MATEMATIČKI

PODSETNIK

EKSPONENTI

1)

$$\mathbf{10^{\mathit{x}}}$$

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100 \qquad \dots$$

2)

$$\mathbf{10^{-x} = \frac{1}{10^{x}}}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^{2}} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}$$

3)

$$\mathbf{10^{x} \cdot 10^{y} = 10^{x+y}}$$

$$10^{2} \cdot 10^{3} = 10^{5}$$

4)

$$\left(10^{x}\right)^{y} = 10^{x \cdot y}$$

$$\left(10^{2}\right)^{3} = 10^{6}$$

5)

$$\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$$

$$\frac{10^5}{10^3} = 10^2$$

6)

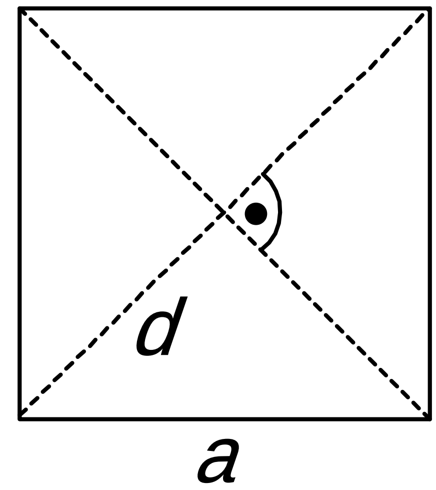
$$\sqrt[x]{10} = 10^{\frac{1}{x}}$$

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

GEOMETRIJA

Kvadarat:

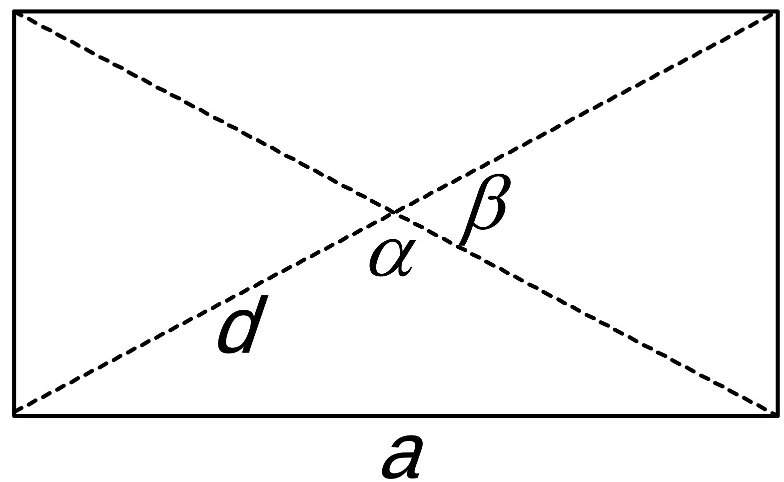
- **stranica dužine** **a**
- **obim** **O = 4a**
- **površina** **P = a^2**
- **dijagonala** $d = a\sqrt{2}$



Obe dijagonale su iste i seku se pod pravim uglom.

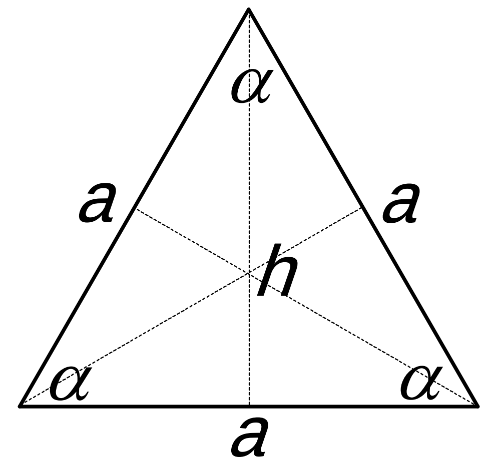
Pravougaonik:

- stranice dužina a i b
- obim $O = 2a + 2b$
- površina $P = ab$
- dijagonala $d = \sqrt{a^2 + b^2}$



Obe dijagonale su iste i seku se pod proizvoljnim uglom (koji nije prav, a zavisi od a i b).

Jednakostranični trougao:



– **sve tri stranice dužine a**

- **sva tri ugla jednaka** $\frac{\pi}{3}$

- **obim O = 3a**

– **površina P =** $\frac{ah}{2}$

- visina $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

– **preseci visina i težišnih linija, centar upisane i centar opisane kružnice su u istoj tački; ta tačka deli visinu u razmeri 2:1**

