказан на слици.



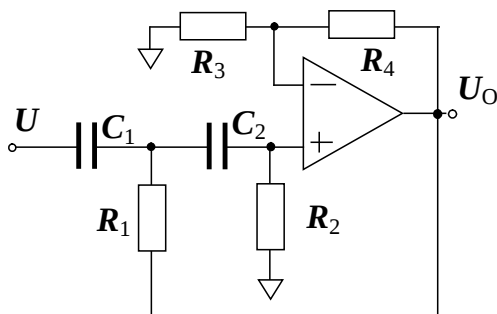
ЗАДАТАК 4.Б.

За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен:

- а) одредити општи израз за функцију преноса кола.

Ако је $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, и $C_1 = C_2 = C$:

- б) одредити општи израз за фреквенцијску карактеристику;
в) одредити диференцијалну једначину која описује однос улазног и излазног напона.



РЕШЕЊЕ

За коло на слици, са идеалним операционим појачавачем у линеарном режиму рада, важе једначине:

$$U_O = U_C \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = k U_C, \quad k = 1 + \frac{R_4}{R_3},$$

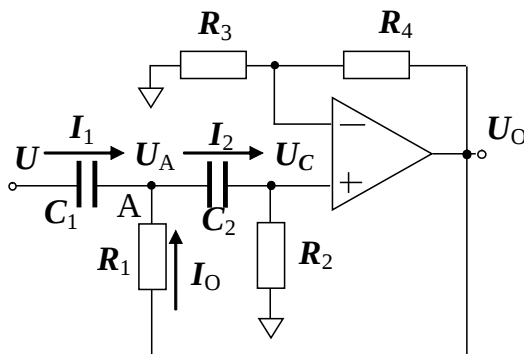
$$I_1 + I_O = I_2,$$

$$I_1 = \frac{U - U_A}{Z_1}, \quad Z_1 = \frac{1}{sC_1}$$

$$I_2 = \frac{U_A}{Z_2 + R_2}, \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2}$$

$$I_O = \frac{U_O - U_A}{R_1},$$

$$U_C = I_2 R_2.$$



На основу ових једначина може се одредити израз за вредност напона U_A у зависности од вредности излазног напона U_O :

$$U_A = I_2 (R_2 + Z_2) = \frac{U_C}{R_2} (R_2 + Z_2).$$

Применом првог Крхофовог закона на чвор А добија се:

$$\frac{U - U_A}{Z_1} = \frac{U_A - U_O}{R_1} + \frac{U_C}{R_2},$$

$$\frac{U}{Z_1} = \frac{U_A}{Z_1} + \frac{U_A}{R_1} - k \frac{U_C}{R_1} + \frac{U_C}{R_2} =$$

$$= U_A \frac{R_1 + Z_1}{R_1 Z_1} + \frac{U_C}{R_1 R_2} (R_1 - k R_2) = \frac{U_C}{R_1 R_2 Z_1} [(R_1 + Z_1)(R_2 + Z_2) + Z_1 (R_1 - k R_2)]$$

Сређивањем последњег израза добија се једначина:

$$R_1 R_2 U = U_C \left[\frac{1 + s R_1 C_1}{s C_1} \frac{1 + s R_2 C_2}{s C_2} + \frac{R_1 - k R_1}{s C_1} \right],$$

односно:

$$U s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 = \frac{U_O}{k} \left[1 + s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + s R_1 C_1 + s R_2 C_2 + s C_2 (R_1 - k R_2) \right],$$

на основу које следи израз за функцију преноса кола:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = k \frac{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + s[R_1(C_1 + C_2) + R_2 C_2(1 - k)] + 1}.$$

Анализирано коло представља филтер другог реда, пропусник високих учестаности.

б)

Ако за вредности елемената у колу важи: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, и $C_1 = C_2 = C$, функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{2(sRC)^2}{1 + sRC + (sRC)^2}$$

в)

На основу израза за функцију преноса кола следи:

$$(sRC)^2 U_O(s) + sRC U_O(s) + U_O(s) = 2(sRC)^2 U(s),$$

односно:

$$(RC)^2 s^2 U_O(s) + RC s U_O(s) + U_O(s) = 2(RC)^2 s^2 U(s).$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

добија се диференцијална једначина која описује однос улазног, $u(t)$, и излазног напона, $u_O(t)$:

$$(RC)^2 \frac{d^2 u_O}{dt^2} + RC \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = 2 \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

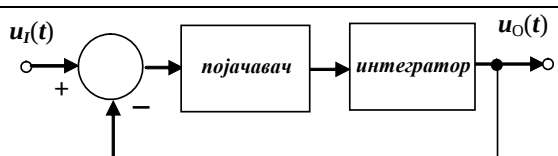
2.

ЗАДАЦИ СА КОЛОКВИЈУМА

2.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

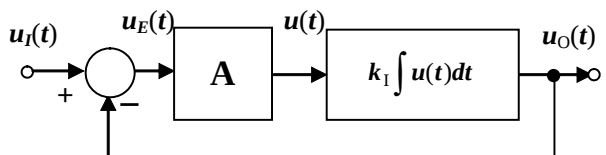
1. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел система приказаног на слици.

Одредити општи израз за фреквенцијску карактеристику и нацртати електрично коло које одговара оваквом моделу.



РЕШЕЊЕ

Према ознакама на слици, за посматрани систем важе следеће једначине:



$$u_E(t) = u_I(t) - u_O(t),$$

$$u(t) = A u_E(t),$$

$$u_O = k_I \int_0^t u(t) dt + U_0,$$

у којима A означава појачање појачавача, а k_I је константа преноса савршеног интегратора. Диференцирањем последње једначине добија се:

$$\frac{du_O}{dt} = k_I A [u_I(t) - u_O(t)],$$

односно:

$$\tau \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = u_I(t), \quad \tau = \frac{1}{k_I A}.$$

Сменом оператора диференцирања по времену оператором s :

$$\frac{du_O}{dt} \leftrightarrow sU_O(s), u_O(t) \leftrightarrow U_O(s), U_I(s) \leftrightarrow u_I(t),$$

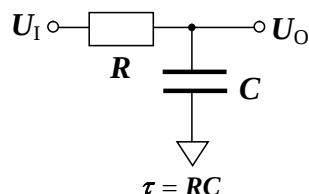
добија се израз за функцију преноса кола:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{1}{1 + s\tau},$$

добија се израз за фреквенцијску карактеристику:

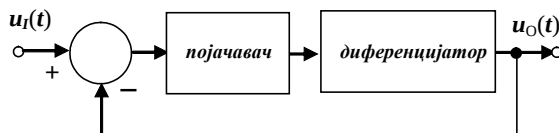
$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U_I(j\omega)} = W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

Електрични еквивалент посматраног система је RC -коло приказано на слици.



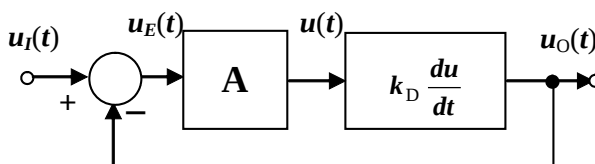
2. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел система приказаног на слици.

Одредити општи израз за фреквенцијску карактеристику и нацртати електрично коло које одговара оваквом моделу.



РЕШЕЊЕ

Према ознакама на слици за посматрани систем важе следеће једначине:



$$u_E(t) = u_I(t) - u_O(t),$$

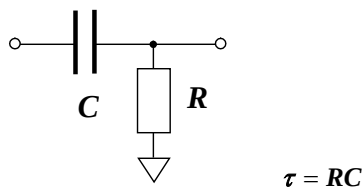
$$u(t) = Au_E(t),$$

$$u_O = k_D \frac{du}{dt},$$

у којима A означава појачање појачавача, а k_D је константа преноса савршеног диференцијатора. Сређивањем се добија диференцијална једначина:

$$u_O(t) + \tau \frac{du_O}{dt} = \tau \frac{du_I}{dt}, \tau = k_D A,$$

на основу које следи:



$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U_I(j\omega)} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}.$$

Електрични еквивалент посматраног система је **CR**-коло приказано на слици.

3. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел система чија је фреквенцијска карактеристика одређена изразом:

$$W(j\omega) = k \frac{j\omega T_1 - 1}{j\omega T_2 + 1}.$$

РЕШЕЊЕ

Сменом $j\omega = s$ долази се до израза за функцију преноса посматраног система:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = k \frac{sT_1 - 1}{sT_2 + 1},$$

на основу којег следи:

$$T_2 s U_O(s) + U_O(s) = k T_1 s U(s) - k U(s).$$

Сменом оператора s оператором диференцирања по времену:

$$sU(s) \leftrightarrow \frac{du}{dt}, \quad U(s) \leftrightarrow u(t), \quad sU_O(s) \leftrightarrow \frac{du_O}{dt}, \quad U_O(s) \leftrightarrow u_O(t),$$

добива се диференцијална једначина која описује однос излазног, $u_O(t)$, и улазног напона, $u(t)$:

$$T_2 \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = k T_1 \frac{du}{dt} - k u(t).$$

4. Написати изразе за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику система чија је фреквенцијска карактеристика одређена изразом:

$$W(j\omega) = k \frac{j\omega T_1 - 1}{j\omega T_2 + 1},$$

и нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику ако је $T_1 = T_2$.

РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = W_0 \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)},$$

$$W_1(j\omega) = j\omega T_1 - 1 = W_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$W_1(\omega) = |W_1(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega T_1)^2}$$

$$\varphi_1(\omega) = \arg W_1(j\omega) = \arctg(-\omega T_1)$$

$$W(\omega) = W_0 \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)},$$

$$W_0(j\omega) = k$$

$$W_2(j\omega) = j\omega T_2 + 1 = W_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}$$

$$W_2(\omega) = |W_2(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg W_2(j\omega) = \arctg(\omega T_2)$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика система је:

$$W(\omega) = k \sqrt{\frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T_2)^2}}.$$

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика је дефинисана једначином:

$$W_L(\omega) = 20 \log W(\omega).$$

Фазна фреквенцијска карактеристика посматраног система је:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega).$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2.$$

Када је:

$$T_1 = T_2 = T,$$

следи:

$$W(\omega) = k.$$

Амплитуда сигнала на излазу кола не зависи од учестаности.

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega T$$



5. Написати изразе за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику система чија је функција преноса одређена изразом:

$$W(s) = \frac{s^2 T_1 T_2}{s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2) + 1},$$

и нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику ако је $T_1 = T_2$.

РЕШЕЊЕ

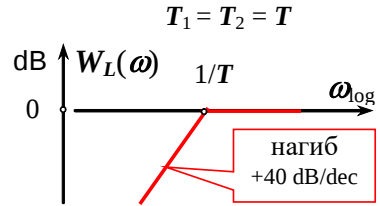
$$W(s) = \frac{sT_1}{1+sT_1} \cdot \frac{sT_2}{1+sT_2},$$

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T_1}{1+j\omega T_1} \cdot \frac{j\omega T_2}{1+j\omega T_2} = W_1(j\omega)W_2(j\omega),$$

$$W(\omega) = W_1(\omega)W_2(\omega) = \frac{\omega T_1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} \cdot \frac{\omega T_2}{\sqrt{1+(\omega T_2)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2,$$

$$W_L(\omega) = W_{L1}(\omega) + W_{L2}(\omega).$$



6. Нацртати логаритамску асимптотску амплитудску фреквенцијску карактеристику система чија је фреквенцијска карактеристика дата изразом:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T_a} \frac{(1+j\omega T_b)(1+j\omega T_d)}{(1+j\omega T_c)}, \quad T_a > T_b > T_c > T_d.$$

РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = W_k \cdot W_a \cdot W_b \cdot W_c \cdot W_d,$$

$$W_k(j\omega) = k,$$

$$W_a(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_a},$$

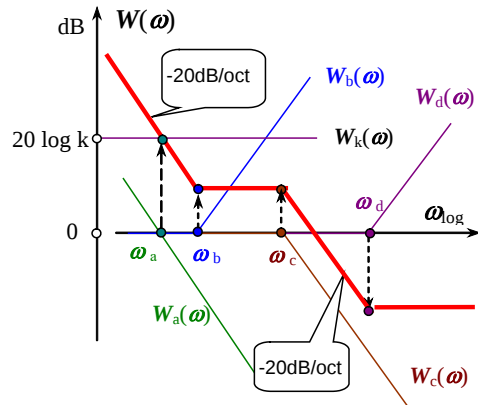
$$W_b(j\omega) = 1 + j\omega T_b,$$

$$W_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_c},$$

$$W_d(j\omega) = 1 + j\omega T_d,$$

$$\omega_a = \frac{1}{T_a}, \omega_b = \frac{1}{T_b}, \omega_c = \frac{1}{T_c}, \omega_d = \frac{1}{T_d},$$

$$\omega_a < \omega_b < \omega_c < \omega_d.$$



$$W(0) = \infty, W(\infty) = \text{const};$$

$$W_L(0) = \infty, W_L(\infty) = C^{te}$$

7. Нацртати логаритамску асимптотску амплитудску фреквенцијску карактеристику система чија је фреквенцијска карактеристика дата изразом:

$$W(j\omega) = \frac{5 \cdot (1 + 0.1j\omega)}{j\omega \cdot (1 + 0.5j\omega) \cdot (1 + 0.02j\omega)}.$$

РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = W_k \cdot W_a \cdot W_b \cdot W_c \cdot W_d ;$$

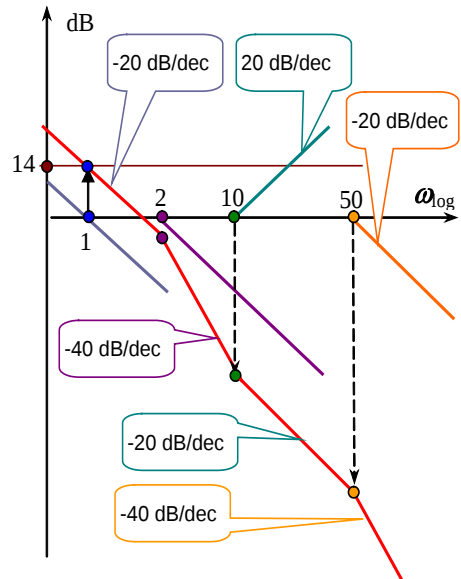
$$W_k(j\omega) = k, \quad k = 5 ;$$

$$W_a(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_a}, \quad T_a = 1, \quad \omega_a = \frac{1}{T_a} = 1 ;$$

$$W_b(j\omega) = 1 + j\omega T_b, \quad T_b = 0,1, \quad \omega_b = \frac{1}{T_b} = 10 ;$$

$$W_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_c}, \quad T_c = 0,5, \quad \omega_c = \frac{1}{T_c} = 2 ;$$

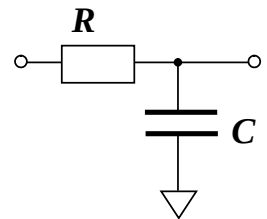
$$W_d(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_d}, \quad T_d = 0,02, \quad \omega_d = \frac{1}{T_d} = 50 .$$



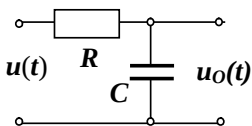
$$W(0) = \infty, W(\infty) = 0 ;$$

$$W_L(0) = \infty, W_L(\infty) = -\infty$$

8. Одредити израз за фреквенцијску карактеристику елемента са два приступа реализованог помоћу пасивне RC -мреже приказане на слици. Написати изразе и нацртати асимптотску логаритамску амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику.



