5.2 GRAFOSTATIKA

Nosačem se naziva kruto telo koje prenosi opterećenje koje mu saopštavaju tela koja su sa njim u kontaktu.
Nosači nogu biti:

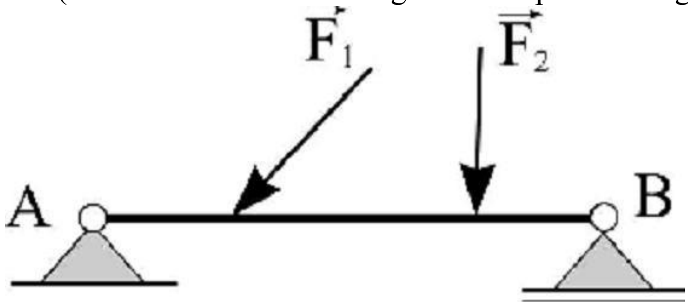
- ravni (ako osa nosača i opterećenja leže u jednoj ravni)
- prostorni

Ako se nosač sastoji iz jednog krutog tela, onda je on prost, a u suprotnom je složen.
Nosači mogu biti:

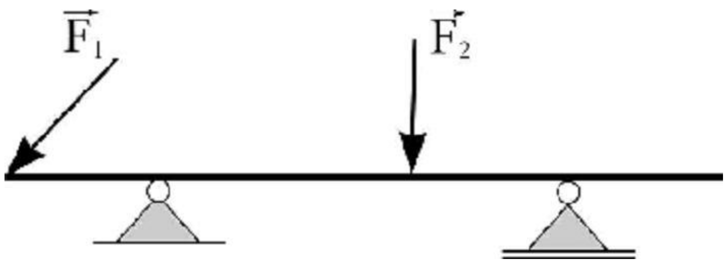
- gredni (puni nosači – grede)
- rešetkasti (rešetke)
- okvirni (ramovi-okviri)

NAPOMENA:
Puni nosači su gotovo uvek poprečnog preseka znatno manjeg od treće dimenzije, pa se dimenzije poprečnog preseka obično zanemaruju, a nosač zamišljamo kao liniju koja prolazi kroz težišta njegovih poprečnih preseka.
Greda je ravni i pravolinijski nosač, koji ima potrebna pričvršćenja, a može nositi bilo koje opterećenje.
S obzirom na raspored i vrstu veza sa okolinom, razlikujemo:

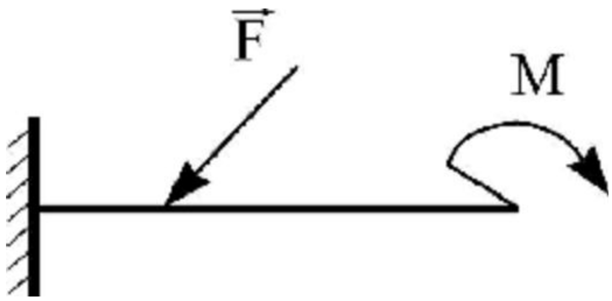
- prostu (jednostavnu) gredu
- gredu sa prepustima
- konzolu
- Gerberove grede (statički određen sistem zglobovima povezanih greda)



Prosta greda

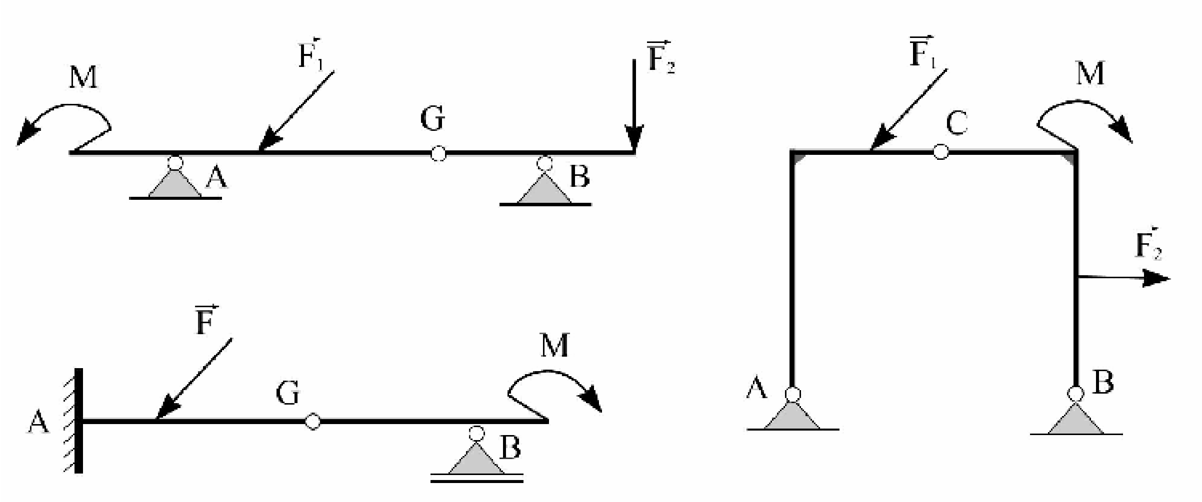


Greda sa prepustima

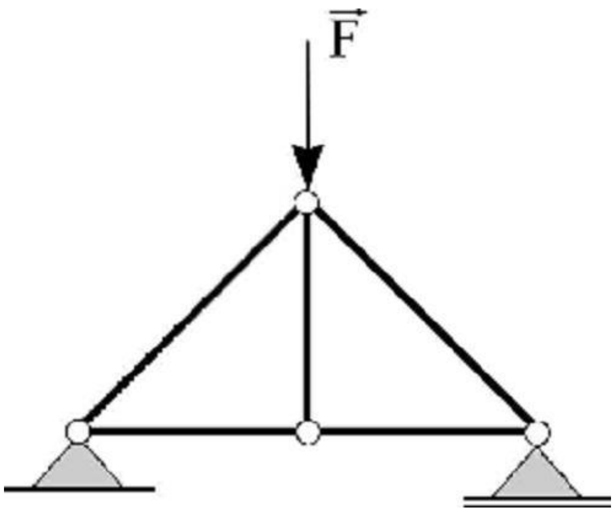


Konzola

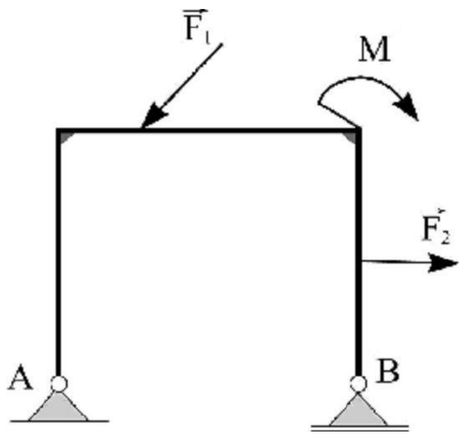
Gerberova greda – predstavlja nosač sastavljen iz više nosača (greda, konzola) povezanim gerberovim zglobovima.

