DBBT
Digital Broadcasting & Broadband Technologies

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Procesiranje signala

Profesor dr Miroslav Lutovac

"This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein"

Definicija slučajnog signala

- **Deterministički signal** je signal koji je na jedinstven način određen dobro definisanim procesom (može se opisati matematičkim relacijama, tabelama, pravilima)
- **Slučajni signal** je signal čije se vrednosti ne mogu unapred predvideti
- Slučajni signal $\{\xi[n]\}$ se može posmatrati kao jedna moguća realizacija slučajnog procesa opisuje se korišćenjem **statističkih principa**
- **Primena**: govor, muzika, slika, vremenski promenljivi telekomunikacioni kanali, šum, kvantizacija signala, bilo koja informacija koja je funkcija vremena

Diskretni slučajni proces

Neka se vrše merenja u diskretnim vremenskim trenucima $t=nT$ na različitim mestima ψ tada se izmerene vrednosti ξ mogu predstaviti kao funkcija $\xi[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\psi}]$. Skup slučajnih funkcija se naziva ***slučajni proces*** i on može predstavljati

1. **ansambl** ako su $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{\psi}$ promenljive
2. **član ansambla** ako je
   $\boldsymbol{n}$ promenljiva a $\boldsymbol{\psi}$ konstanta
3. **slučajno promenljiva** ako je
   $\boldsymbol{n}$ konstanta a $\boldsymbol{\psi}$ promenljiva
4. **broj** ako su $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{\psi}$ konstante

Osobine slučajnog signala

- **Kumulativna funkcija raspodele** signala $\{\xi[n]\}$ pokazuje sa kojom je verovatnoćom vrednost signala $\xi[n]$ u funkciji indeksa n manja ili jednaka nekoj vrednosti x
- $P(x,n)=$ **Probability** $(\xi[n] \leq x)$
- **Funkcija gustine verovatnoće** definiše se kao izvod kumulativne funkcije raspodele

$$p(x,n) = \frac{\mathrm{d}P(x,n)}{\mathrm{d}x}$$

$$P(x,n) = \int_{-\infty}^{x} p(u,n)\,\mathrm{d}u$$

x i $\xi[n]$ mogu da imaju bilo koju vrednost iz opsega

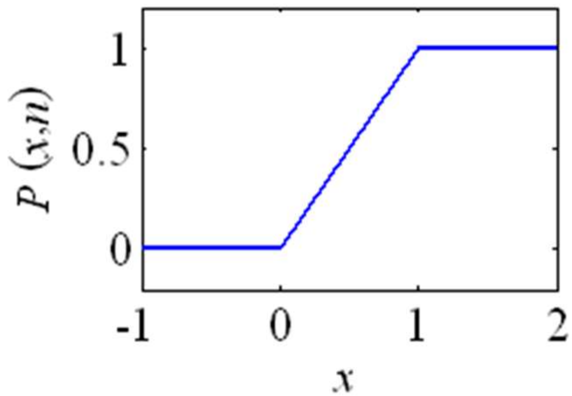
$-\infty < x < +\infty$

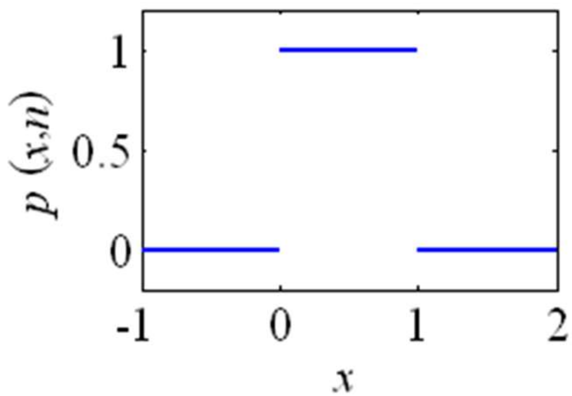
$-\infty < \xi[n] < +\infty$

Primer slučajnog signala

$$P(x,n)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$p(x,n)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$





- Kumulativna funkcija raspodele je linearno rastuća
- Funkcija gustine verovatnoće je konstantna u opsegu $0\leq x\leq 1$

Važnije osobine

pdf (probability density function)
= funkcija gustine verovatnoće

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u,n)\,\mathrm{d}u = 1$$

$$p(x,n) \geq 0, \quad \text{za svako } x$$

cdf (cumulative distribution function)
= kumulativna funkcija raspodele
je monotono neopadajuća funkcija

$$0 \leq P(x,n) \leq 1, -\infty \leq x \leq \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x,n) = 0, \; \lim_{x \to \infty} P(x,n) = 1$$

Srednja vrednost slučajnog procesa

Srednja vrednost slučajnog signala

$$E(\xi[n]) = \int_{-\infty}^{\infty} x \ p(x,n)\,\mathrm{d}x$$

Srednja kvadratna vrednost slučajnog signala

$$E(\xi^2[n]) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ p(x,n)\,\mathrm{d}x$$

***E*(.) je očekivana vrednost**

Varijansa slučajnog procesa

$$\sigma_{\xi}^{2} = E(\xi^{2}[n]) - E^{2}(\xi[n])$$

srednja kvadratna vrednost

kvadrat srednje vrednosti

- **Varijansa** slučajnog signala σ^2
- **Standardna devijacija** slučajnog signala σ

Statističke karakteristike II reda

Združena raspodela verovatnoće

$$P(x, y, n, m) = \text{Probability}(\xi[n] \le x, \zeta[m] \le y)$$

Združena gustina verovatnoće

$$p(x, y, n, m) = \frac{\partial^2 P(x, y, n, m)}{\partial x \, \partial y}$$

Korelacione funkcije

Autokorelaciona funkcija slučajnog procesa

$$r_{\xi\xi}(n,m) = E(\xi[n]\,\xi[m]) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\; p(x,y,n,m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Međukorelacija - kroskorelacija

$$r_{\xi\zeta}(n,m) = E(\xi[n]\,\zeta[m]) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\; p(x,y,n,m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$E(.)$ je očekivana vrednost

Kovarijansa

Autokovarijansa slučajnog procesa

autokorelacija

srednja vrednost

$$\gamma_{\xi\xi}(n,m) = r_{\xi\xi}(n,m) - E(\xi[n])\, E(\xi[m])$$

Kroskovarijansa dva slučajna procesa

$$\gamma_{\xi\zeta}(n,m) = r_{\xi\zeta}(n,m) - E(\xi[n])\, E(\zeta[m])$$

kroskorelacija

Korelisanost dva procesa

Dva slučajna procesa su statistički nezavisna

$$p_{\xi\xi}(x,y,n,m) = p_{\xi}(x,n)\; p_{\xi}(y,m)$$

združena gustina verovatnoće

Dva slučajna procesa su nekorelisana

$$r_{\xi\zeta}(n,m) = E(\xi[n])\; E(\zeta[m])$$

kroskorelacija

srednja vrednost

Stacionarnost slučajnog procesa

- Slučajni proces je **striktno stacionaran** ako
  $\xi[n]$ i $\xi[n+k]$ imaju iste statističke osobine za bilo koje k
  Statističke karakteristike I reda su vremenski nezavisne
  Statističke karakteristike II reda zavise samo od k

- Slučajni proces je **stacionaran u širem smislu**
  ako je srednja vrednost konstantna
  a autokorelaciona funkcija zavisi samo od k

$$\boxed{E(\xi[n]) = \text{const}} \qquad \boxed{r_{\xi\xi}(n, n+k) = r_{\xi\xi}(k)}$$

Ergodičnost

- Slučajni proces koji se predstavlja skupom slučajnih funkcija $\xi[n, \psi]$, za konstantnu vrednost ψ, naziva se **član ansambla**
- Neka je član ansambla predstavljen nizom $\{\xi[n]\}$; ako su statističke osobine jednog predstavnika ansambla **iste** kao i za ceo ansambl, kaže se da je **slučajni proces ergodičan**

Ergodični slučajni procesi

Srednja vrednost (po vremenu)

$$\overline{\xi[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \xi[n]$$

$$\overline{\xi[n,\psi]} = \overline{\xi[n]}$$

Autokorelaciona funkcija

$$\overline{\xi[n]\,\xi[n+k]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \xi[n]\,\xi[n+k] = r_{\xi\xi}(k)$$

Koncept snage slučajnog signala

Snaga pridružena slučajnom signalu $\{\xi[n]\}$

$$P = E\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|\xi[n]\right|^2 \right)$$

- U većini praktičnih slučajeva, operacija izračunavanja očekivane vrednosti i sume mogu da zamene mesta

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E\left(\sum_{n=-N}^{N} \left|\xi[n]\right|^2 \right) = E\left(\left|\xi[n]\right|^2 \right)$$

Snaga stacionarnog slučajnog signala

Snaga stacionarnog slučajnog signala u širem smislu $\{\xi[n]\}$

$$\boxed{P = E\left(\left|\xi[n]\right|^2\right)}$$

- **Srednja snaga** stacionarnog slučajnog signala je jednaka zbiru varijanse i kvadrata srednje vrednosti

$$\boxed{P = \sigma^2 + m^2}$$

Slučajni signali konačne dužine

Procena statističkih osobina slučajnog procesa iz segmenta signala konačne dužine $\{\xi[n]\}$

$$\hat{m} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\xi[n]$$

srednja vrednost

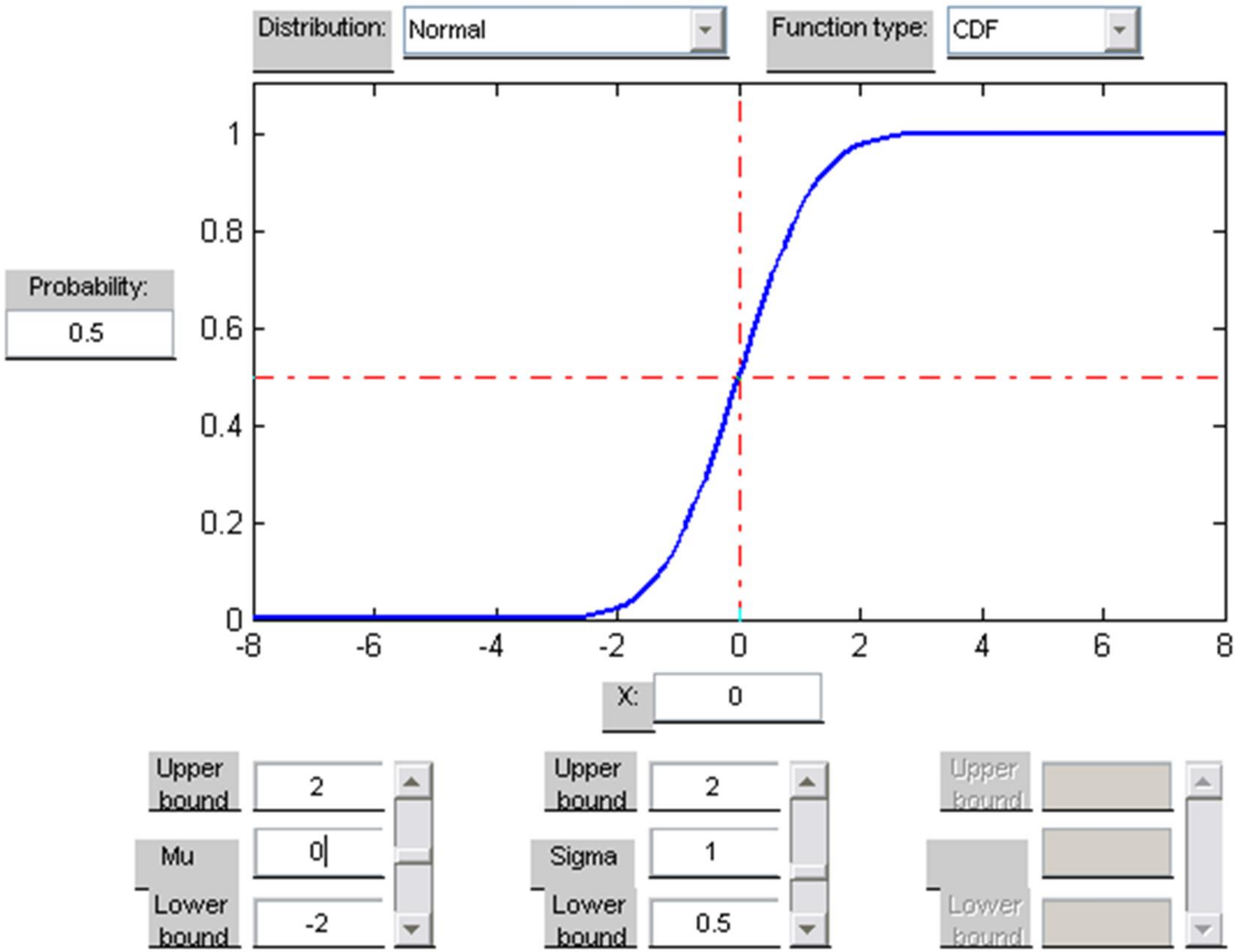
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\xi[n]-\hat{m}\right)^2$$

varijansa

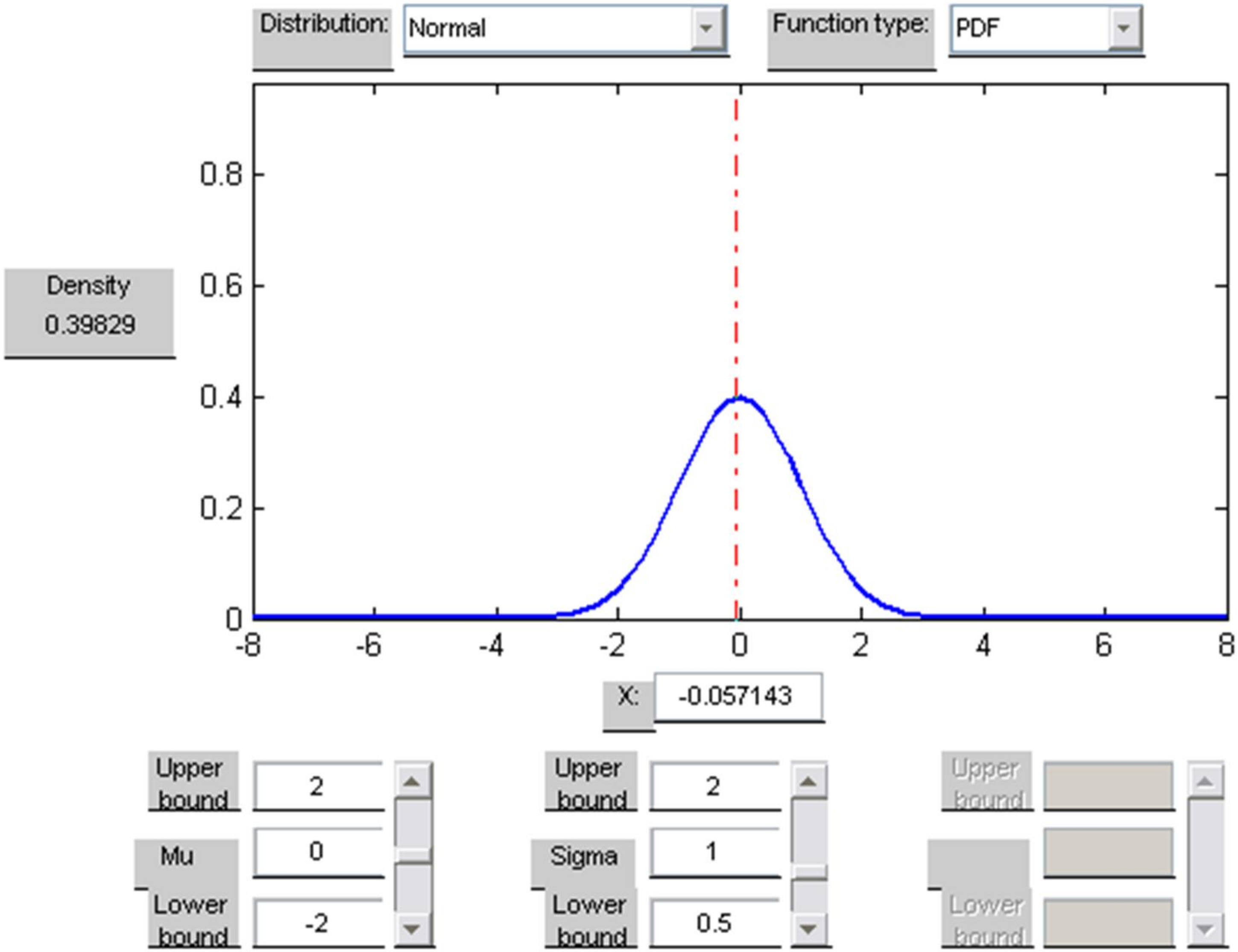
$$\hat{\gamma}[l] = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\xi[n]-\hat{m}\right)\left(\xi[n+l]-\hat{m}\right)$$