– **visine polove uglove i polove stranice.**

Pravougli trougao

- katete dužina a i b

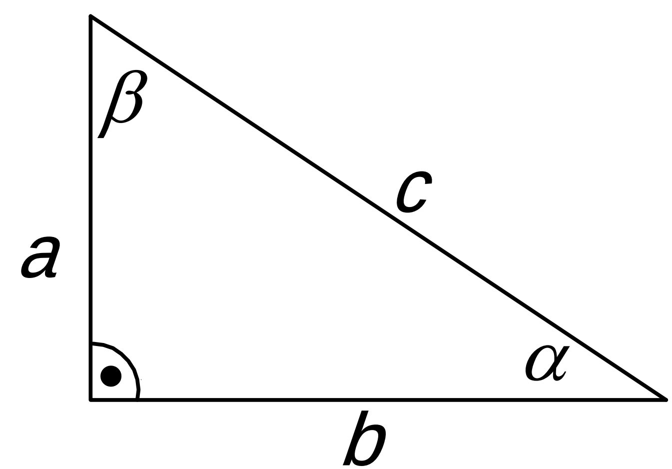
– hipotenuza dužine c

- važi Pitagorina teorema :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

– obim O = a + b + c

- površina P = $\dfrac{ab}{2}$

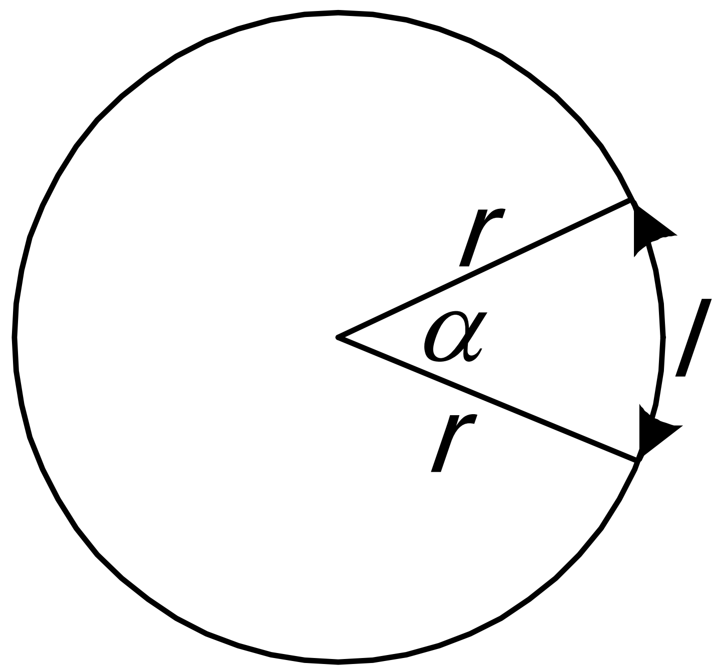


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

Ravanski ugao

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

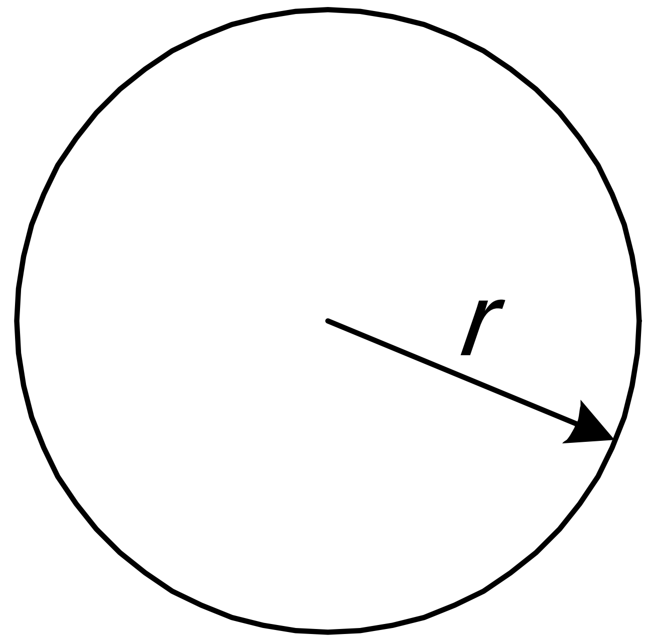


Krug

– **polupręčnik r**

- obim O = $2r\pi$

- površina P = $r^2\pi$

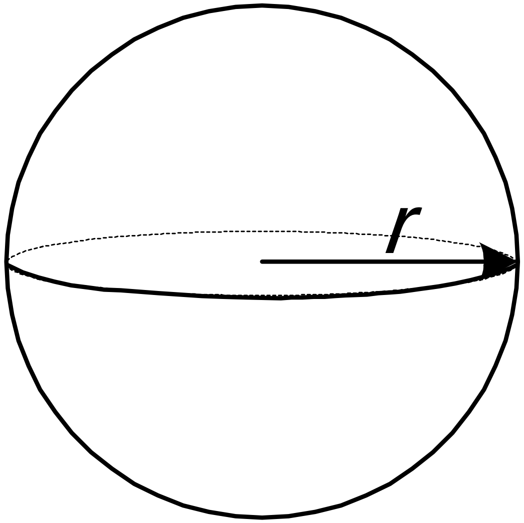


Lopta

−polupręčnik r

- površina sfere P = $4\pi r^2$

- zapremina V = $\frac{4}{3}\pi r^3$



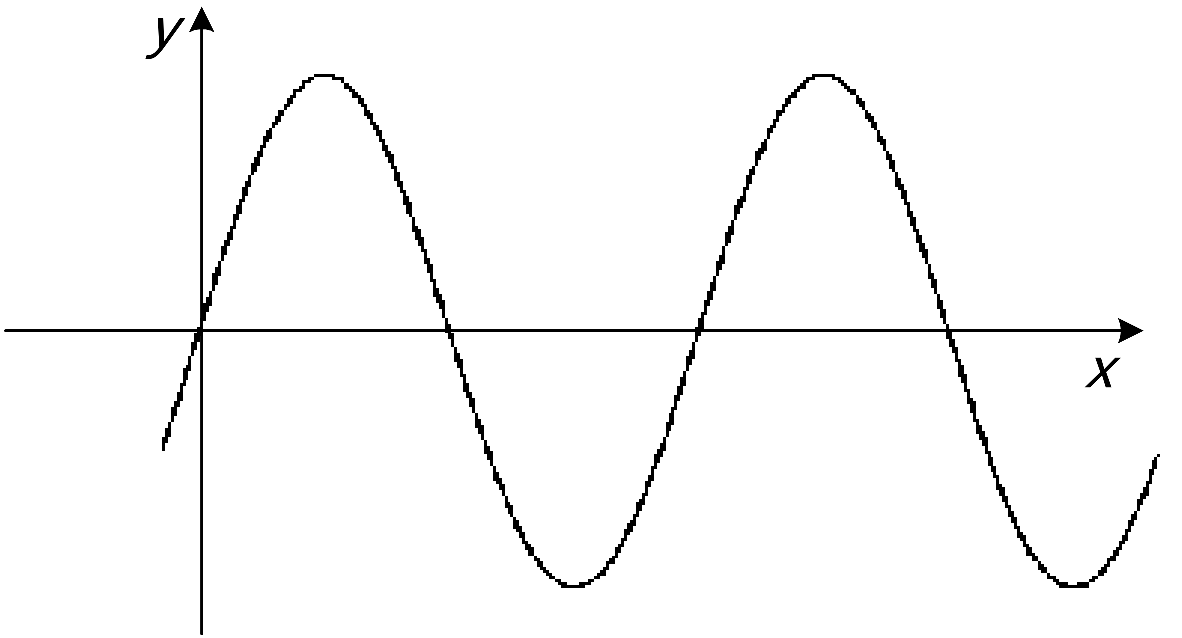
FUNKCIJE

Šta je funkcija?

Preslikavanje jednog skupa u drugi. Svakom elementu prvog skupa (koji se najčešće obeležava sa x) odgovara tačno jedan element drugog skupa (koji se najčešće obeležava sa y).

Primer:

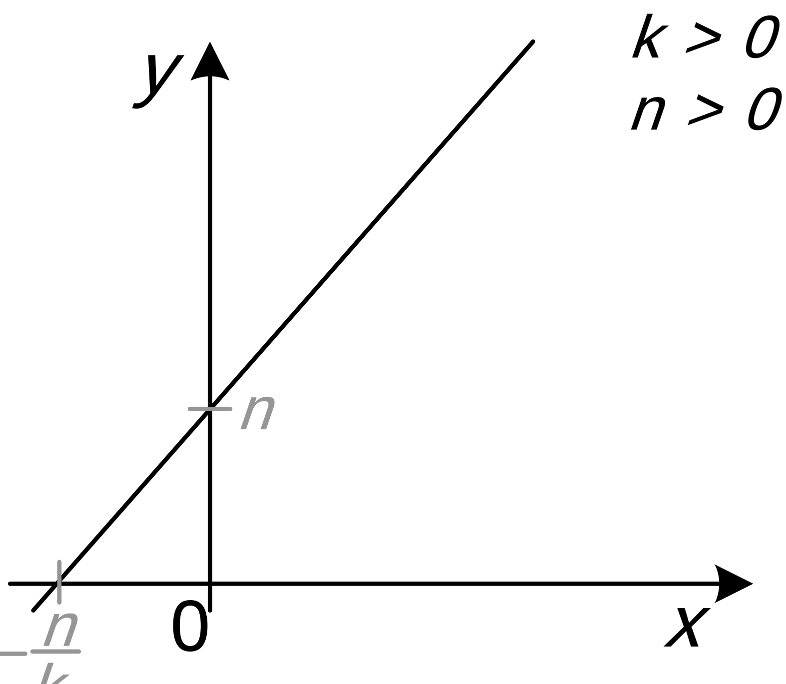
$$y = f\left(x\right) = \sin x$$

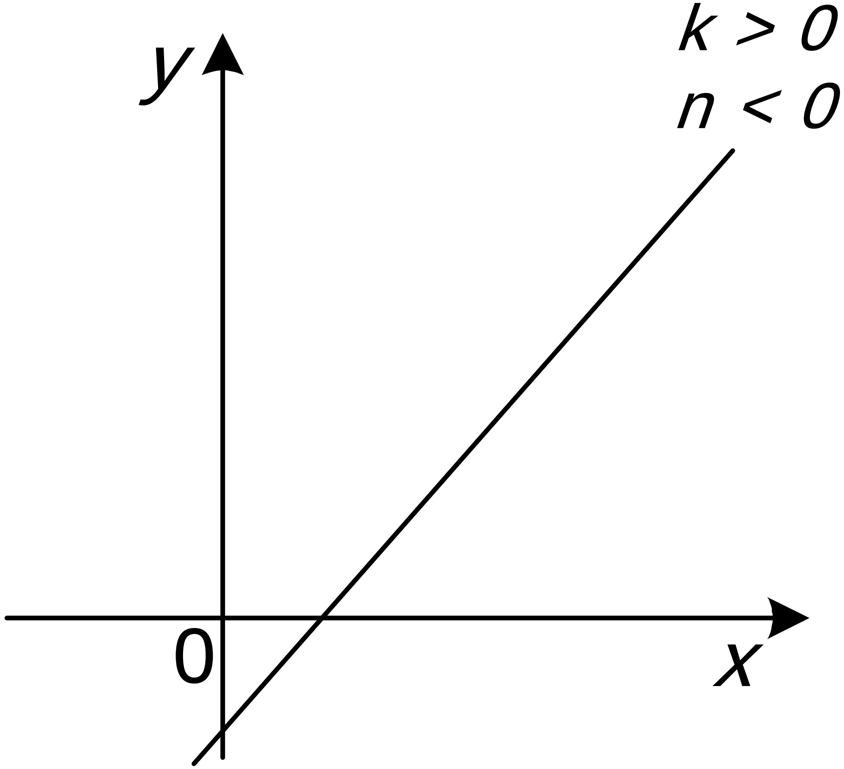


Šta je linearna funkcija?

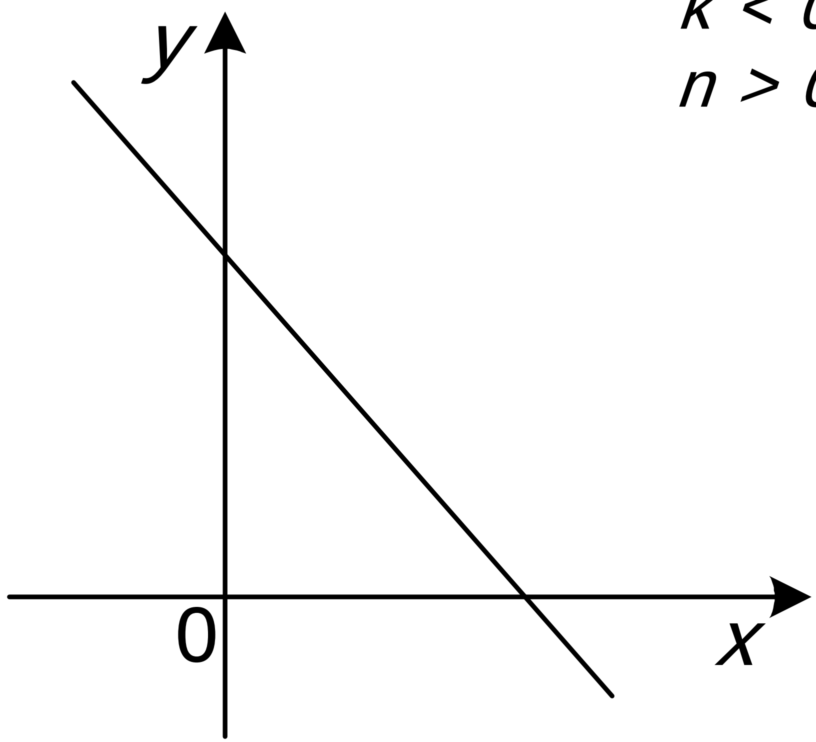
Funkcija oblika $y = f\left(x\right) = kx + n$

gde su k i n realni brojevi.

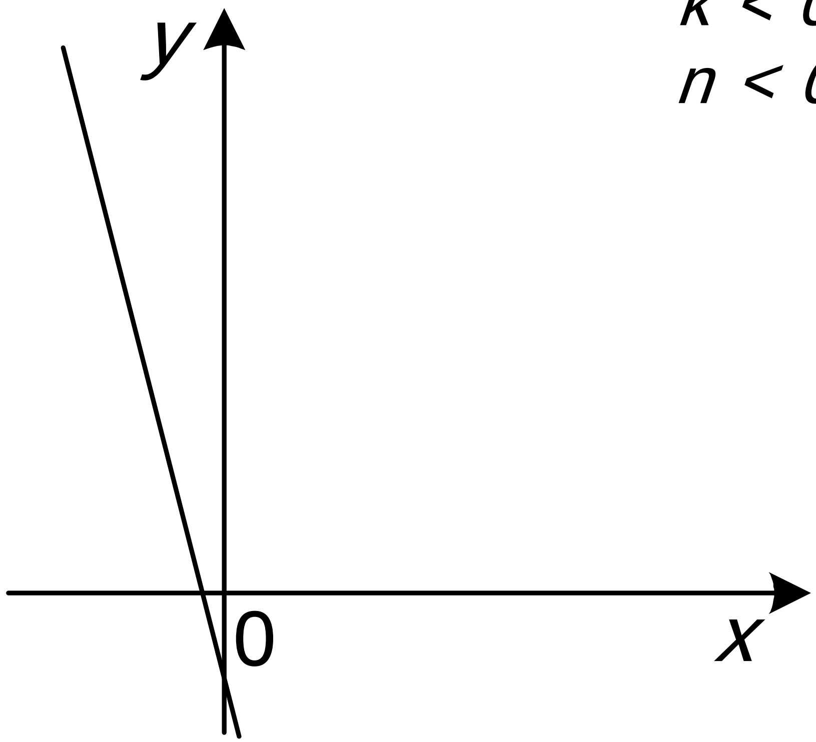




k > 0
n < 0
y
0
x



$k < 0$
$n > 0$



$k < 0$

$n < 0$

Šta znači ˝direktno srazmerno˝, a šta ˝obrnuto srazmerno˝?