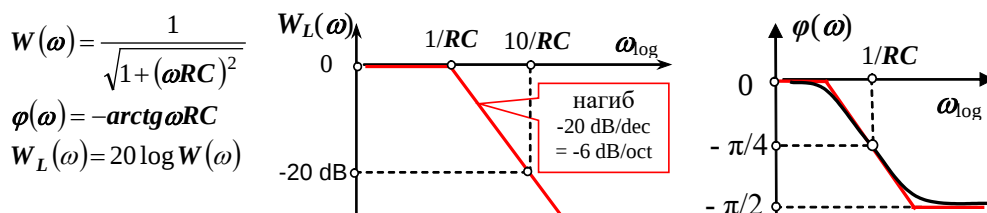
РЕШЕЊЕ



Фреквенцијска карактеристика RC мреже је:

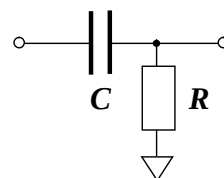
$$W(j\omega) = \frac{U_o(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} .$$

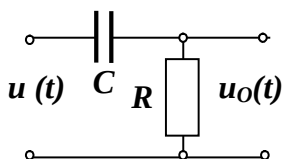


RC-мрежа се понаша као филтер пропусник ниских учестаности. Слаби сигнал високе, а пропушта сигнал ниске учестаности.

9. Одредити израз за фреквенцијску карактеристику елемента са два приступа реализованог помоћу пасивне **CR-мреже** приказане на слици. Написати изразе за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.



РЕШЕЊЕ



Функција преноса **CR-мреже** са два приступа:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sCR}{1 + sCR}, \quad Z_C = \frac{1}{sC}$$

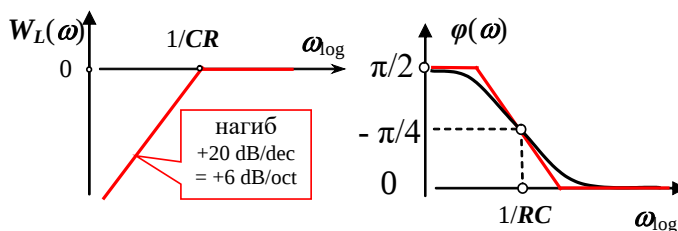
$$W(s) = \frac{sCR}{1 + sCR},$$

$$W(j\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}.$$

$$W(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

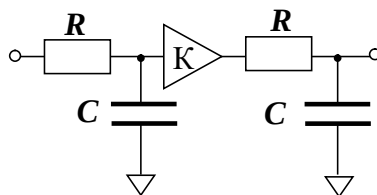
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega CR$$

$$W_L(\omega) = 20 \log W(\omega)$$



CR-мрежа се понаша као филтер пропусник високих учестаности. Слаби сигнал ниске, а пропушта сигнал високе учестаности.

10. Написати израз за фреквенцијску карактеристику система приказаног на слици. Написати изразе за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.



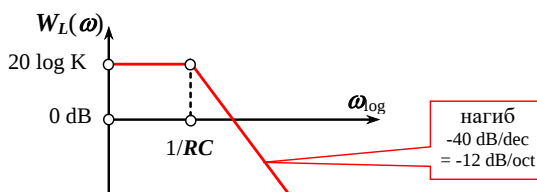
РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} K \frac{1}{1 + j\omega RC} = K \left(\frac{1}{1 + j\omega RC} \right)^2$$

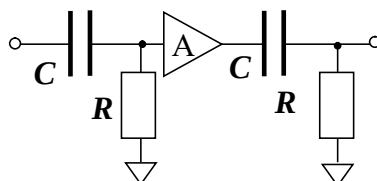
$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} K \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{K}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\varphi(\omega) = -2 \arctg \omega CR$$

Активни филтер другог реда, пропусник ниских учестаности



11. Написати израз за фреквенцијску карактеристику система приказаног на слици. Написати изразе за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.



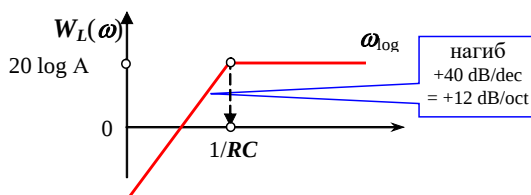
РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} A \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = A \left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right)^2,$$

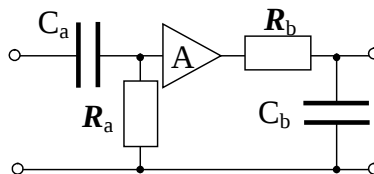
$$W(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} A \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = A \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2},$$

$$\varphi(\omega) = \pi - 2 \arctg \omega CR.$$

Активни филтер другог реда, пропусник високих учестаности



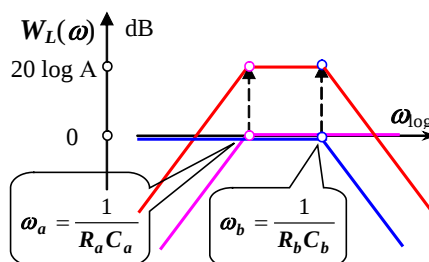
12. Написати израз за фреквенцијску карактеристику система приказаног на слици. Написати израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику ако је $R_a C_a > R_b C_b$.



РЕШЕЊЕ

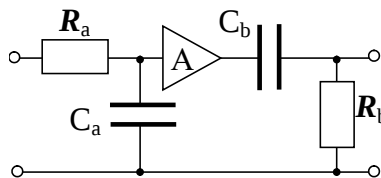
$$W(j\omega) = \frac{j\omega R_a C_a}{1 + j\omega R_a C_a} A \frac{1}{1 + j\omega R_b C_b},$$

$$W(\omega) = \frac{\omega R_a C_a}{\sqrt{1 + (\omega R_a C_a)^2}} A \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_b C_b)^2}},$$



Анализирано коло представља активни филтер другог реда, пропусник опсега учестаности.

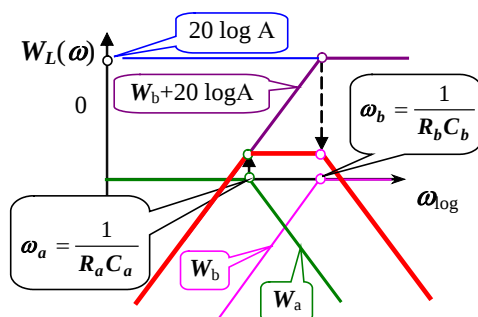
13. Написати израз за фреквенцијску карактеристику система приказаног на слици. Написати израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику ако је $R_a C_a > R_b C_b$.



РЕШЕЊЕ

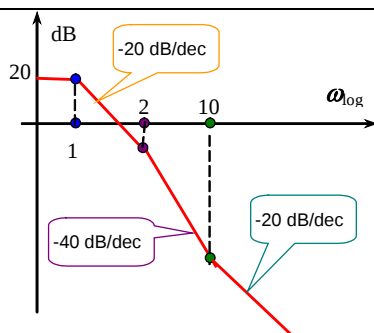
$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_a C_a} A \frac{j\omega R_b C_b}{1 + j\omega R_b C_b},$$

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_a C_a)^2}} A \frac{\omega R_b C_b}{\sqrt{1 + (\omega R_b C_b)^2}},$$



Анализирано коло представља активни филтер другог реда, пропусник опсега учестаности.

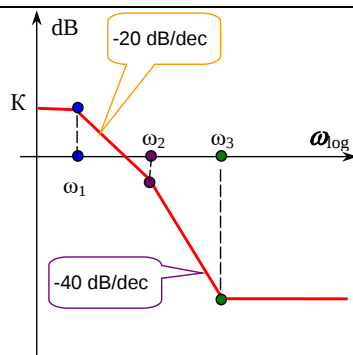
14. Написати израз за фреквенцијску карактеристику система чија је асимптотска логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика приказана на слици.



РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = 10 \frac{1 + 0,1j\omega}{(1 + j\omega)(1 + 0,5j\omega)}.$$

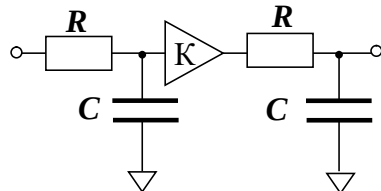
15. Написати израз за фреквенцијску карактеристику система чија је логаритамска асимптотска амплитудска фреквенцијска карактеристика приказана на слици.



РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = 10^{\frac{K}{20}} \frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_3})^2}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}.$$

16. Одредити граничну учестаност филтра пропусника ниских учестаности приказаног на слици



РЕШЕЊЕ

$$W(j\omega) = K \left(\frac{1}{1 + j\omega RC} \right)^2,$$

$$W(\omega) = K \frac{1}{1 + (\omega RC)^2},$$

$$W(0) = K.$$

Према дефиницији граничне учестаности:

$$W(\omega_g) = \frac{W(0)}{\sqrt{2}},$$

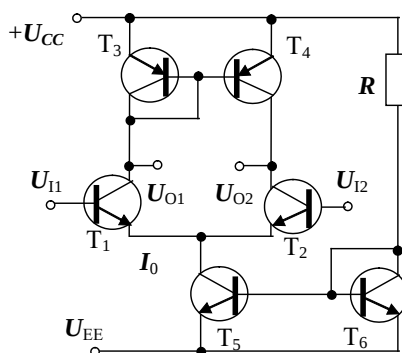
слиди:

$$\omega_g = \frac{\sqrt{2} - 1}{RC}.$$

2.2. ЛИНЕАРНА И НЕЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА

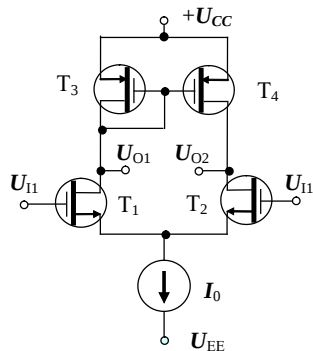
17. Нацртати диференцијални појачавач са комплементарним биполарним транзисторима.

РЕШЕЊЕ



18. Нацртати принципску шему диференцијалног појачавача са комплементарним MOS-транзисторима.

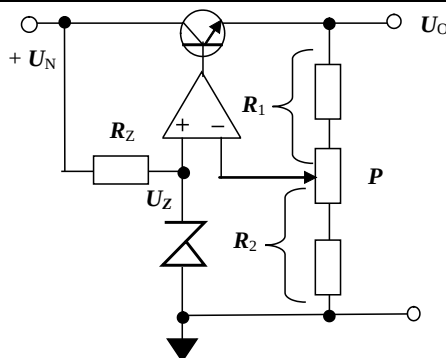
РЕШЕЊЕ



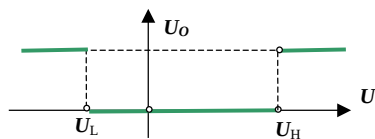
19. Нацртати коло за стабилизацију позитивног једносмерног напона остварено применом диференцијалног појачавача и транзистора, које омогућује подешавање вредности излазног напона.

РЕШЕЊЕ

$$U_O = U_Z \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$$

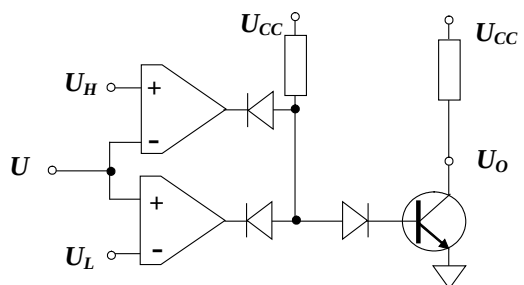


20. Нацртати коло чија је карактеристика улаз-излаз приказана на слици.



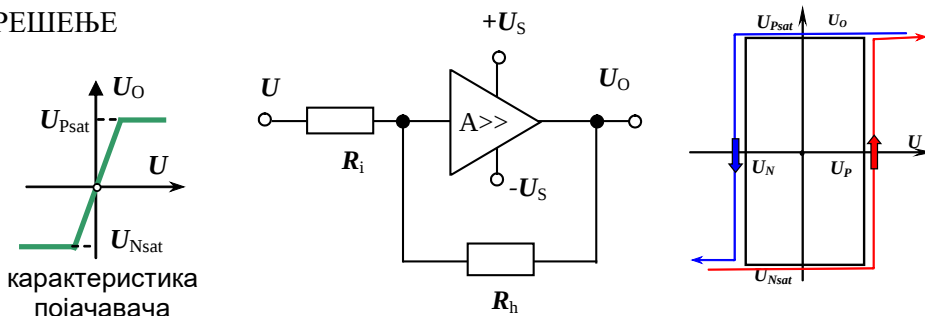
РЕШЕЊЕ

$$U_O = \begin{cases} U_{CC} & \text{за } U > U_H \\ 0 & \text{за } U_L \leq U \leq U_H \\ -2U - 2U_Z & \text{за } U < U_L \end{cases}$$



21. Нацртати компаратор са хистерезисом остварен применом неинвертујућег појачавача великог појачања. Одредити изразе за нивое поређења и нацртати карактеристику улаз-излаз.

РЕШЕЊЕ



$$U_P = -U_{Nsat} \frac{R_i}{R_h} > 0 \text{ (горњи, позитиван, праг поређења),}$$

$$U_N = -U_{Psat} \frac{R_i}{R_h} < 0 \text{ (доњи, негативан, праг поређења).}$$

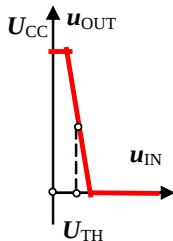
U_{Psat} је позитивни напон засићења, а U_{Nsat} негативни напон засићења појачавача.

22. Нацртати компаратор са хистерезисом остварен применом логичких кола. Одредити изразе за нивое поређења и нацртати карактеристику улаз-излаз.