autokovarijansa

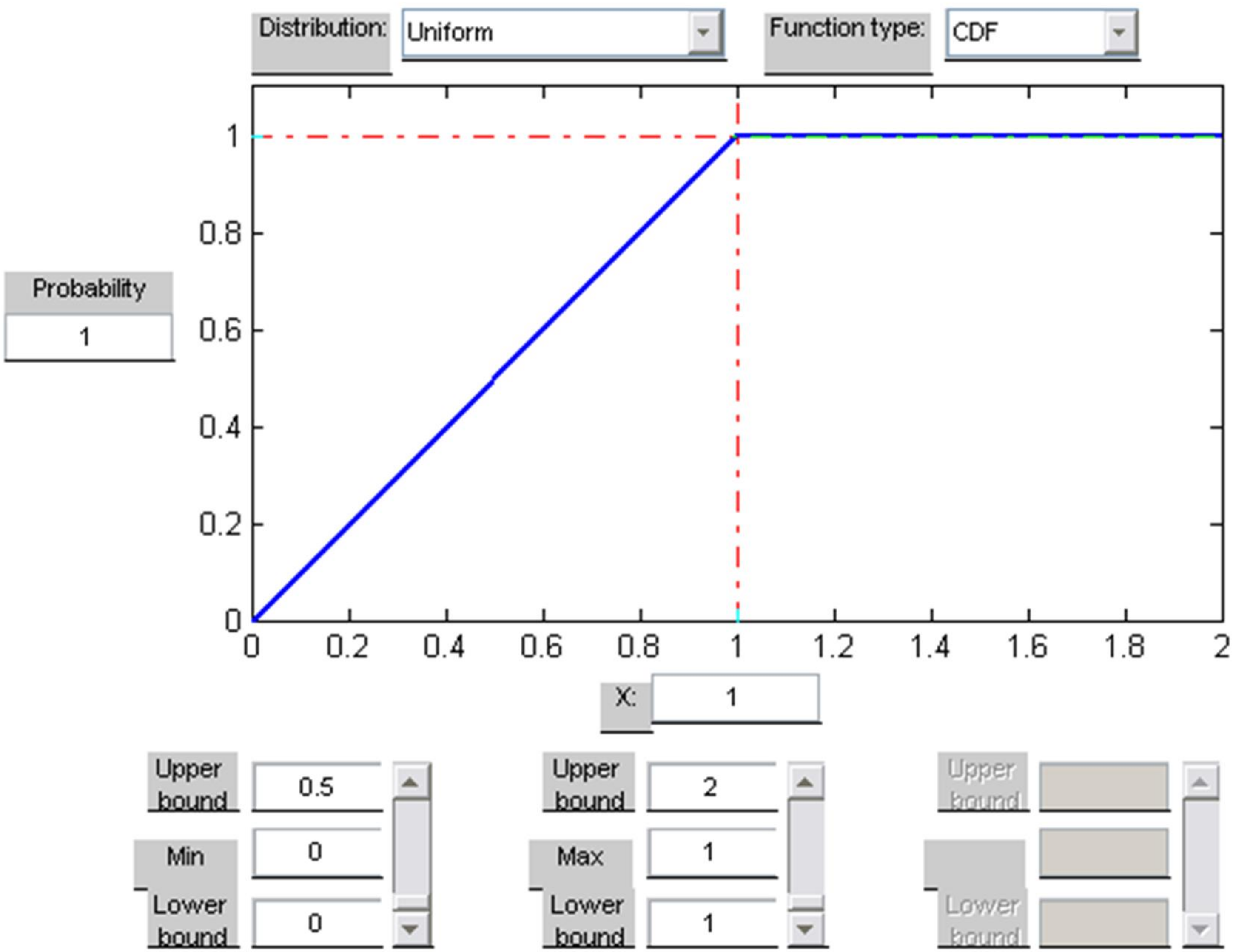
Normalna CDF



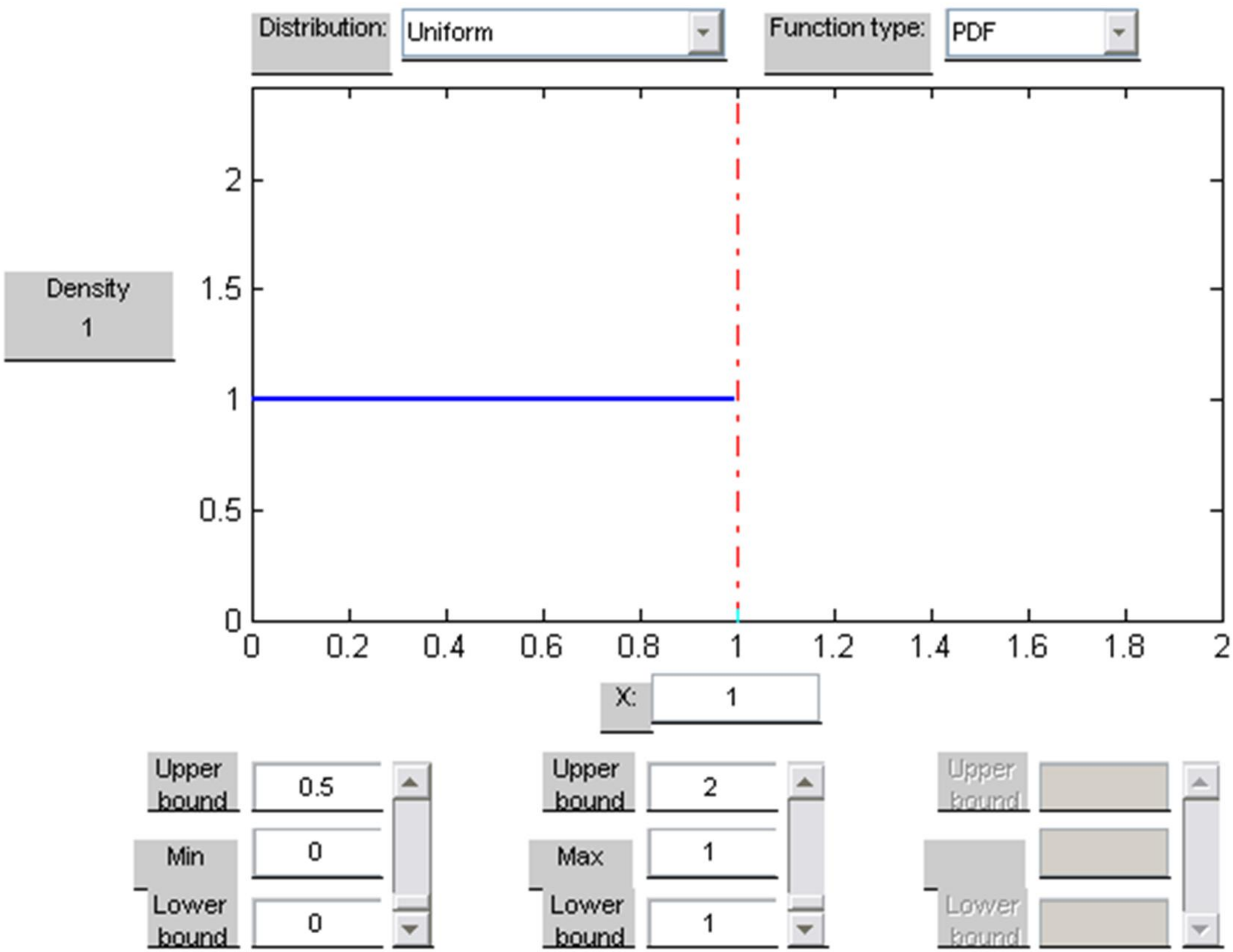
Normalna PDF



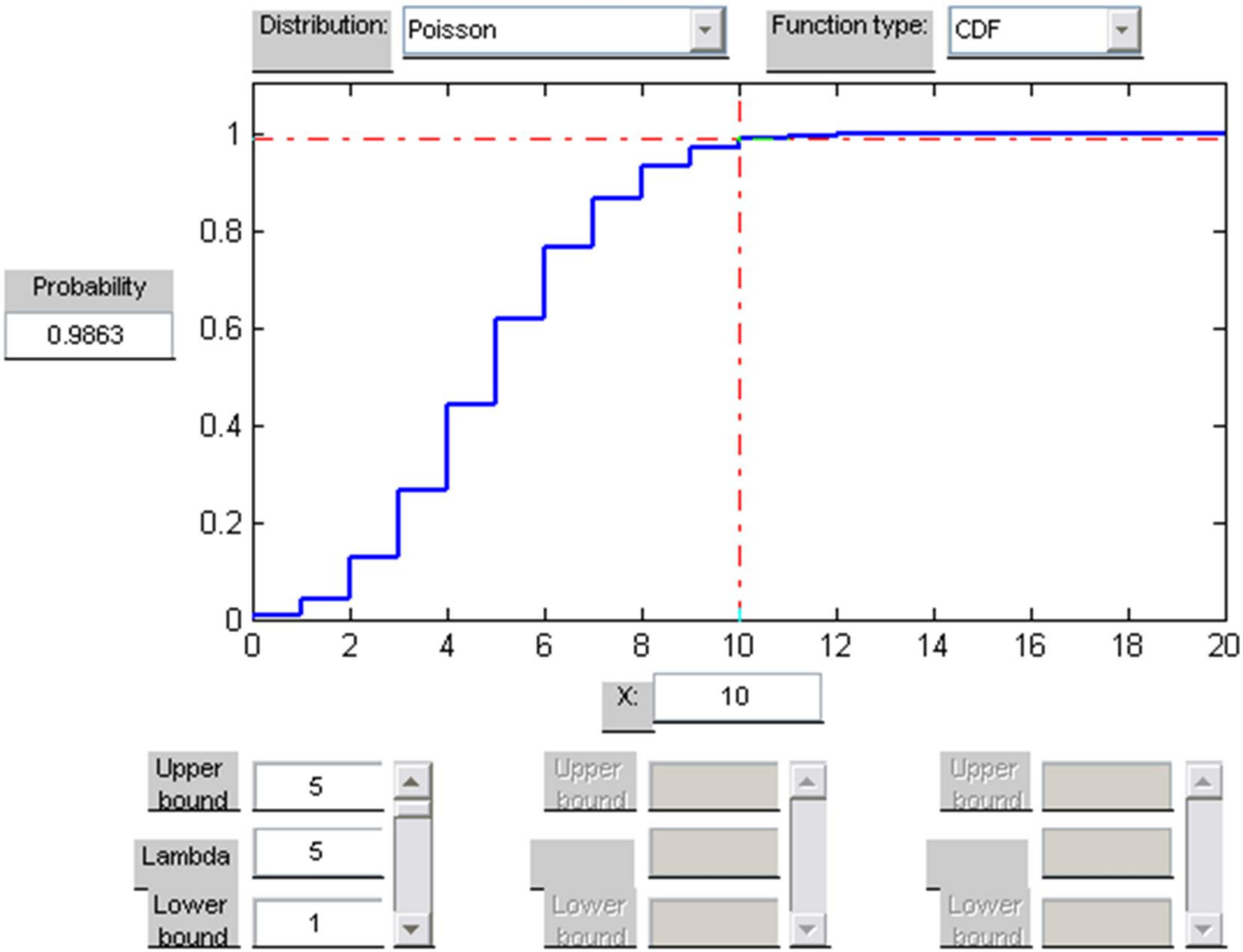
Uniformna CDF



Uniformna PDF

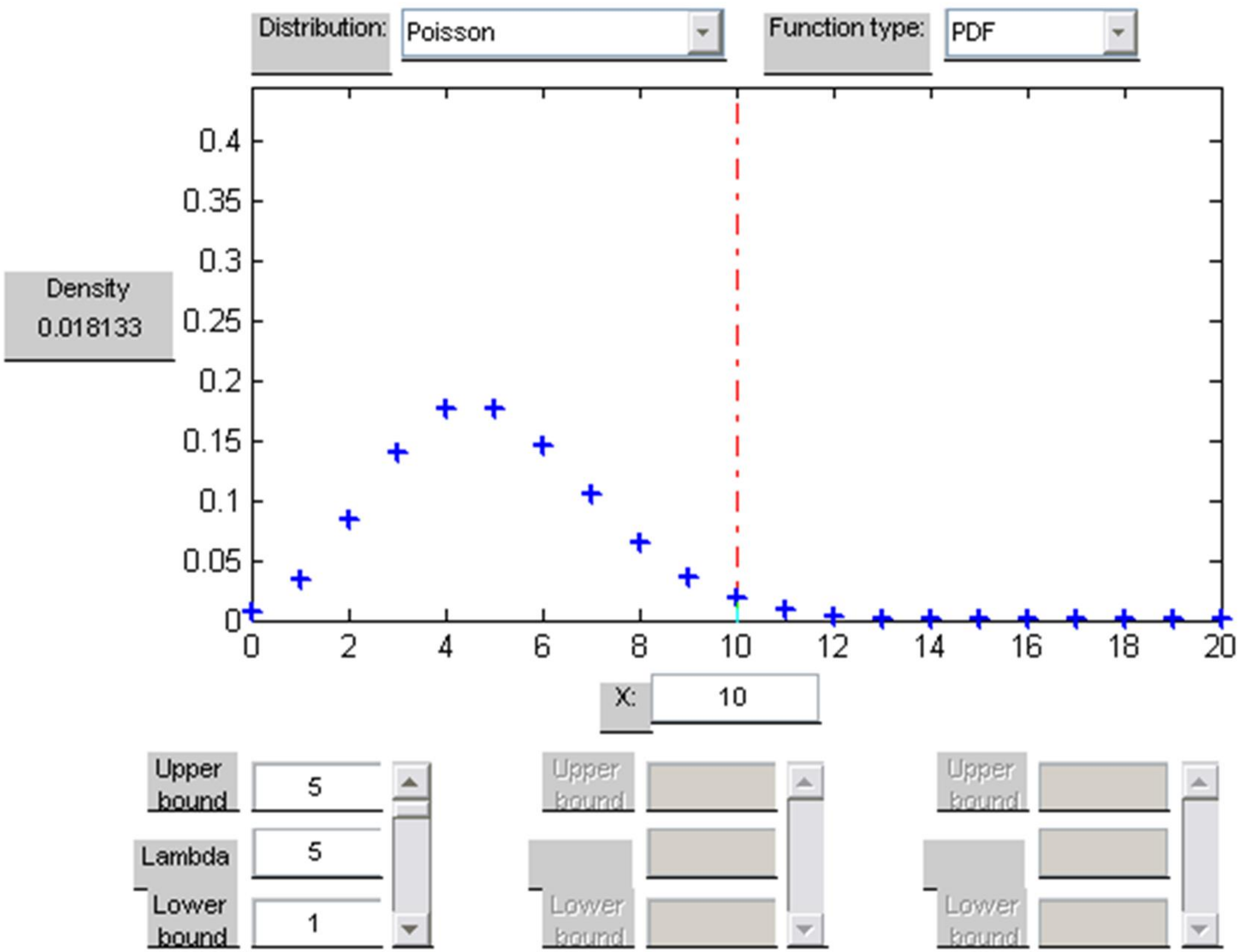


Poisson CDF



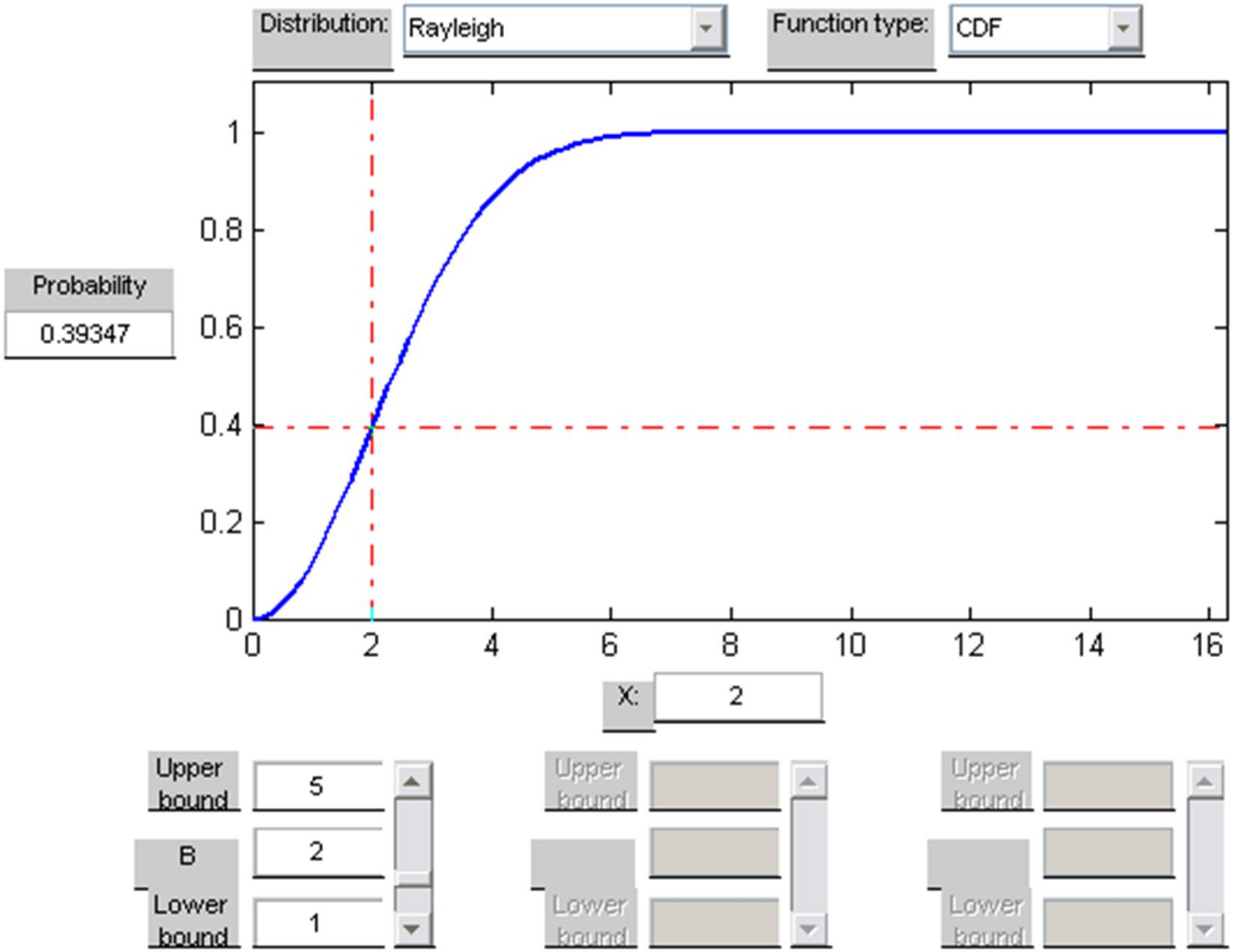
Distribution:
Poisson
Function type:
CDF
Probability
0.9863
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
X:
10
Upper bound
5
Lambda
5
Lower bound
1
Upper bound
Lower bound
Upper bound
Lower bound

Poisson PDF

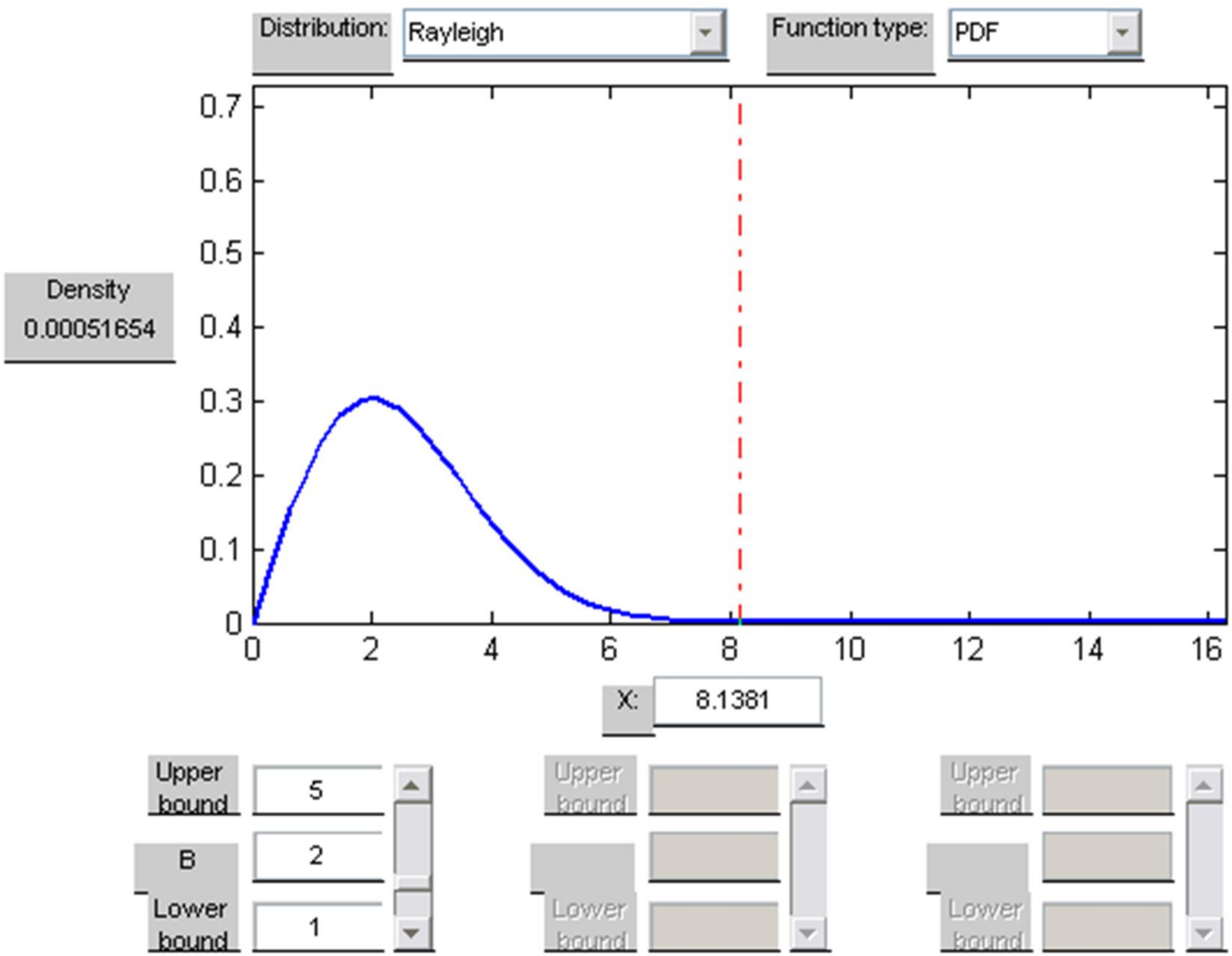


Distribution:
Poisson
Function type:
PDF
Density
0.018133
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
X:
10
Upper bound
5
Lambda
5
Lower bound
1
Upper bound
Lower bound
Upper bound
Lower bound