Kod linearne funkcije $y = f(x) = kx$

promenljiva y je direktno srazmerna promenljivoj x,

a konstanta srazmernosti je k.

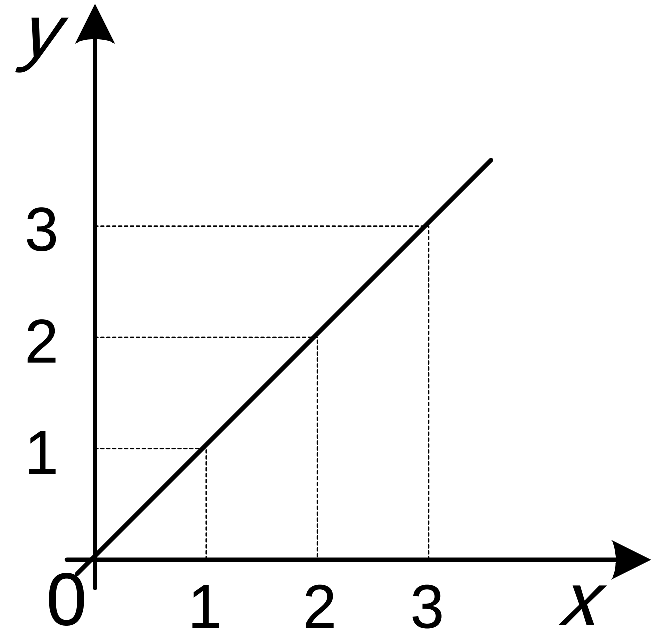
Ako je $k = 1$ tada je y = x (y i x su jednaki).

Grafik ove funkcije je prava koja je nagnuta

pod uglom od 45° (ili $\pi / 4$) u odnosu na x osu.

za x = 1 , y = 1

za x = 2 , y = 2...

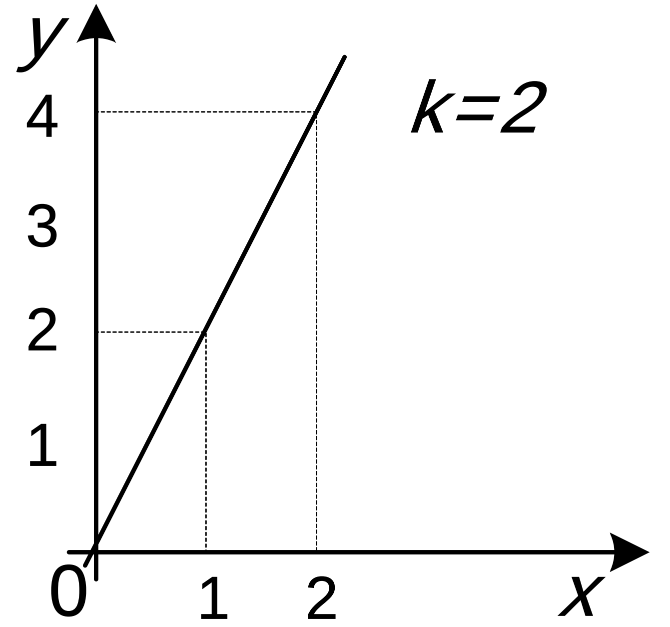


Ako je na primer $k = 2$ **tada je**

$$y = 2x$$

za x = 1 , y = 2

za x = 2 , y = 4...

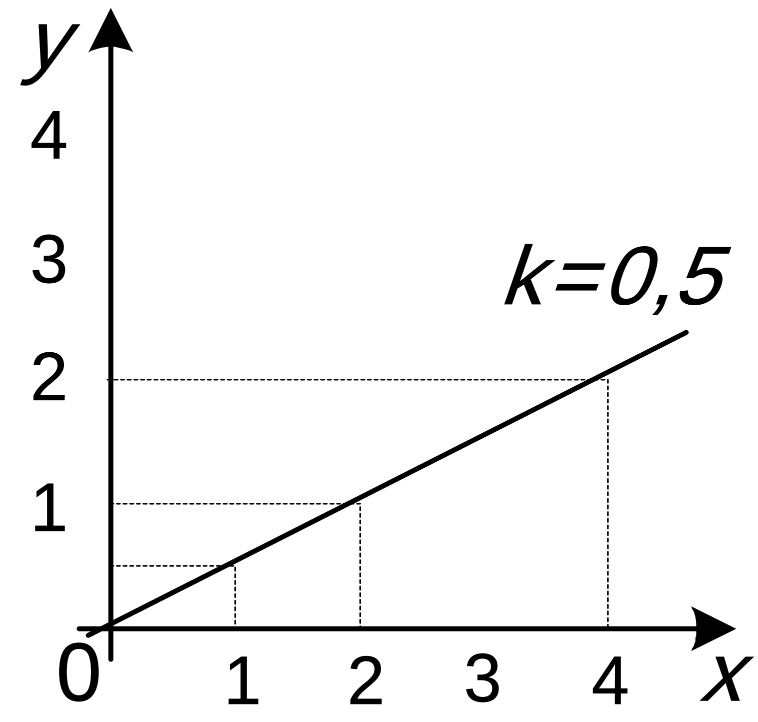


Ako je na primer $k = 0,5$ **tada je**

$$y = 0,5x$$

za x = 1 , y = 0.5

za x = 2 , y = 1...



Posmatrajmo funkciju dve promenljive $y = \frac{k_1 x}{k_2 z}$

promenljive su x i z

y je direktno srazmerno x, a to znači da koliko puta poraste promenljiva x toliko puta poraste promenljiva y.

y je obrnuto srazmerno z, a to znači da koliko puta poraste promenljiva z toliko puta se smanji promenljiva y.

Šta znači ˝direktno srazmerno˝, a šta ˝obrnuto srazmerno˝ sa nekim stepenom (na primer sa kvadratom)?

Na primer, u funkciji

$$y = \frac{k_1 x^2}{k_2 z^3}$$

y je direktno srazmerno x^2, a obrnuto srazmerno z^3.