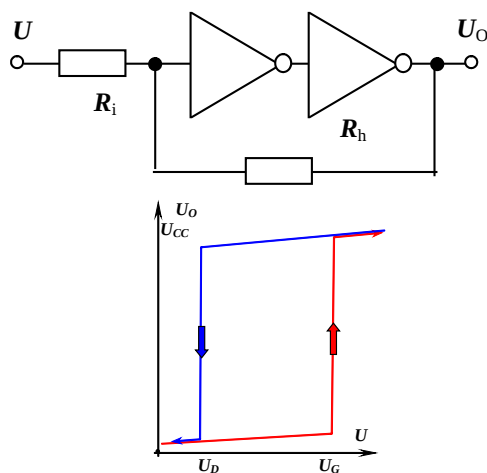
РЕШЕЊЕ

$$U_G = U_{TH} \left(1 + \frac{R_i}{R_h}\right) > U_{TH}$$

$$U_D = U_{TH} \left(1 + \frac{R_i}{R_h}\right) - U_{CC} \frac{R_i}{R_h}$$

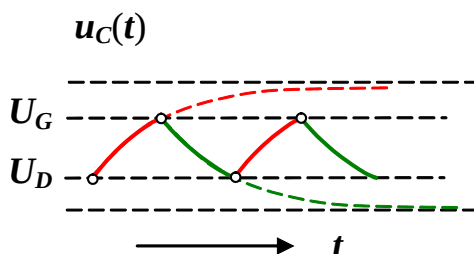
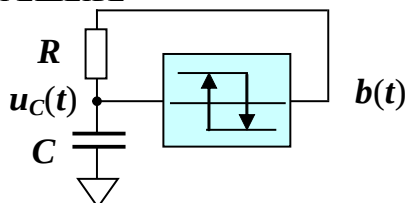


карактеристика инвертора



23. Нацртати релаксациони осцилатор остварен применом RC -мреже и инвертујућег компаратора са хистерезисом. Приказати таласни облик сигнала у карактеристичним тачкама кола.

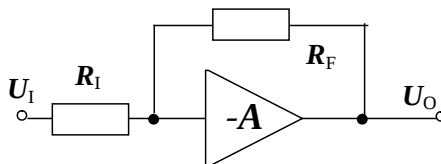
РЕШЕЊЕ



U_G је горњи, а U_D доњи праг поређења.

2.3. ПОВРАТНА СПРЕГА

24. За коло са инвертујућим појачавачем, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона у зависности од вредности појачања A и отпорности у колу.



РЕШЕЊЕ

За посматрано коло важе следеће једначине:

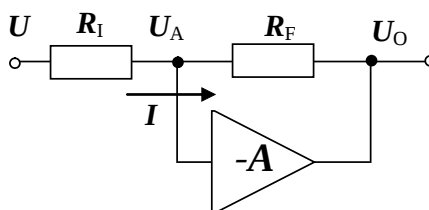
$$U_O = -A U_A$$

$$U - R_I I - R_F I = U_O,$$

$$I = \frac{U - U_A}{R_I}.$$

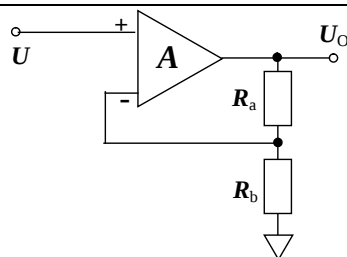
$$U - (R_I + R_F) \frac{U - U_A}{R_I} = U_O$$

$$-\frac{R_F}{R_I} U - \left(1 + \frac{R_F}{R_I}\right) \frac{U_O}{A} = U_O,$$



$$U_O = -\frac{R_F}{R_I} \frac{A}{1 + A + \frac{R_F}{R_I}} U.$$

25.3а коло са диференцијалним појачавачем, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона у зависности од вредности појачања A и отпорности у колу.



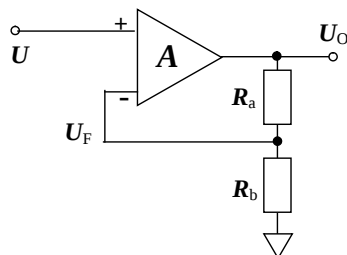
РЕШЕЊЕ

$$U_O = A(U - U_F),$$

$$U_F = U_O \frac{R_b}{R_a + R_b},$$

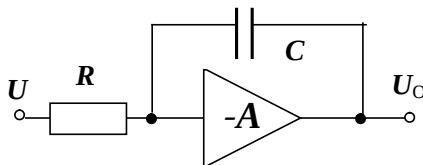
$$U_O = AU - U_O \frac{AR_b}{R_a + R_b},$$

$$U_O[R_a + R_b(1 + A)] = A(R_a + R_b)U,$$



$$U_O = \left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) \frac{A}{1 + \frac{R_a}{R_b} + A} U.$$

26.3а коло са инвертујућим појачавачем, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона у зависности од вредности појачања A , капацитивности C и отпорности R .



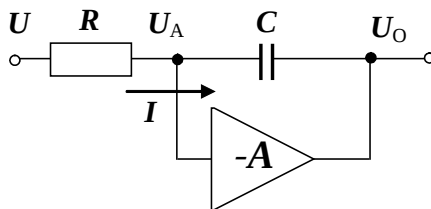
РЕШЕЊЕ

$$U_O = -AU_A$$

$$U - RI - Z_C I = U_O, Z_C = \frac{1}{sC}$$

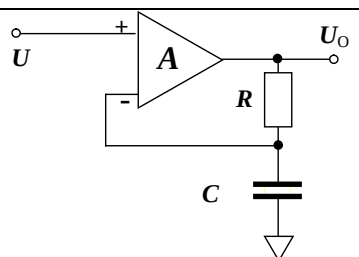
$$I = \frac{U - U_A}{R},$$

$$U_O = -\frac{1}{sRC} U_I \frac{A}{1 + A + \frac{1}{sRC}}$$



$$U_O = -A \frac{1}{1 + sRC(1 + A)} U_I.$$

27.3а коло са диференцијалним појачавачем, приказано на слици, одредити општи израз за функцију преноса у зависности од вредности појачања A и пасивних елемената у колу.



РЕШЕЊЕ

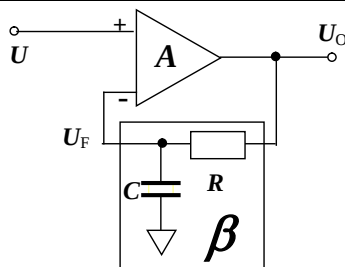
$$U_O = A(U - U_F),$$

$$U_F = \beta U_O,$$

$$U_O(1 + \beta A) = AU,$$

$$A_F = \frac{U_O}{U} = \frac{A}{1 + \beta A}$$

$$\beta = \frac{Z_c}{R + Z_c} = \frac{1}{1 + sRC}$$



$$A_F = \frac{A}{1 + \beta A} = (1 + sRC) \frac{A}{1 + sRC + A}$$

2.4. КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА

28. Нацртати инвертујући диференцијатор напона остварен помоћу савршеног операционог појачавача. Одредити вредности елемената тако да константа преноса буде једнака -1 s. Написати изразе за функцију преноса, фреквенцијску карактеристику, амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику и нацртати одговарајуће Бодове дијаграме.

РЕШЕЊЕ

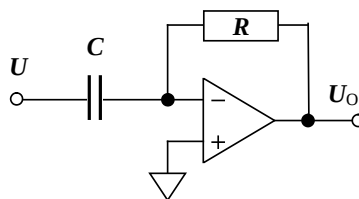
$$U_O(s) = -\frac{R}{Z_C} U(s)$$

$$W(s) = -sRC = -k_D s$$

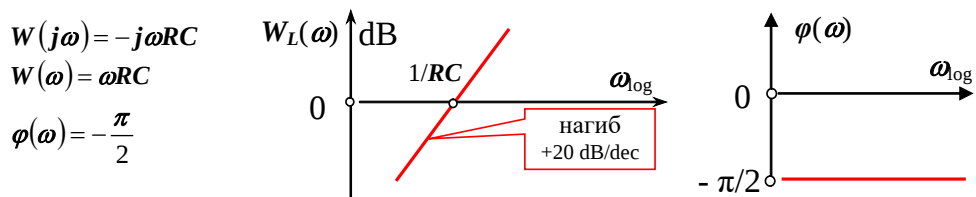
$$k_D = RC (=) t$$

$$RC = 1 \text{ s}$$

$$R = 1 \text{ M}\Omega, C = 1 \text{ }\mu\text{F},$$



$$u_O = -RC \frac{du}{dt}$$



29. Нацртати инвертујући интегратор напона остварен помоћу савреног операционог појачавача. Одредити вредности елемената тако да константа преноса буде једнака -1 s^{-1} . Написати изразе за функцију преноса, фреквенцијску карактеристику, амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику и нацртати одговарајуће Бодеве дијаграме.

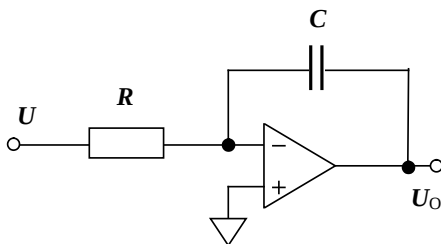
РЕШЕЊЕ

$$U_O(s) = -\frac{Z_C}{R} U(s)$$

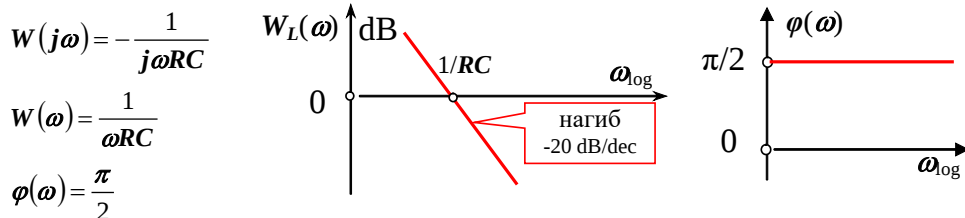
$$W(s) = -\frac{1}{sRC} = -k_I \frac{1}{s};$$

$$k_I = \frac{1}{RC} (=) \frac{1}{t}$$

$$R = 100 \text{ k}\Omega; C = 10 \text{ }\mu\text{F}$$



$$u_O = -\frac{1}{RC} \int_0^t u(t) dt + U_0$$

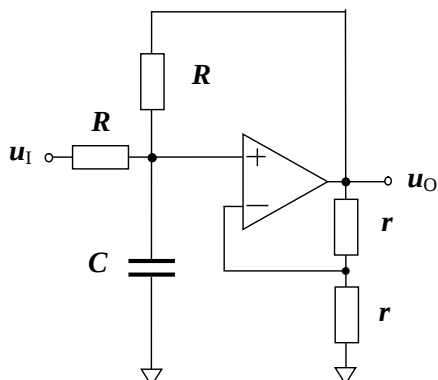


30. Нацртати неинвертујући интегратор напона остварен помоћу савреног операционог појачавача, написати израз за функцију преноса и одредити вредности елемената тако да константа преноса буде једнака 10^{-1} s^{-1} .

РЕШЕЊЕ

$$W(s) = \frac{2}{sRC},$$

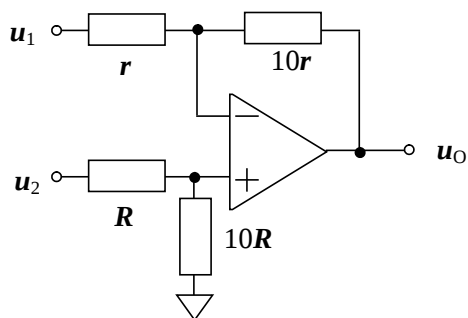
$$R = 2 \text{ M}\Omega; C = 100 \text{ nF}$$



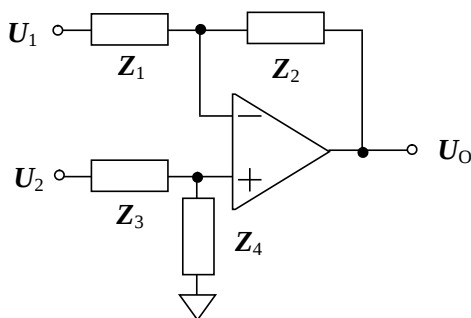
31. Нацртати диференцијални појачавач остварен помоћу савршеног операционог појачавача и одредити вредности елемената тако да константа преноса буде једнака 10.

РЕШЕЊЕ

$$u_O = 10 \cdot (u_2 - u_1)$$



32. Под претпоставком да је у колу приказаном на слици примењен савршени операциони појачавач, одредити израз који описује зависност излазног напона од напона U_1 и U_2 .



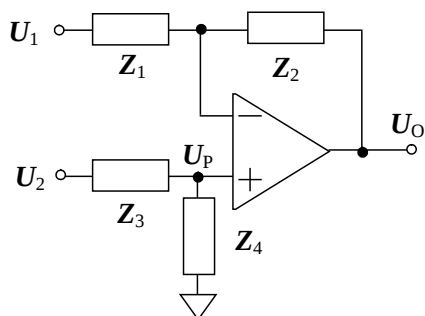
РЕШЕЊЕ

$$U_O = U_{O1} + U_{O2}$$

$$U_{O1} = U_O \bigg|_{U_2 = 0} = -\frac{Z_2}{Z_1} U_1,$$

$$U_{O2} = U_O \bigg|_{U_1 = 0} = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) U_P,$$

$$U_P = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} U_2$$

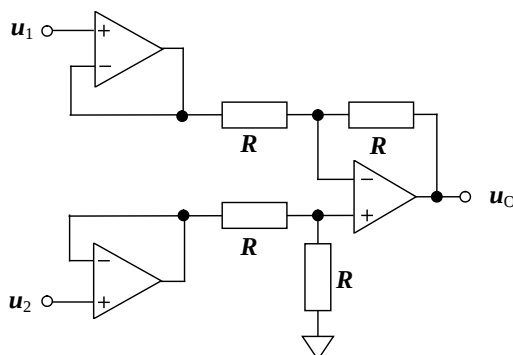


$$U_O = -\frac{Z_2}{Z_1} U_1 + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} U_2.$$

33. Нацртати инструментациони појачавач

РЕШЕЊЕ

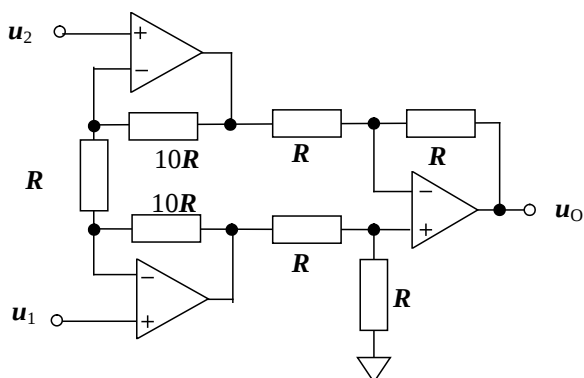
$$u_O = u_2 - u_1$$



34. Нацртати инструментациони појачавач чије се појачање диференцијалног напона може мењати променом само једне отпорности. Одредити вредности елемената тако да појачање буде једнако 10.

РЕШЕЊЕ

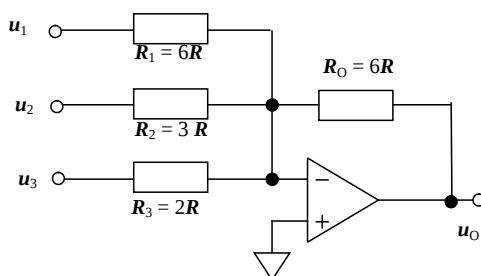
$$u_O = 10 \cdot (u_1 - u_2)$$



35. Нацртати инвертујући сабирач чија је карактеристика дефинисана једначином: $-U_O = U_1 + 2U_2 + 3U_3$.