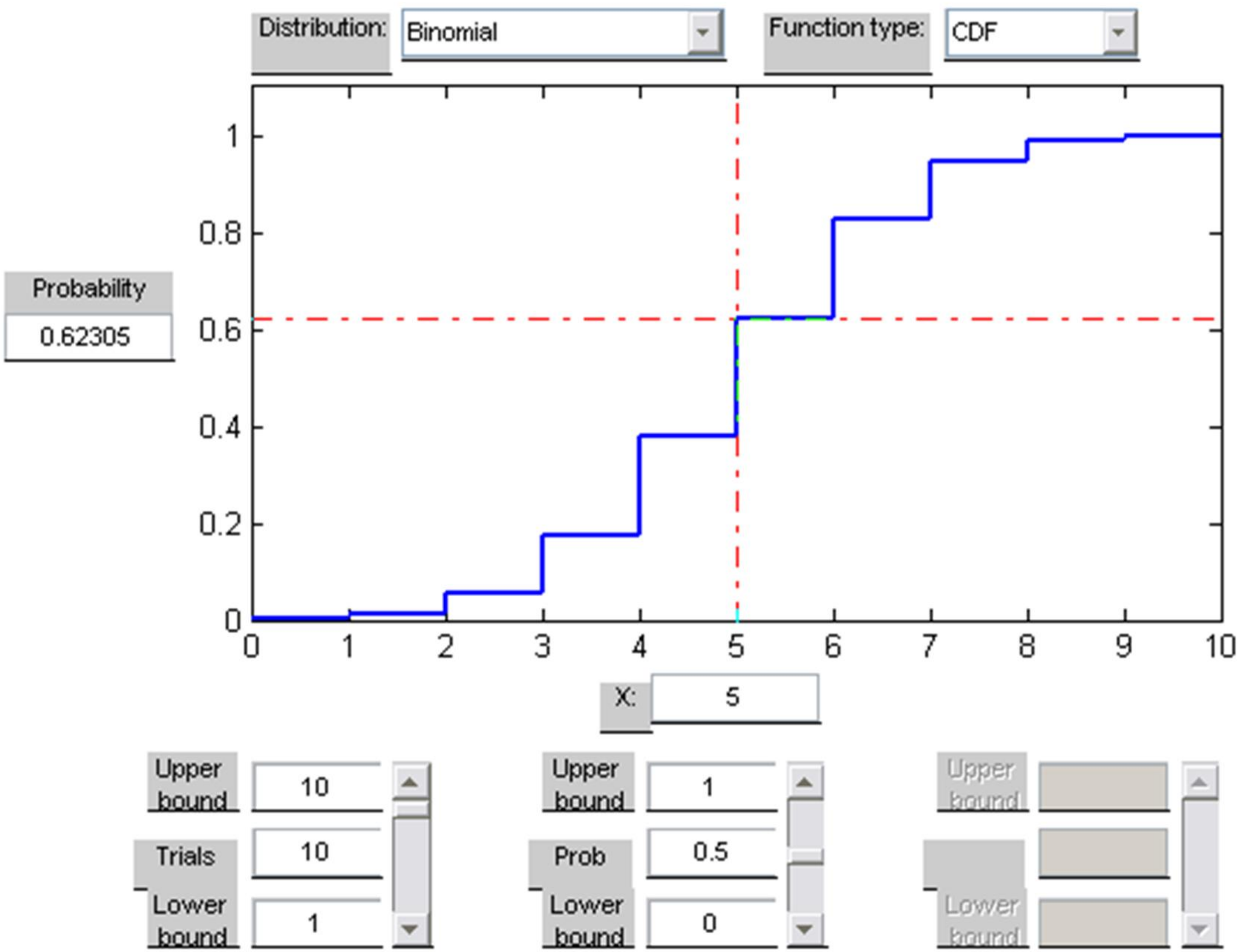
Rayleigh CDF



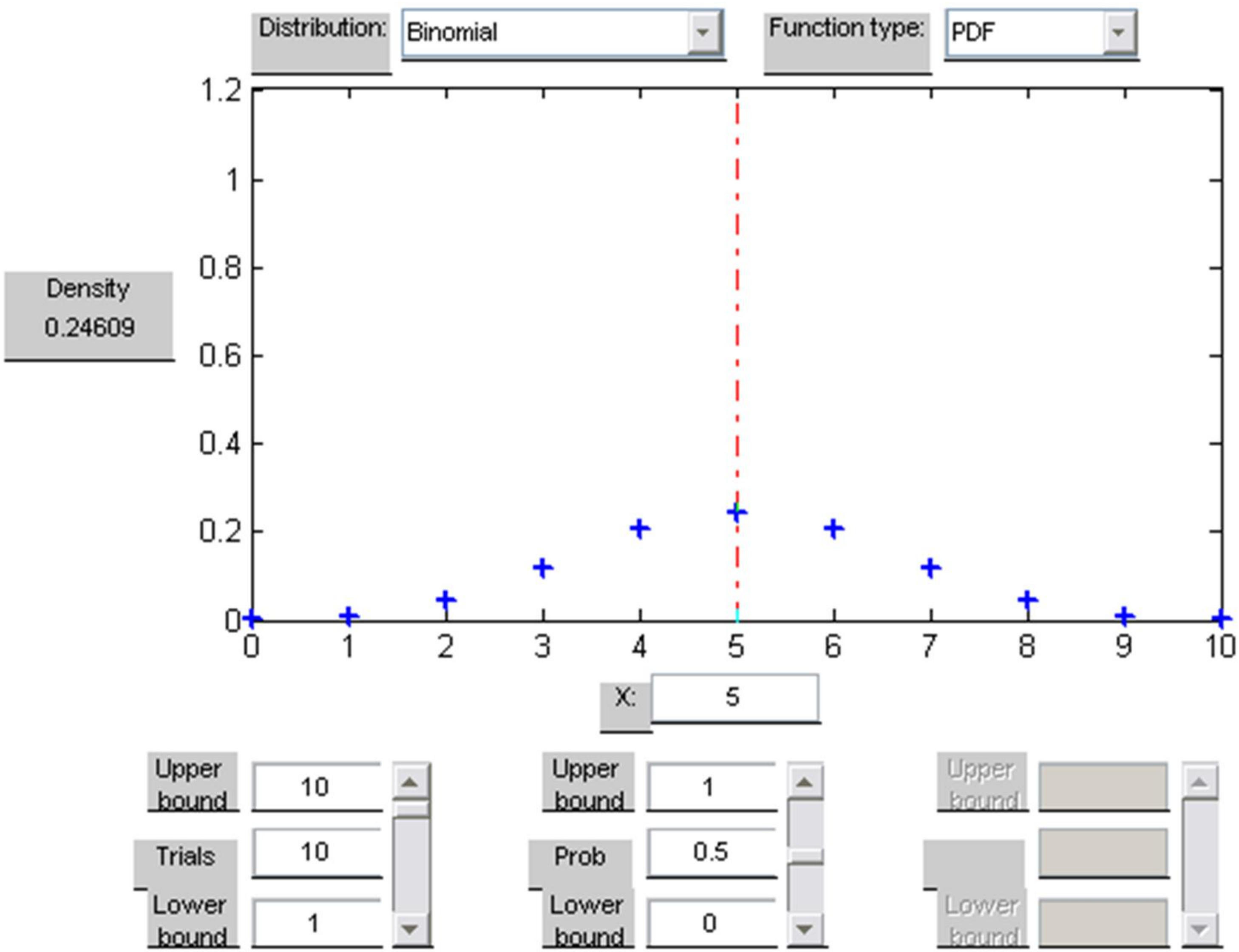
Rayleigh PDF



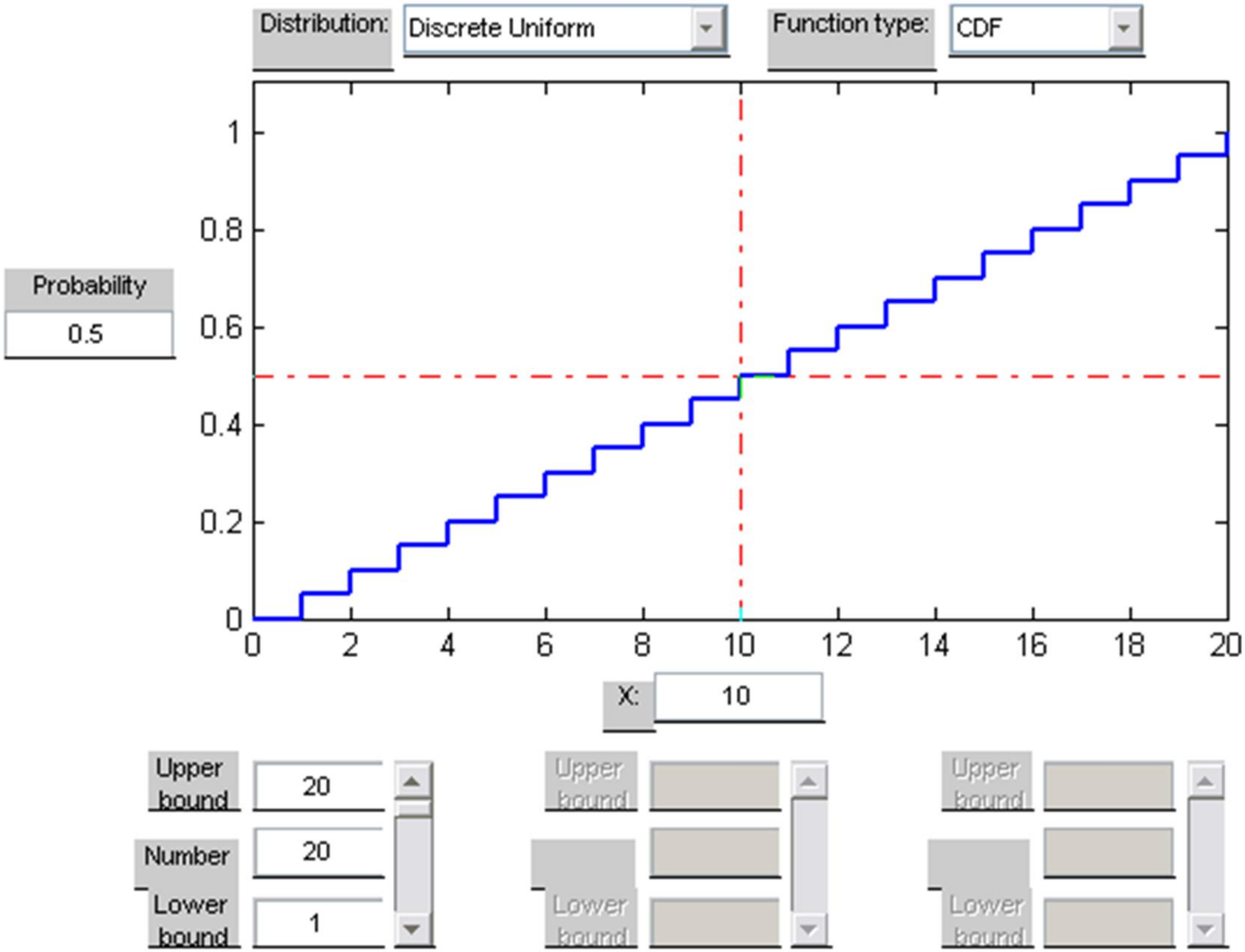
Binomial CDF



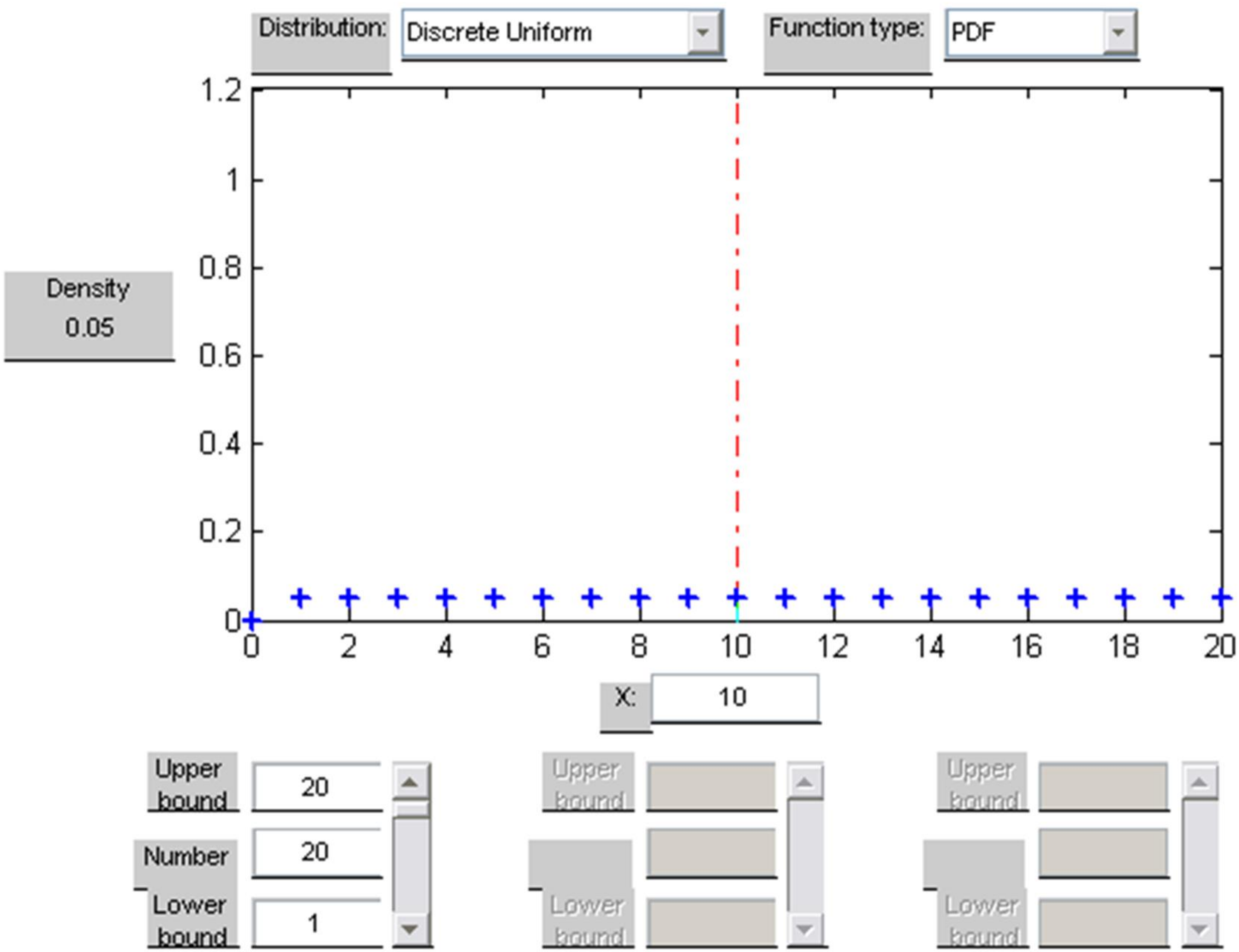
Binomial PDF



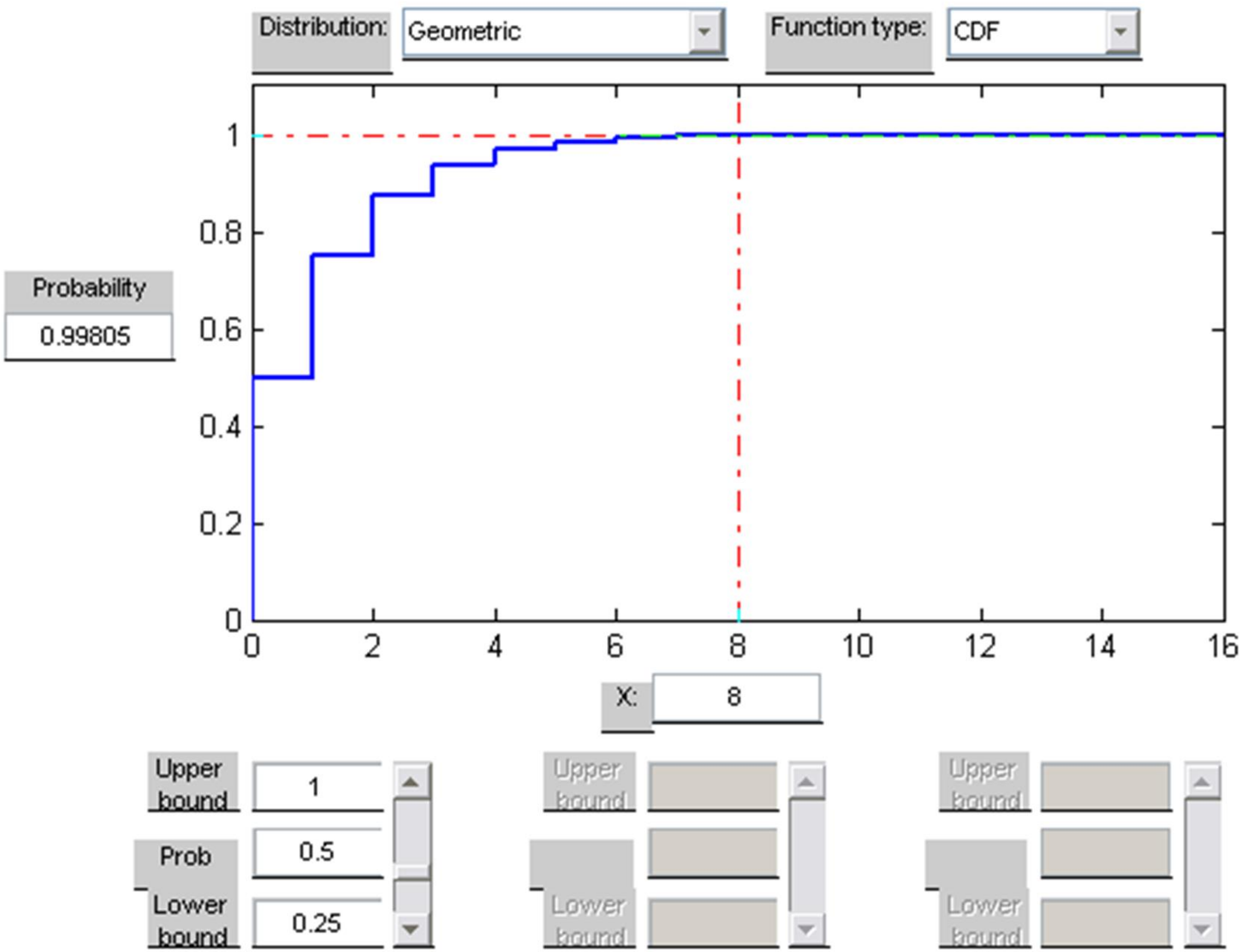
Diskretna uniformna CDF



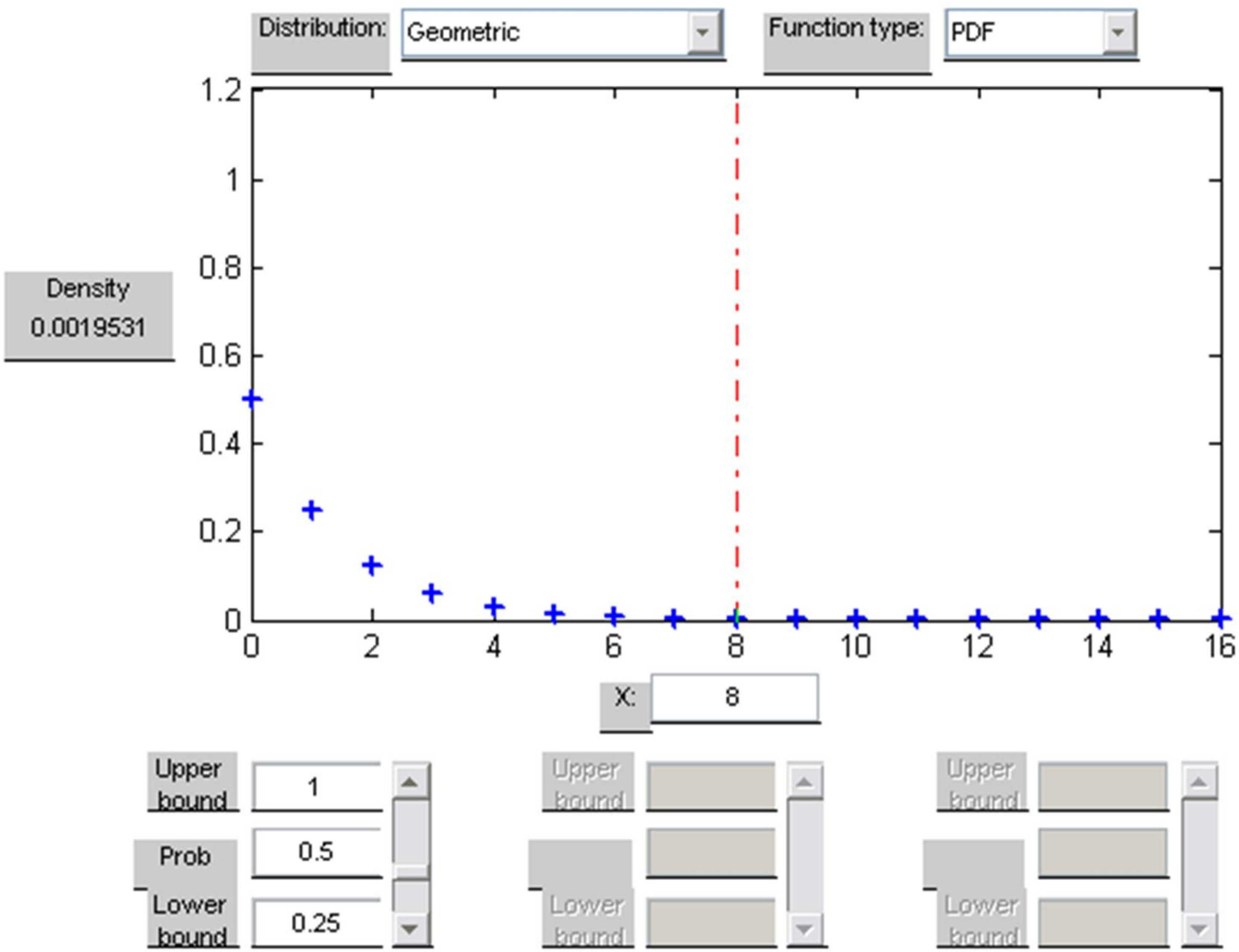
Diskretna uniformna PDF



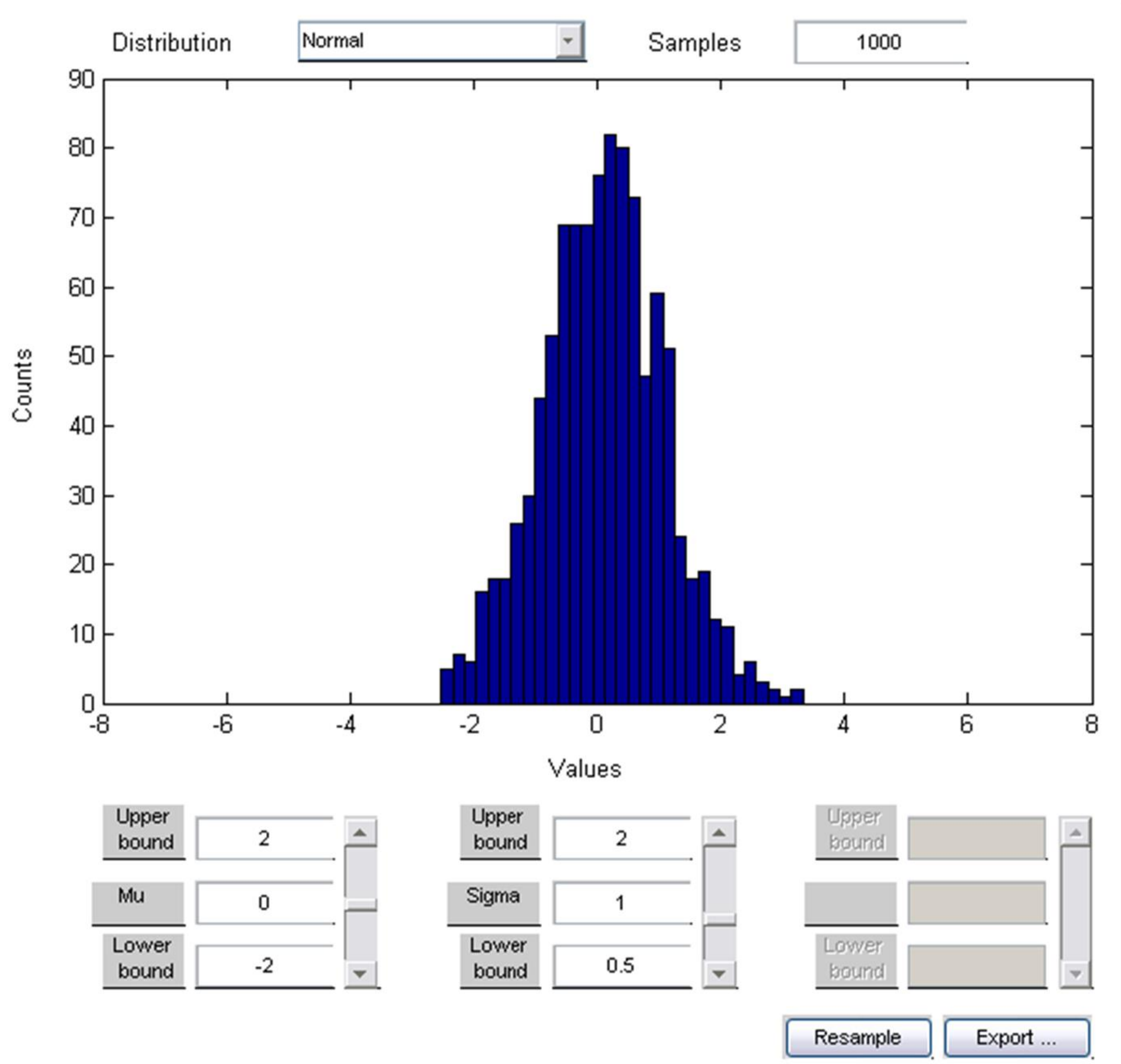
Geometric CDF



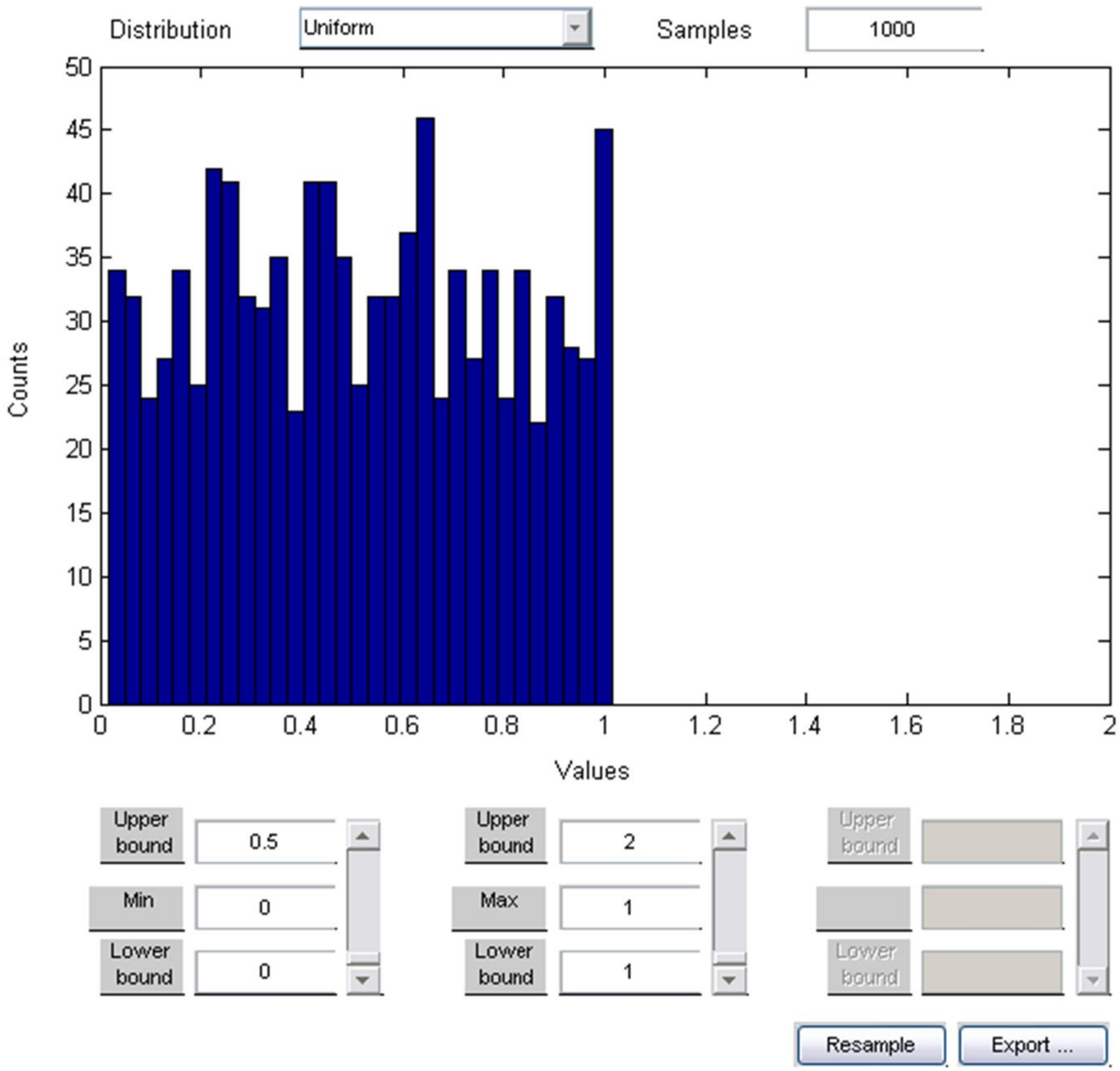
Geometric PDF



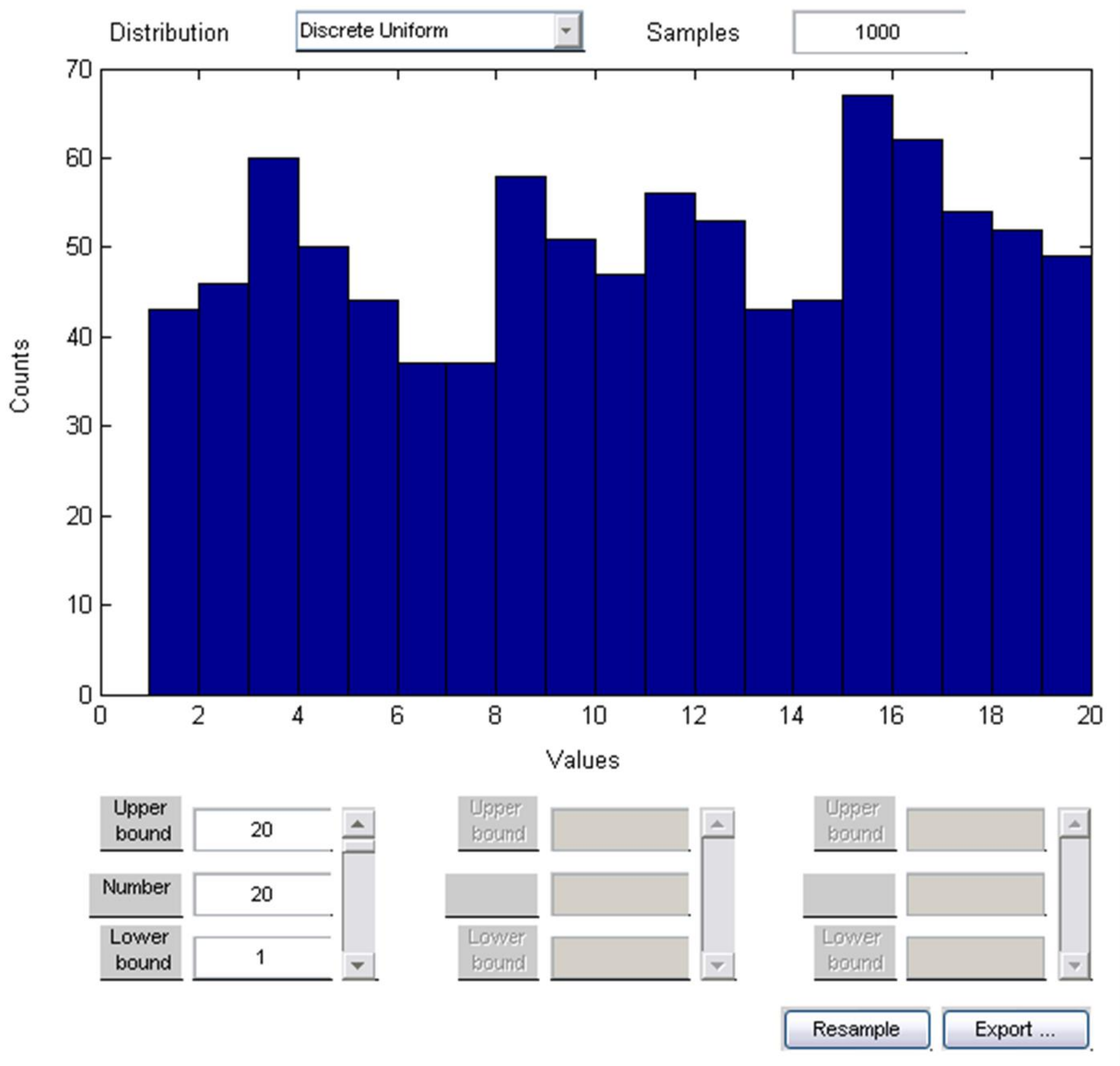
Normalna raspodela - generator