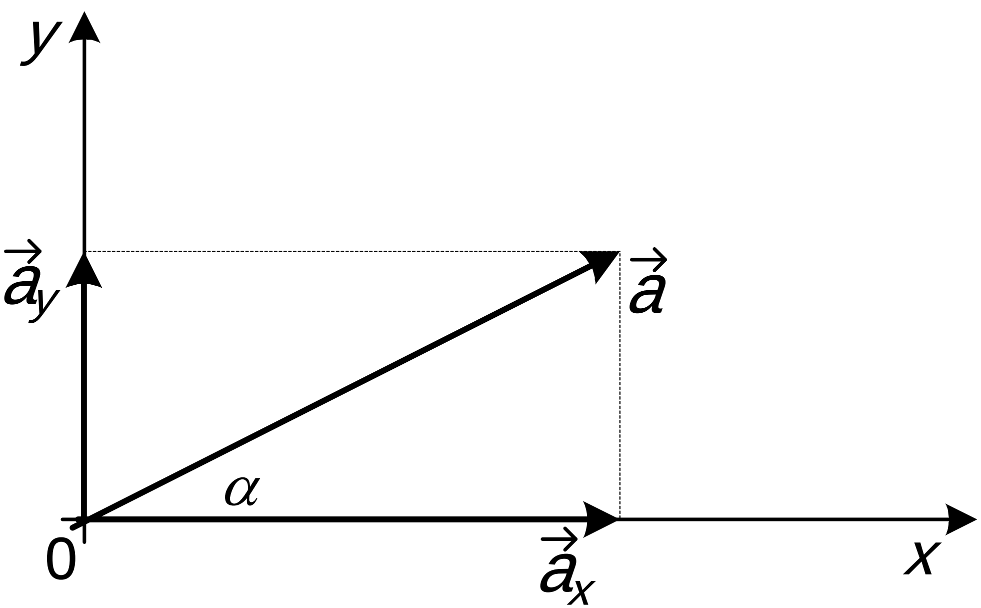
SKALARI
I
VEKTORI

Skalari su brojne vrednosti.

Vektori su usmerene duži. Definišu se intenzitetom, pravcem i smerom.

Intenzitet vektora (ili moduo vektora) je dužina vektora.

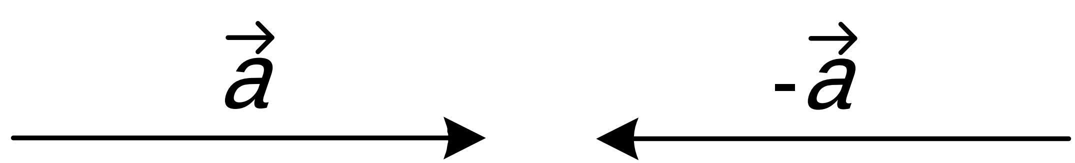
$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2}$$



Pravac vektora je definisan uglom u odnosu na jednu od osa koordinatnog sistema (x ili y).

Svaki pravac može imati dva smera, na primer: udesno ili ulevo, nagore ili nadole, ka ili od.

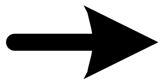
Svaki vektor ima i sebi suprotan vektor. To je vektor istog intenziteta, istog pravca, a suprotnog smera.



Jedinični vektor (ili ort) je vektor koji ima intenzitet jednak jedinici, a pravac i smer su zadati. Svaki vektor se može prikazati proizvodom svog algebarskog intenziteta i jediničnog vektora. Algebarski intenzitet je intenzitet koji može biti pozitivan i negativan, za razliku od intenziteta koji je isključivo pozitivan.

Primer:

$\vec{r}_0$



jedinični vektor

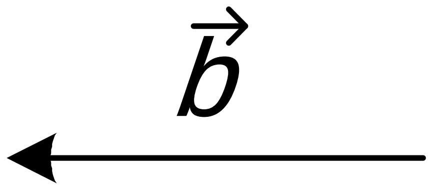
$$\vec{a} = 3\vec{r}_0$$

$\vec{a}$

intenzitet je 3

algebarski intenzitet je 3

$$\vec{b} = -3\vec{r}_0$$



intenzitet je 3

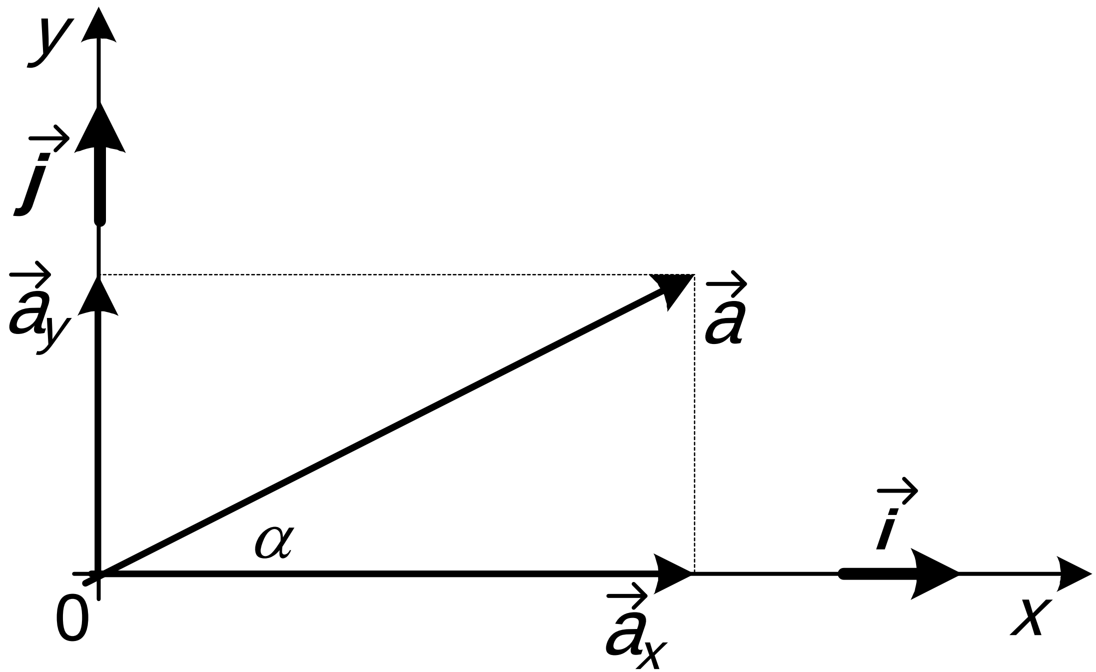
algebarski intenzitet je - 3

Vektori $\vec{a}$ **i** $\vec{b}$

su istog pravca, a suprotnog smera;
istog intenziteta,
algebarski intenziteti su im suprotnog znaka.