РЕШЕЊЕ

$$u_O = -\frac{R_O}{R_1}u_1 - \frac{R_O}{R_2}u_2 - \frac{R_O}{R_3}u_3$$



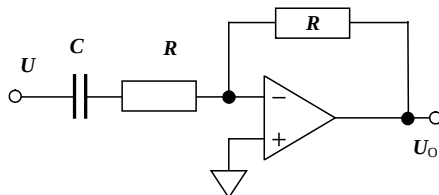
36. Нацртати филтер пропусник високих учестаности остварен помоћу савршеног операционог појачавача. Написати изразе за функцију преноса, фреквенцијску карактеристику и амплитудску фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.

РЕШЕЊЕ

$$W(s) = -\frac{R}{R + Z_C} = -\frac{sCR}{1 + sCR}$$

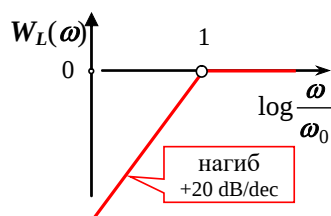
$$W(j\omega) = -\frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR},$$

$$W(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$



$$W(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$



37. Нацртати филтер пропусник ниских учестаности остварен помоћу савршеног операционог појачавача. Написати изразе за функцију преноса, фреквенцијску карактеристику и амплитудску фреквенцијску карактеристику. Нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.

РЕШЕЊЕ

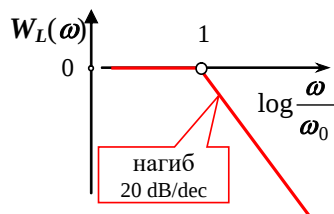
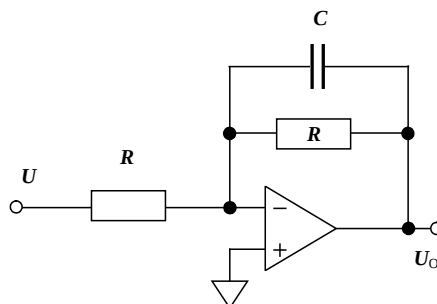
$$W(s) = -\frac{R \parallel Z_C}{R} = -\frac{1}{1 + sRC}$$

$$W(j\omega) = -\frac{1}{1 + j\omega CR},$$

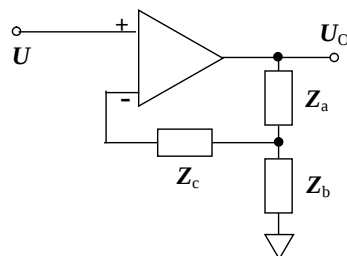
$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$



38. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени елементи, одредити израз за функцију преноса кола.

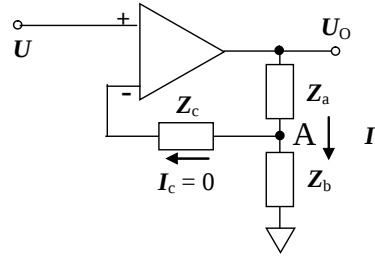


РЕШЕЊЕ

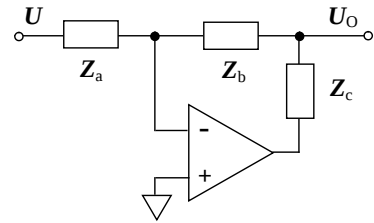
$$U_O = I(Z_a + Z_b),$$

$$I = \frac{U_A}{Z_b}, \quad U_A = U$$

$$U_O = \left(1 + \frac{Z_a}{Z_b}\right)U$$



39. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени елементи, одредити израз за функцију преноса кола.

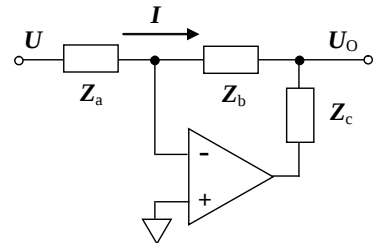


РЕШЕЊЕ

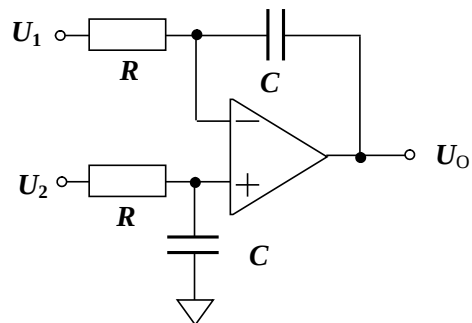
$$U_O = U - I(Z_a + Z_b),$$

$$I = \frac{U}{Z_a},$$

$$U_O = -\frac{Z_b}{Z_a}U$$



40. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени елементи, одредити израз за напон на излазу кола.



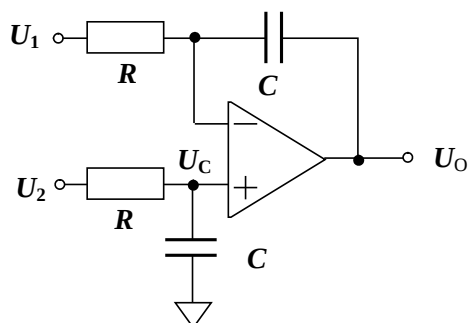
РЕШЕЊЕ

$$U_O = U_C - I_1 Z_C$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_C}{R}$$

$$U_C = U_2 \frac{Z_C}{R + Z_C} = U_2 \frac{1}{1 + sRC}$$

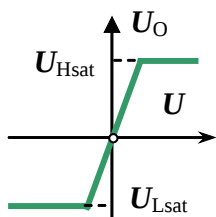
$$U_O = \frac{1}{sRC} (U_2 - U_1)$$



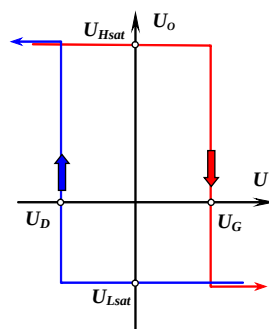
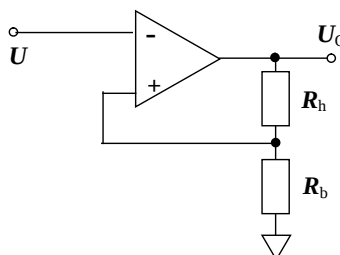
Посматрано коло представља диференцијални интегратор.

41. Нацртати инвертујући компаратор са хистерезисом остварен применом операционог појачавача. Одредити изразе за нивое поређења и нацртати карактеристику улаз-излаз.

РЕШЕЊЕ



карактеристика
појачавача



$$U_D = U_{Lsat} \frac{R_b}{R_a + R_b} \text{ (доњи, негативан, праг поређења).}$$

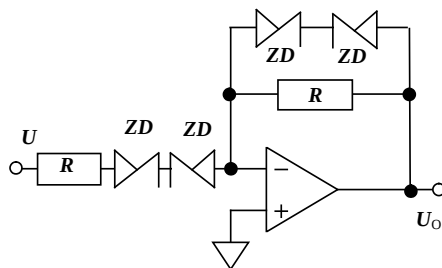
$$U_G = U_{Hsat} \frac{R_b}{R_a + R_b} \text{ (горњи, позитиван, праг поређења).}$$

U_{Hsat} је позитивни напон засићења, а U_{Lsat} негативни напон засићења појачавача.

42. Под претпоставком да су елементи, примењени у колу приказаном на слици, савршени:

а) нацртати карактеристику преноса, $U_o(U)$.

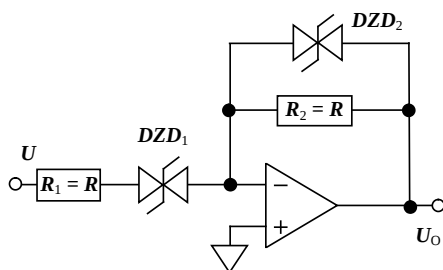
б) нацртати таласни облик напона на излазу при побуди напоном синусног таласног облика чија је амплитуда $3U_Z$, где је U_Z напон инверзног пробоја Ценер-диода



РЕШЕЊЕ

Могућа су три стања у посматраном колу, зависно од вредности улазног напона, односно стања двојних Ценер-диода DZD_1 и DZD_2 .

■ Када је улазни напон по интензитету мањи од напона пробоја двојне Ценер-диоде DZD_1 :



$U_{ZZ} = U_Z$ (при директној поларизацији, пад напона на диоди је једнак нули)

улазна струја (кроз отпорник R_1) је једнака нули, па је и излазни напон U_o једнак нули:

$$U_o = 0 \text{ за } |U| < U_{ZZ} = U_Z.$$

■ Када је улазни напон по интензитету већи од напона U_{ZZ} , али мањи од граничне вредности U_G при којој је излазни напон U_o једнак напона пробоја двојне Ценер-диоде U_{ZZ} , важи:

$$U_o = -\frac{R_2}{R_1}(U - U_{ZZ}) = -U + U_{ZZ} \text{ за } |U| > U_G$$

Гранична вредност улазног напона U_G одређена је условом:

$$U_o(U_G) = -U_G + U_{ZZ} = -U_{ZZ},$$

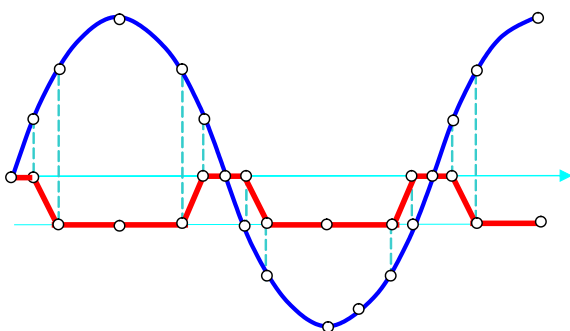
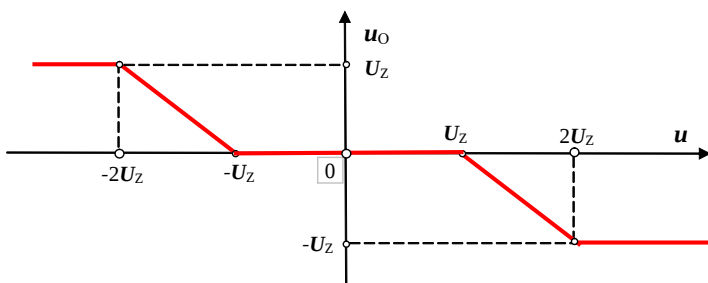
на основу којег следи:

$$U_G = 2U_{ZZ}.$$

■ Када је улазни напон по интензитету већи од напона U_G излазни напон је једнак:

$$U_o = -U_{ZZ} \operatorname{sgn} U \text{ за } |U| > U_G.$$

$$U_O = \begin{cases} -U_{ZZ} \text{ за } U > 2U_{ZZ} \\ -U + U_{ZZ} \text{ за } U_{ZZ} < U \leq 2U_{ZZ} \\ 0 \text{ за } |U| \leq U_Z \\ -U - U_{ZZ} \text{ за } -U < U \leq -2U_{ZZ} \\ U_{ZZ} \text{ за } U < -2U_{ZZ} \end{cases}.$$

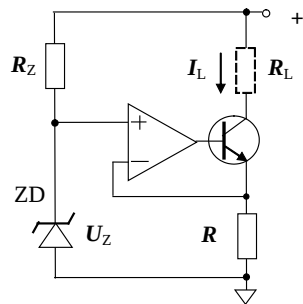


43. Нацртати коло остварено помоћу операционог појачавача и биполарног транзистора које обезбеђује сталну струју кроз потрошач чији је један крај прикључен на извор позитивног напона (*current sink*).

РЕШЕЊЕ

Под претпоставком да је појачање од базе до колектора транзистора довољно велико да се струја базе може занемарити у односу на струју колектора вредност струје кроз потрошач R_L је једнака:

$$I_L = \frac{U_Z}{R}, \beta \gg 1,$$

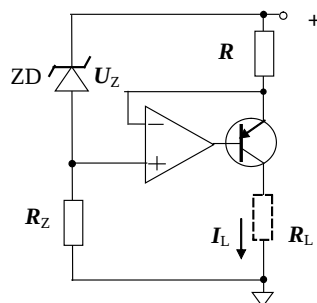


44. Нацртати коло остварено помоћу операционог појачавача и биполарног транзистора које обезбеђује сталну струју кроз потрошач чији је један крај прикључен на масу (*current source*).

РЕШЕЊЕ

Под претпоставком да се струја базе може занемарити у односу на струју колектора, вредност струје кроз потрошач R_L је једнака:

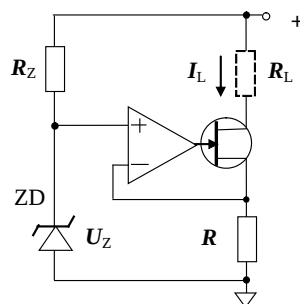
$$I_L = \frac{U_Z}{R}, \beta \gg 1,$$



45. Нацртати коло остварено помоћу операционог појачавача и транзистора са ефектом поља које обезбеђује сталну струју кроз потрошач чији је један крај прикључен на извор позитивног напона (*current sink*).

РЕШЕЊЕ

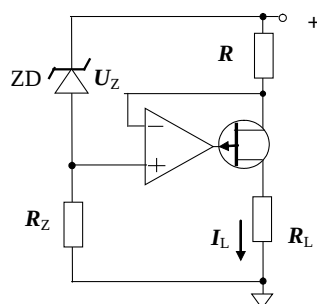
$$I_L = \frac{U_Z}{R}$$



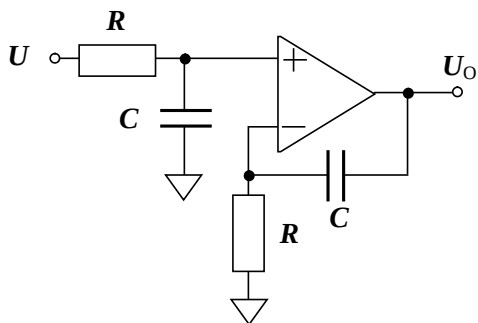
46. Нацртати коло остварено помоћу операционог појачавача и транзистора са ефектом поља које обезбеђује сталну струју кроз потрошач чији је један крај прикључен на масу (*current source*).

РЕШЕЊЕ

$$I_L = \frac{U_Z}{R},$$



47. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени елементи, одредити израз за функцију преноса кола. Одредити вредности елемената у колу тако да бројна вредност константе преноса буде једнака један.



РЕШЕЊЕ

$$U_O = U_C \left(1 + \frac{Z_C}{R}\right) = U_C \frac{1 + sRC}{sRC},$$

$$U_C = U \frac{Z_C}{R + Z_C} = U \frac{1}{1 + sRC},$$

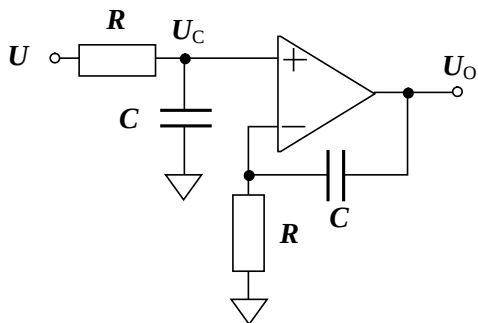
$$U_O = \frac{1}{sRC} U,$$

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{1}{sRC} = \frac{k}{s},$$

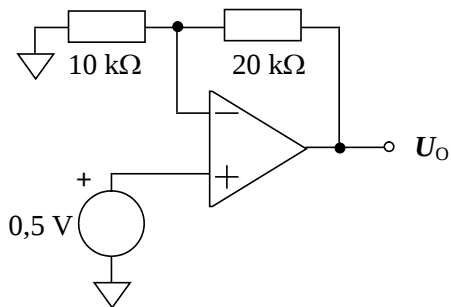
(неинвертујући интегратор)

$$k = \frac{1}{RC} (=) f,$$

$$R = 1 \text{ M}\Omega; C = 1 \text{ }\mu\text{F}.$$



48. Под претпоставком да је појачање операционог појачавача у колу приказаном на слици једнако 500.000, одредити разлику потенцијала неинвертујућег и инвертујућег улаза.