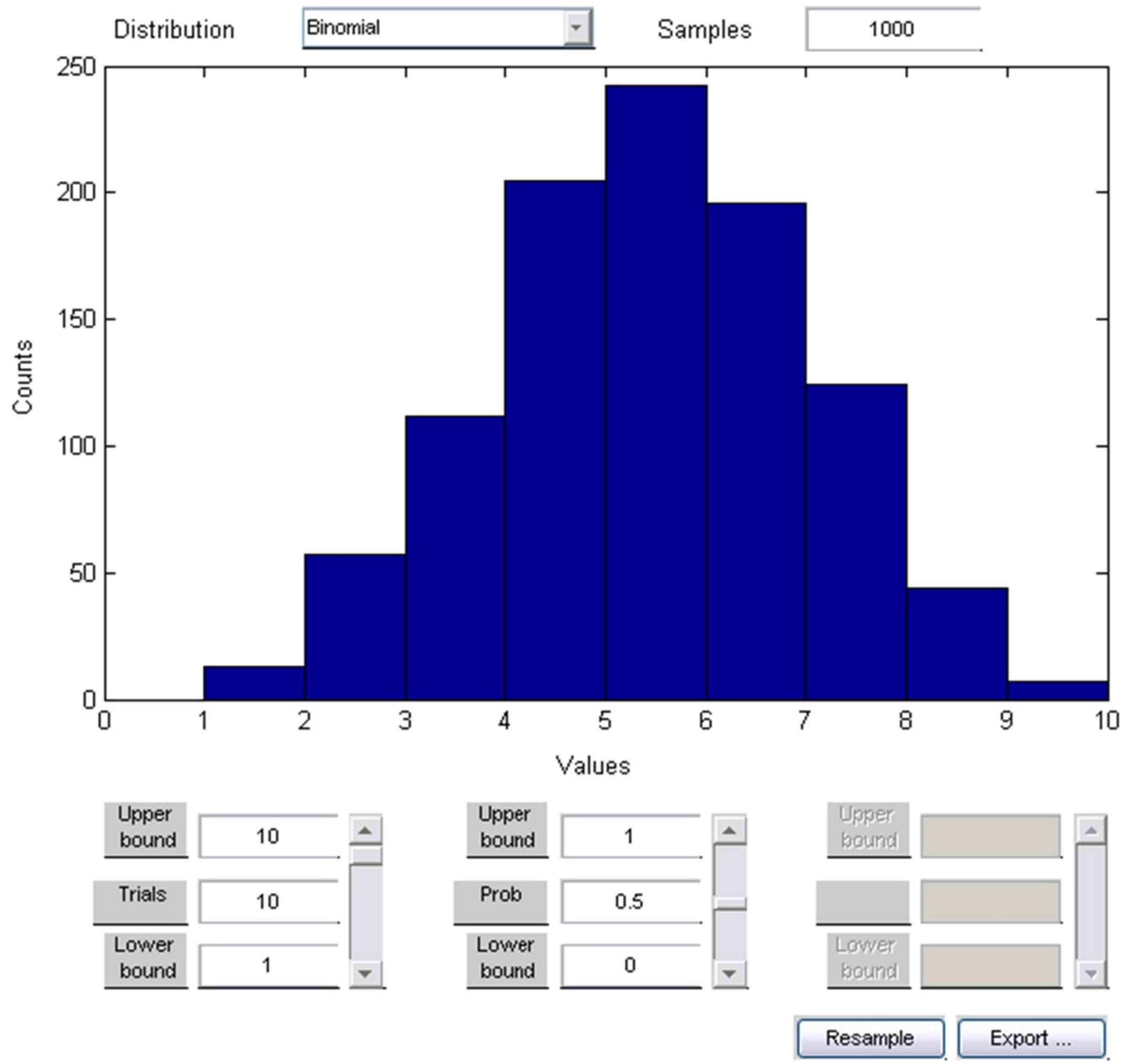
Uniformna raspodela - generator



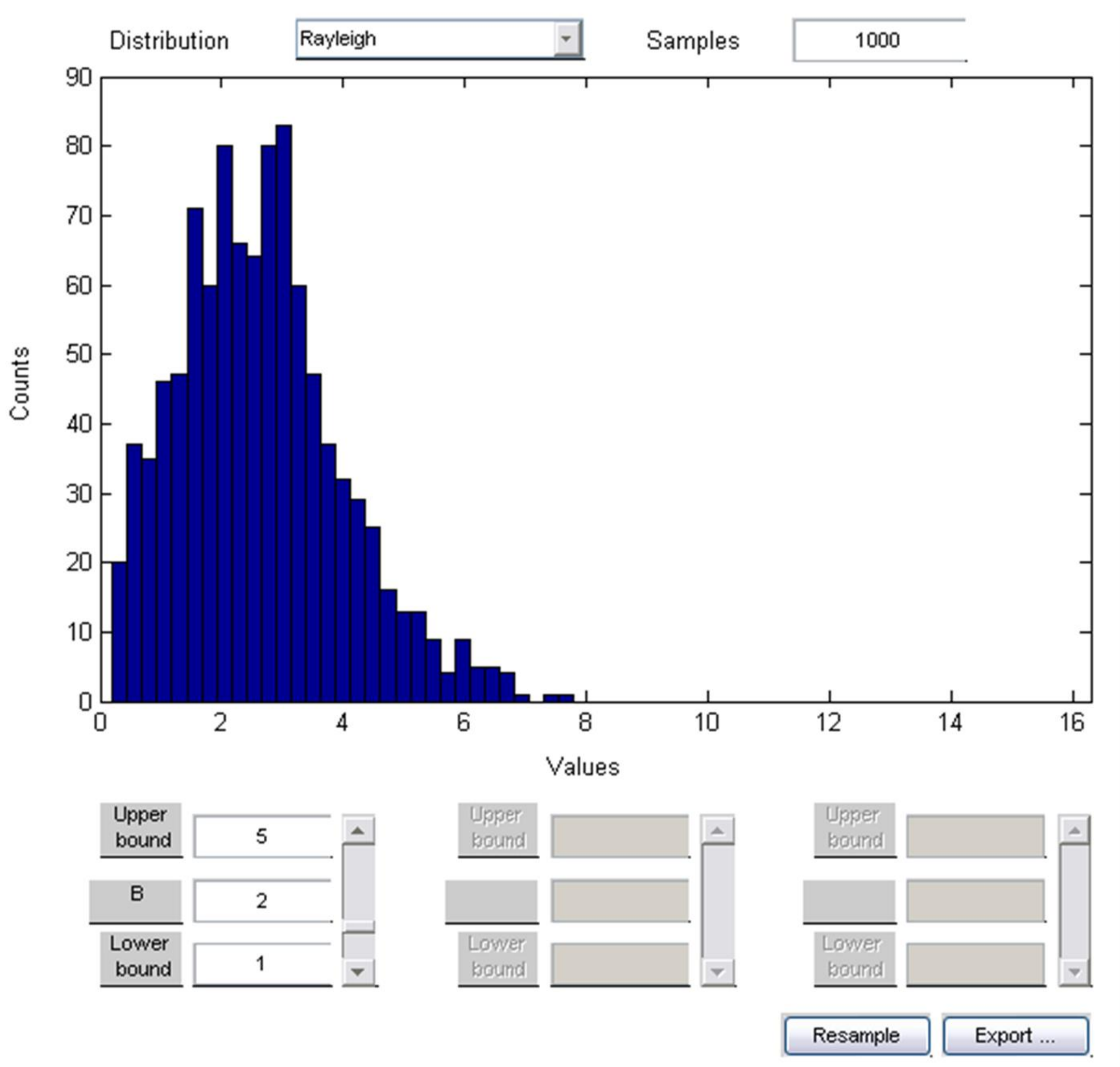
Diskretna uniformna raspodela



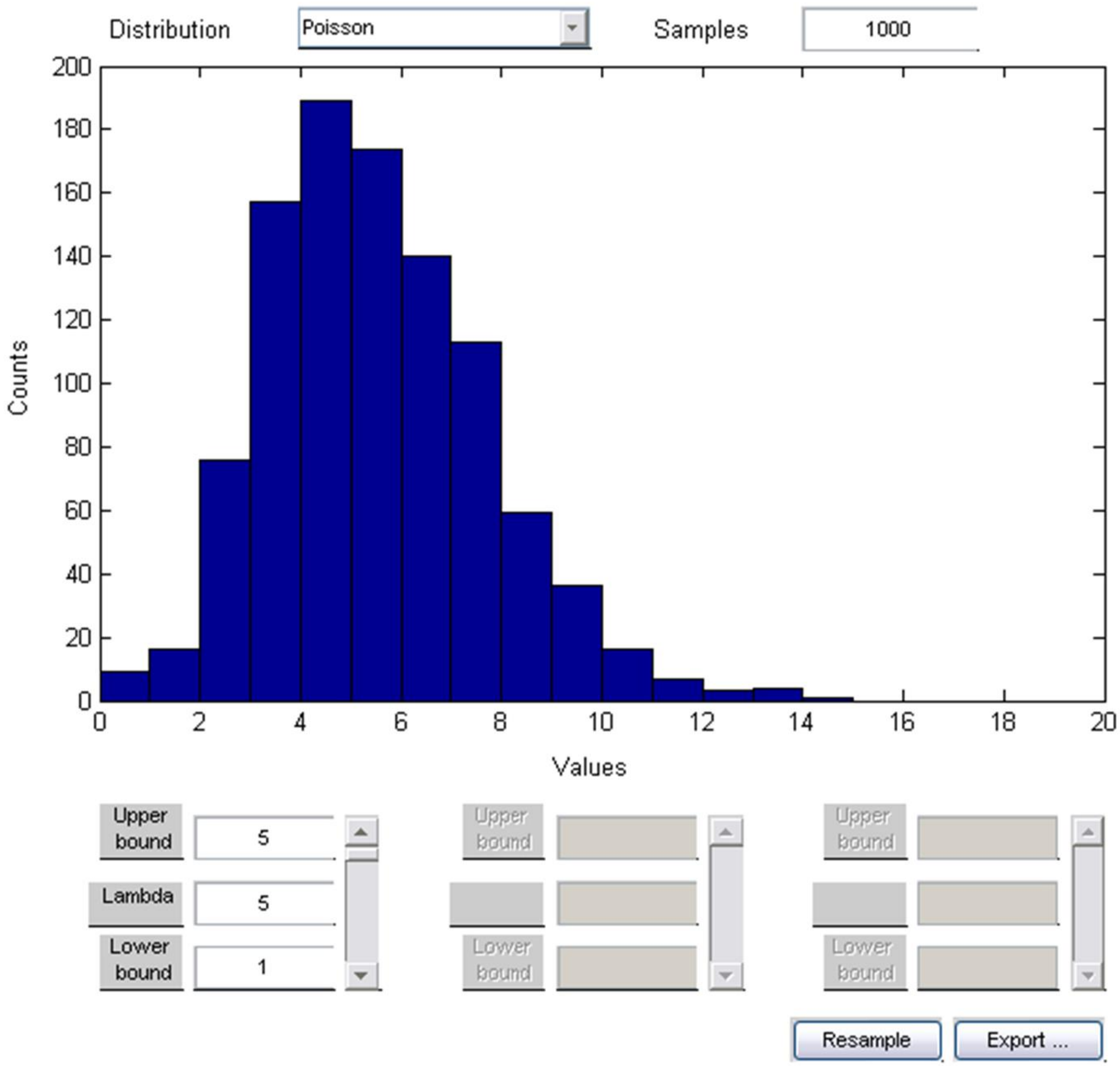
Binomial raspodela



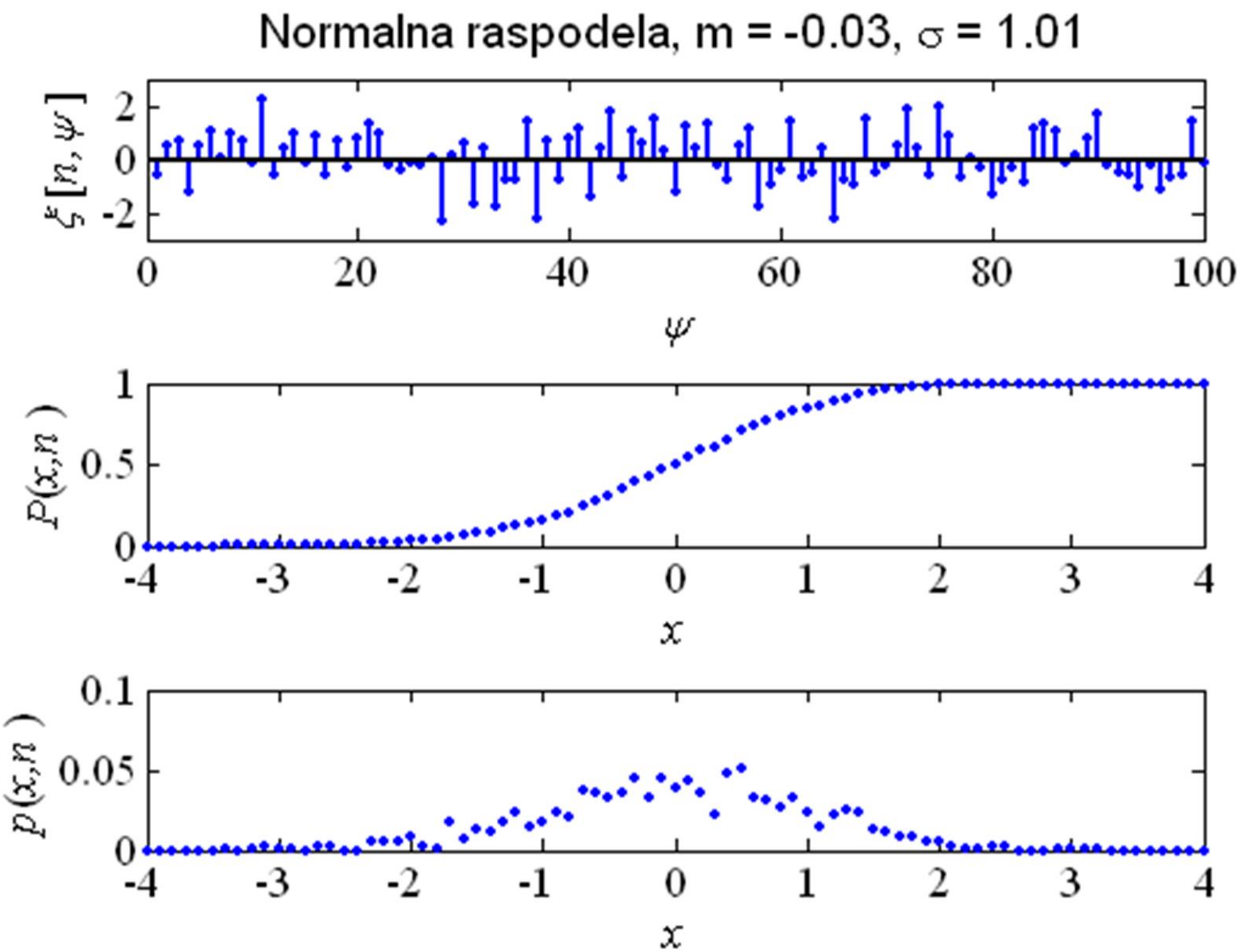
Rayleigh raspodela



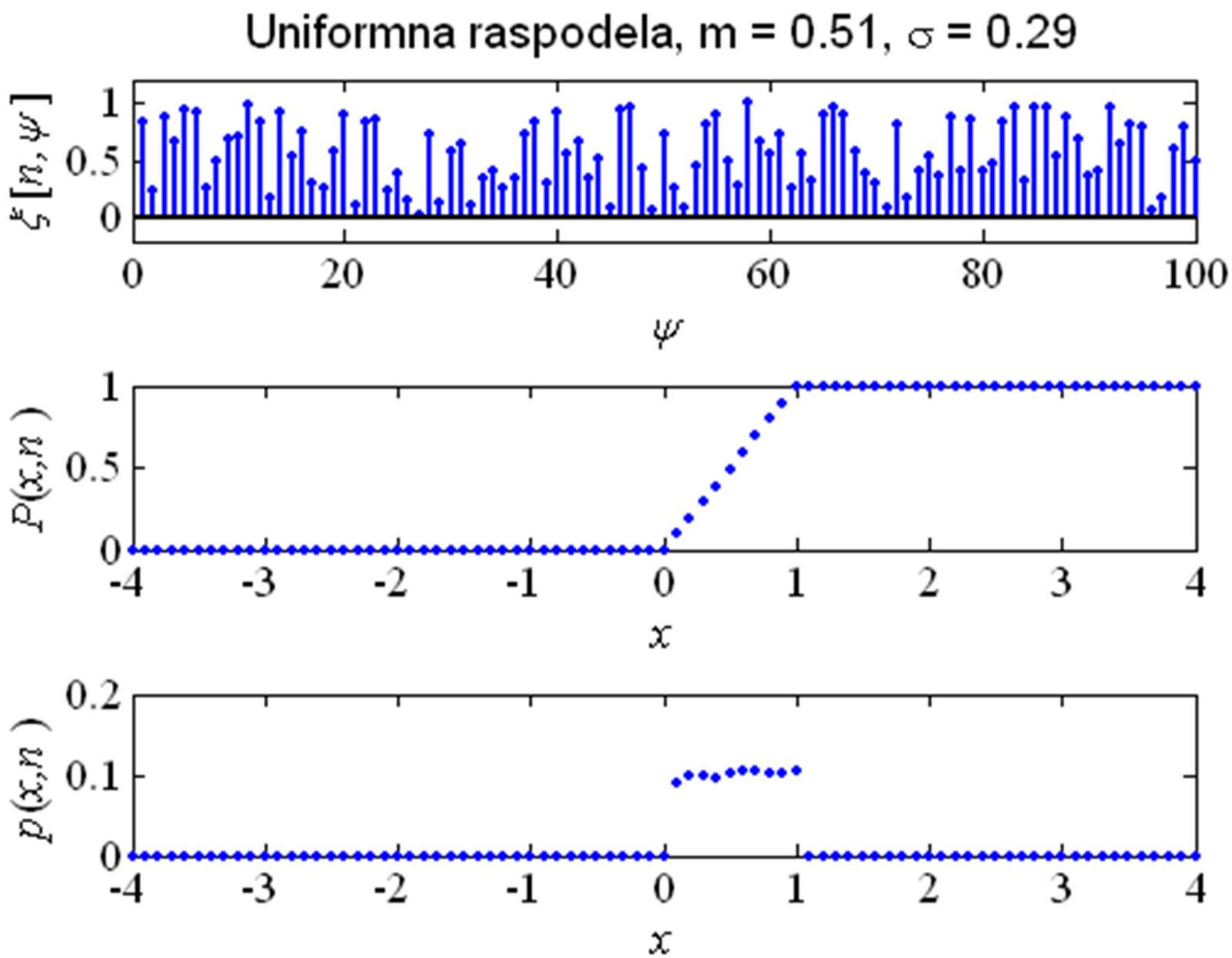
Poisson raspodela



Generisanje sekvence - normalna



Generisanje sekvence - uniformna



Matlab kod (1)

```
% Program os2_01_02
% normalna raspodela

clear all, close all; clc
set(0,'DefaultLineLineWidth',2)
fs = 14;
fontname = 'Times New Roman';
```