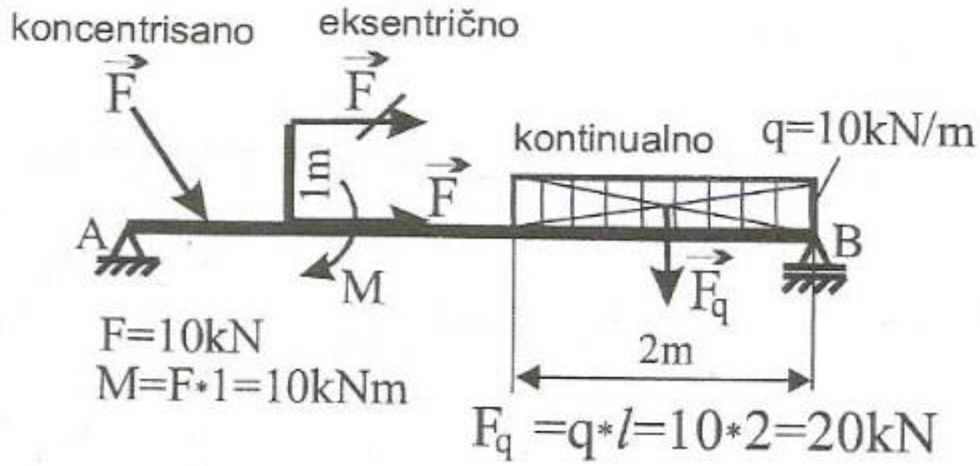


Rešetka je kruta konstrukcija, sastavljena od pravih štapova, koji su na krajevima spojeni zglobovima.



Okvirni nosači (ramovi) su nosači koji se dobijaju krutim spajanjem greda (konzola) u jednu celinu.





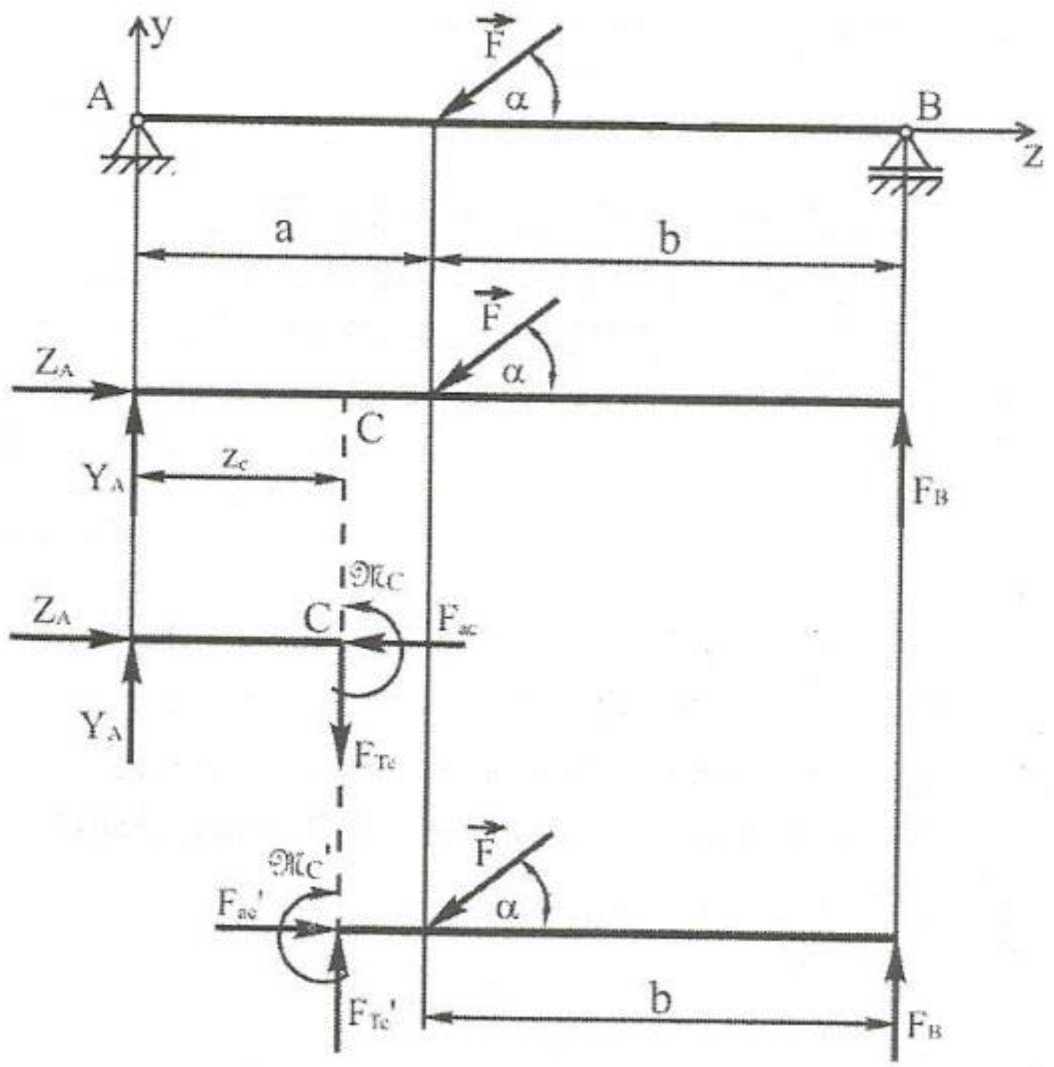
Oslobodimo gredu veza, a veze i njihov uticaj zamenimo silama reakcije. Greda se tako nalazi u ravnoteži pod dejstvom sile F_i reakcija veza. Sve su ovo aktivne i reakcije veza = spoljašnje sile.
Ako gredu presečemo u tački C (presek p-p), delovi grede AC i CB više neće biti u ravnoteži. Ako odvojimo desni deo, za ravnotežu levog dela grede moraju se uzeti unutrašnje sile u poprečnom preseku, kojima delići odvojenog desnog dela deluju na levi deo grede.
Iz uslova ravnoteže delova grede se određuju veličine sila $F_T(c)$ i $F_a(c)$, koje sprečavaju kretanje u pravcu ose i upravno na osu grede.
Sile $F_T\ i\ F_a$ ne sprečavaju i rotaciju oko x ose, pa u preseku mora delovati i spreg momenata M suprotnog smera i jednak po veličini momentu sila koji deluje na posmatrani deo grede.
Za $F_T,\ F_a\ i\ M$ se dobijaju iste brojne vrednosti bez obzira posmatra li se ravnoteža levog dela AC ili desnog CB, ali su im smerovi suprotni – princip jednakosti akcije i reakcije.
Ako napravimo presek na nekom drugom delu grede, vrednosti sila i momenata će se promeniti.
Uglavnom:

- Transferzalna (poprečna) sila – uravnoteženje komponenti spoljašnjeg opterećenja čiji su pravci delovanja upravni na osu grede (II osi y),
- Aksijalna sila (uzdužna) – uravnoteženje one komponente spolašnjeg opterećenja koje su paralelne ili leže na osi grede (ose z).