РЕШЕЊЕ

У првој апроксимацији може се сматрати да је појачање појачавача довољно велико да важи формула:

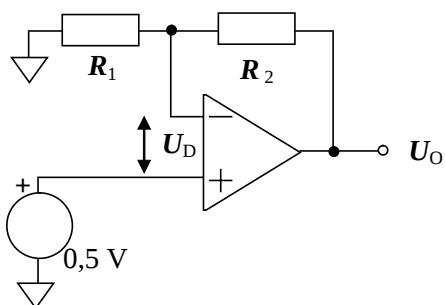
$$U_O = (1 + \frac{R_2}{R_1})U,$$

на основу које се одређује приближна вредност излазног напона:

$$U_O = 1,5 \text{ V}.$$

Улазни (диференцијални) напон је за износ појачања операционог појачавача мањи од излазног напона:

$$U_D = \frac{U_O}{A} = 3 \mu\text{V}$$



$$A_U = (1 + \frac{R_2}{R_1}) = 3$$

3.

ПИТАЊА ЗА ПРОВЕРУ ЗНАЊА

3.1. Основни појмови

1. Која су основна својства линеарних система?
2. Написати општи израз којим је одређена средња вредност променљиве величине $y(t)$ посматране у временском интервалу од t_p до t_k ?
3. Написати општи израз којим је одређена ефективна вредност променљиве величине $y(t)$ посматране у временском интервалу од t_p до t_k ?
4. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел хармонијског осцилатора и нацртати одговарајући структурни блок дијаграм.
5. Нацртати коло за приближно диференцирање, остварено искључиво помоћу пасивних елемената, и одредити израз за функцију преноса.
6. Нацртати коло за приближно интеграљење, остварено искључиво помоћу пасивних елемената, и одредити израз за функцију преноса.
7. Дефиниција фреквенцијске карактеристике, амплитудске фреквенцијске карактеристике, логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике и фазне фреквенцијске карактеристике.
8. Шта је децибел и како се дефинише?

3.2. Линеарна и нелинеарна аналогна електронска кола

9. Шта је $CMRR$ и како се дефинише?
10. Шта је савршени (идеални) филтер? Нацртати амплитудску фреквенцијску карактеристику савреног филтра пропусника ниских/високих/опсега учестаности.
11. Нацртати пасивни филтер пропусник опсега учестаности. Одредити израз за фреквенцијску карактеристику, и нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.
12. Нацртати пасивни филтер непропусник опсега учестаности. Одредити израз за фреквенцијску карактеристику, и нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику.

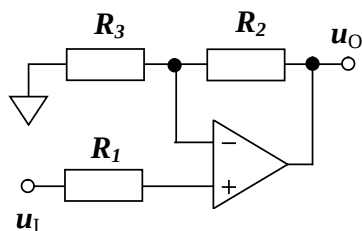
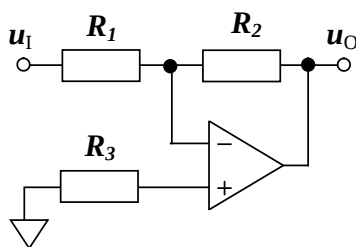
13. Нацртати општу шему појачавача са једним трополним појачавачким елементом.
14. Навести основне класе појачавача и описати њихова својства.
15. Нацртати општи графички приказ диференцијалног појачавача и дефинисати улазне и излазне величине, диференцијално појачање и појачање заједнички унетог напона
16. Нацртати општу шему појачавача са диференцијалном спрегом трополних појачавачких елемената и објаснити начин његовог рада.
17. Нацртати улазно-излазну карактеристику појачавача са диференцијалном спрегом трополних појачавачких елемената (диференцијални појачавач).

3.3. Повратна спрега

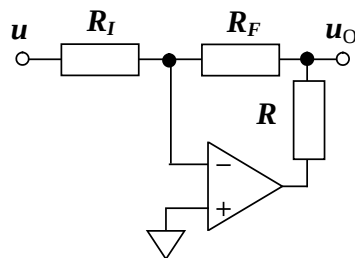
18. Извести општи израз за појачање појачавача са повратном спрегом и дефинисати основне врсте повратне спреге.
19. Извести општи израз који показује утицај негативне повратне спреге на осетљивост појачања система са повратном спрегом у односу на промене појачања појачавача.
20. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на изобличења која настају као последица нелинеарности карактеристике појачавача.
21. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на шум која настаје у колу појачавача.
22. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на улазну отпорност појачавача напона.
23. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на улазну отпорност појачавача струје.
24. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на излазну отпорност појачавача напона.
25. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на излазну отпорност појачавача струје.
26. Извести општи израз и анализирати утицај негативне повратне спреге на фреквенцијску карактеристику појачавача.
27. Извести општи израз за функцију преноса система са повратном спрегом и дефинисати основне врсте повратне спреге.
28. Навести позитивна својства негативне повратне спреге.

3.4. Операциони појачавачи

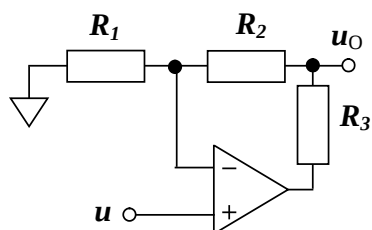
29. Дефинисати основна својства савршеног операционог појачавача.
30. Нацртати општи структурни блок-дијаграм операционог појачавача.
31. Нацртати еквивалентно коло стварног (несавршеног) операционог појачавача.
32. Нацртати принципску шему кола за мерење напона помераја нуле (офсета) операционог појачавача.
33. Нацртати неинвертујући појачавач остварен помоћу операционог појачавача и написати израз за функцију преноса кола са савршеним појачавачем.
34. Нацртати инвертујући појачавач остварен помоћу операционог појачавача и написати израз за функцију преноса кола са савршеним појачавачем.
35. Нацртати инвертујући сабирач два напона остварен помоћу операционог појачавача.
36. Нацртати диференцијални појачавач (појачавач разлике два напона) остварен помоћу само једног операционог појачавача и написати израз за вредност излазног напона кола са савршеним појачавачем.
37. Нацртати принципску шему кола за мерење струје поларизације улаза операционог појачавача
38. Шта је *slew rate*?
39. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказано на слици, написати општи израз за вредност излазног напона у зависности од улазног напона и вредности отпорности у колу. Објаснити улогу отпорника R_3 .
40. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказано на слици, написати општи израз за вредност излазног напона у зависности од улазног напона и вредности отпорности у колу. Објаснити улогу отпорника R_1 .



41. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона у зависности од улазног напона и вредности отпорности у колу.



42. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона у зависности од улазног напона и вредности отпорности у колу.

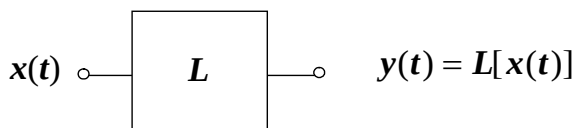


4. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛИЗЕ ЕЛЕКТРОНСКИХ КОЛА И СИСТЕМА У ФРЕКВЕНЦИЈСКОМ ДОМЕНУ

4.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Системи описани линеарним диференцијалним једначинама са константним коефицијентима су линеарни системи у којима важи принцип суперпозиције.

Одзив линеарног система на побуду сигналом који се може представити као збир више сигнала, једнак је збиру одзива на побуду појединачним сигнаlima.



Слика 4.1. Линеарни систем

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

$$y[x(t)] = y[x_1(t)] + y[x_2(t)].$$

Ред једначине је ред система.

Одзив линеарног система (кола) на побуду хармонијским сигналом¹:

$$x(t) = X \cos \omega t,$$

где је X амплитуда, $\theta = \omega t$ фаза, а ω кружна учестаност:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

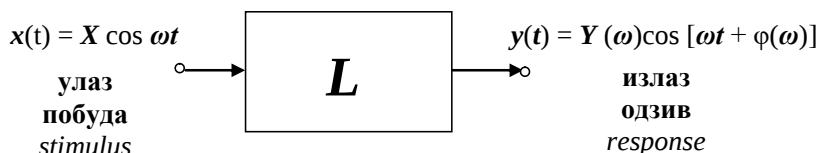
такође представља хармонијску функцију, исте учестаности:

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi).$$

¹ У начелу, информациони параметар оваког улазног сигнала може да буде његова амплитуда, период, учестаност или фаза у односу на неки други, референтни сигнал.

У општем случају, амплитуда и фаза излазног сигнала зависе од учестаности улазног сигнала:

$$y(t) = Y(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)].$$



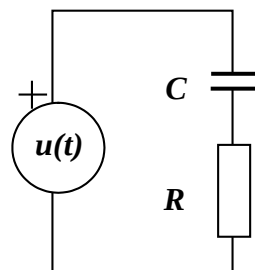
Слика 4.2. Линеарни систем

Коло образовано редном везом савреног отпорника, чија је отпорност R , савреног кондензатора, чија је капацитивност C , и савреног извора временски променљивог напона, $u(t)$, представља линеаран систем првог реда који се описује једначинама:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt},$$

$$u_R(t) = Ri(t) \text{ и}$$

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t).$$



Слика 4.3. RC-коло

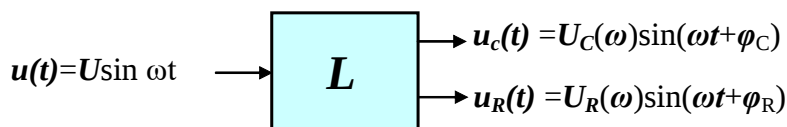
у којима $i(t)$ представља струју у колу, а $u_R(t)$ и $u_C(t)$ напон на крајевима отпорника и кондензатора, респективно.

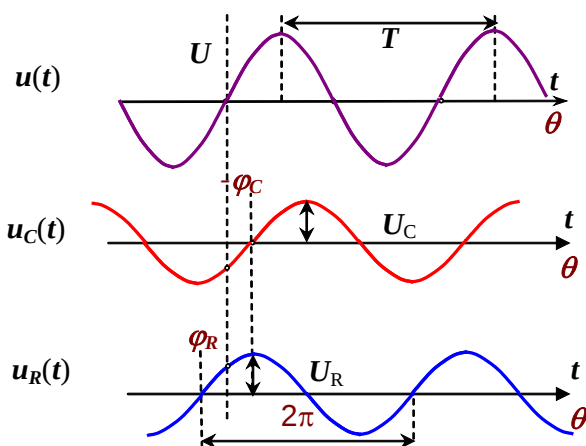
Ако се напон $u(t)$ посматра као улазни, а напон на крајевима кондензатора $u_C(t)$ као излазни сигнал, важи:

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = u(t).$$

Математички модел кола (система) код којег излазни сигнал представља напон на крајевима отпорника $u_R(t)$ има облик:

$$\tau \frac{du_R}{dt} + u_R(t) = \tau \frac{du}{dt}.$$



Слика 4.4. Одзив RC -кола на синусну побуду

Комплексни лик тригонометријске функције:

$$u = U \cos \theta,$$

је комплексна величина $U(j\theta)$, чији је модуло једнак амплитуди U , а аргумент фази θ .

$$U(j\theta) = Ue^{j\theta}$$

Веза између комплексних и тригонометријских величина је дата једначином (**Ојлерова формула**):

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta.$$

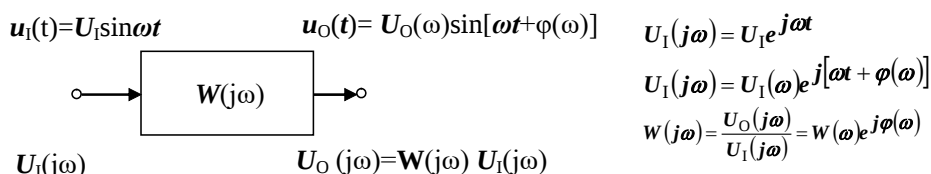
Комплексни лик хармонијског сигнала² је комплексна функција времена:

$$u(t) = U \cos \omega t \quad \Leftrightarrow \quad U(j\omega) = Ue^{j\omega t}.$$

Фреквенцијска карактеристика, $W(j\omega)$, линеарног елемента (кола, система), код којег наизменични сигнал $u_1(t)$ представља улаз, а сигнал $u_0(t)$ излаз, је комплексна величина одређена количником комплексних ликова излазног, $U_0(j\omega)$, и улазног сигнала, $U_1(j\omega)$.

$$W(j\omega) = \frac{U_0(j\omega)}{U_1(j\omega)}.$$

² У анализи електричних кола дефинише се комплексни представник простопериодичне величине, фазор, као комплексна величина чији је аргумент једнак фази, а модул или ефективност вредности или амплитуди простопериодичне величине. Комплексни представник простопериодичног напона је комплексни напон, простопериодичне струје комплексна струја итд. (ЈУС. Н.А0.101-04-49).



Слика 4.5. Фреквенцијска карактеристика

Фреквенцијска карактеристика³ је апстрактни појам који обједињује приказ деловања линеарног система на амплитуду и учестаност сигнала на његовом путу од улаза ка излазу. Физичко значење имају само модуо и аргумент функције $W(j\omega)$.

Модул фреквенцијске карактеристике, $W(j\omega)$, је реална величина која описује однос амплитуда улазног и излазног сигнала:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{U_O(\omega)}{U_I}$$

Величина $W(\omega)$ се назива **амплитудска фреквенцијска карактеристика**.

Аргумент фреквенцијске карактеристике, $\varphi(\omega)$, је **фазна фреквенцијска карактеристика**.

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg U_O(j\omega) - \arg U_I(j\omega).$$

Логаритамска амплитудска карактеристика, $W_L(j\omega)$, дефинисана је једначином⁴:

$$W_L(\omega) = 20 \log_{10} W(\omega).$$

Вредност се изражава у децибелима (dB).