Inicijalizacija

```
N = 1000;
x=random('normal',0,1,1,N);
m = mean(x)
s = std(x)
```

Generisanje signala
i izračunavanje
statističkih karakteristika

Matlab kod (2)

```
f = -4:0.1:4;
P = [];
for ind = 1:length(f)
  P = [P sum(x<=f(ind))];
end
p = [0];
for ind = 2:length(f)
  p = [p sum(x<=f(ind)&x>=f(ind-1))];
end
```

izračunavanje statističkih karakteristika

Matlab kod (3)

```
subplot(3,1,1)
stem(x,'Marker','.')
axis([0 N/10 -3 3])

xlabel('\it\psi')
ylabel('{\it\xi} [{\itn,\psi} ]')

title(['Normalna raspodela, m = ' ...
  num2str(round(m*100)/100) ', \sigma = ` ...
  num2str(round(s*100)/100)])
set(get(gca,'Title'),'FontSize',fs);
set(get(gca,'XLabel'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);
set(get(gca,'YLabel'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);
```

crtanje

Matlab kod (4)

```
subplot(3,1,2)
plot(f,P/N,'.')
ylabel('{\itP}({\itx,n} )')
xlabel('\itx')
set(get(gca,'XLabel'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);
set(get(gca,'YLabel'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);

subplot(3,1,3)
plot(f,p/N,'.')
ylabel('{\itp}({\itx,n })')
xlabel('\itx')
```

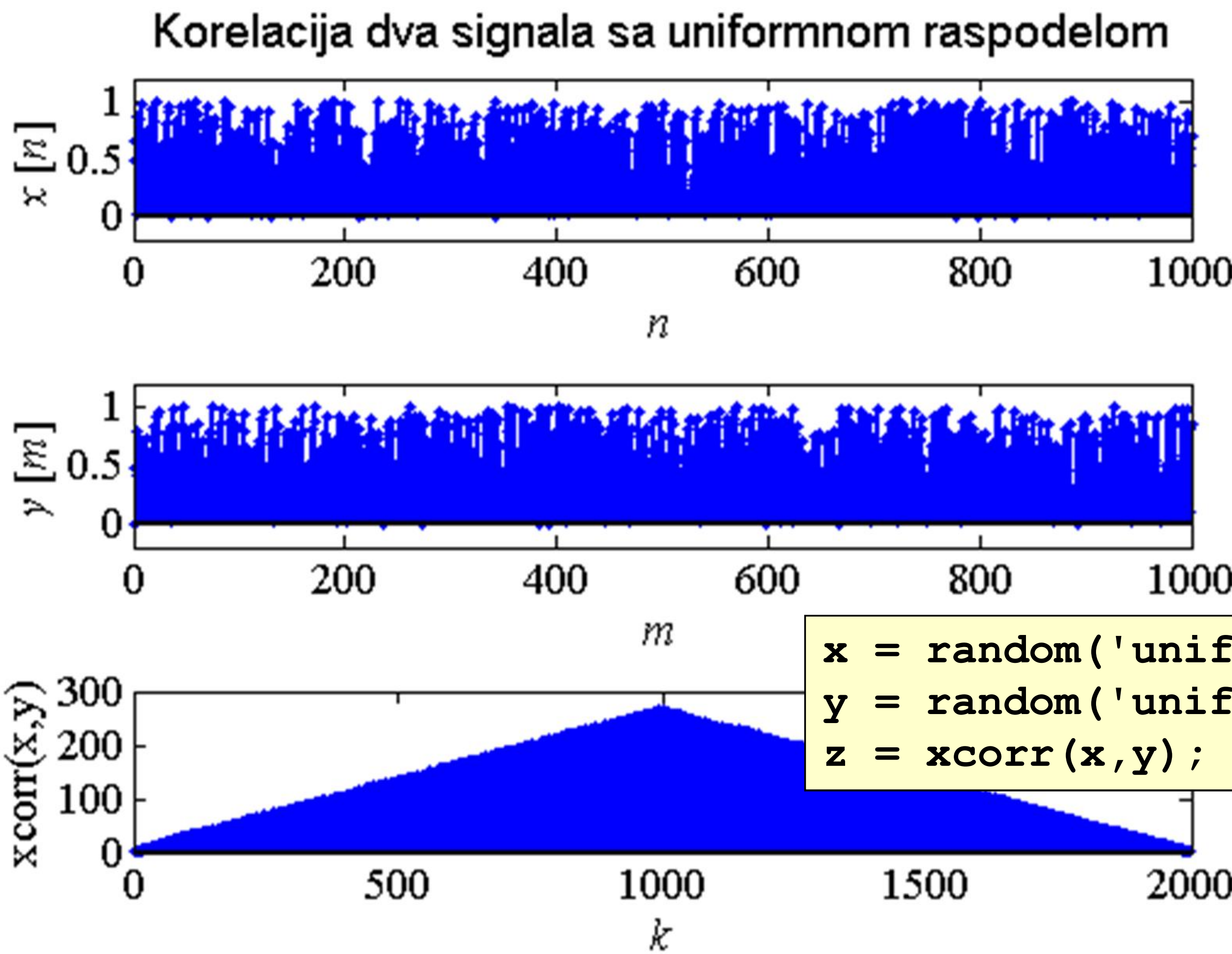
crtanje

Matlab kod (5)

```
set(gcf,'Name','Slucajni signali','NumberTitle','off')
set(findobj('Type','axes'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);
set(findobj('Type','text'),'FontName',fontname);
set(get(gca,'XLabel'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);
set(get(gca,'YLabel'),'FontName',fontname,'FontSize',fs);
```

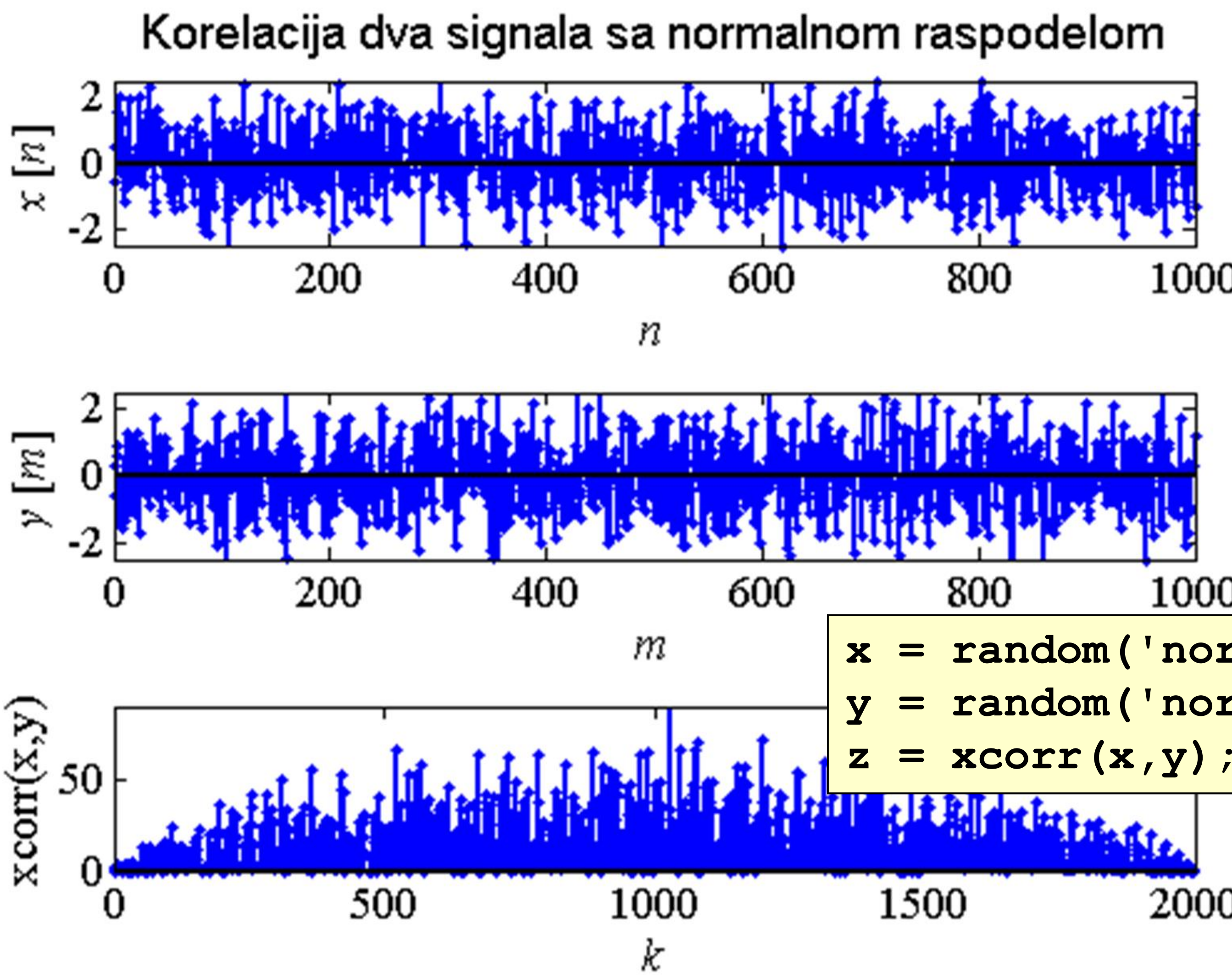
izbor slova

Korelacija dve sekvence (1)



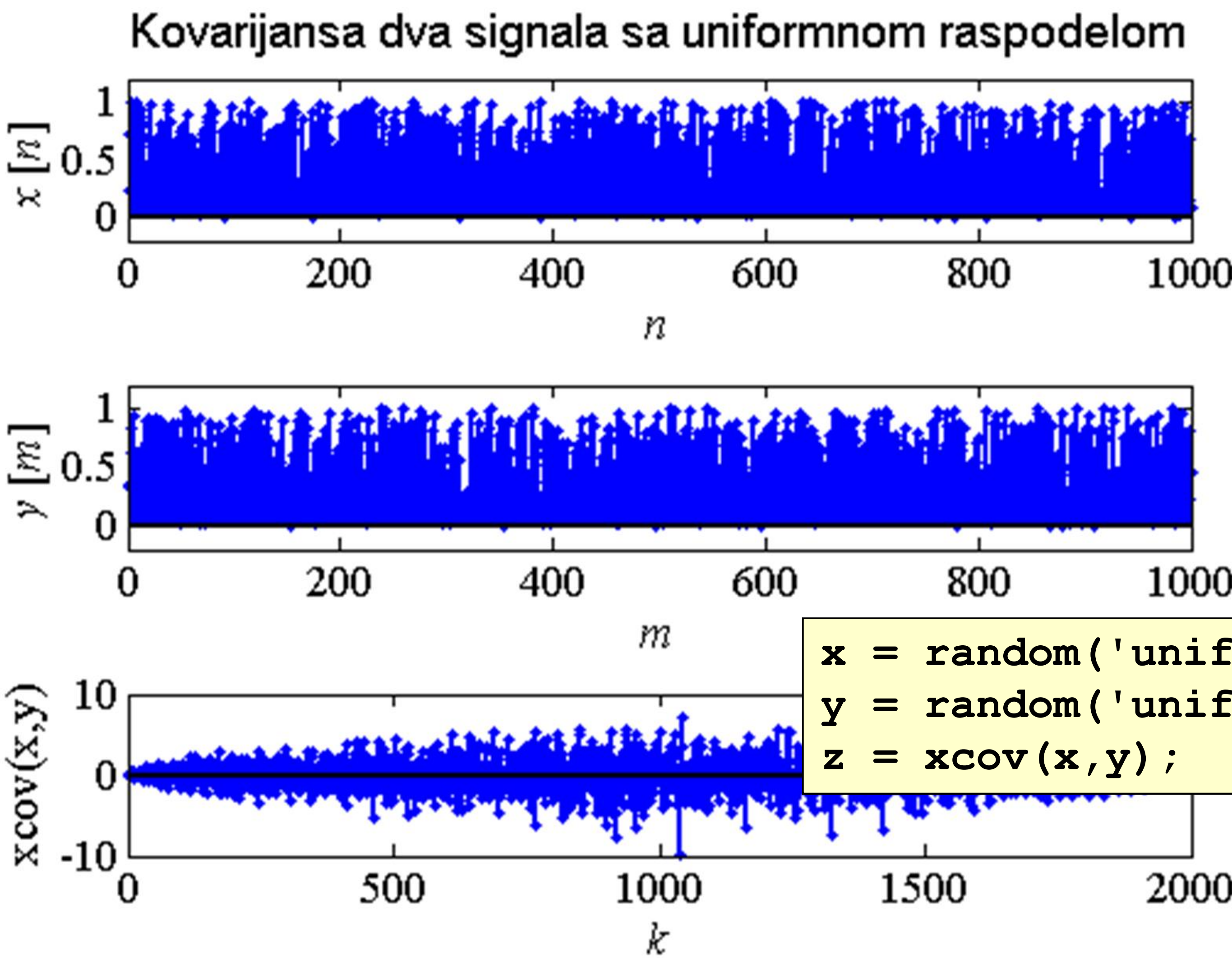

```
x = random('uniform',0,1,1,N);
y = random('uniform',0,1,1,N);
z = xcorr(x,y);
```

Korelacija dve sekvence (2)



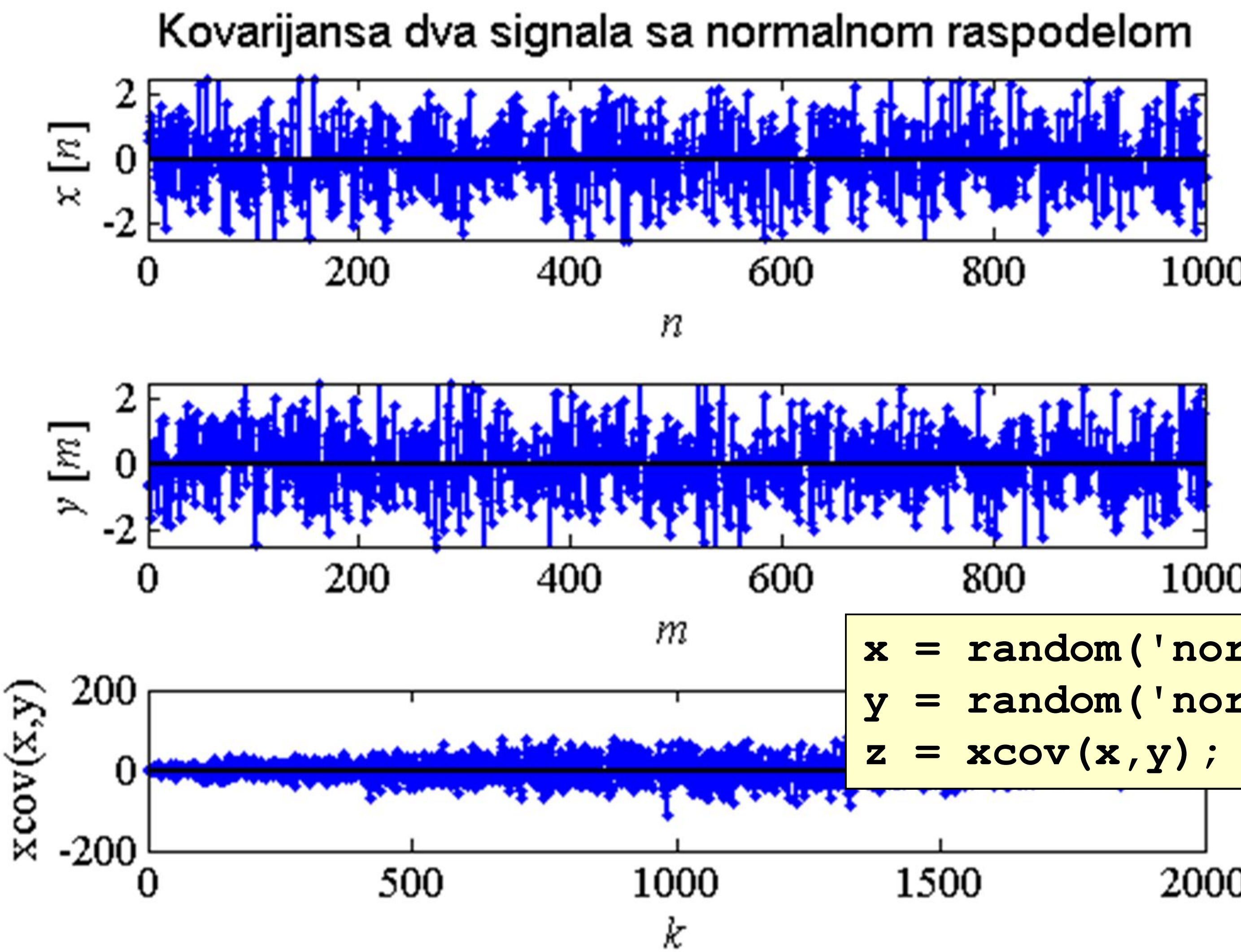

```
x = random('normal',0,1,1,N);
y = random('normal',0,1,1,N);
z = xcorr(x,y);
```

Kovarijansa dve sekvence (1)



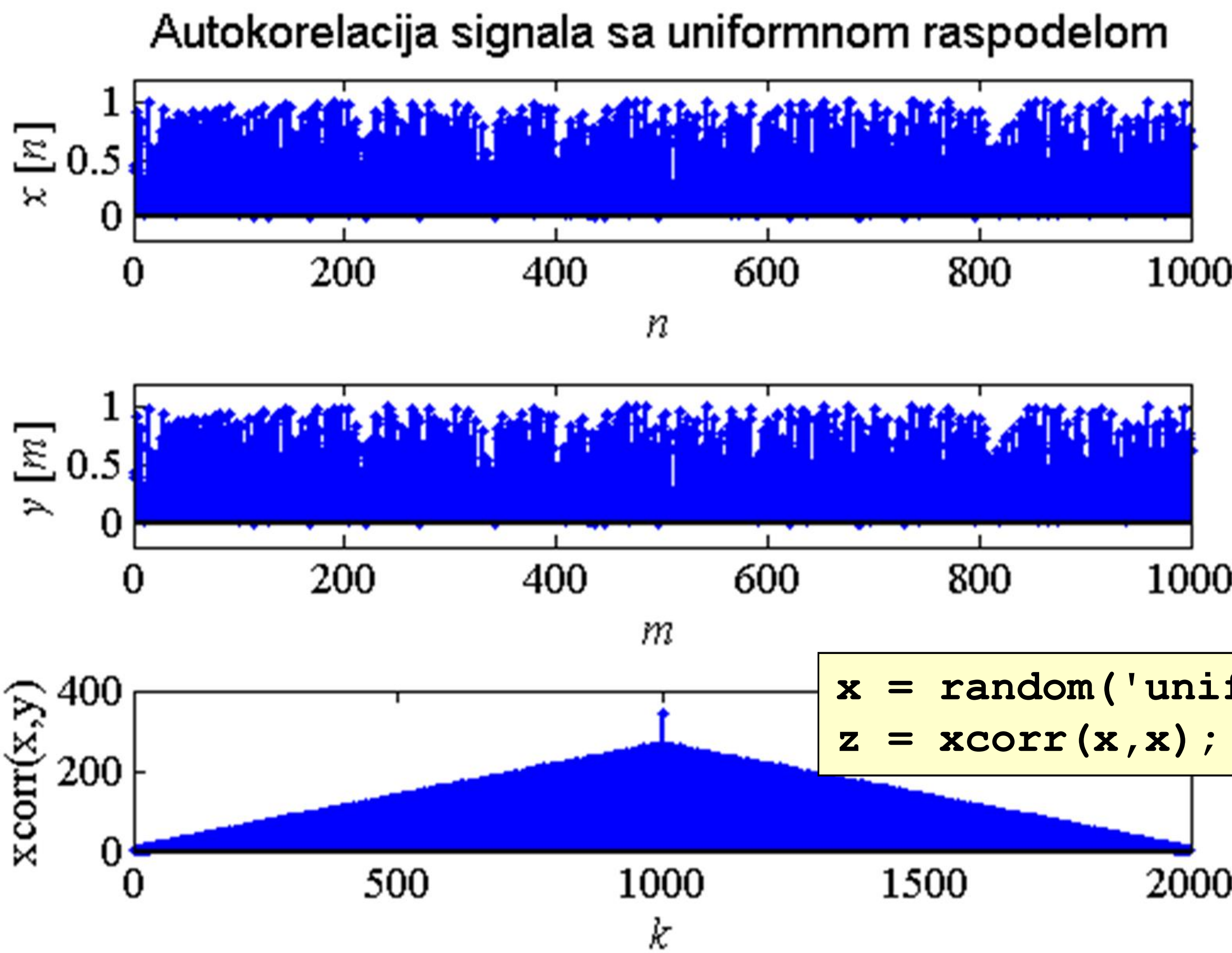

```
x = random('uniform',0,1,1,N);
y = random('uniform',0,1,1,N);
z = xcov(x,y);
```

Kovarijansa dve sekvence (2)