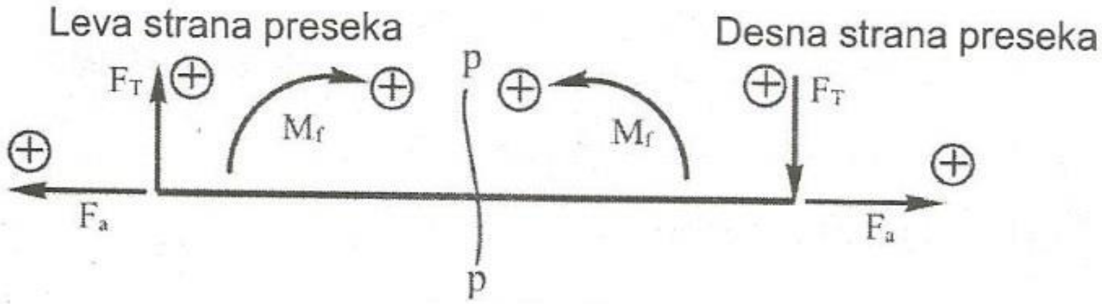
- Moment savijanja – drži ravnotežu momentima spoljašnjeg opterećenja, a određuje je iz uslova ravnoteže levog ili desnog dela grede.

5.2.1. Osnovne statičke veličine u poprečnom preseku nosača

Greda je opterećena kao na slici 5.2.1.1



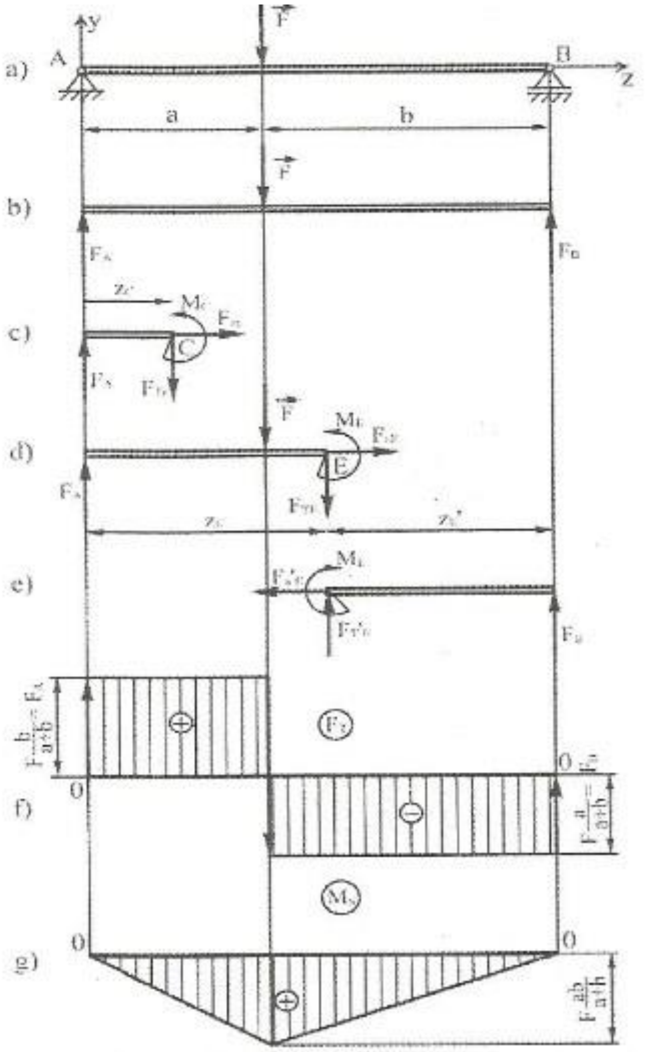
KONVENCIJE PREDZNAKA UNUTRAŠNJIH VELIČINA



Za proračun preseka grede, treba naći presek u kome se pojavljuju najveće vrednosti unutrašnjih sila i momenata. Ovaj problem se rešava određivanjem dijagrama F_T, F_a, M_t . Dijagrami se crtaju analitičkim putem, za sve tipove nosača i opterećenja – odrede se veličine F_T, F_a, M_t , za dovoljan broj preseka, tako da se može nacrtati dijagram.

DEFINICIJE SILA U PRESECIMA – KONVENCIJA O ZNAKU

Normalna i transferzalna sila F_T i F_a , su komponente redukcione rezultante unutrašnjih sila u pravcu ose štapa i upravno na ose štapa.
Moment savijanja M je moment redukcionog sprega unutrašnjih sila, kada se težište preseka uzme za redukcionu tačku. **5.2.2 Grede- određivanje unutrašnjih sila i momenata savijanja**
I Proste grede
PROSTA GREDA OPTEREĆENA KONCENTRISANOM SILOM



Iz uslova ravnoteže:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow Y_A - F + Y_B = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; -F \cdot a + Y_B \cdot (a+b) = 0 \qquad (2)$$

(1) $Y_A = F - Y_B$

(2) $Y_B = \frac{F \cdot a}{a+b}$

(3) $Y_A = F - \frac{F \cdot a}{a+b} = \frac{F \cdot (a+b) - F \cdot a}{a+b} = \frac{F \cdot b}{a+b}$

Ako presečemo gredu u tački udaljenoj za z od tačke A, u preseku se moraju ucrtati sile: F_T, F_A i M.
Očigledno, jednačine za tačku C su:

1) $\sum X_{ci} = 0$
2) $\sum Y_{ci} = 0$
3) $\sum M_c = 0$

Iz 1 $F_{ac} = 0 \Rightarrow F_{ac} = 0$

Iz 2 $Y_A - F_{TC} = 0 \Rightarrow Y_A = F_{TC} = \frac{F \cdot b}{a+b}$

(sila $F_{TC} = const$)

Za izračunavanje momenta, koristi se jednačina promene momenta u tački C :

sa leve strane

$F_A \cdot z_c = M_c$

$$M_c = \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot z_c$$

za

$z_c = a \Rightarrow$

$M_c = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot a$ – vrednost momenta gde deluje sila F

sa desne strane

$F_B \cdot z_в = M_в$

$$M_в = \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot z_в$$

kada je $z_c = b \Rightarrow M_в = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot b$