RAZLAGANJE VEKTORA NA OSE

Svaki vektor se može razložiti u Dekartovom koordinatnom sistemu na svoju x i y komponentu



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = |\vec{a}_x| \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = |\vec{a}_y| \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

gde je: $\vec{i}$ **jedinični vektor x-ose (ima intenzitet jednak 1, pravac i smer x-ose)**

$\vec{j}$ **jedinični vektor y-ose (ima intenzitet jednak 1, pravac i smer y-ose)**

$\left|\vec{a}\right|$ **intenzitet vektora** $\vec{a}$

Za ove veličine važi da je:

$$|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{|\vec{a}_y|}{|\vec{a}_x|}$$

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

SISTEM JEDNAČINA I DETERMINANTA DRUGOG REDA

Sistem linearnih nezavisnih jednačina drugog reda je:

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = c_2$$

Glavna determinanta ovog sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pojedinačne determinante promenljivih su:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1 a_{22} - a_{12} c_2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = a_{11} c_2 - c_1 a_{21}$$

Nepoznate u jednačinama se izračunavaju Kramerovim pravilima:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

SISTEM JEDNAČINA I DETERMINANTA TREĆEG REDA

Sistem linearnih nezavisnih jednačina trećeg reda je:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

Glavna determinanta ovog sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Pojedinačne determinante promenljivih su:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Nepoznate u jednačinama se izračunavaju Kramerovim pravilima:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

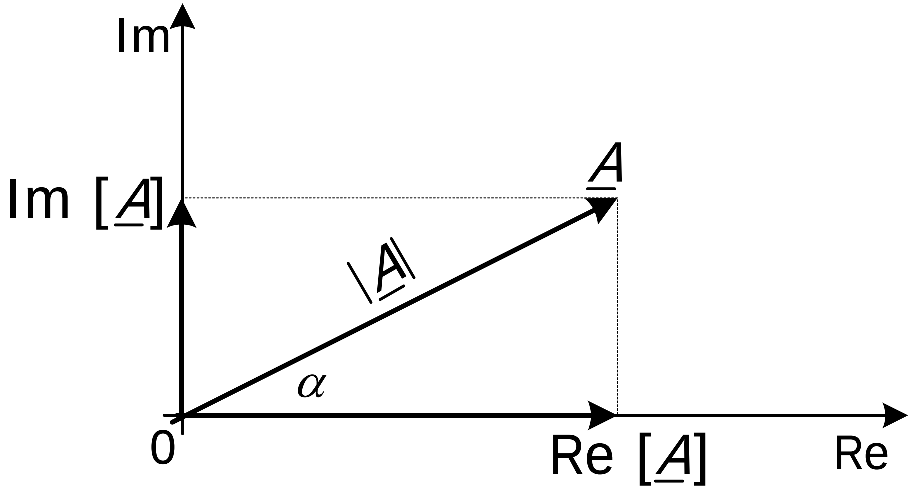
KOMPLEKSNI BROJEVI

Šta je kompleksni broj?

Broj koji ima svoj realan i svoj imaginaran deo u kompleksnoj ravni.

Koliko kompleksni broj ima oblika?

Tri



analitički $$\underline{A} = x + jy$$

trigonometrijski $$\underline{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$$

eksponencijalni $$\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$$

Šta je *j* ?

$$j = \sqrt{-1}$$

Analitički i trigonometrijski oblik mogu se direktno prevoditi jedan u drugi.

Eksponencijalni i trigonometrijski oblik se mogu direktno prevoditi jedan u drugi. Veze između ta dva oblika su moduo A i argument α kompleksnog broja.

$$A = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[\underline{A}\right] + \mathrm{Im}^2\left[\underline{A}\right]} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

moduo je isključivo pozitivan

$$\alpha = \mathbf{arctg}\,\frac{\mathbf{Im}\left[\underline{A}\right]}{\mathbf{Re}\left[\underline{A}\right]} = \mathbf{arctg}\,\frac{y}{x}$$

argument može biti i pozitivan i negativan

Ovo proističe iz Ojlerove formule:

$$\mathbf{e}^{j\alpha} = \mathbf{cos}\,\alpha + j\,\mathbf{sin}\,\alpha$$

Šta je konjugovani broj kompleksnom broju?

To je broj koji ima isti znak realnog dela a suprotan znak imaginarnog dela datog kompleksnog broja, odnosno broj koji ima isti moduo, a suprotan znak argumenta datog kompleksnog broja.

$$\underline{A}^{*} = x - jy = Ae^{-j\alpha}$$

Za kompleksne brojeve važi još:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{*} = A^{2}$$

$$j^{2} = -1$$

$$j^{3} = -j$$

$$j^{4} = 1$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

RAČUNSKE OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

Sabiranje

Zbir dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Sabiraju se realan deo sa realnim i imaginaran sa imaginarnim.

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x_3 + jy_3$$

Oduzimanje

Razlika dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Oduzimaju se realan deo od realnog i imaginaran od imaginarnog.

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = \left(x_1 + jy_1\right) - \left(x_2 + jy_2\right) = \left(x_1 - x_2\right) + j\left(y_1 - y_2\right) = x_3 + jy_3$$

Množenje

Množenje dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Množe se realni i imaginarni delovi kompleksnih brojeva, svaki član sa svakim.

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = \left(x_1 + jy_1\right) \cdot \left(x_2 + jy_2\right) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jx_2 y_1 + j^2 y_1 y_2 =$$

$$= \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + j\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) = x_3 + jy_3$$

Ili ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku:

$$\underline{A} = A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{e}^{j\beta} = AB \cdot \mathrm{e}^{j(\alpha+\beta)} = C \cdot \mathrm{e}^{j\gamma}$$

Deljenje

Količnik dva kompleksna broja je takođe kompleksni broj. Brojilac i imenilac količnika pomnožimo sa konjugovano kompleksnim brojem imenioca.

$$\underline{A} = x_1 + jy_1$$

$$\underline{B} = x_2 + jy_2$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \cdot \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{x_1 x_2 - jx_1 y_2 + jx_2 y_1 - j^2 y_1 y_2}{x_2^2 + jx_2 y_2 - jx_2 y_2 - j^2 y_2^2} =$$

$$= \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) + j\left(x_2 y_1 - x_1 y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = x_3 + jy_3$$

Ili ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku:

$$\underline{A} = A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B \cdot \mathrm{e}^{j\beta}$$