Графички прикази асимптотске логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике и фазне фреквенцијске карактеристике на

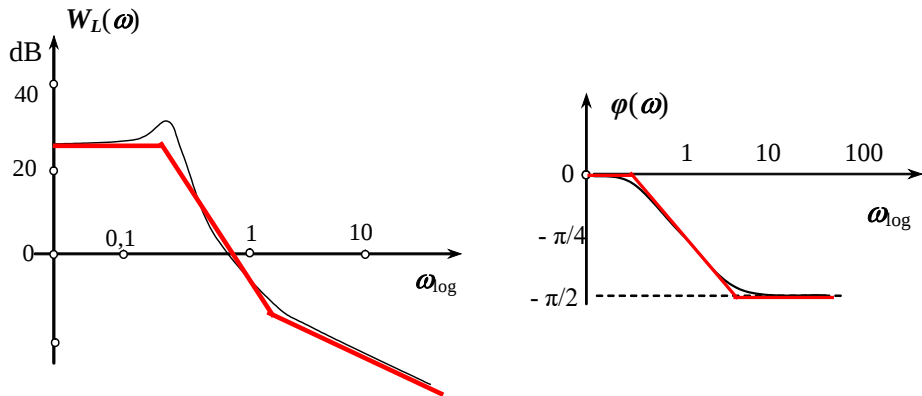
³ Frequency response, частотная характеристика.

⁴ Описивање односа величина помоћу логаритамске скале је опште прихваћено у техници, па се, најчешће, логаритамска амплитудска карактеристика означава истим симболом као и амплитудска карактеристика, $W(\omega)$. Ради прецизности у овом тексту се користи индекс L .

дијаграмима са логаритамском скалом за учестаност називају се **Бодови дијаграми**.

$W(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}$	$W_L(\omega)$
0,001	-60
0,01	-40
0,1	-20
1	0
10	20
100	40
1000	60

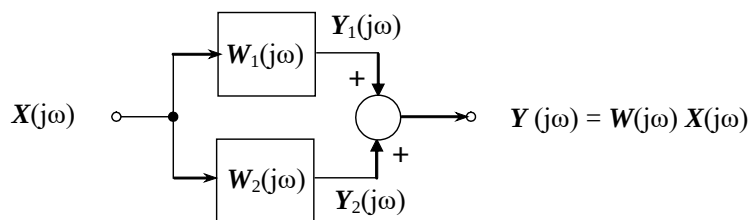
У поједностављеном облику, ови дијаграми се приказују линијским сегментима (асимптотски дијаграми, слика 4.6)



Слика 4.6. Амплитудска и фазна фреквенцијска карактеристика

■ Фреквенцијска карактеристика система, образованог паралелним везивањем елемената чије су фреквенцијске карактеристике $W_1(j\omega)$ и $W_2(j\omega)$, је:

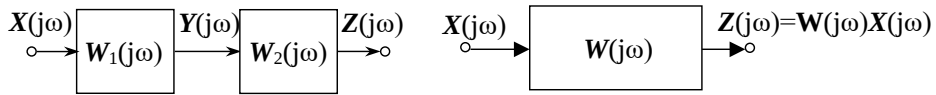
$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega).$$



Слика 4.7. Сложен систем образован паралелним везивањем елемената

■ Фреквенцијска карактеристика система, образованог редним везивањем елемената чије су фреквенцијске карактеристике $W_1(j\omega)$ и $W_2(j\omega)$, је:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega).$$



Слика 4.8. Фреквенцијска карактеристика сложеног система образованог редном везом елемената

■ Ако се фреквенцијска карактеристика може представити у облику:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega),$$

тада важе следећи односи:

$$W(\omega) = W_1(\omega) \cdot W_2(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg W_1(j\omega) + \arg W_2(j\omega) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

■ Ако се фреквенцијска карактеристика може представити у облику:

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)},$$

где је:

$$W(j\omega) = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad W_1(j\omega) = W_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}, \quad W_2(j\omega) = W_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)},$$

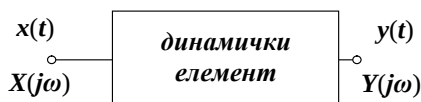
тада важе следећи односи:

$$W(\omega) = \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg W_1(j\omega) - \arg W_2(j\omega) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

4.2. ОСНОВНИ ДИНАМИЧКИ ЕЛЕМЕНТИ

Основни динамички елементи симболизују елементарне динамичке операције: интегралњење (инерцијални ефекат) и диференцирање (одређивање првог извода – брзински ефекат), као и њихове линеарне комбинације. Описани су диференцијалном једначином првог реда. Савршени динамички елементи описани су само једним, линеарним оператором⁵ и једним параметром – константом преноса.



4.2.1. САВРШЕНИ ДИФЕРЕНЦИЈАТОР

Савршени диференцијатор је елемент којим се остварује операција диференцирања (одређивања првог извода) функције времена:

$$y(t) = k_D \frac{dx}{dt}.$$

Излазни сигнал је сразмеран брзини промене улазног сигнала.

Ако улазни, $x(t)$, и излазни сигнал, $y(t)$, имају исту физичку природу (на пример, представљени су вредношћу напона између улазних, односно излазних прикључака елемента), константа преноса савреног диференцијатора, k_D , има димензију времена и обично се означава са T .

Операторски облик математичког модела савреног диференцијатора:

$$y(t) = k_D D x,$$

где је D оператор диференцирања.

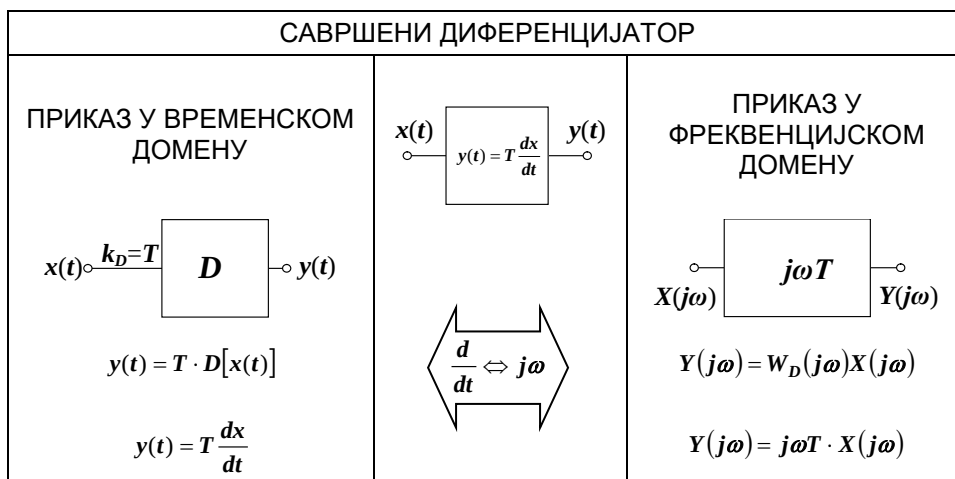
Савршени диференцијатор је линеарни елемент који се може описати фреквенцијском карактеристиком:

$$W_D(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega T.$$

⁵ Оператор $\hat{O}$ је линеаран ако има својства адитивности и хомогености:

$\hat{O}(y_1 + y_2) = \hat{O}(y_1) + \hat{O}(y_2)$, $\hat{O}(cy) = c \hat{O}(y)$, $c = \text{const}$.

Оператори множења константом, диференцирања и интегралњења су линеарни оператори. Елементи (системи) који се могу описати линеарним операторима су линеарни елементи (системи).



Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике за изабране, карактеристичне вредности кружне учестаности ω (односно аргумента $\theta = \omega T$), су дате у табели.

ω	ωT	$W_D(\omega) = \omega T$	$W_{DL}(dB) = 20 \log W_D(\omega)$
0	0	0	$-\infty$
$\frac{1}{T}$	1	1	0
$\frac{10}{T}$	10	10	20
$\frac{100}{T}$	100	100	40
∞	∞	∞	∞

Понекад се фреквенцијска карактеристика савреног диференцијатора приказује у нормализованом облику:

$$W_D(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0},$$

где је:

$$\omega_0 = \frac{1}{T},$$

карактеристична учестаност савреног диференцијатора (учестаност при којој је амплитуда излазног сигнала једнака амплитуди улазног сигнала, $W_D(\omega_0) = 1$).

$$W_{DL}(\omega) = 20 \log W_D(\omega) = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0.$$

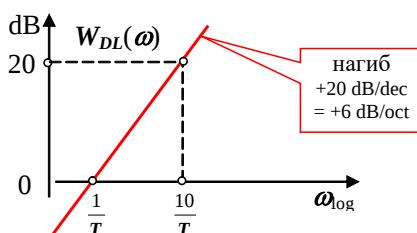
Када се учестаност промени десет пута, логаритамска амплитудска карактеристика се промени за 20 децибела.

$$\Delta W_{DL} \Big|_{\omega_2 = 10\omega_1} = 20 \log \omega_2 - 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega_1 + 20 \log \omega_0 = 20 \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = 20 \log 10 = 20.$$

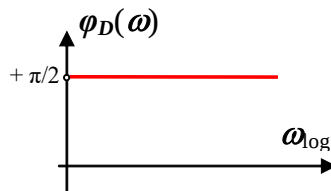
Када се учестаност промени два пута, логаритамска амплитудска карактеристика се промени за приближно 6 децибела.

$$\Delta W_{DL} \Big|_{\omega_2 = 2\omega_1} = 20 \log \omega_2 - 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega_1 + 20 \log \omega_0 = 20 \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = 20 \log 2 \cong 6$$

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика савреног диференцијатора је линеарна функција која сече апсцисну осу у тачки ω_0 , а чији је нагиб једнак 20 dB по декади.



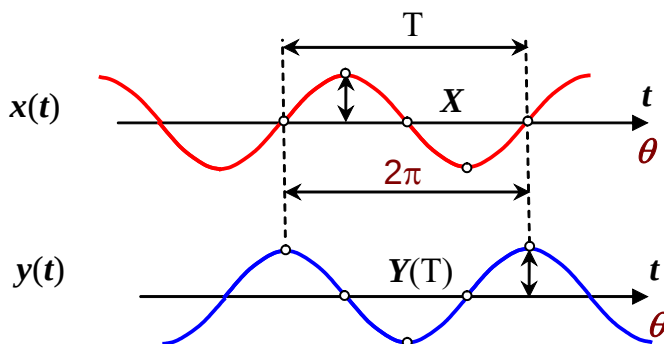
Фазна фреквенцијска карактеристика савреног диференцијатора је константна (не зависи од учестаности), једнака $\pi/2$.



$$\varphi_D(\omega) = \arctg \infty \Big|_{\omega \neq 0} = \frac{\pi}{2}$$

Слика 4.9. Бодеови дијаграми савреног диференцијатора

Излазни сигнал савреног диференцијатора “претходи” улазном сигналу за $T/4$, односно за угао $\pi/2$, независно од учестаности побудног сигнала.



Слика 4.10. Одзив савреног диференцијатора на побуду хармонијским сигналом

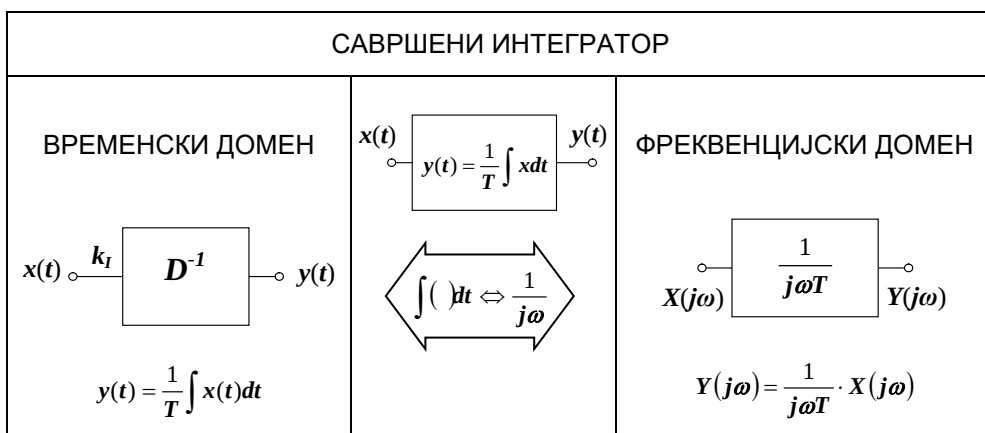
4.2.2. САВРШЕНИ ИНТЕГРАТОР

Савршени интегратор је елемент којим се остварује операција интеграције функције времена.

$$y(t) = k_I \int_0^t x(t) dt + Y_0.$$

Ако улазни, $x(t)$, и излазни сигнал, $y(t)$, имају исту физичку природу, константа преноса савршеног интегратора, k_I , има димензију учестаности. Уобичајено је да се као параметар интегратора даје временска константа:

$$T = \frac{1}{k_I}$$



Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике за изабране, карактеристичне вредности кружне учестаности ω су дате у табели.

ω	ωT	$W_I(\omega) = \frac{1}{\omega T}$	$W_{IL}(\omega) = 20 \log W_I(\omega)$
0	0	∞	∞
$\frac{1}{T}$	1	1	0
$\frac{10}{T}$	10	0,1	-20
$\frac{100}{T}$	100	0,01	-40
∞	∞	0	$-\infty$

У нормализованом облику, фреквенцијска карактеристика савреног интегратора је представљена изразом:

$$W_I(j\omega) = j \frac{\omega_0}{\omega},$$

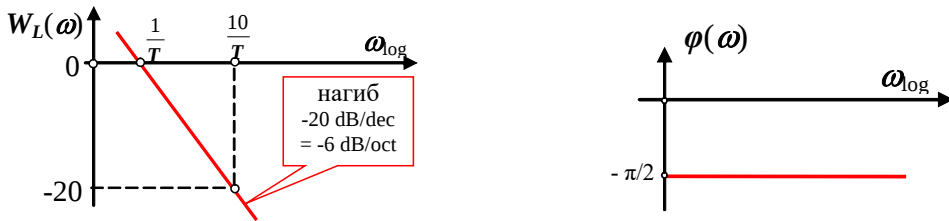
где је:

$$\omega_0 = \frac{1}{T},$$

карактеристична учестаност савреног интегратора (учестаност при којој је амплитуда излазног сигнала једнака амплитуди улазног сигнала, $W_I(\omega_0) = 1$).

Логаритамска амплитудска карактеристика опада са повећањем учестаности са нагибом једнаким 20 dB/dec.

$$\varphi_I(\omega) = \arctg(-\infty) \Big|_{\omega \neq \infty} = -\frac{\pi}{2}.$$

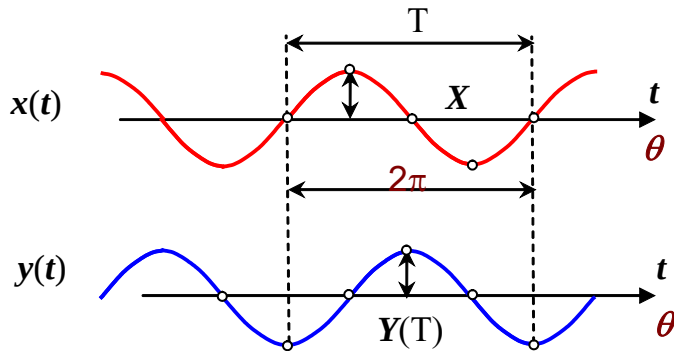


Слика 4.11. Бодеови дијаграми савреног интегратора

$$W_{IL}(\omega) = -W_{DL}(\omega)$$

$$\varphi_I(\omega) = -\varphi_D(\omega)$$

Излазни сигнал савреног интегратора “заостаје” за улазним сигналом за $T/4$, односно за угао $\pi/2$, независно од учестаности побудног сигнала.