Moment je svuda pozitivan, pa se crta ispod ose i svuda je +.

$$\sum M_A = -F \cdot a + F_B \cdot (a + b) \Rightarrow -F \cdot a + \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot (a + b) = 0$$

Maksimalna vrednost momenta je u tački K:

$$M_K = F_A \cdot a = \frac{F \cdot a \cdot b}{a + b}$$

Nulu sile F_{TC} nalazimo za:

$F_{TC} = 0$

$$\frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{z_c^2}{l^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{z_c^2}{l^2} = 0$$

$$\frac{z_c^2}{l^2} = \frac{1}{3}$$

$$z_c^2 = \frac{l^2}{3}$$

$$z_c = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Maksimalnu vrednost M_s nalazimo gde je prvi izvod M_s'=0. To je tačka

$$z_c = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Tu je:

$$M_s = \frac{q \cdot l^2}{6} \cdot \left[\frac{l\sqrt{3}}{3 \cdot l} - \frac{l^3}{\sqrt{3}^3 \cdot l^3}\right] = \frac{q \cdot l^2}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] = \frac{q \cdot l^2}{6} \cdot \left[\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] = \frac{q \cdot l^2}{6} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}}$$
$$= \frac{q \cdot l^2}{9 \cdot \sqrt{3}} = \frac{q \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}}{27}$$

OBJAŠNJENJE DIJAGRAMA

Unutrašnje sile u presecima predstavljaju ukupnu silu kojom u jednom preseku jedan deo grede deluje na drugi tj. zamenjuju odbačeni deo grede na posmatrani (uravnotežuju deo grede koji posmatramo).

Unutrašnje sile se računaju u karakterističnim presecima:
- gredu možemo preseći bilo gde tj. gde god nam je to potrebno
- unutrašnje veličine možemo računati na oba dela
- tek po izračunavanju svih veličina, možemo crtati dijagrame

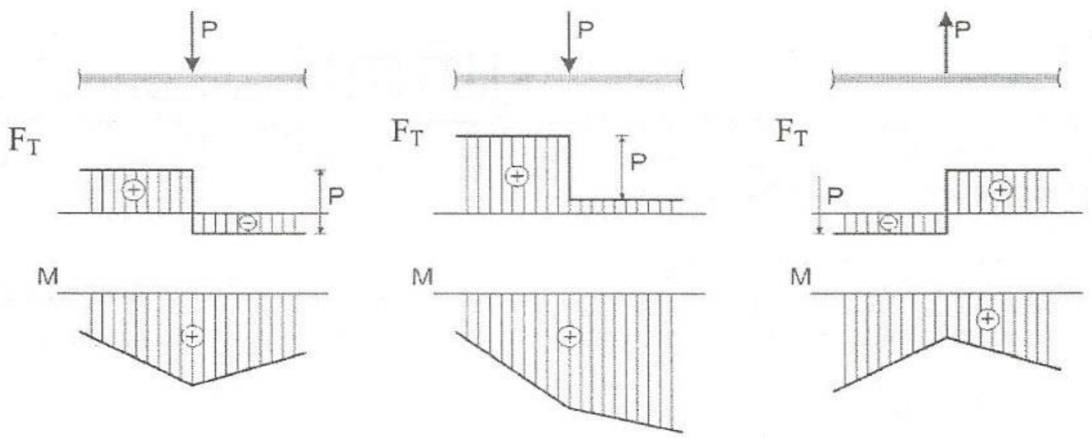
Karakteristični preseci su:
- početak i kraj grede, promena pravca grede,
- početak i kraj kontinualnog opterećenja
- ispred i iza delovanja koncentrisane sile i koncentrisanog sprega

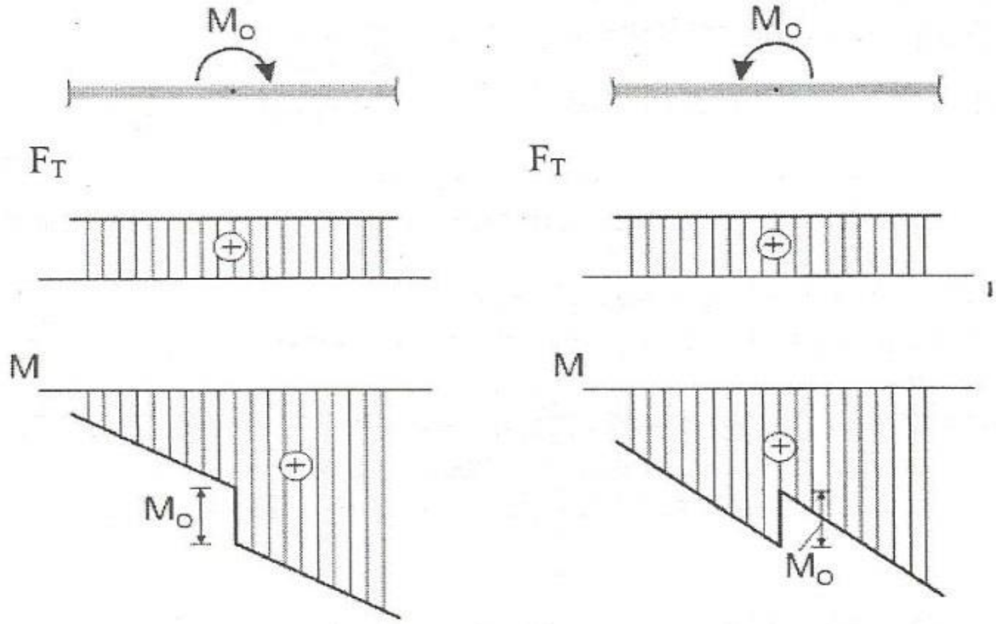
Za crtanje dijagrama između karakterističnih tačaka, koristimo diferencijalni račun.
$\frac{dM(z)}{dz} = F_T(z)$ – transferzalna sila je jednaka izvodu napadnog momenta momenta po osi z
MATEMATIKA: Ako funkcija ima prvi izvod jednak nuli onda ta funkcija ima ekstremnu vrednost za tu vrednost argumenta.