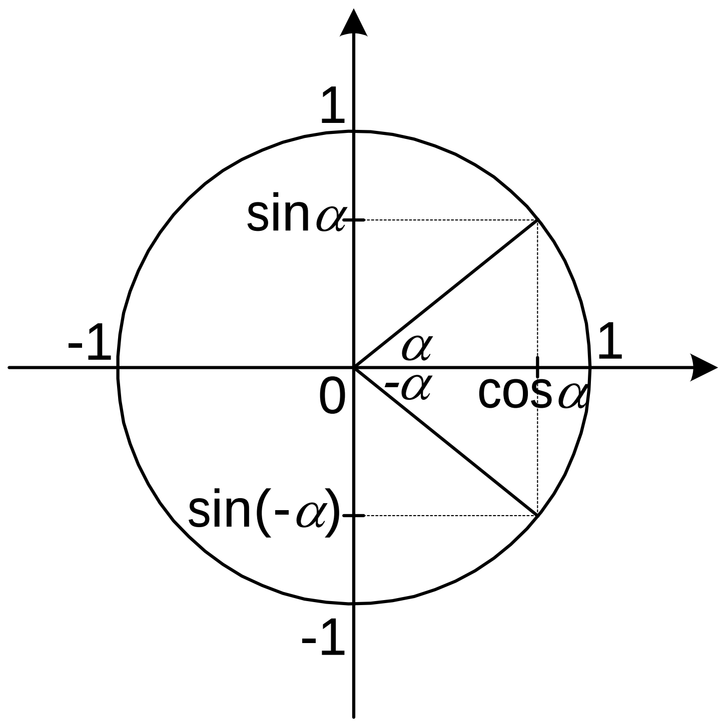
$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}}{B \cdot \mathrm{e}^{j\beta}} = \frac{A}{B}\mathrm{e}^{j(\alpha-\beta)} = C \cdot \mathrm{e}^{j\gamma}$$

Za proračun sa kompleksnim brojevima korisno je znati

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	0
$e^{j\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$	j	-1	-1	$-j$	1

Trigonometrijski krug

je krug čiji je poluprečnik jednak 1, a centar se nalazi u koordinatnom početku. Za dati ugao α kosinus očitavamo na x osi, a sinus na y osi.



sin – neparna funkcija

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

cos – parna funkcija

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

tg – neparna funkcija

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

INTEGRALI

Šta je integral?

Može se shvatiti kao suma beskonačno mnogo beskonačno malih veličina.

Oznaka integrala je $\int$.

Kakvi integrali postoje?

Određeni i neodređeni

Šta je rešenje neodređenog integrala?

Funkcija.

Primer:

$$\int dx = x = f(x)$$

rešenje ovog integrala je linearna funkcija.

Šta je rešenje određenog integrala?

Brojna vrednost.

$$\int_A^B dx = x \Big|_A^B = B - A = C$$

Za integrale važi:

$$\int_A^B = -\int_B^A$$

$$\int_A^B + \int_B^C = \int_A^C$$

U matematici postoji nekoliko osnovnih integrala čija se rešenja uče tablično. Mi ćemo koristiti:

$$\int dx = x$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

Pojam određenog integrala se može razumeti na primeru linijskog i površinskog integrala.

Linijski integral

Posmatrajmo liniju čiju dužinu želimo da odredimo.

Podelimo liniju na male (elementarne) delove dužine Δl (neka ih ima n).

Dužina linije jednaka je zbiru dužina svih malih delova Δl

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

Ako podelimo liniju na jako veliki broj ovih delova

$$n \to \infty$$

dužina ovih delova postaje jako mala

$$\Delta l \to 0$$

i pišemo je kao dl, a sumu pišemo kao linijski integral (čija je podintegralna funkcija jednaka 1):

$$l = \sum_{\substack{\Delta l \to 0 \\ n \to \infty}} \Delta l = \int_{l} dl$$

Ako je linija zatvorena obično je obeležavamo sa C (zatvorena kontura), a oznaka linijskog integrala je $\oint$,

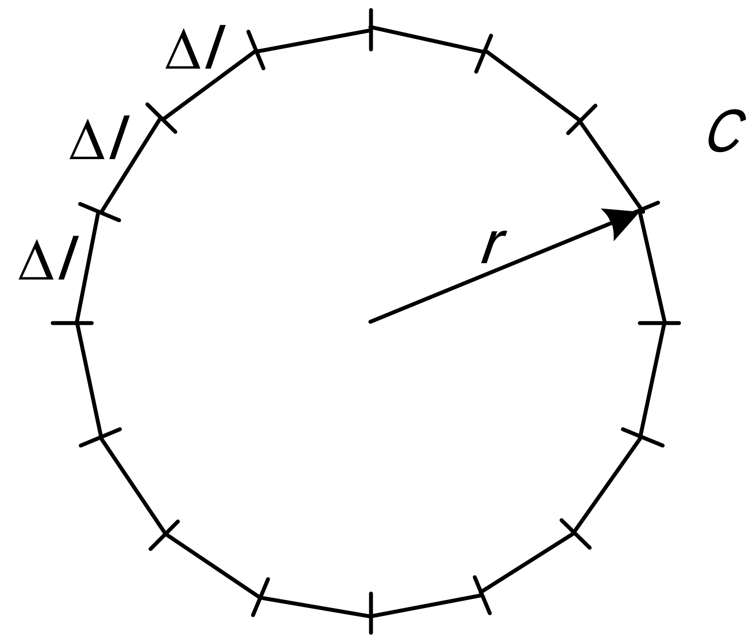
i označava integraljenje (sabiranje) po zatvorenoj konturi.

$$l = \oint_C dl$$

Primer:

Ako je zatvorena kontura C krug poluprečnika r tada je linijski integral po konturi C jednak obimu kruga