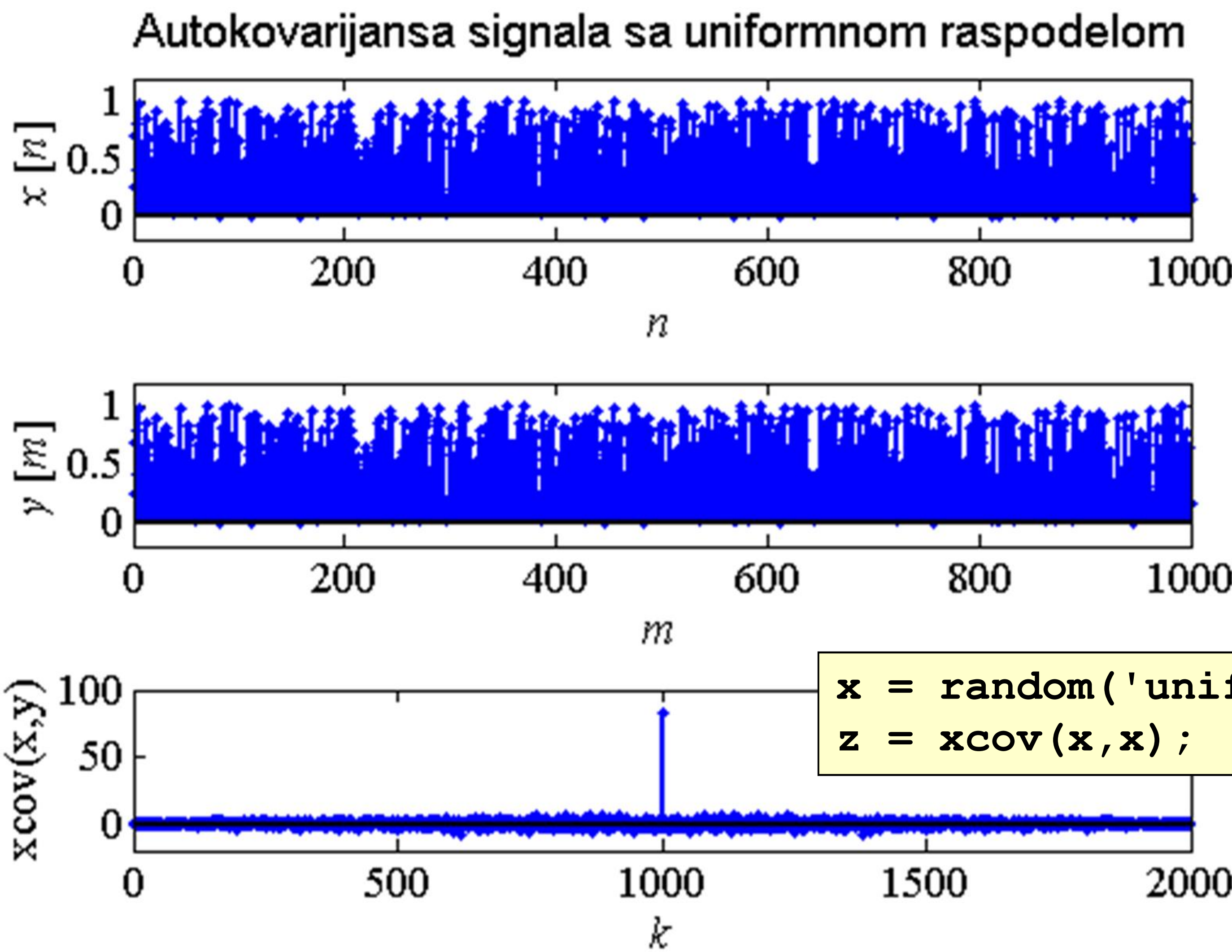

```
x = random('normal',0,1,1,N);
y = random('normal',0,1,1,N);
z = xcov(x,y);
```

Autokorelacija sekvence



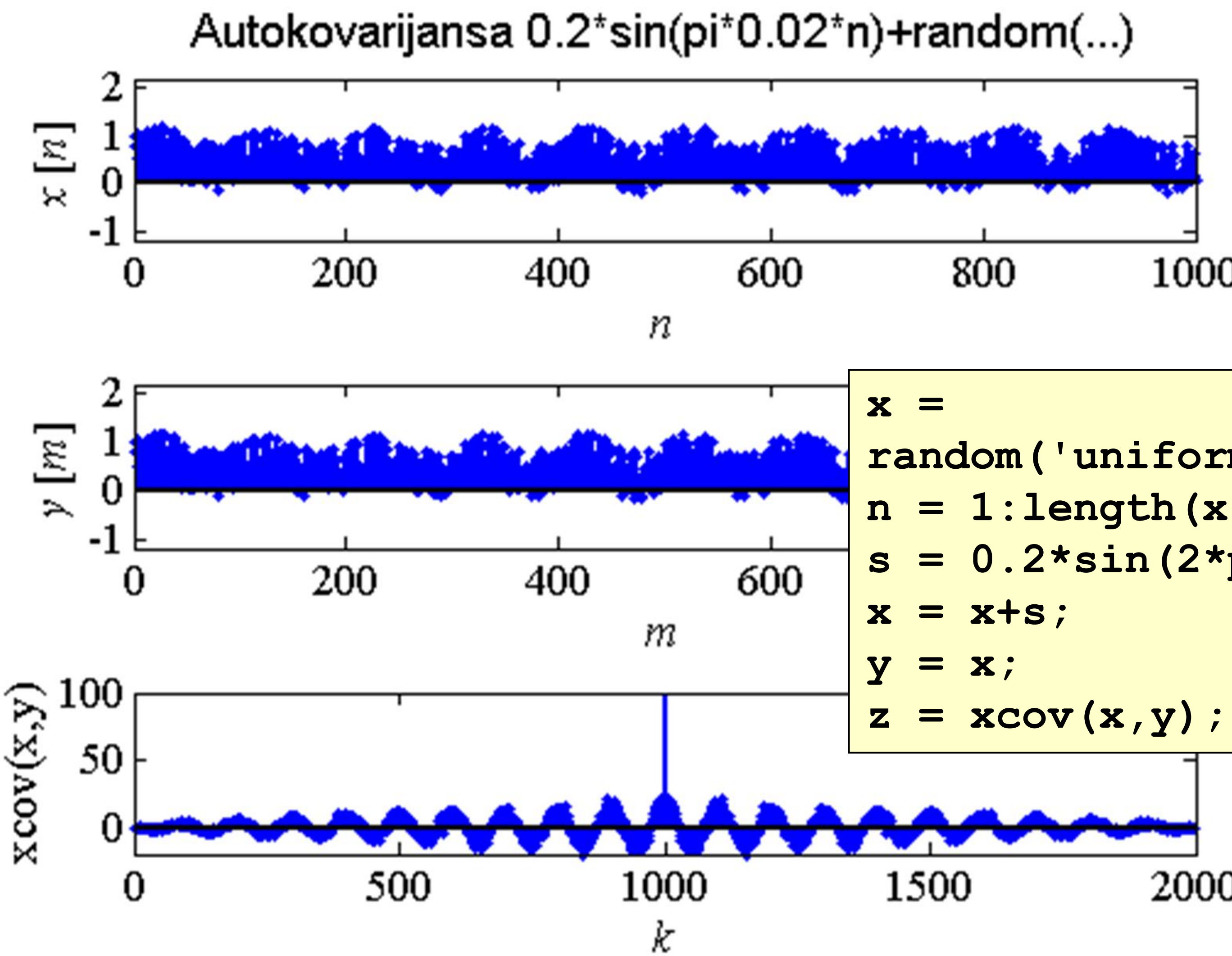

```
x = random('uniform',0,1,1,N);
z = xcorr(x,x);
```

Autokovarijansa sekvence




```
x = random('uniform',0,1,1,N);
z = xcov(x,x);
```

Autokovarijansa (2)




```
x =
random('uniform',0,1,1,N);
n = 1:length(x);
s = 0.2*sin(2*pi*0.01*n);
x = x+s;
y = x;
z = xcov(x,y);
```

Slučajni signali konačne dužine

Procena statističkih osobina slučajnog procesa iz segmenta signala konačne dužine $\{\xi[n]\}$

$$\hat{m} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\xi[n]$$

srednja vrednost

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\xi[n]-\hat{m}\right)^2$$

varijansa

$$\hat{\gamma}[k] = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\xi[n]-\hat{m}\right)\left(\xi[n+k]-\hat{m}\right)$$

autokovarijansa

Nepristrasnost procene

Očekivana vrednost procene srednje vrednosti jednaka je pravoj srednjoj vrednosti

$$\boxed{m = \left.\hat{m}\right|_{N\to\infty}}$$

nepristrasna procena

$$\boxed{\sigma = \left.\hat{\sigma}\right|_{N\to\infty}}$$

asimptotski nepristrasna procena

Spektar slučajnih signala

- **Energija** stacionarnih slučajnih signala je **beskonačna** i ne mogu se izračunati Furijeova i *z*-transformacija
- **Autokorelaciona** i **autokovarijansna** sekvenca stacionarnog slučajnog signala imaju **konačnu energiju** i u većini praktičnih slučajeva postoje transformacije

$$\boxed{r_{\xi\xi}(n, n+k) = r_{\xi\xi}[k]}$$

$$\boxed{\gamma_{\xi\xi}(n, n+k) = \gamma_{\xi\xi}[k]}$$

Spektralna gustina snage

- **Spektralna gustina snage** se definiše kao Furijeova transformacija autokorelacione funkcije

$$E(\xi[n]) = 0$$

$$R_{\xi\xi}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{\xi\xi}[k]\, e^{-j\omega k}, \quad |\omega| < \pi$$

Power density spectrum, power spectrum

- Inverzna transformacija

$$r_{\xi\xi}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_{\xi\xi}(e^{j\omega})\, e^{j\omega k} d\omega$$

Srednja snaga slučajnog signala

- Snaga slučajnog signala

$$S_{\xi\xi}(\omega) = R_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

- **Srednja snaga slučajnog signala**
  average power

$$E\left(\xi^2[n]\right) = r_{\xi\xi}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\xi\xi}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Indirektan metod određivanja gustine energije spektra signala

- (1) izračuna se autokorelaciona funkcija diskretnog signala
- (2) izračuna Furijeova transformacija autokorelacione funkcije koja predstavlja gustinu energetskog spektra

$$r_{\xi\xi}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, x[n+k]$$

$$S_{\xi\xi}(\omega) = R_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{\xi\xi}[k]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}, \quad |\omega| < \pi$$

Furijeova transformacija kovarijanse

- Furijeova transformacija autokovarijanse

$$\Gamma_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{\xi\xi}[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}, \quad |\omega| < \pi$$

- Inverzna transformacija

$$\gamma_{\xi\xi}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\,\mathrm{d}\omega$$

Varijansa i srednja snaga

- Varijansa

$$\boxed{\sigma^2 = \gamma_{\xi\xi}[0]}$$

- Varijansa, srednja snaga i srednja vrednost

$$\boxed{\sigma^2 = \gamma_{\xi\xi}[0] = r_{\xi\xi}[0] - m^2}$$

Diskretni beli šum

- **Diskretni beli šum** je deskretni slučajni signal čija je spektralna gustina snage konstantna na svim učestanostima (srednja vrednost signala je jednaka nuli)

$$\boxed{R_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sigma^2}$$

- Autokorelaciona funkcija diskretnog belog šuma jednaka je nuli za $k \neq 0$

$$\boxed{r_{\xi\xi}[k] = \sigma^2 \ \delta[k]}$$

z-transformacija autokorelacije

- **z-transformacija** u opštem slučaju ne postoji – ako postoji, može da se izračuna

$$R_{\xi\xi}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{\xi\xi}[k]\, z^{-k}$$

- Inverzna transformacija

$$r_{\xi\xi}[k] = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \oint_{C} R_{\xi\xi}(z)\, z^{k-1} \mathrm{d}z$$

Procesiranje diskretnog slučajnog signala LTI sistemom

- Odrediti statističke osobine signala $y[n]$ na izlazu linearnog vremenski nepromenljivog (LTI) sistema, čiji je impulsni odziv $h[n]$ i frekvencijski odziv $H(e^{j\omega})$, kada se pobudi diskretnim slučajnim signalom $x[n]$ koji je jedan član ansambla slučajnog procesa $\{\boldsymbol{\xi[n,\psi]}\}$
- $y[n]$ je takođe diskretnim slučajni signal

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

Srednja vrednost izlaznog signala

- Srednja vrednost izlaznog signala $E\{y[n]\}$ jednaka je proizvodu srednje vrednosti pobudnog signala $E\{x[n]\}$ i frekvencijskog odziva za $\omega=0$ $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})=H(1)$

$$\boxed{E\{y[n]\} = E\{x[n]\}\, H(1)}$$

$$\boxed{m_y = m_x\, H(1)}$$

Autokorelacija izlaznog signala

- Autokorelacija izlaznog signala kada je poduda diskretni beli šum sa nultom srednjom vrednošću

$$r_{xx}[k] = \sigma_x^2 \, \delta[k]$$

$$r_{yy}[n] = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, h[k+n]$$

$$\sigma_y^2 = r_{yy}[0] = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[k] \right|^2 = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \right|^2 \mathrm{d}\omega$$

Spektralna gustina snage izlaznog signala

- Furijeova i *z*-transformacija izlaznog signala

$$\boxed{R_y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2 R_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}$$

$$\boxed{R_y(z) = H(z)\, H(z^{-1})\, R_x(z)}$$

Određivanje spektra signala iz konačnog broja odbiraka

- Može se odrediti samo **procena spektra** signala zbog konačne dužine signala
- Zbog posmatranja signala u konačnom vremenskom intervalu nastaje **izobličenje spektra** koji se procenjuje
- Uticaj dužine sekvence
  (1) posmatra se za **determinističke signale** a zatim
  (2) ovi rezultati se koriste za **procenu spektra** slučajnog signala

Periodogram

- **Periodogram** se koristi za **procenu** spektralne snake korišćenjem prozorske funkcije

1. sekvenca **beskonačne dužine** $\{\boldsymbol{x[n]}\}$ (ili veoma velike dužine) množi se sa
2. **prozorskom funkcijom** $\{\boldsymbol{w[n]}\}$
3. dobija se **sekvenca konačne** dužine $\{\boldsymbol{v[n]}\}$
4. iz $\{v[n]\}$ se procenjuje spektar signala $\{x[n]\}$

$$v[n] = x[n]w[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

$\{w[n]\}$ je pravougaoni prozor

Procena spektralne gustine snage

- Normalizaciona konstanta C treba da elimiše uticaj prozorske funkcije

$$\hat{P}_x(\omega) = \frac{1}{CN}\left|V(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2$$

$$\hat{P}_x(\omega) = \frac{1}{CN}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,w[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right|^2$$

$$C = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|w[n]\right|^2$$

Modifikovani periodogram

Kada prozorska funkcija $\{w[n]\}$ nije pravougaona, tada se $P(\omega)$ naziva modifikovani periodogram

Diskretizacija periodograma

- U praksi se periodogram izračunava za konačan skup učestanosti tako da se dobija skup vrednosti periodograma
- Sekvenca $\{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]\}$ pomnožena sa prozorskom funkcijom $\{\boldsymbol{w}[\boldsymbol{n}]\}$ generisala je sekvencu $\{\boldsymbol{v}[\boldsymbol{n}]\}$ konačne dužine $\boldsymbol{N}$
- Umesto Furijeove transformacije sekvence $\{\boldsymbol{v}[\boldsymbol{n}]\}$, izračunava se DFT (Diskretna Furijeova Transformacija) u R tačaka, a uobičajeno je da je $R>N$, da bi se dobila diskretna predstava sa finijom podelom
- $\{\boldsymbol{v}[\boldsymbol{n}]\}$ se dopuni nulama do dužine R pa se izračuna DFT

$$\boxed{\hat{P}_x(k) = \frac{1}{CN}\left|V(k)\right|^2}$$

$$\boxed{\omega_k = \frac{2\pi k}{R}, \quad 0 \le k \le R-1}$$

Primena DFT u proceni spektra

- Prozorska funkcija $w[n]=1$
- Sekvenca $\{x[n]\}$ od N elemenata se produži da sadrži R elemenata
- Povećanje broja tačaka u suštini ne povećava frekvencijsku rezoluciju procene spektra već samo predstavlja interpolaciju između tačaka u kojima se spektar tačno procenjuje
- Frekvencijska rezolucija određena je isključivo dužinom sekvence pre dopunjavanjem nulama

$$\hat{P}_x(k) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/R}\right|^2, \quad k = 0,1,\ldots,L-1$$

$$R \geq N$$

Korektna – nepristrasna (unbiased) procena

- Kod procene spektra snage slučajnih signala pomoću periodograma se pojavljuje **problem curenja spektra** kao posledica konačnog broja odbiraka iz koga se izračunava procena
- Periodogram predstavlja **asimptotski nepristrasnu** procenu spektralne gustine snage jer se pristrasnost približava nuli sa porastom dužine prozora
- Periodogram **nije konzistentna** procena stvarne vrednosti gustine spektra snage slučajnog signala, jer ne konvergira ka stvarnoj gustini spektra snage sa porastom dužine prozora (posmatra se sekvenca konačnog trajanja)

Usrednjavanje periodograma

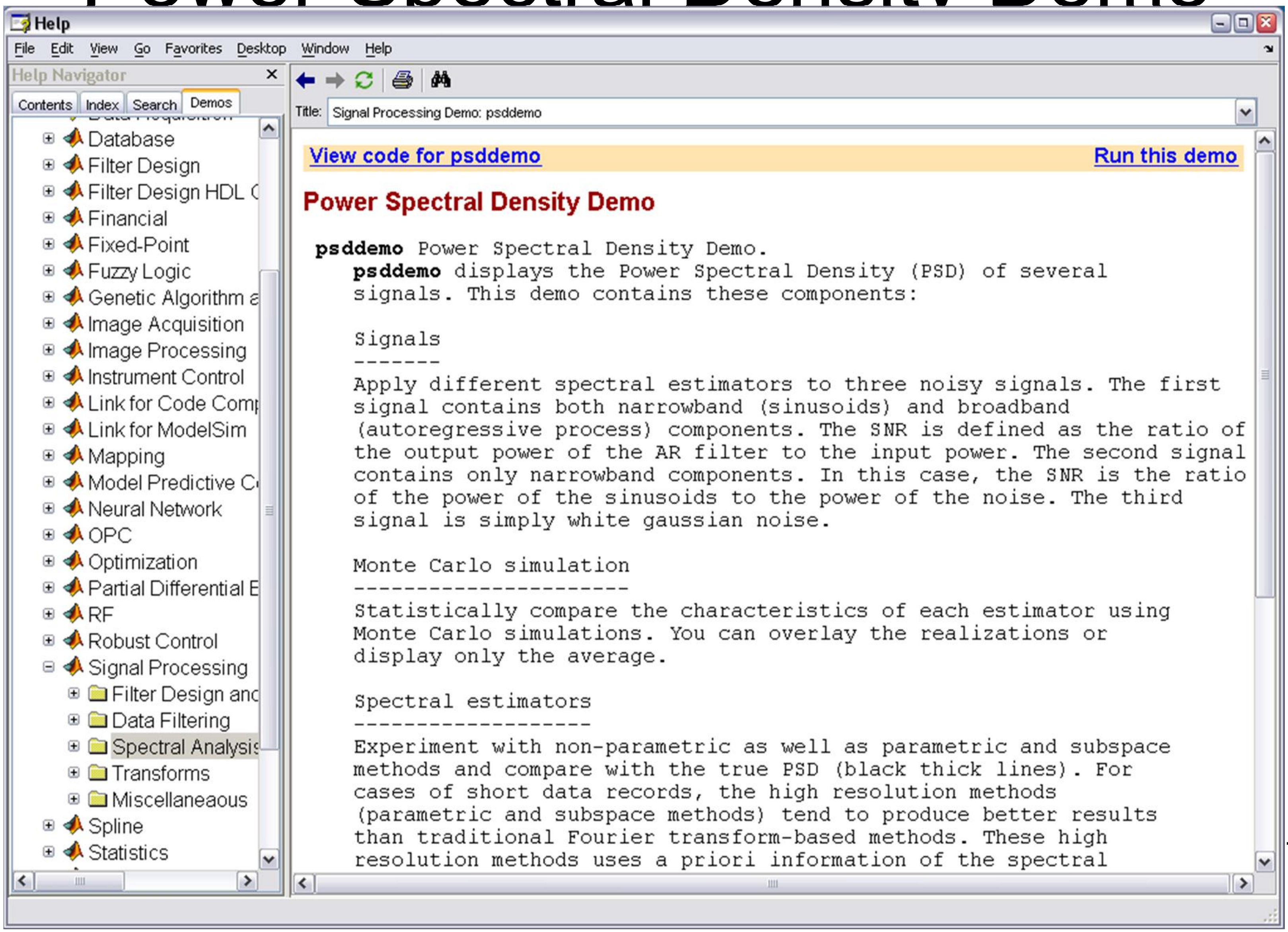
- Metod procene spektra snage, prvobito predložen od *Bartlett*-a (Bartlet) i modifikovan od *Welch*-a (Velč), zasniva se na izračunavanju modifikovanog periodograma od R preklapajućih delova ulaznih odbiraka dužine N a zatim usrednjavanja ovih R periodograma
- Neka se dva susedna segmenta preklapaju za K odbiraka i posmatrajmo r-ti segment

$$v_r[n] = x[n + rK]\,w[n], \quad 0 \le n \le N-1, \quad 0 \le r \le R-1$$

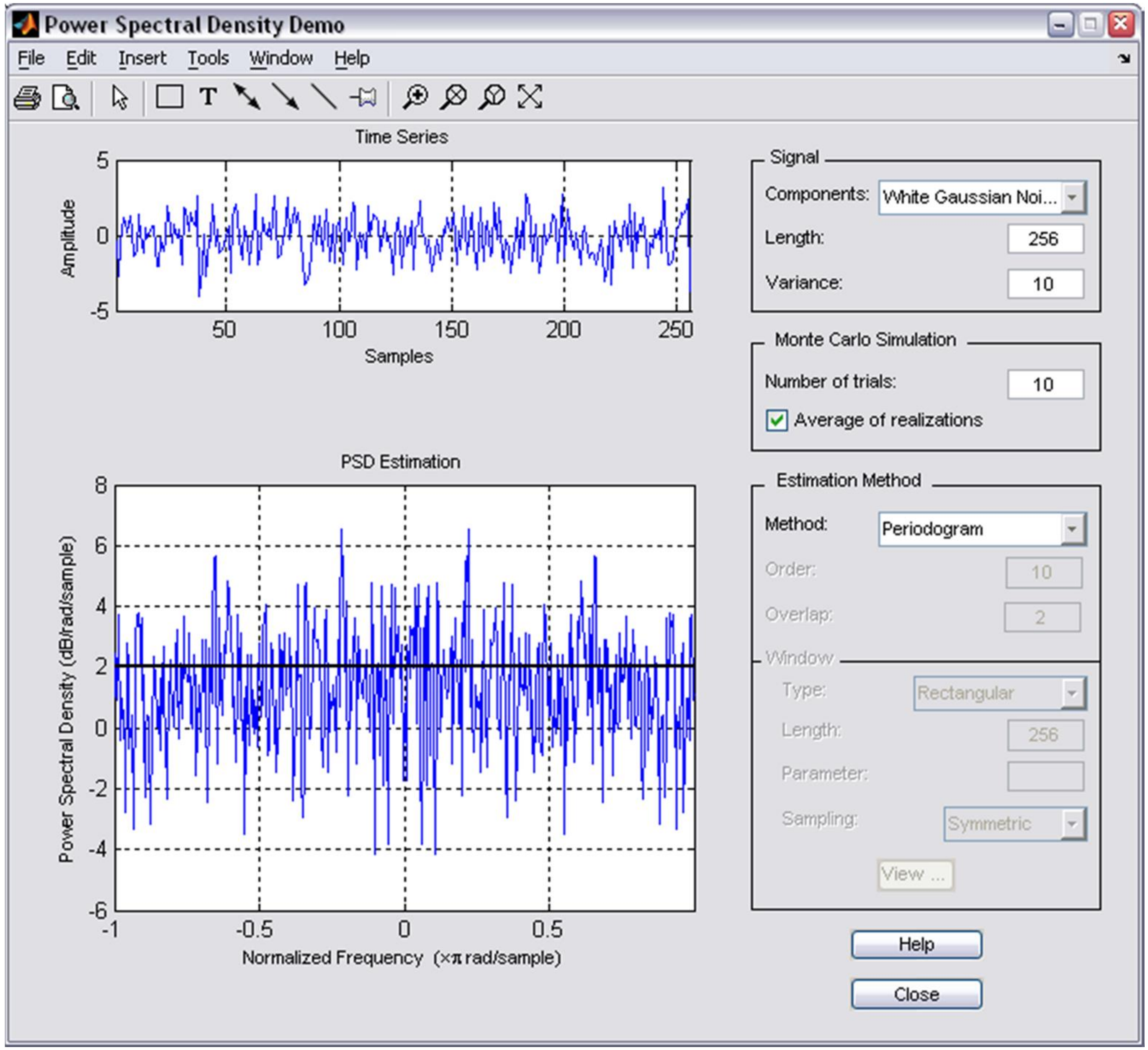
$$\hat{P}_{x,r}(\omega) = \frac{1}{CN}\left|V_r(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2$$