ZAKLJUČAK:

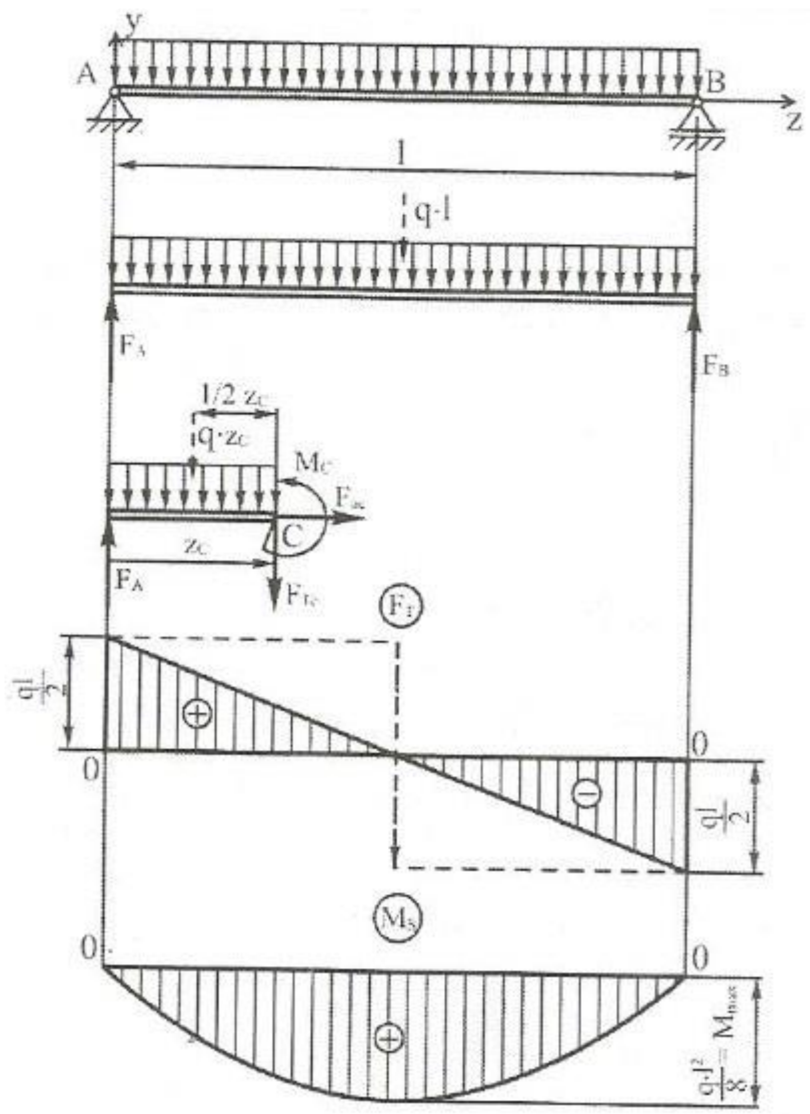
U preseku u kome transferzalna sila ima nulu – moment savijanja ima ekstremnu vrednost, u poljima gde je F_T pozitivna, momenat raste, a gde je F_T negativno- momenat opada.

Menja se ugib pravca (veća sila, strmiji pravac)
Kontinualno opterećenje uzrokuje linearni pad ili rast poprečne sile, zavisno od smera opterećenja.
Lom u dijagramu poprečnih sila se javlja samo na mestu na kome se menja intenzitet kontinualnog opterećenja.
Kontinualno opterećenje upravno na osu grede – daje parabolu u M dijagramu. Zavisno od veličine opterećenja se menja karakteristika parabole.





PROSTA GREDA OPTEREĆENA KONTINUALNIM OPTEREĆENJEM KOJE JE KONSTANTNOG INTENZITETA



Iz ravnoteže transferzalne sile reakcije veza su $F_B = F_A$

$F_q = q \cdot l$

$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A - q \cdot l + F_B = 0$

$F_B = F_A = \frac{q \cdot l}{2}$

Zamislimo da smo presekli nosač u nekoj tački C, koja se nalazi na sredini nosača. Uslovi ravnoteže dela grede AC su:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{ac} = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A - q \cdot z_c - F_{tc} = 0$$

$$-M_c + F_A \cdot z_c - q \cdot \frac{z_c^2}{2} = 0$$

(1) $F_{ac} = 0$

(2) $F_{tc} = F_A - q \cdot z_c = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot z_c = q \cdot (\frac{l}{2} - z_c)$

(3) $M_c = q \cdot \frac{l}{2} \cdot z_c - q \cdot \frac{z_c^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot q(l \cdot z - z_c^2)$

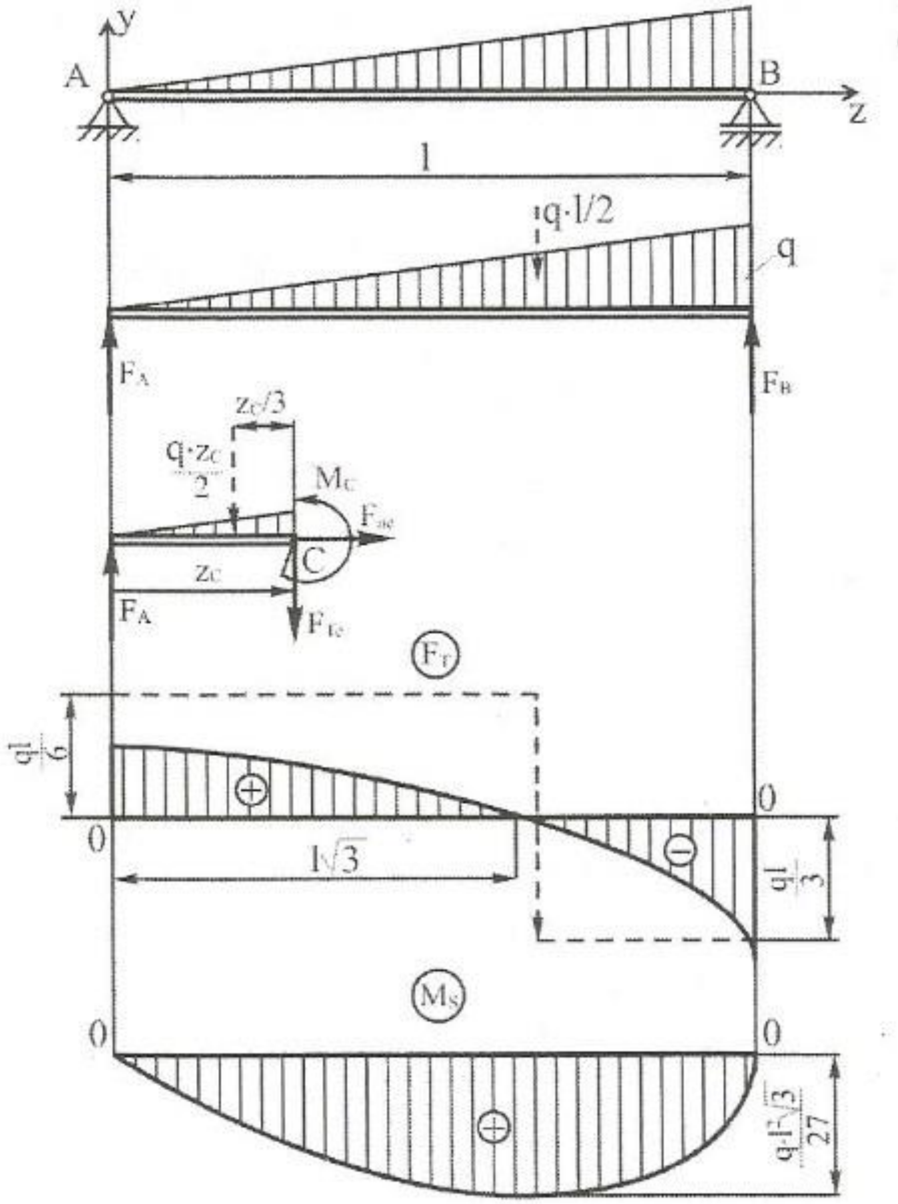
Za crtanje dijagrama F_t i M_s koristimo različite vrednosti z_c :