$$l = \oint_C dl = 2\pi r$$

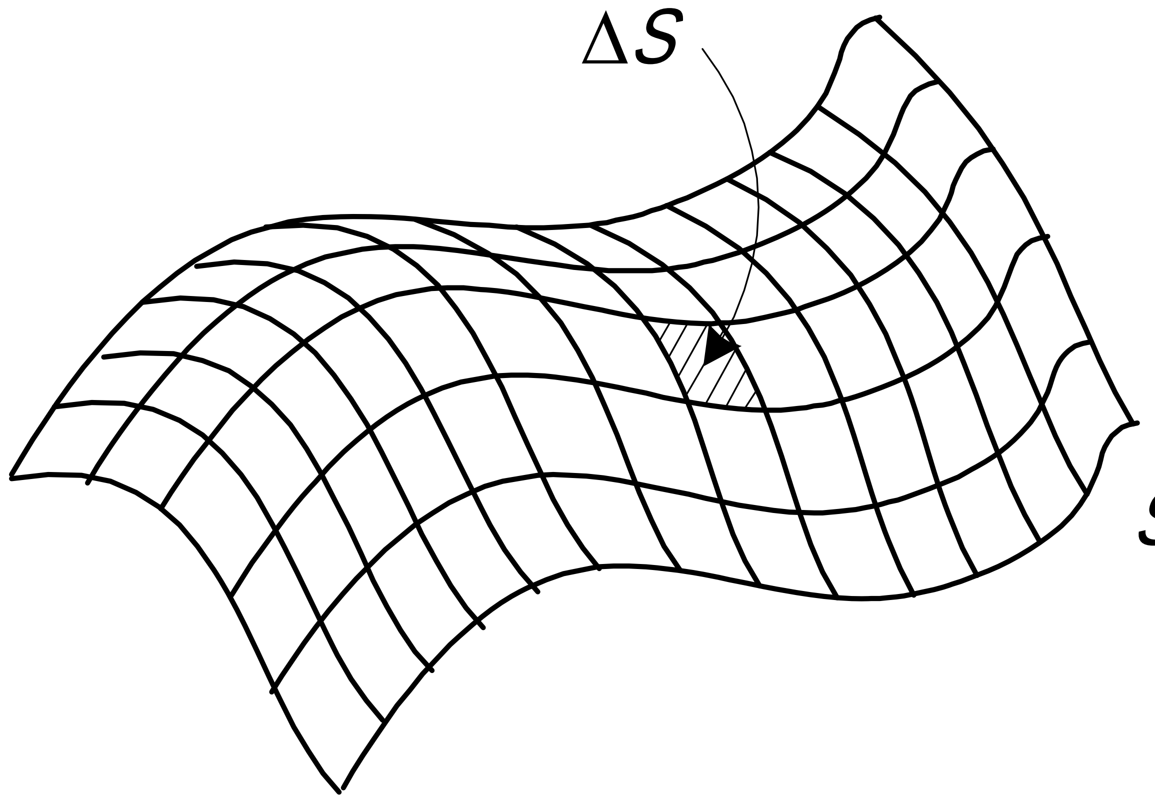


Površinski integral

Posmatrajmo površ čiju površinu želimo da odredimo. Podelimo površ na male delove (elementarne) površine ΔS

(neka ih ima n). Ukupna površina S jednaka je zbiru površina svih malih delova ΔS

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$



ΔS
S

Ako podelimo površ na jako veliki broj ovih delova

$$n \to \infty$$

površina ovih delova postaje jako mala

$$\Delta S \to 0$$

i pišemo je kao dS, a sumu pišemo kao površinski integral (čija je podintegralna funkcija jednaka 1):

$$S = \sum_{\substack{\Delta S \to 0 \\ n \to \infty}} \Delta S = \int_S dS$$

Ako je površ zatvorena oznaka površinskog integrala je $\oint$,

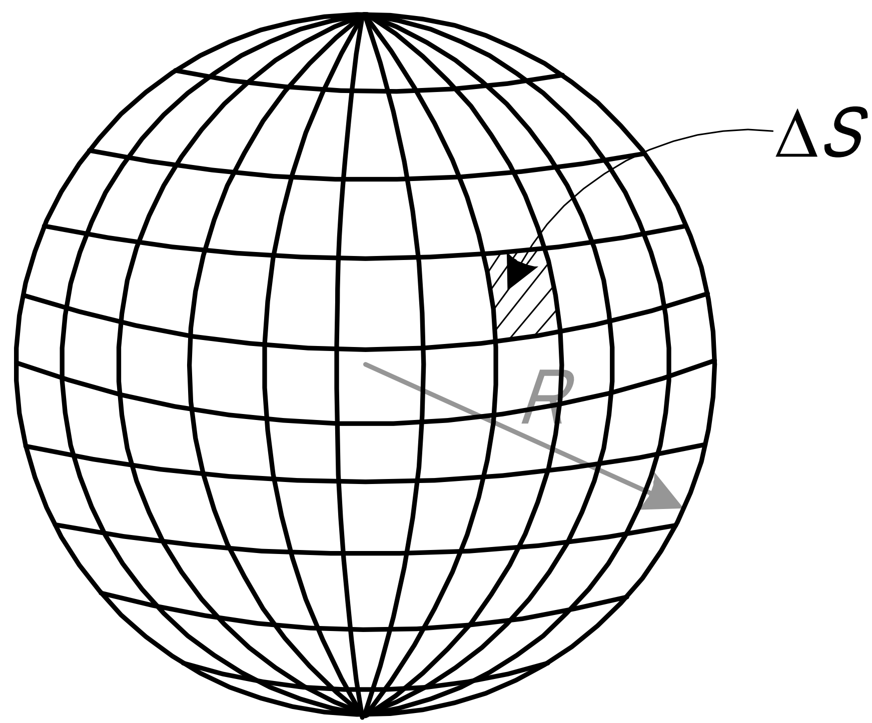
i označava integraljenje (sabiranje) po zatvorenoj površini.

$$S = \oint_S dS$$

Primer:

Ako je zatvorena površ S sfera poluprečnika R tada je površinski integral po sferi S jednak površini sfere:

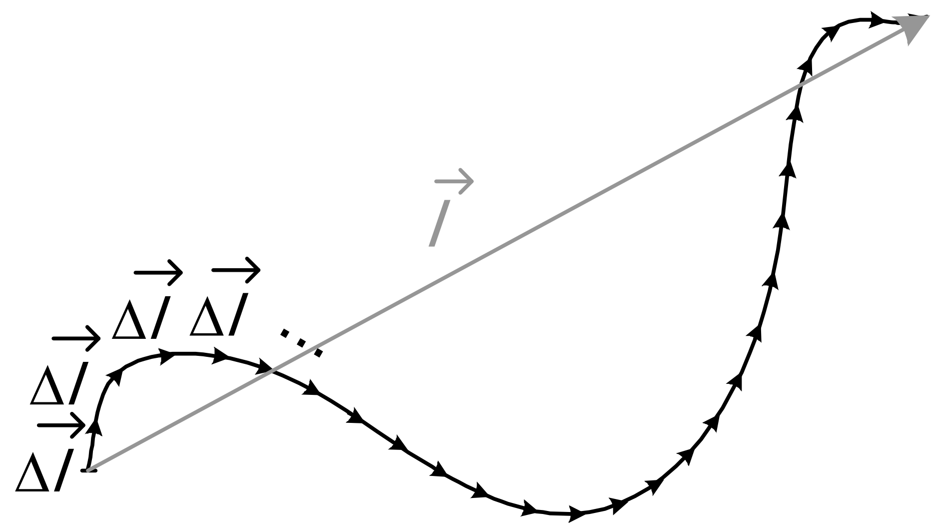
$$S = \oint_S dS = 4\pi r^2$$



Linijski i površinski integral mogu biti vektorski.

Svakom elementarnom delu dl dodeljuje se pravac koji se poklapa sa pravcem tangente na liniju l u posmatranoj tački, a smer po liniji se usvaja. Integral tada predstavlja vektorski zbir vektora

$$\vec{l} = \int_{l} d\vec{l}$$



Svakom elementarnom delu dS dodeljuje se pravac koji se poklapa sa pravcem normale na površinu S u posmatranoj tački, a smer se usvaja.

Može se napisati da je

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$

Ako je S zatvorena površina usvojen je dogovor da je normala uvek usmerena iz površine. Integral tada predstavlja vektorski zbir vektora $d\vec{S}$

$$\int_S d\vec{S}$$