$$\hat{P}_{x,W}(\omega) = \frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1}\hat{P}_{x,r}(\omega)$$

psddemo
Power Spectral Density Demo

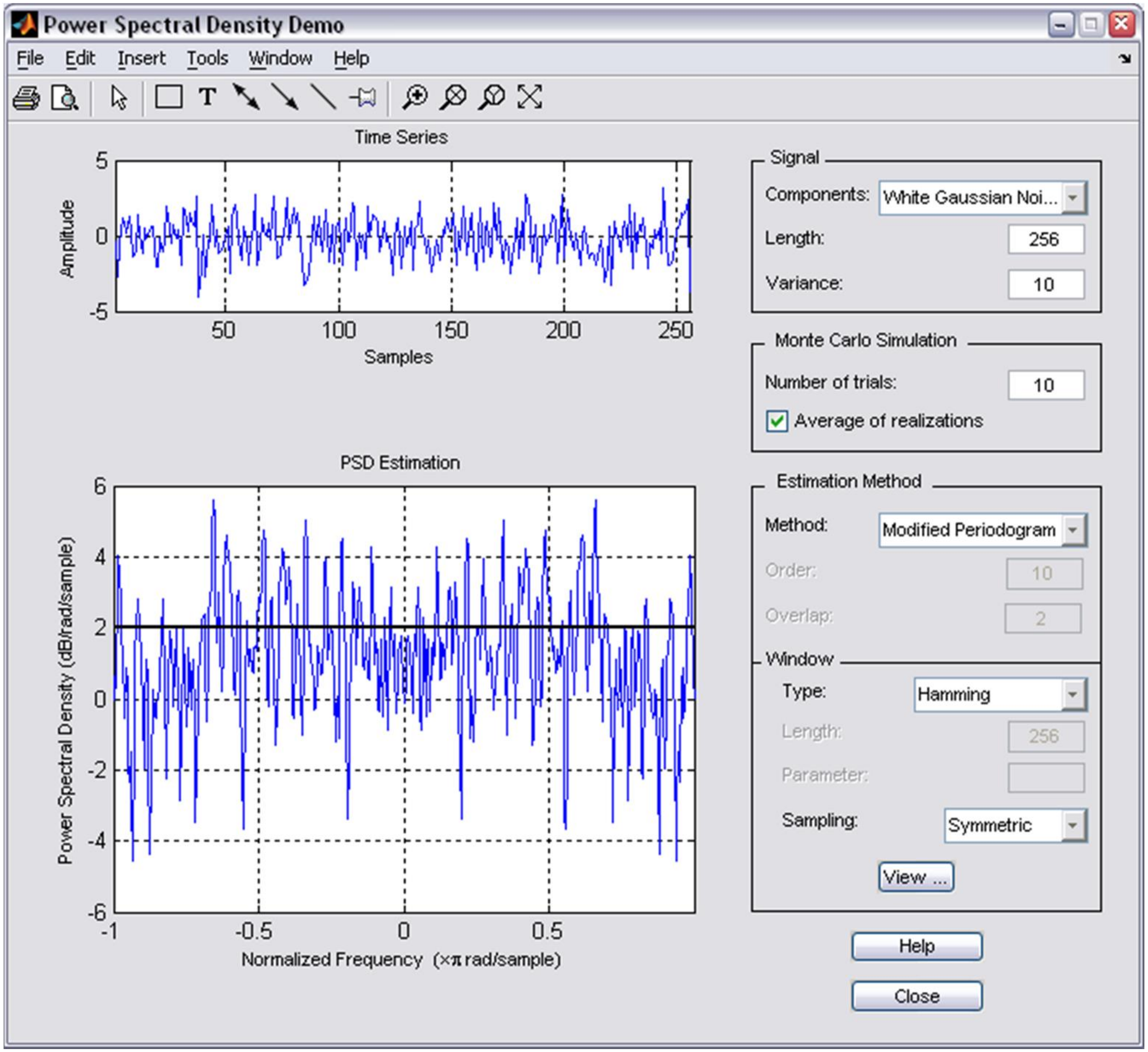


Beli šum

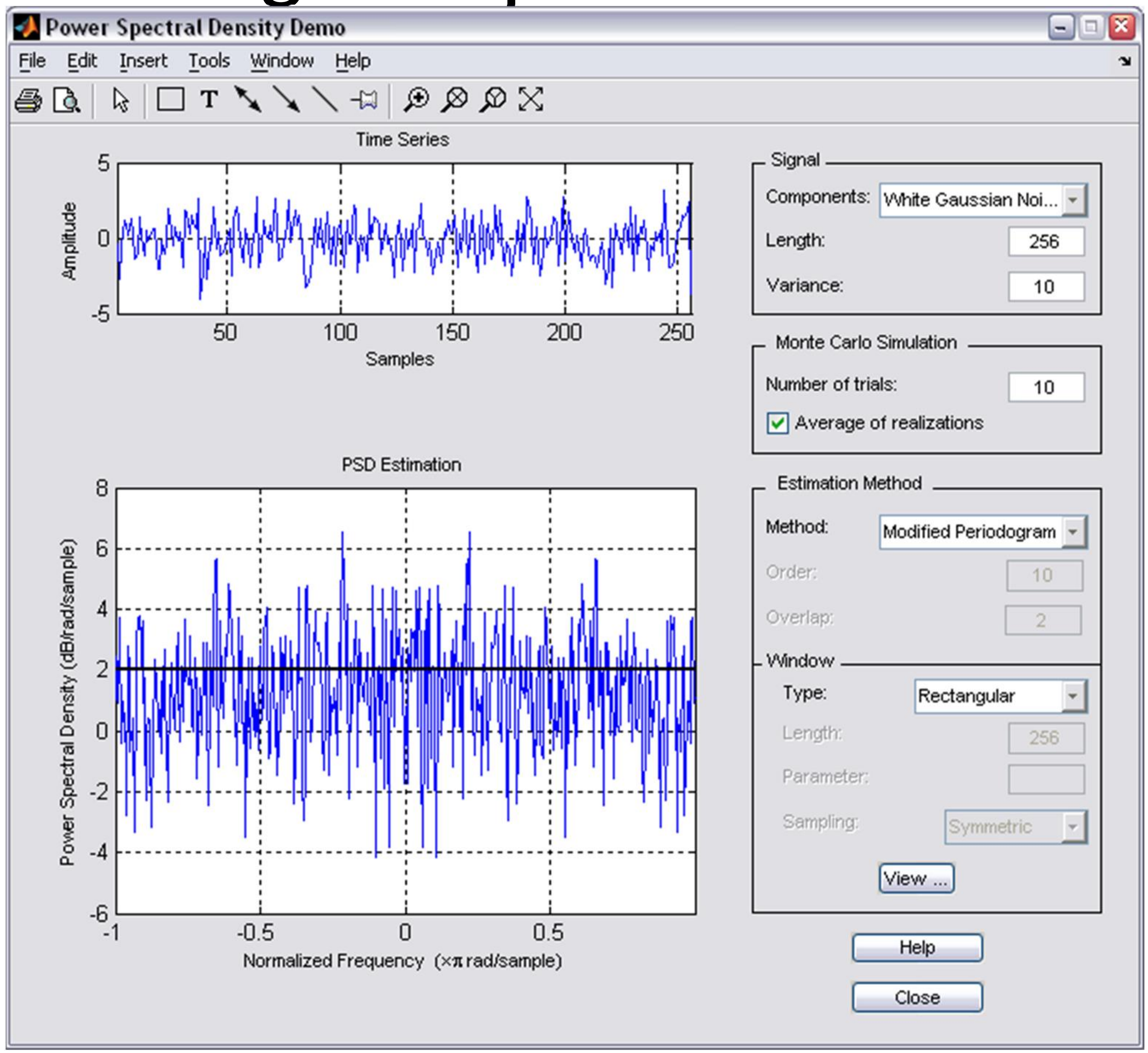


Power Spectral Density Demo
File Edit Insert Tools Window Help
Time Series
Amplitude
Samples
PSD Estimation
Power Spectral Density (dB/rad/sample)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Signal
Components: White Gaussian Noi...
Length: 256
Variance: 10
Monte Carlo Simulation
Number of trials: 10
Average of realizations
Estimation Method
Method: Periodogram
Order: 10
Overlap: 2
Window
Type: Rectangular
Length: 256
Parameter:
Sampling: Symmetric
View ...
Help
Close

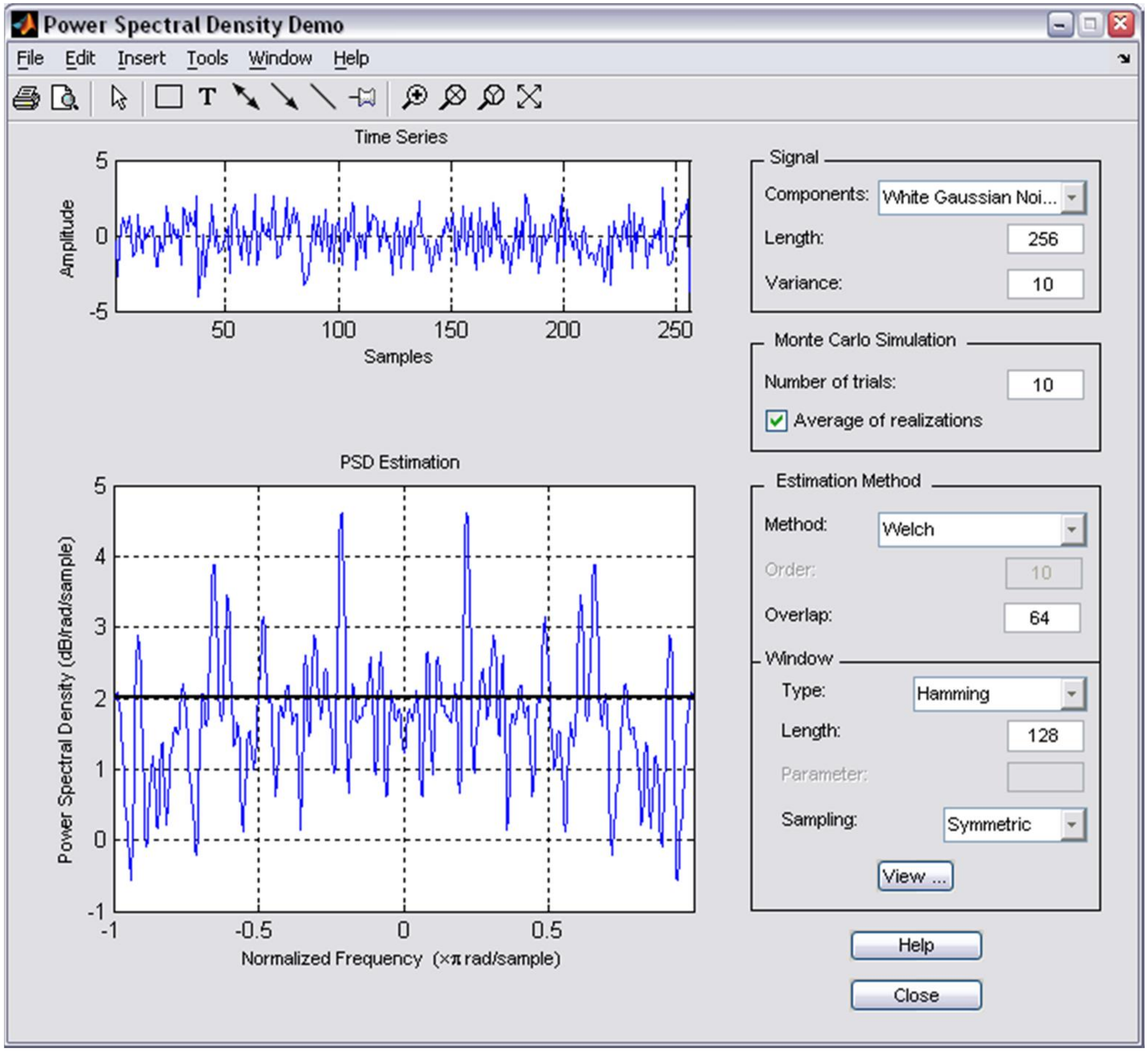
Modifikovan periodogram



Pravougaoni prozor



Velčov metod



Matlab Program 15_3 Mitra

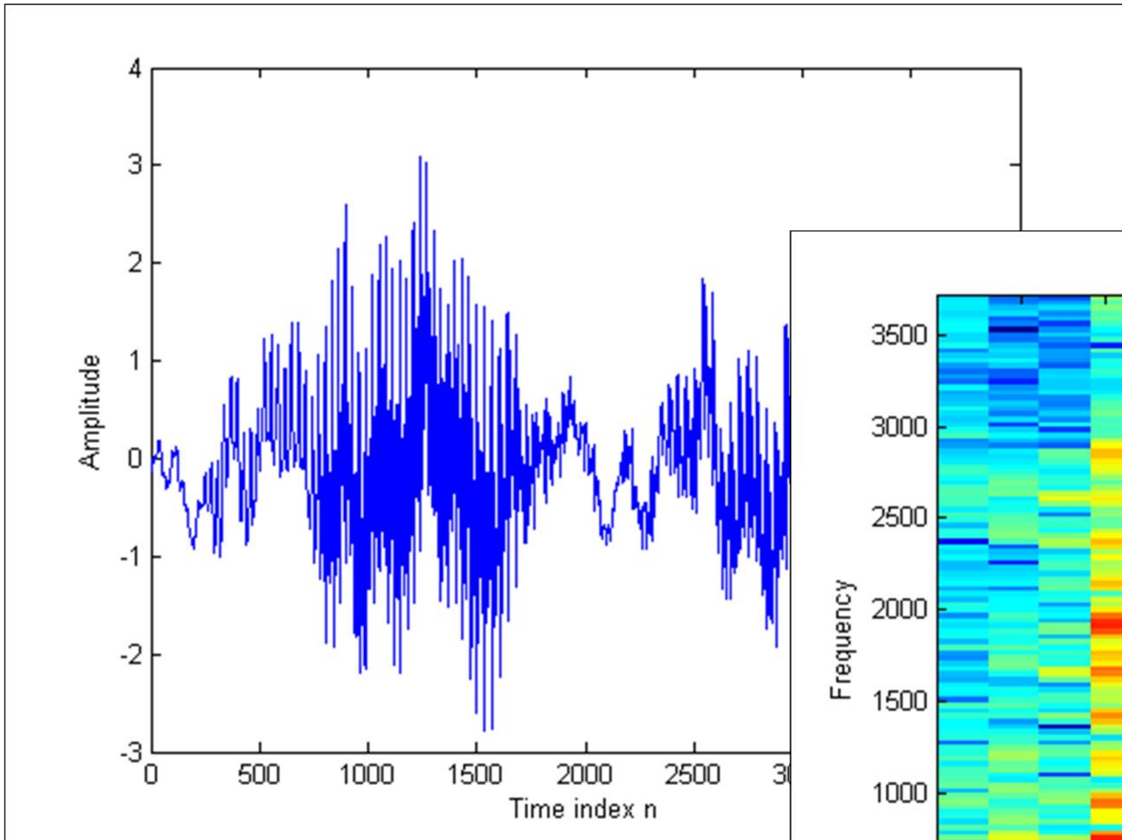
```
% Program 15_3
% Spectrogram of a Speech Signal

clear all, close all, clc
load mtlb
n = 1:4001;
plot(n-1,mtlb);
xlabel('Time index n');
ylabel('Amplitude');
```

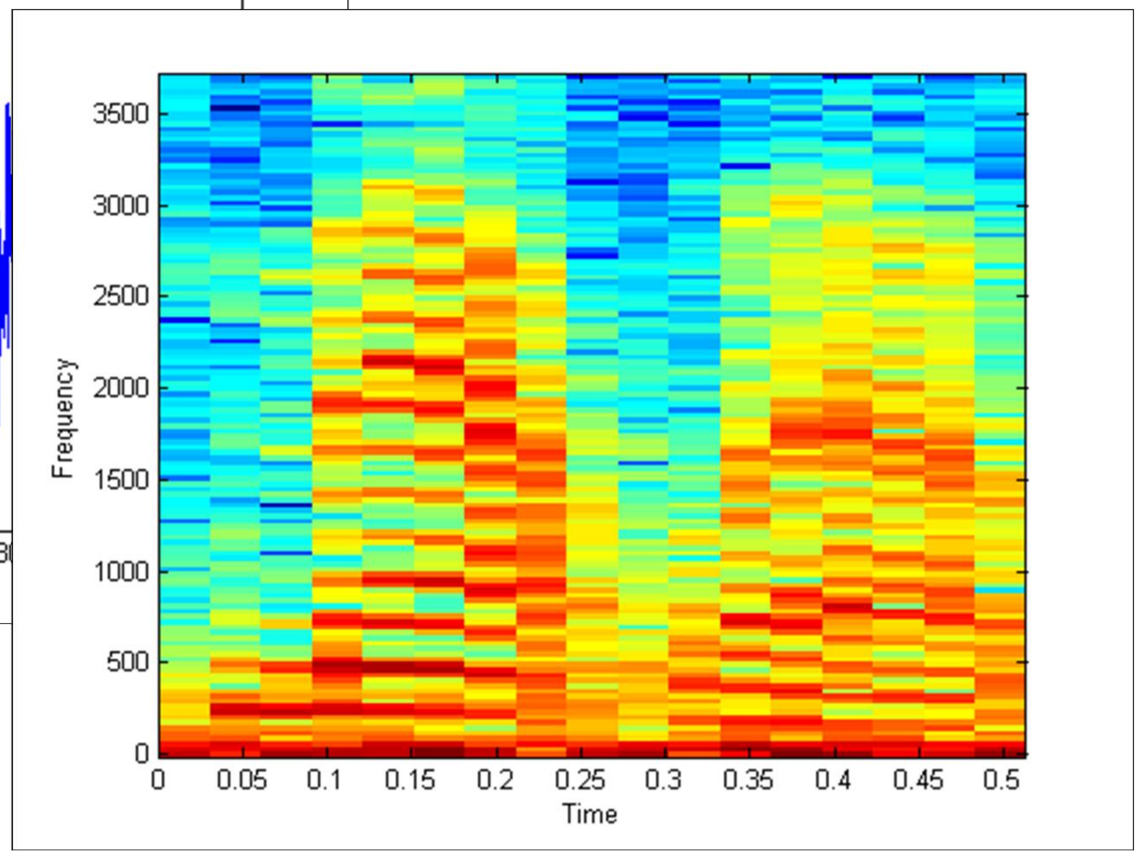
mtlb.mat je fajl u Signal Processing Toolbox-u koji sadrži govorni signal trajanja 4001 odbiraka, učestanost odabiranja 7418 Hz

```
nfft = 256;
ovlap = 32;
specgram(mtlb,nfft,7418,hamming(nfft),ovlap)
```

Hamming prozor dužine 256, sa preklapanjem 32 odbiraka između susednih sekvenci

Matlab Program 15_3 (2)





Matlab Program 15_4 Mitra

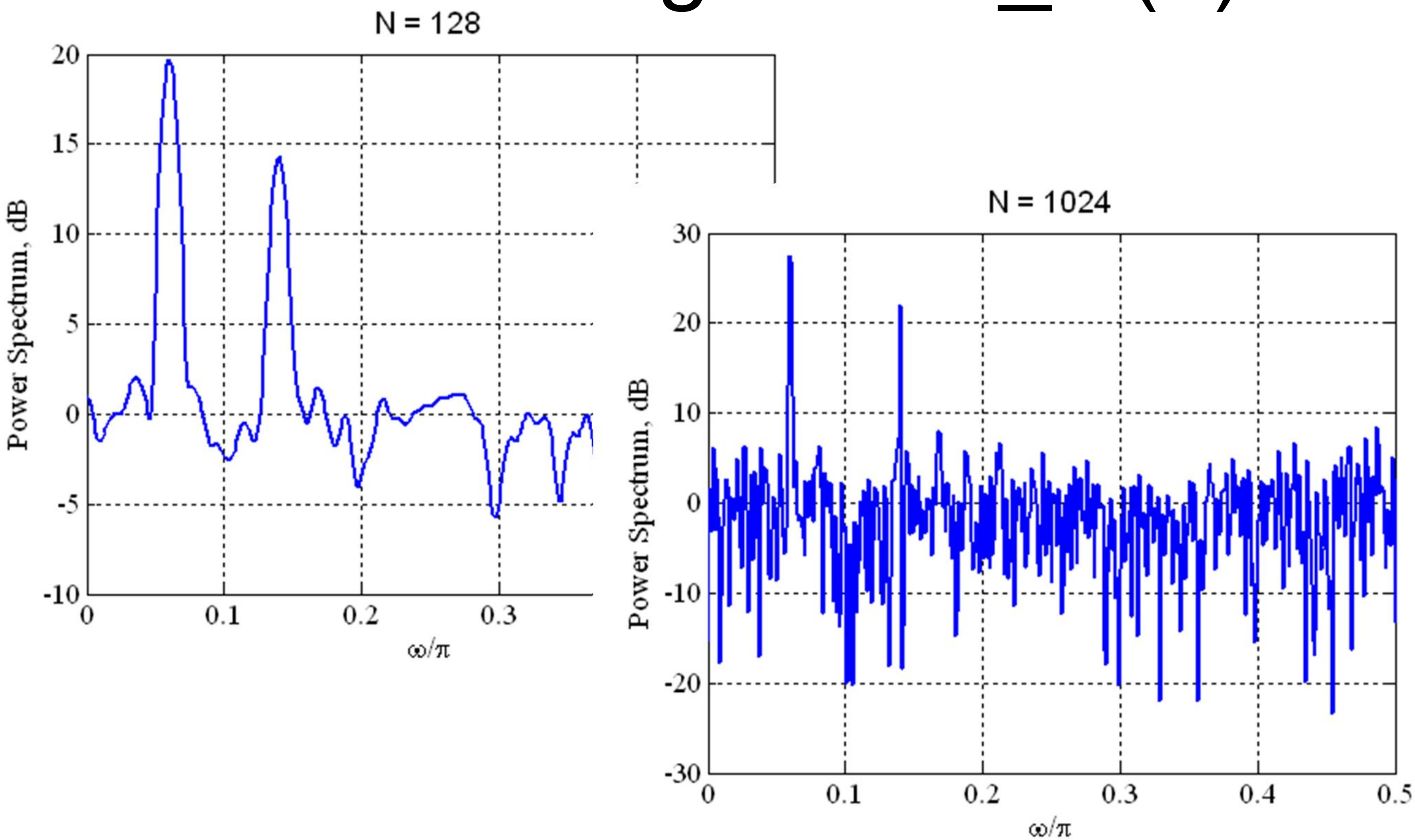
```
% Program 15_4
% Power Spectrum Estimation
% Using Welch's Method

n = 0:1000;
g = 2*sin(0.12*pi*n) + ...
sin(0.28*pi*n) + randn(size(n));
```