(4) za $z_c = 0$ $F_{TC} = q \cdot (\frac{l}{2} - z_c) = \frac{q \cdot l}{2}$ $M_c = \frac{1}{2} \cdot q(l \cdot z - z_c^2) = 0$

(5) $z_c = \frac{l}{2}$ $F_{TC} = q \cdot (\frac{l}{2} - \frac{l}{2}) = 0$ $M_c = \frac{1}{2} \cdot q\left(l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{l^2 \cdot q}{8}$

(6) $z_c = l$ $F_{TC} = q \cdot (\frac{l}{2} - l) = \frac{q \cdot l^2}{2}$ $M_c = \frac{1}{2} \cdot q(l \cdot l - l^2) = 0$

PROSTA GREDA OPTEREĆENA KONTINUALNIM OPTEREĆENJEM ČIJI SE INTENZITET MENJA LINEARNO PO DUŽINI RASPONA



Radi određivanja reakcija oslonaca, zamenjujemo ovo kontinualno opterećenje koncentrisanom silom: $F_q = \frac{q \cdot l}{2}$, koja deluje iz težišta. Težište se nalazi na $\frac{l}{3}$ od temena B.

Određivanje reakcija oslonaca:

$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_B = 0$

$\sum Y_i = 0 \;\Rightarrow\; F_A - \frac{q \cdot l}{2} + F_B = 0$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_A \cdot 0 - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l + F_B \cdot l = 0$$

(3) $l \cdot F_B = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{q \cdot l}{3}$

(2) $F_A = \frac{q \cdot l}{2} - F_B = \frac{q \cdot l}{2} - \frac{q \cdot l}{3} = \frac{q \cdot l}{6}$

Ako nosač presečemo u nekoj tački koja je z_c udaljena od temena A

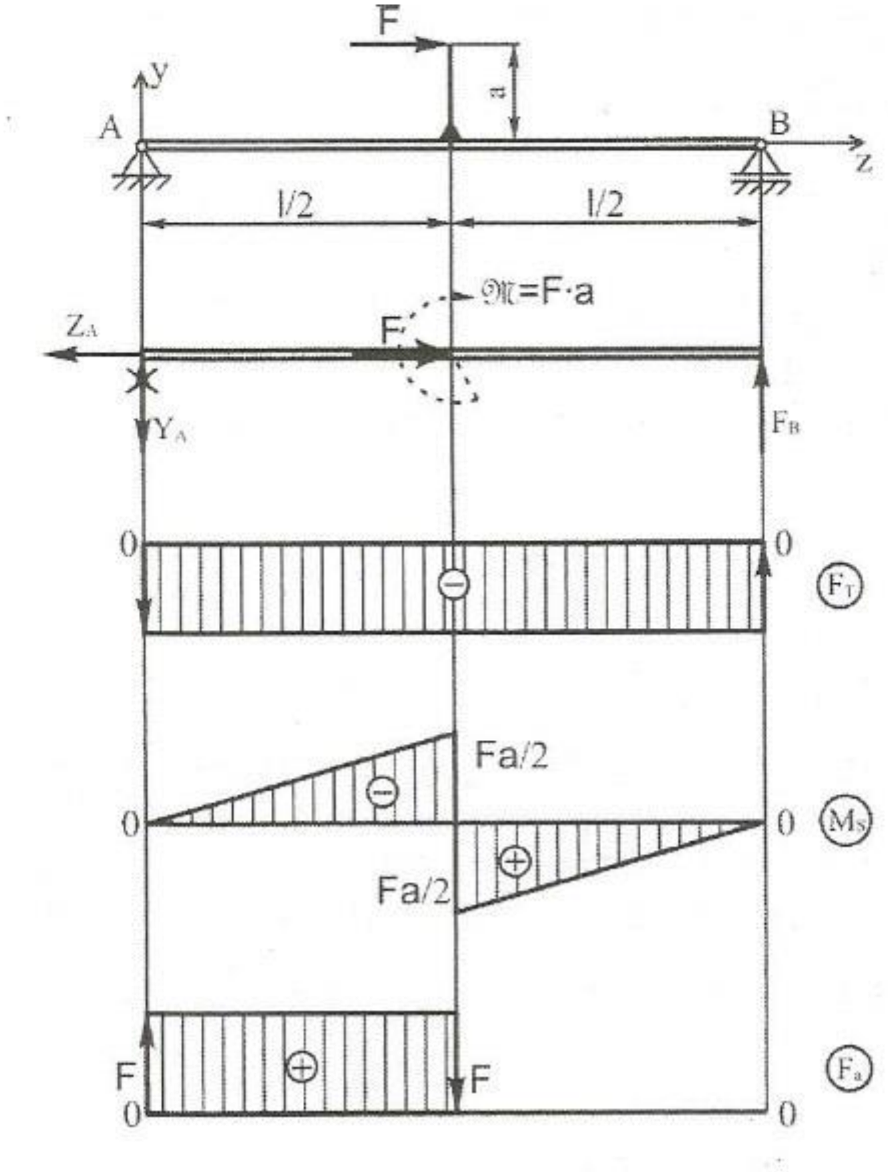
$$\sum X_i = 0 \;\Rightarrow\; F_{ac} = 0$$

$\sum Y_i = 0 \;\Rightarrow\; F_A - F_{qc} + F_{TC} = 0$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_A \cdot 0 + \frac{q_c \cdot z_c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot z_c + F_{TC} \cdot z_c - M_C = 0$$

Skok u dijagramu momenata savijanja se pojavljuje samo na mestu gde deluje koncentrisani moment, a između sila je dijagram linearan (nagib levo i desno od preseka je jednak).