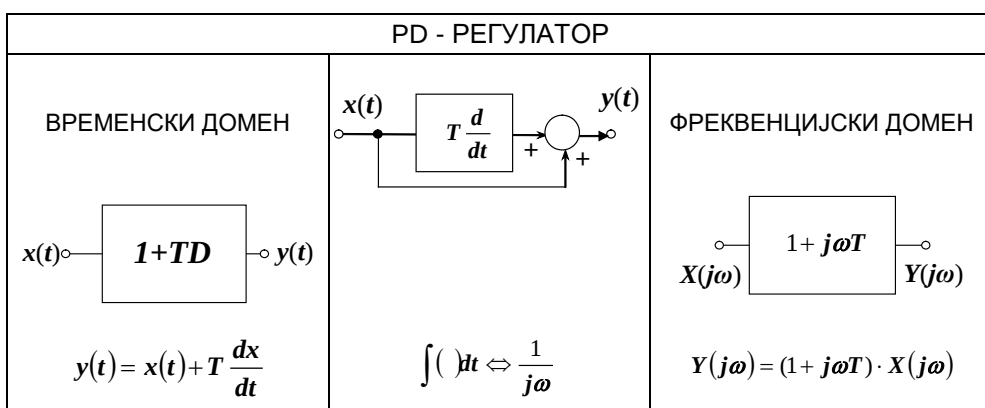
Слика 4.12. Одзив савреног интегратора на побуду хармонијским сигналом

У односу на осу учестаности, карактеристике савреног интегратора су “лик у огледалу” карактеристика савреног диференцијатора.

4.2.3. ПРОПОРЦИОНАЛНО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РЕГУЛАТОР

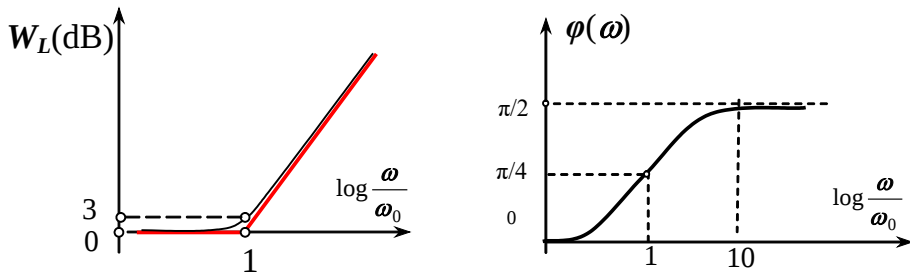
Излазна величина садржи две компоненте. Једна је сразмерна интензитету (тренутној вредности) улазне величине, а друга брзини њене промене (пропорционално-изводни регулатор – *PD regulator*):

$$y(t) = k_p x(t) + k_D \frac{dx}{dt}$$



Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике за изабране, карактеристичне вредности аргумента $\theta = \omega T$ су дате у табели.

ωT	$W(\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2}$	$W_L(dB) = 20 \log W(\omega)$	$\phi(\omega) = \arctg \omega T$
0	1	0	0
0,1	1,005	0,04	5,7 °
0,5	1,118	0,97	26,6
1	1,41	3,01	45 °
2	2,236	6,99	63,4
10	10,05	20,04	84,3 °
100	100	40	89,4 °
∞	∞	∞	90 °



Слика 4.13. Фреквенцијска карактеристика PD-регулатора

Преломна учестаност
(break frequency)

$$\omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$W(\omega_0) = \sqrt{2} W(0)$$

Нормализовани облик фреквенцијске карактеристике:

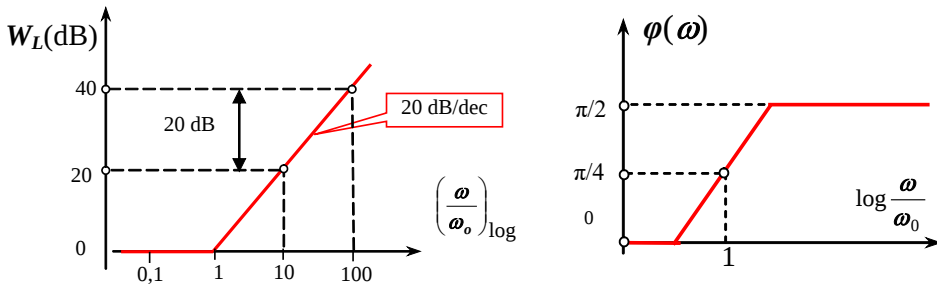
$$W(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$W(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow W(\omega) \cong W(0) = 1.$$

За високе учестаности, PD-регулатор се понаша као интегратор.

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow W(\omega) \cong \frac{1}{\omega T} \rightarrow \infty$$



Слика 4.14. Бодеои дијаграми PD-регулатора

4.3. ФИЛТРИ

У електроници, филтер је коло (систем) које различито реагује на споре и брзе промене информационог параметра улазног сигнала.

Филтер је фреквенцијски-селективно коло које преноси сигнал у одређеном опсегу, а потискују сигнале свих других учестаности.

При описивању својстава филтара користи се појам “слабљење” (*attenuation*). Електрични филтер је коло пројектовано да обезбеди жељено слабљење сигнала у одређеном опсегу учестаности.

Савршени филтер је мрежа са два приступа која преноси сигнале без слабљења за све учестаности једног или више опсега, а са слабљењем које није нула за остале учестаности.
ЈУС. H.A0.131-02-05.

Амплитудска фреквенцијска карактеристика филтра има сталну вредност за сигнале чија је учестаност у опсегу од интереса, док је за сигнале који се желе потиснути вредност што је могуће мања.

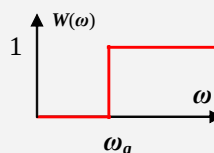
Пропусни (непропусни) опсег је опсег учестаности у коме слабљење остаје мање (веће) од задате вредности.

Гранична учестаност је учестаност пропусног или непропусног опсега при којој слабљење достиже задату вредност.
ЈУС. H.A0.151-01-66

Обично се гранична учестаност (*cut-of frequency, Grenzfrequenz*) дефинише формулом:

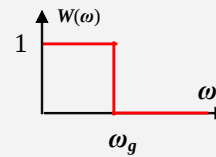
$$W(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 .$$

Филтер пропусник високих учестаности има само један пропусни опсег који обухвата све учестаности веће од граничне.
ЈУС. H.A0.151-01-68



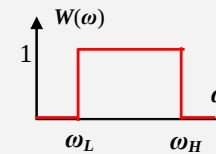
(*high-pass filter, Hochpass filter, филтер верхних частот*).

Филтер пропусник ниских учестаности има само један пропусни опсег који се протеже од нулте до граничне учестаности.
ЈУС. H.A0.151-01-67



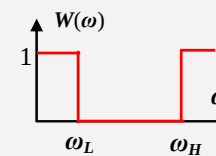
(low-pass filter, Tiefpass filter, филтер нижних частот).

Филтер пропусник опсега учестаности има само један пропусни опсег, ограничен са две коначне учестаности које нису нула или бесконачне.
ЈУС. H.A0.151-01-69



(band-pass filter).

Филтер непропусник опсега учестаности има само један непропусни опсег, ограничен са две коначне учестаности које нису нула или бесконачне.
ЈУС. H.A0.151-01-70



(band-stop filter, band reject, notch).

4.3.1. ФИЛТЕР ПРВОГ РЕДА, ПРОПУСНИК НИСКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Математички модел система првог реда који пригушује високо- а пропушта ниско-фреквентне компоненте улазног сигнала дат је једначином:

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t),$$

у којој $x(t)$ представља улазну, а $y(t)$ излазну величину (сигнал). T је временска константа система. Овој једначини одговара фреквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

Амплитудска и фазна фреквенцијска карактеристика се могу одредити сређивањем овог израза тако да су реални и имагинарни део експлицитно изражени:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2} = \frac{1}{1+(\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2},$$

$$W(\omega) = \sqrt{\left[\frac{1}{1+(\omega T)^2}\right]^2 + \left[\frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}\right]^2} = \sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{[1+(\omega T)^2]^2}} = \sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{[1+(\omega T)^2]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega T}{1} = -\arctg \omega T.$$

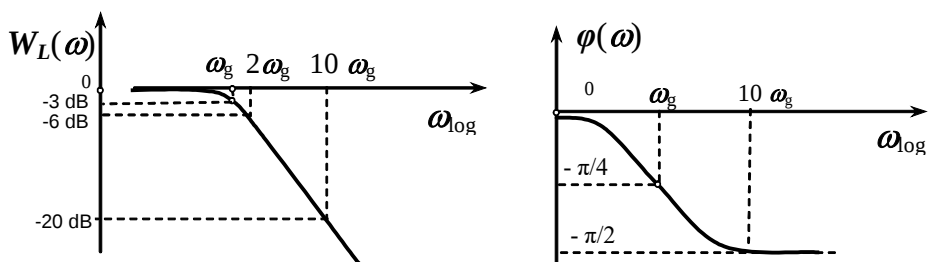
ωT	$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$	$W_L(\text{dB})$	$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$
0	1	0	0
0,1	0,995	-0,04	-6 °
0,5	0,894	-1	-27 °
1	0,707	-3	-45 °
2	0,447	-7	-63 °
10	0,0995	-20	-84 °
∞	0	$-\infty$	-90 °

Сигнали ниских учестаности се пропуштају без слабљења:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (W(\omega) \cong W(0)=1) \wedge (\varphi(\omega) \cong \varphi(0)=0).$$

За високе учестаности, коло се понаша као интегратор.

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \left(W(\omega) \cong \frac{1}{\omega T} \rightarrow 0\right) \wedge \left(\varphi(\omega) \cong -\frac{\pi}{2}\right)$$



Слика 4.15. Фреквенцијска карактеристика филтра првог реда, пропусника ниских учестаности

Уместо трансформације израза за фреквенцијску карактеристику у облик:

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

много је једноставније да се одређивање амплитудне и фазне фреквенцијске карактеристике изврши свођењем задате функције на елементарне функције, чија су својства позната.

•

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)},$$

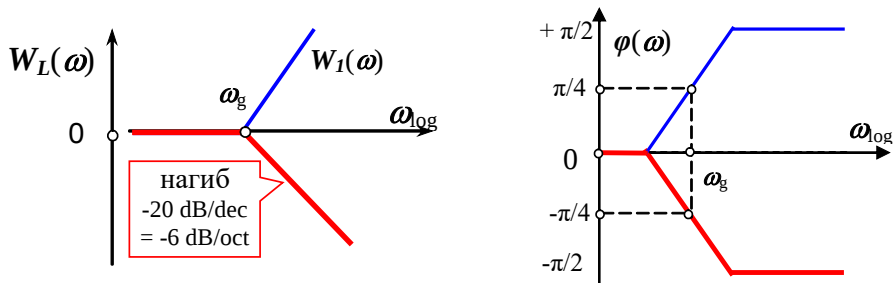
$$W_1(j\omega) = 1, \quad W_2(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg 0 - \arctg \omega T = -\arctg \omega T.$$

Или:

$$W(s) = \frac{1}{W_1}, \quad W_1 = 1 + j\omega T \quad \leftrightarrow \quad W(\omega) = \frac{1}{W_1(\omega)} \quad \leftrightarrow \quad \varphi(\omega) = \arctg 0 - \varphi_1 = -\varphi_1$$

У односу на осу учестаности, карактеристике филтра првог реда, пропусника ниских учестаности су “лик у огледалу” карактеристика PD-регулатора.



Слика 4.16. Бодеои дијаграми филтра првог реда, пропусника ниских учестаности

Гранична учестаност филтра пропусника ниских учестаности (учестаност при којој амплитудска фреквенцијска карактеристика опадне на вредност која је $\sqrt{2}$ пута мања од вредности у пропусном опсегу):

$$W(\omega_g) = \frac{W_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707,$$

једнака је:

$$\omega_g = \frac{1}{T}.$$

$$\varphi(\omega_g) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Фреквенцијска карактеристика стварних појачавача се може, у првој апроксимацији, приближно представити карактеристиком филтра првог реда, пропусника ниских учестаности.

У теорији система аутоматског управљања елемент са оваквом карактеристиком се назива **апериодични елемент првог реда**.

4.3.2. ФИЛТЕР ПРВОГ РЕДА, ПРОПУСНИК ВИСОКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Математички модел система првог реда који пригушује ниско-, а пропушта високо-фреквентне компоненте улазног сигнала дат је једначином:

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = T \frac{dx}{dt},$$

у којој $x(t)$ представља улазну, а $y(t)$ излазну величину (сигнал). T је временска константа система. Овој једначини одговара фреквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}.$$

Разлагањем фреквенцијске карактеристике анализираног система на елементарне фреквенцијске карактеристике долази се до израза за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику система:

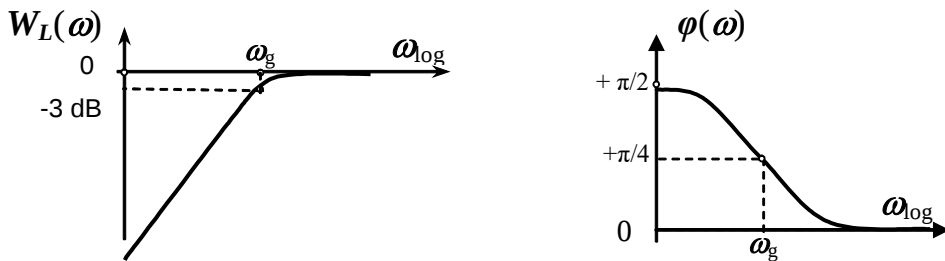
$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)} & W(\omega) &= \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)} & \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) \\ W_1(j\omega) &= j\omega T & W_1(\omega) &= \omega T & \varphi_1(\omega) &= \frac{\pi}{2} \\ W_2(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega T} & W_2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} & \varphi_2(\omega) &= \arctan \omega T \end{aligned}$$

$$W(\omega) = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \infty - \arctg \omega T = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$$

ωT	$W(\omega) = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$	$W_L(dB)$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$
0	0	$-\infty$	90°
0,1	1	-0.04	84°
1	10	-3	45°
10	100	-20	6°
∞	1	∞	0

Логаритамска амплитудска карактеристика је приказана на слици.