Signal je zbir slučajnog signala i dva sinusoidalna signala kružne učestanosti 0.06π i 0.14π

```
nfft = 512;
window = hamming(256);
noverlap = 32;
[Pxx, f] = psd(g,nfft,2,window,noverlap);
plot(f/2,10*log10(Pxx));
```

Hamming prozor dužine 1024 sa preklapanjem 32 odbiraka između susednih sekvenci

Matlab Program 15_4 (2)



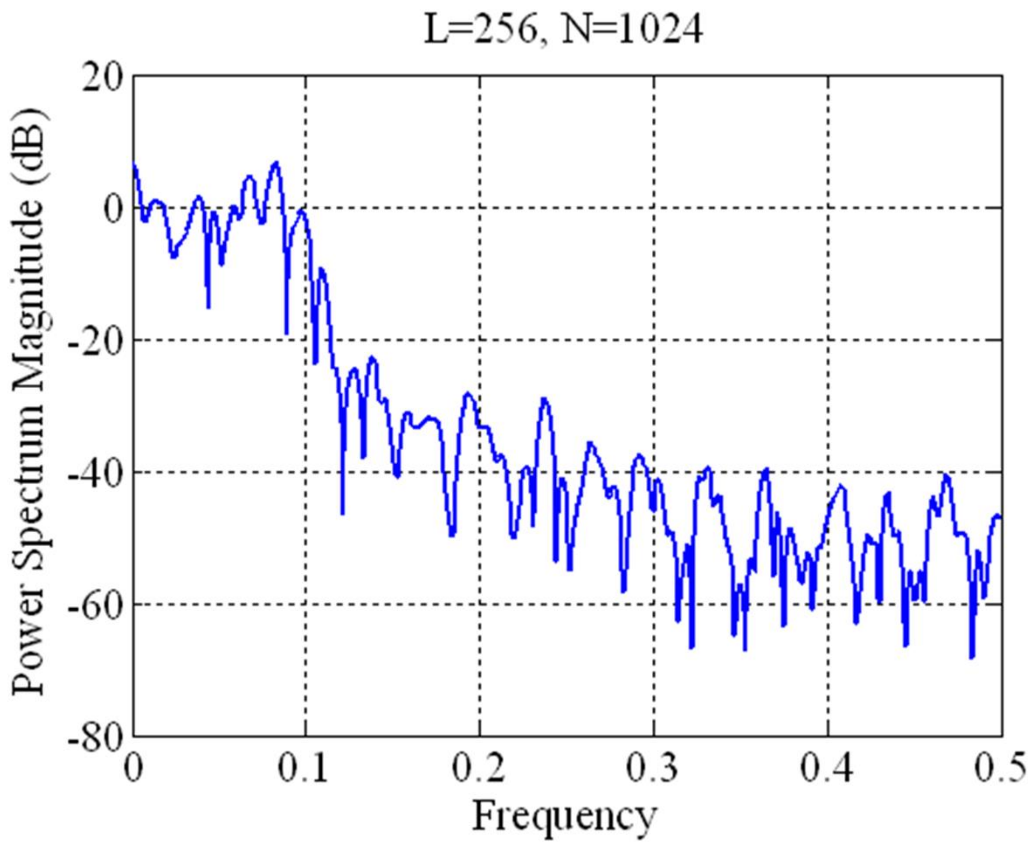
Analiza spektra obojenog šuma

1. Periodogram modifikovan Hamingovim prozorom sa dužinom prozora L=256.
   FFT se računa u 1024 tačke
2. Periodogram modifikovan Hamingovim prozorom sa dužinom prozora L=512.
   FFT se računa u 1024 tačke
3. Usrednjeni modifikovani periodogram sa dužinom prozora L=512.
   FFT se računa u 1024 tačke.
4. Usrednjeni modifikovani periodogram sa dužinom prozora L=512.
   FFT se računa u 1024 tačke.
   Preklapanje segmenata 50%.

(*Lj. Milić, Obrada signala II*)

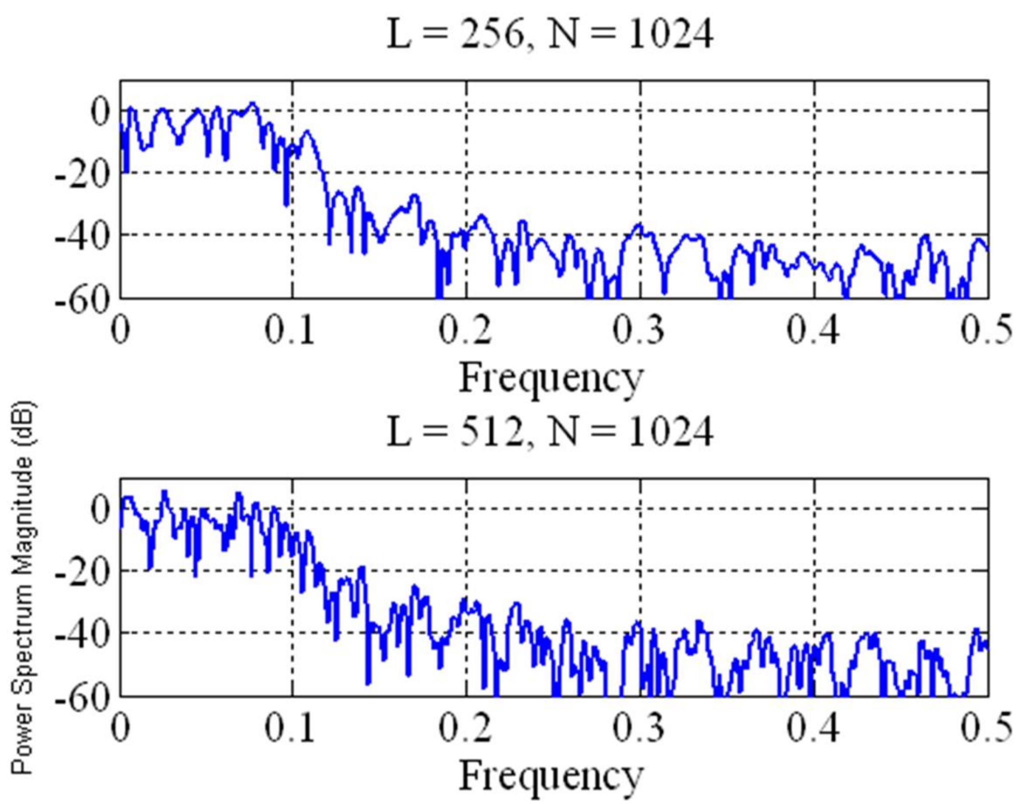
Matlab Program (2)

```
h=fir1(30,0.2,boxcar(31)); % projektovanje filtra
r=randn(16384,1);           % beli šum
x=filter(h,1,r);            % bojenje šuma
psd(x(1:256),1024,1,hamming(256))
```



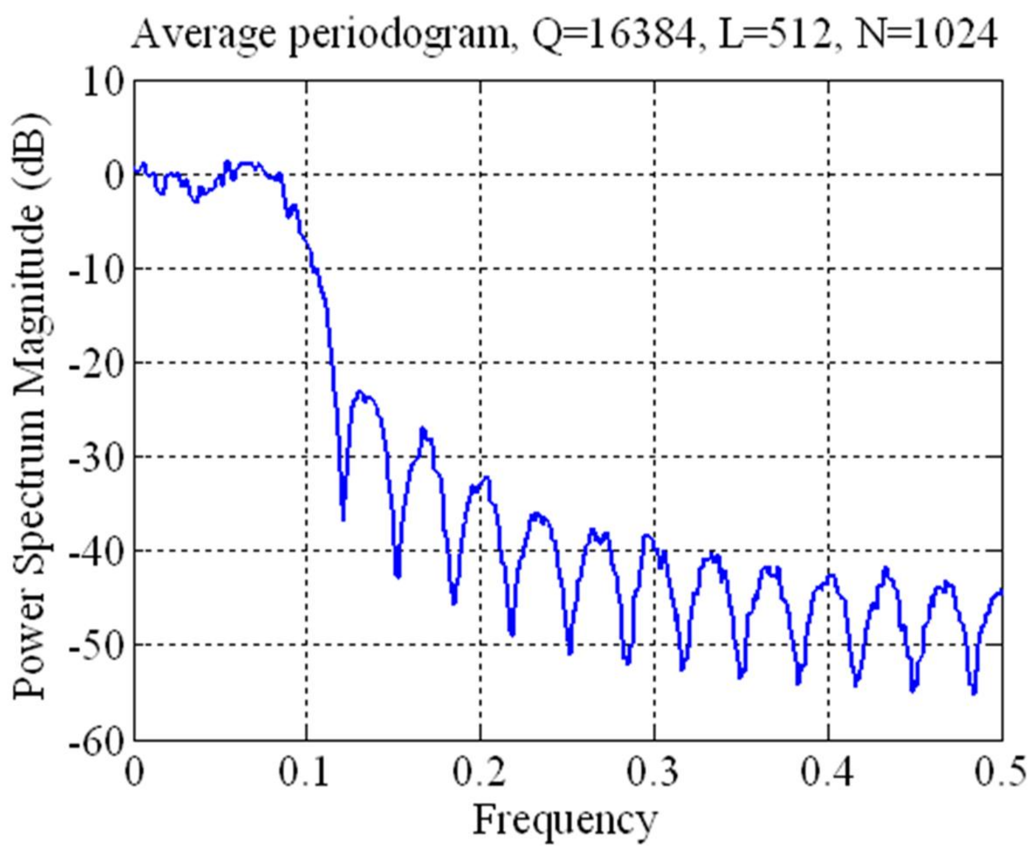
Matlab Program (3)

```
subplot(2,1,1); psd(x(1:256),1024,1,hamming(256))
subplot(2,1,2); psd(x(1:512),1024,1,hamming(512))
```



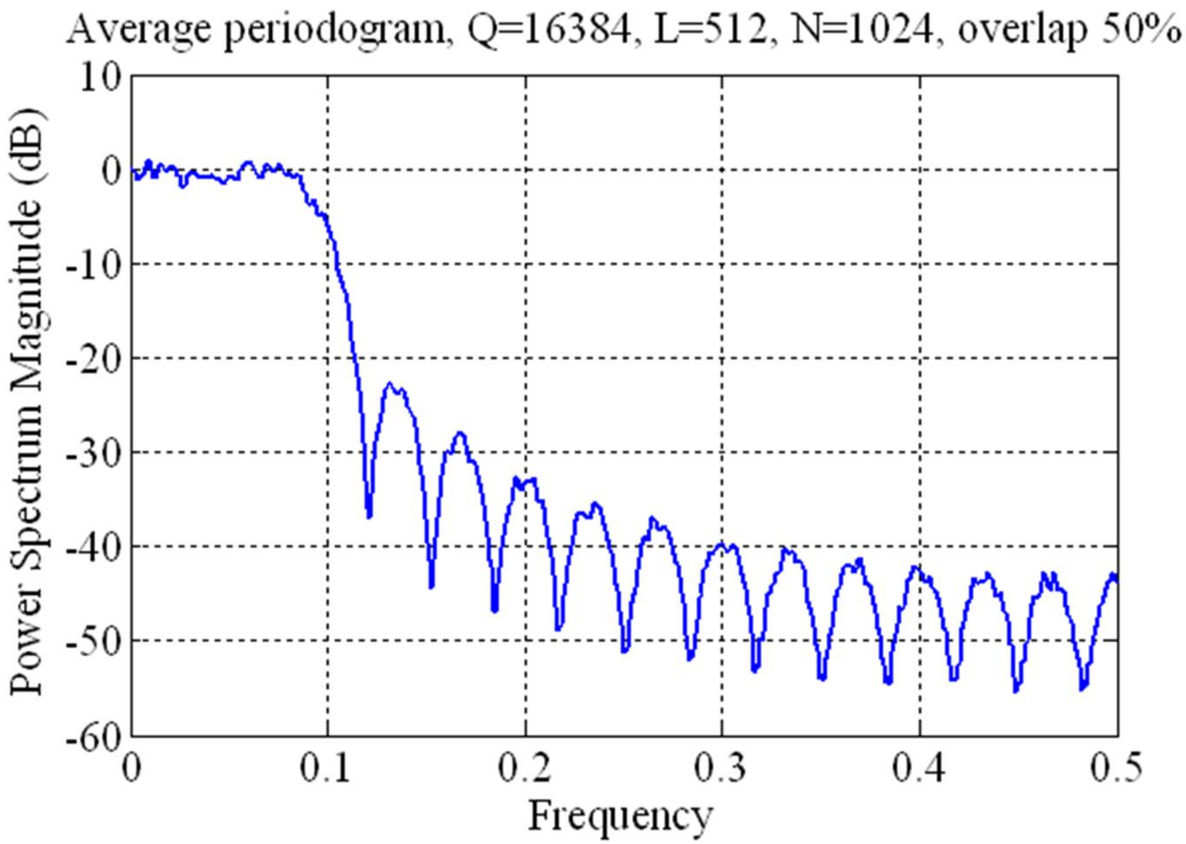
Matlab Program (4)

```
psd(x,1024,1,hamming(512)),
title('Average periodogram, Q=16384, L=512, N=1024')
```



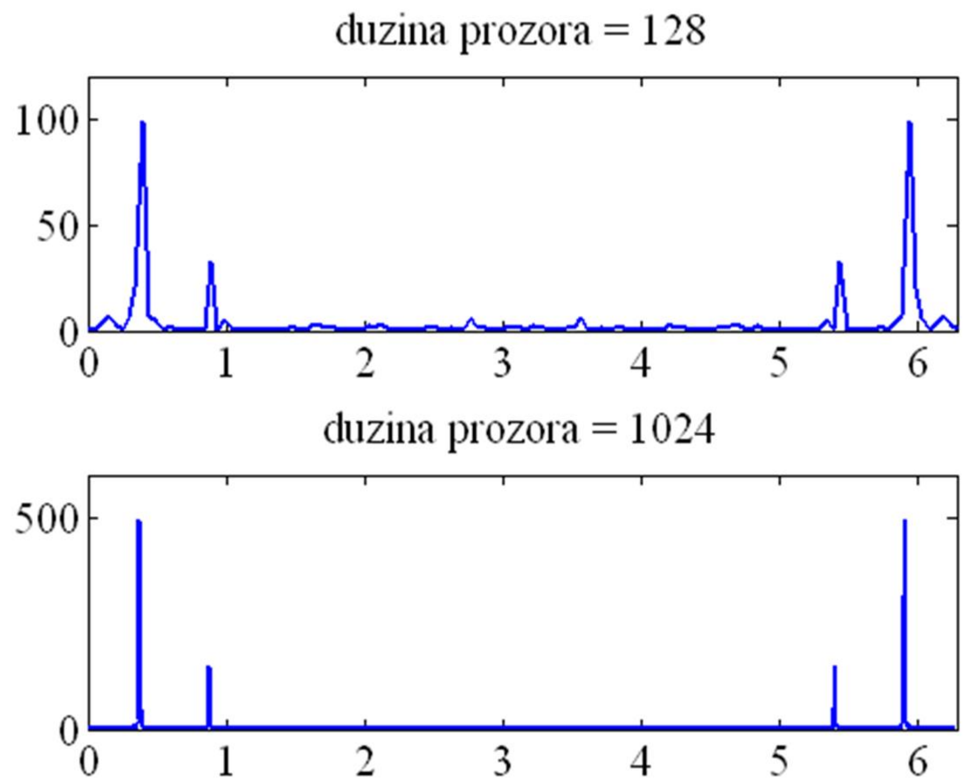
Matlab Program (5)

```
psd(x,1024,1,hamming(512),256)
title('Average periodogram, Q=16384,L=512,N=1024,overlap 50%')
```



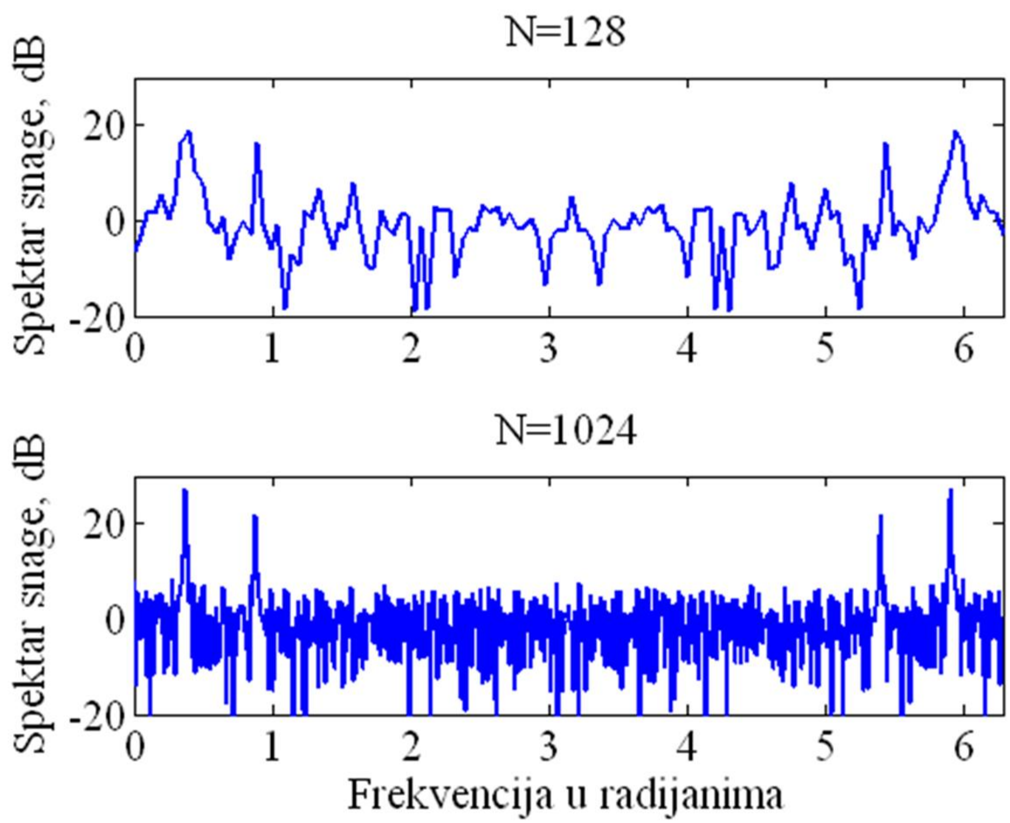
Matlab Program (6)

```
n = 0:4096;
x = 2*sin(0.12*pi*n)+…
 sin(0.28*pi*n)+randn(size(n));
x = x-mean(x);
% Duzina prozora
L1 =  128; L2 = 1024;
% DFT
X1 = fft(x(1:L1),128);
X2 = fft(x(1:L2),1024);
% Periodogram
I1 = (abs(X1).^2)/L1;
I2 = (abs(X2).^2)/L2;
LoI1 = 10*log10(I1);
LoI2 = 10*log10(I2);% (dB)
k1 = 0:127; k2 = 0:1023;
w1 = 2*pi*k1/127;
w2=2*pi*k2/1024;
subplot(2,1,1), plot(w1,I1)
subplot(2,1,2), plot(w2,I2)
```



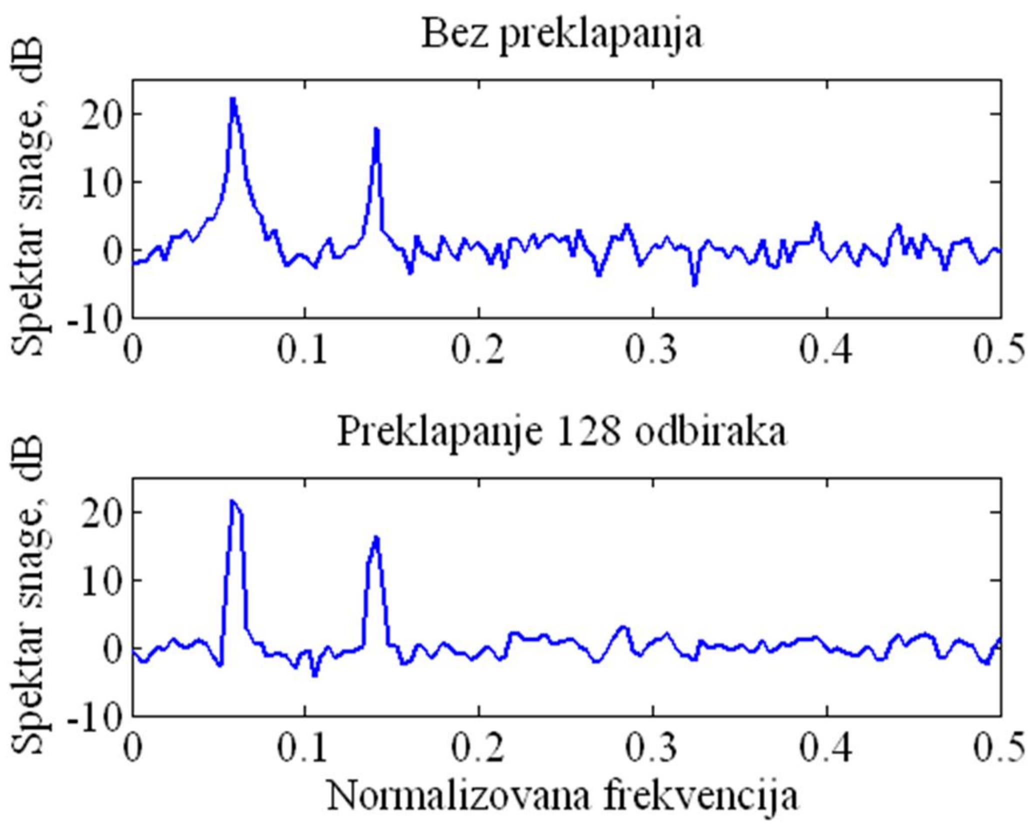
Matlab Program (7)

```
subplot(2,1,1)
plot(w1,LoI1),
title('N=128'),
ylabel('Spektar snage, dB')
axis([0 2*pi -20 30])
subplot(2,1,2)
plot(w2,LoI2),
title('N=1024'),
ylabel('Spektar snage, dB
axis([0 2*pi -20 30])
```



Matlab Program (8)

```
n=0:2000;
x=2*sin(0.12*pi*n)+...
sin(0.28*pi*n)+randn(size(n));
Window1 = boxcar(256);
window2 = hanning(256);
nfft=256;
noverlep=128;
% Bartlett-ova metoda
% "cistih periodigrama"
[Pxx1,f]=psd(x,nfft,2, …
window1,0);
% Welch-ova metoda
% modifikovanih
% usrednjenih periofograma
[Pxx2,f]=psd(x,nfft,2,…
  window2,noverlep);
subplot(2,1,1),
plot(f/2,10*log10(Pxx1));
subplot(2,1,2),
plot(f/2,10*log10(Pxx2));
```



Profesor dr Miroslav Lutovac
mlutovac@viser.edu.rs