Слика 4.17. Фреквенцијска карактеристика филтра првог реда, пропусника високих учестаности

Гранична учестаност филтра, при којој слабљење сигнала износи $\sqrt{2}$,

$$W(\omega_g) = \frac{W_\infty}{\sqrt{2}} = 0,707$$

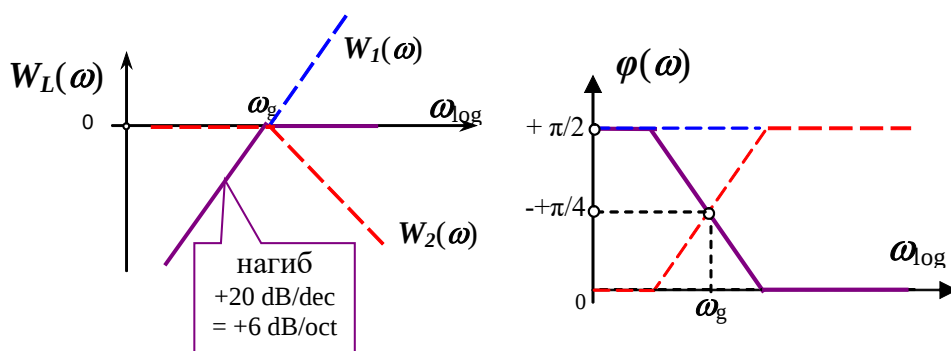
једнака је:

$$\omega_g = \frac{1}{T}$$

Померај фазе при граничној учестаности је:

$$\varphi(\omega_g) = \frac{\pi}{4}$$

Разлагање фреквенцијске карактеристике посматраног система на елементарне функције (карактеристике) омогућује једноставно одређивање асимптотске логаритамске фреквенцијске карактеристике (слика 4.18).



Слика 4.18. Бодеве дијаграми филтра првог реда, пропусника високих учестаности

4.4. ПРИМЕРИ

4.4.1. Фреквенцијски ускладник

Помоћу система (кола) чија се фреквенцијска карактеристика може представити у облику рационалне функције комплексне променљиве $j\omega$ облика:

$$W(j\omega) = k \frac{j\omega T_1 - 1}{j\omega T_2 + 1}$$

остварује се корекција (усклађивање) фреквенцијске карактеристике система у целини.

Анализа система са датом карактеристиком се најједноставније врши свођењем на елементарне функције.

$$W(j\omega) = W_0 \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)},$$

$$W_0(j\omega) = k$$

$$W_1(j\omega) = j\omega T_1 - 1 = W_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$W_2(j\omega) = j\omega T_2 + 1 = W_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}$$

$$W_1(\omega) = |W_1(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega T_1)^2}$$

$$W_2(\omega) = |W_2(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}$$

$$\varphi_1(\omega) = \arg W_1(j\omega) = \arctg(-\omega T_1)$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg W_2(j\omega) = \arctg(\omega T_2)$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика система у целини, $W(j\omega)$, је одређена једначином:

$$W(\omega) = k \sqrt{\frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T_2)^2}}.$$

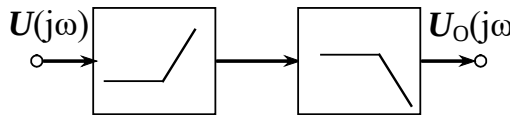
$$W(0) = k.$$

Фазна фреквенцијска карактеристика је одређена једначином:

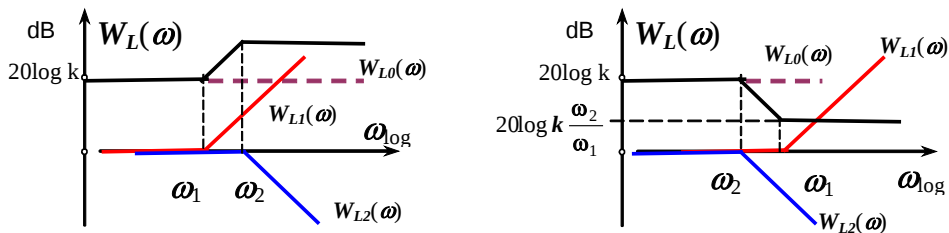
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega),$$

На основу које следи ($\arctg(-x) = -\arctg x$):

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2.$$



Слика 4.19. Еквиваленто коло фреквенцијског ускладника



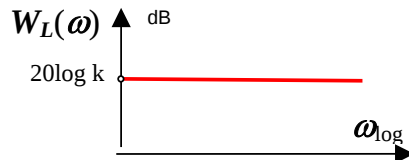
Слика 4.20. Бодеои дијаграми

Ако је $T_1 = T_2 = T$ фреквенцијска карактеристика има облик:

$$W(j\omega) = k \frac{j\omega T - 1}{j\omega T + 1}$$

$$W(\omega) = k$$

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega T$$



Амплитуда сигнала на излазу кола не зависи од учестаности. Фаза излазног сигнала је померена за угао $\varphi(\omega)$. Коло са оваквом карактеристиком се користи као амплитудно фреквенцијски-независан “померач фазе” (*phase shifter with frequency-insensitive amplitude characteristics*).

Помоћу филтра чија фреквенцијска карактеристика има облик:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T - 1}{j\omega T + 1}$$

врши се подешавање фазне фреквенцијске карактеристике, без утицаја на амплитуду излазног сигнала (*all-pass filter*)

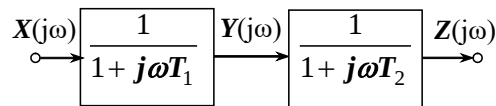
4.4.2. Филтер другог реда, пропусник ниских учестаности

Коло чија је функција преноса дата једначином:

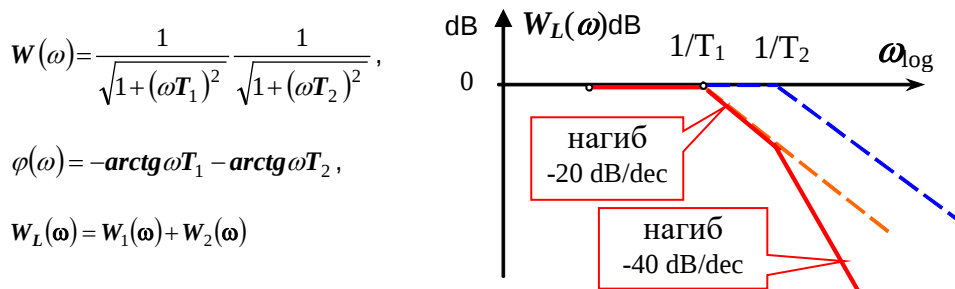
$$W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 + T_2) + 1} = \frac{1}{1 + j\omega T_1} \frac{1}{1 + j\omega T_2}$$

може се представити као редна веза два кола која представљају филтре првог реда, пропуснике ниских учестаности:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega).$$



Слика 4.21. Еквивалентно коло филтра другог реда



Ако је $T_1 = T_2 = T$, функција $W(j\omega)$ има облик:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T)^2 + 2j\omega T + 1} = \frac{1}{(1 + j\omega T)^2}$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика одређена је једначином:

$$W(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T)^2}.$$

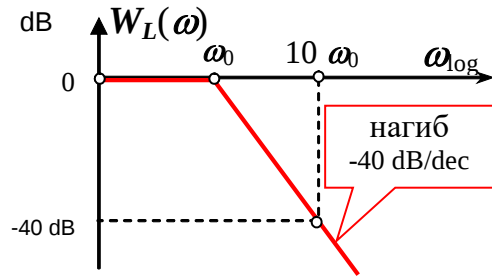
$$W(0) = 1.$$

$$W(\infty) = 0$$

Преломна учестаност, која одговара пресеку асимптота, једнака је:

$$\omega_0 = \frac{1}{T}.$$

$$W_L(\omega_0) = -6 \text{ dB}.$$



Фазна фреквенцијска карактеристика одређена је једначином:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T - \arctg \omega T,$$

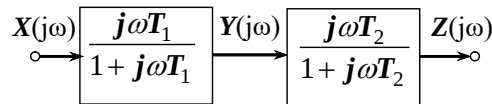
$$\varphi(\omega) = -2\arctg \omega T.$$

4.4.3. Филтер другог реда, пропусник високих учестаности

Коло чија је функција преноса дата једначином:

$$W(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 T_1 T_2}{(j\omega)^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 + T_2) + 1} = \frac{j\omega T_1}{1 + j\omega T_1} \frac{j\omega T_2}{1 + j\omega T_2}$$

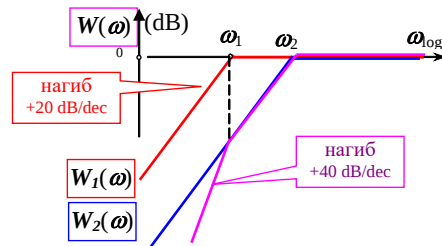
може се представити као редна веза два кола која представљају филтре првог реда, пропуснике високих учестаности.



Слика 4.22. Еквивалентно коло филтра другог реда, пропусника високих учестаности

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)$$

$$W(\omega) = \frac{\omega T_1}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} \frac{\omega T_2}{\sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}$$



Ако је $T_1 = T_2 = T$, функција $W(j\omega)$ има облик:

$$W(j\omega) = \frac{(j\omega T)^2}{(j\omega T)^2 + 2j\omega T + 1} = \frac{(j\omega T)^2}{(1 + j\omega T)^2} = \left(\frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \right)^2$$

Фреквенцијска карактеристика одређена је изразом:

$$W(j\omega) = \left(\frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \right)^2 = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \cdot \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика одређена је једначином:

$$W(\omega) = \frac{(\omega T)^2}{1 + (\omega T)^2}.$$

$$W(0) = 0.$$

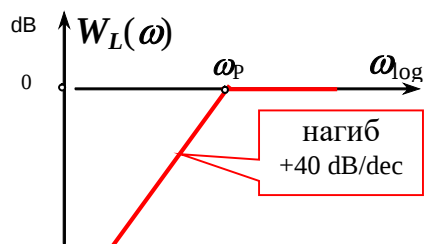
$$W(\infty) = 1.$$

Преломна учестаност је једнака:

$$\omega_P = \frac{1}{T}.$$

Фазна фреквенцијска карактеристика је одређена једначином:

$$\varphi(\omega) = \pi - 2\arctg\omega T$$

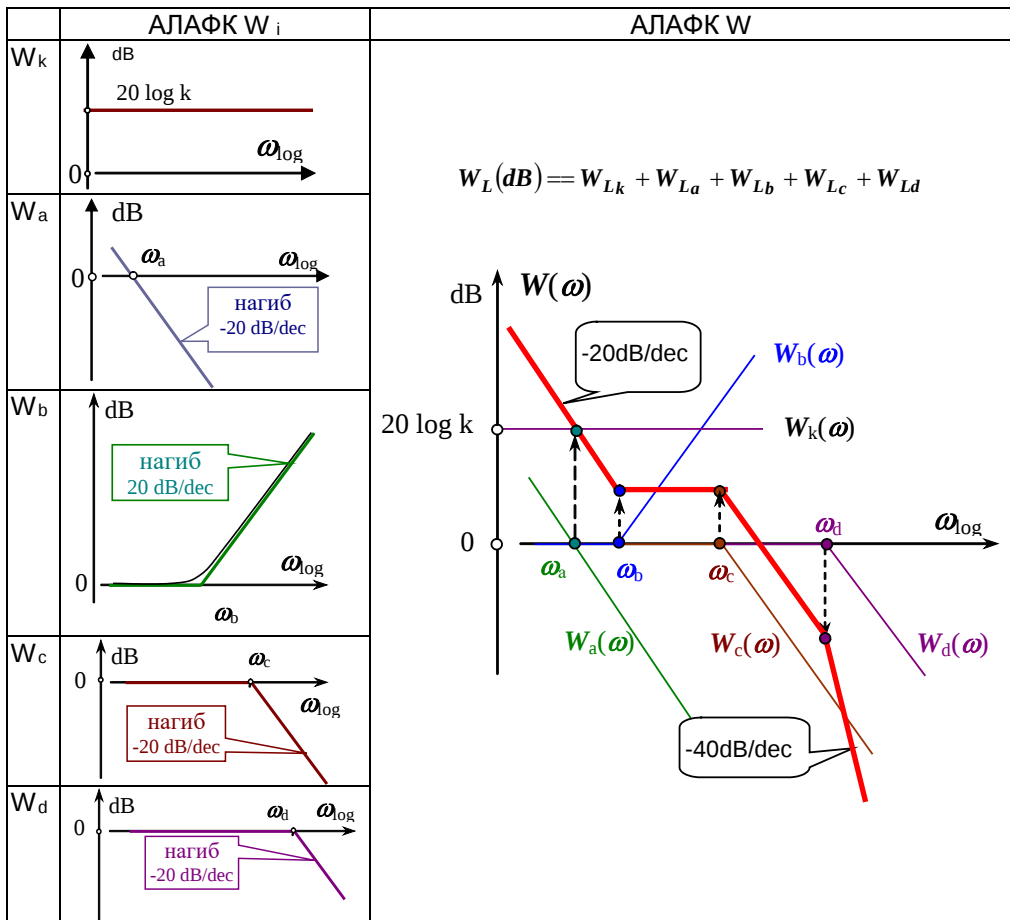


4.4.4. Систем трећег реда

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T_a} \frac{1 + j\omega T_b}{(1 + j\omega T_c)(1 + j\omega T_d)} \quad T_a > T_b > T_c > T_d$$

$$W(j\omega) = k \cdot \frac{1}{j\omega T_a} \cdot (1 + j\omega T_b) \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_c} \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_d} = W_k \cdot W_a \cdot W_b \cdot W_c \cdot W_d$$

$$\omega_a = \frac{1}{T_a}, \quad \omega_b = \frac{1}{T_b}, \quad \omega_c = \frac{1}{T_c}, \quad \omega_d = \frac{1}{T_d}, \quad \omega_a < \omega_b < \omega_c < \omega_d$$



$$W(0) = \infty, \quad W_L(0) = +\infty$$

$$W(\infty) = 0, \quad W_L(\infty) = -\infty$$

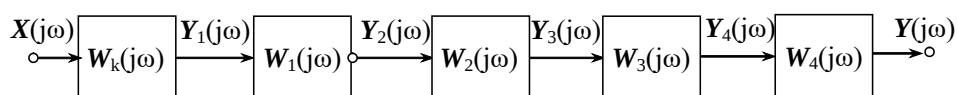
4.4.5. Систем четвртог реда

Фреквенцијска карактеристика система облика:

$$W(j\omega) = \frac{5 \cdot (1 + 0,1j\omega)}{j\omega \cdot (1 + 0,5j\omega) \cdot \left[1 + 0,6 \frac{j\omega}{50} + \left(\frac{j\omega}{50} \right)^2 \right]},$$

се може једноставно анализирати разлагањем на пет подсистема чије су фреквенцијске карактеристике познате:

$$W(j\omega) = 5 \cdot (1 + 0,1j\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{1 + 0,5j\omega} \cdot \frac{1}{1 + 0,6 \frac{j\omega}{50} + \left(\frac{j\omega}{50} \right)^2} = W_k \cdot W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4.$$



	формула	опис	T (s)	ω_x (rad/s)	
W_k	$k=5$	константно појачање			
W_1	$1+0,1j\omega$	нула	$T_1=0,1$	$\omega_1=10$	
W_2	$1/j\omega$	пол у координатном почетку	$T_2=1$	$\omega_2=1$	
W_3	$1/(1+0,5j\omega)$	пол	$T_3=0,5$	$\omega_3=2$	
W_4	$1/[1+2\xi j\omega/50+(j\omega/50)^2]$	пар комплексних полова	$T_1=0,02$	$\omega_4=50$	$\xi=0,3$

$$W(0) = \infty, \quad W_L(0) = +\infty$$

$$W(\infty) = 0, \quad W_L(\infty) = -\infty$$