PROSTA GREDA OPTEREĆENA EKSCENTRIČNOM SILOM



Uslovi ravnoteže:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -Z_a + F = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + F_B = 0$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F_B \cdot l + F \cdot a = 0$$

(1) $Z_a = F$

(2) $F \cdot a = F_B \cdot l$

(3) $Y_A = -F_B = -F \cdot \frac{a}{l}$

Dijagram za M:

$M_A = 0$

I za $z_c = \frac{l}{2} - \varepsilon$

$$M_f^l = -Y_a \cdot \frac{l}{2} = -F \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{l}{2} = -F \cdot \frac{a}{2}$$

II za $z_c = \frac{l}{2} + \varepsilon$

$$M_f^l = +Y_A \cdot \frac{l}{2} - F \cdot a = F \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{l}{2} - F \cdot a = F \cdot \frac{a}{2}$$

$M_B = 0$

$$M_f^d \left(za\ z_c = \frac{l}{2} - \varepsilon \right) \Rightarrow F_B \cdot \frac{l}{2} = F \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{l}{2} = F \cdot \frac{a}{2}$$

$$M_f^d \left(za\ z_c = \frac{l}{2} + \varepsilon \right) \Rightarrow F_B \cdot \frac{l}{2} - F \cdot a = F \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{l}{2} = -F \frac{a}{2}$$

PRIMERI:

5.3. Opšti slučaj opterećenja grede

Definicija unutrašnjih sila i momenata

Kada sile spolašnjeg opterećenja grede leže u jednoj ravni u poprečnim presecima grede pojavljuju se: uzdužne i poprečne sile moment savijanja. Presečemo li gredu, svaki deo grede bi imao tri stepena slobode kretanja, u ravni spolašnjeg opterećenja:

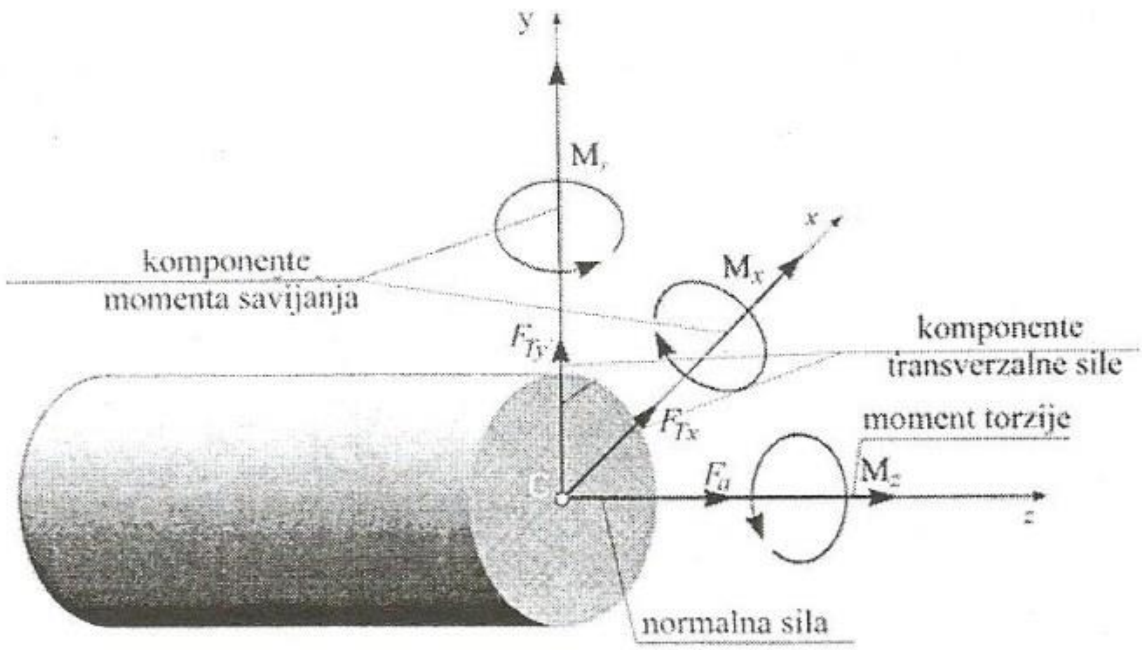
- dve translacije
- jednu rotaciju

Dve mogućnosti poništavaju unutrašnje veličine u poprečnom preseku grede – translacija poništava uzdužne i poprečne sile, a rotacija poništava moment savijanja.

Kada na gredu, koja se nalazi u ravnoteži, deluje opšti slučaj prostornog sistema sila, u njenim poprečnim presecima će se pojaviti 6 veličina: tri sile i tri momenta.Deo grede bi imao pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja 6 stepeni slobode kretanja:

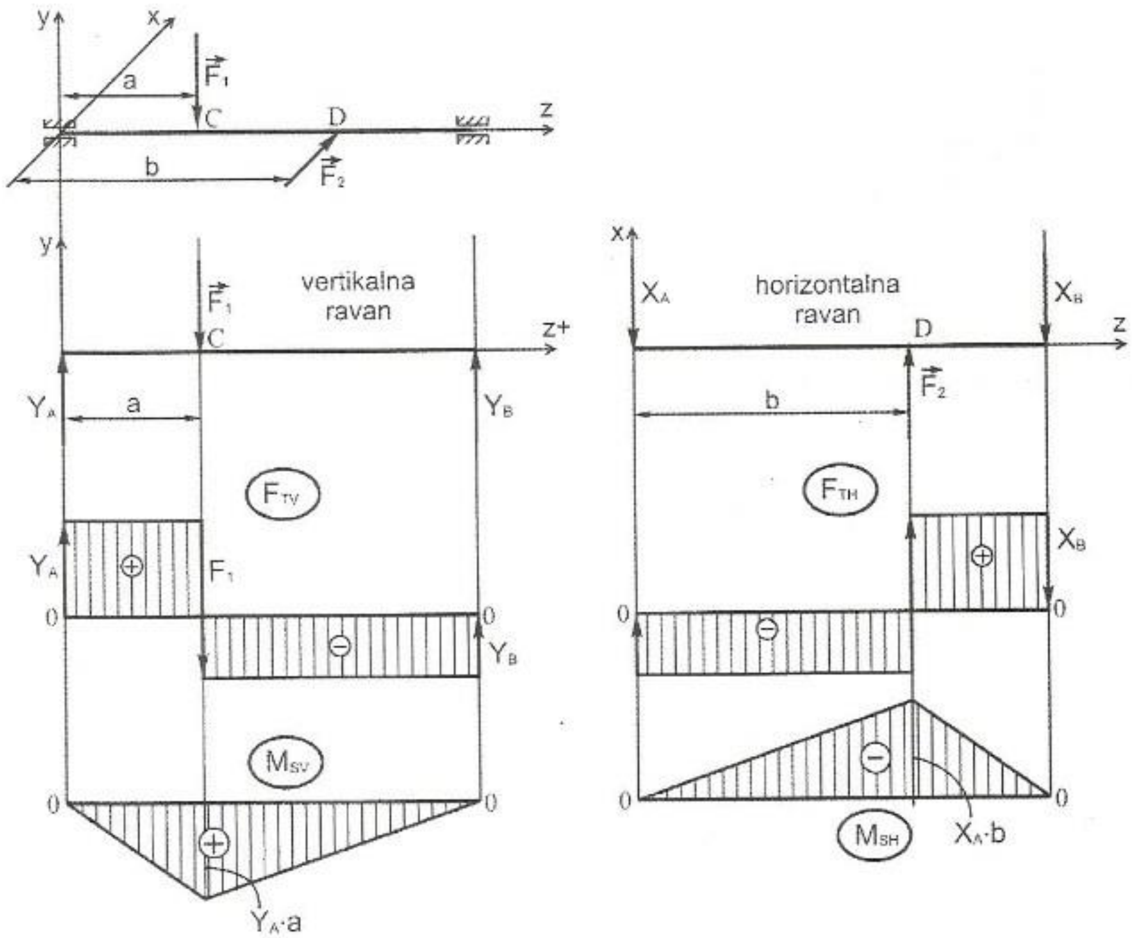
- tri translacije
- tri rotacije

koje sprečavaju unutrašnje sile (poprečno – transferzalne u pravcu osa x i y i uzdužna u pravcu ose (z) i momenti savijanja M_X, M_Y i momenta uvijanja M_Z . Njihova veličina se određuje iz uslova ravnoteže posmatranog dela grede.



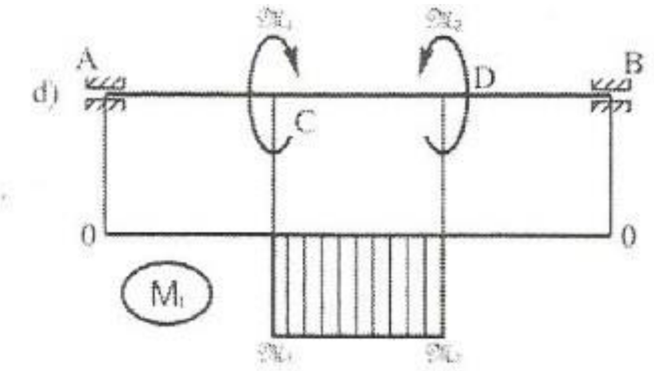
5.3.1 Savijanje grede u dve ravni

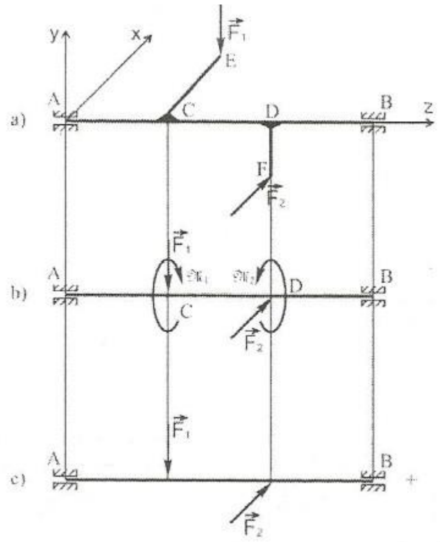
Na slici je prikazana greda vezana sa cilindričnim ležajevima u A i B i opterećena sa silom u ravni $\overrightarrow{F_1}$ i silom $\overrightarrow{F_2}$ u ravni xz.
Poprečne sile i momenti su urađeni, kao da se radio dve grede koje su prikazane na slikama b) i c).
Ako sile imaju komponente u pravcu ose z, one će izazvati pojavu uzdužnih sila koje se određuju na način izložen za jednostavnu gredu.



5.3.2 Greda opterećena na savijanje i uvijanje (torziju)

Neka imamo sledeću situaciju: sila $\overrightarrow{F_1}$ deluju u tački E sekundarnog oslonca CE, koji je upravan na osu grede, paralelna je sa osom y i leži u ravni xz. Sila $\overrightarrow{F_2}$ je paralelna osi x, a deluje na kraju sekundarnog oslonca DF, koji je upravan na osu grede, a leži u ravni yz.
Izvršimo li paralelni pomak sile $\overrightarrow{F_1}$ tako da joj pravac delovanja seče usu grede u tački C, treba dodati redukcioni pozitivni redukcioni spreg.
$M_1 = F_1 \cdot c$
čiji vektor gleda u smeru negativnog dela ose z (moment torzije ili uvijanja jer nastoji uviti gredu).
Paralelnim pomeranjem sile $\overrightarrow{F_2}$ iz tačke F u tačku D, treba dodati pozitivni redukcioni spreg (moment uvijanja) :
$M_2 = F_2 \cdot c$
Dalje se opterećenje grede može rastaviti na slučajeve, prikazane na slikama c) i d) i odrediti unutrašnje sile i momente, posebno za svaki slučaj.
Slučaj prikazan na slici c je isti kao i u prethodnom primeru.
Za slučaj d) greda se nalazi u ravnoteži ako su spregovi istih intenziteta, a suprotnih smerova, obzirom da na aktivno opterećenje ležajevi grede ne daju nikakvu reakciju. Na delovima AC i BD nema nikakvih sila, ni momenata, već se pojavljuju momenti tačaka.

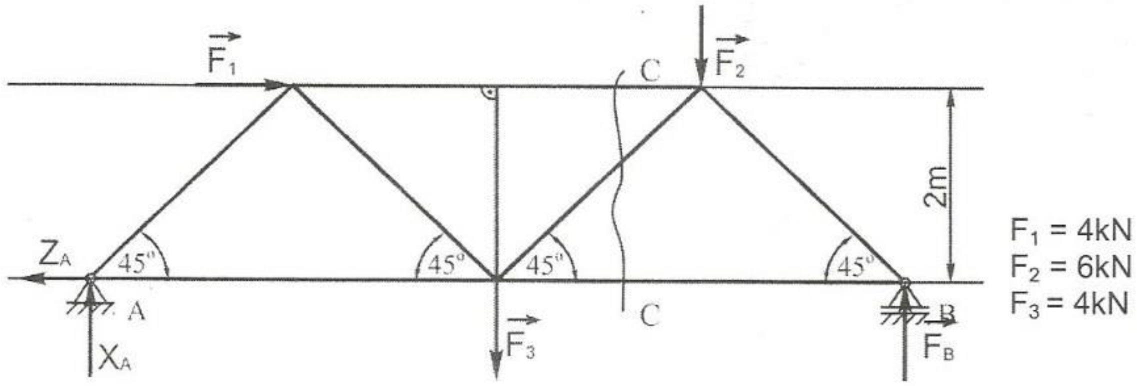




5.4 Rešetkasti nosači

Za dati rešetkasti nosač:

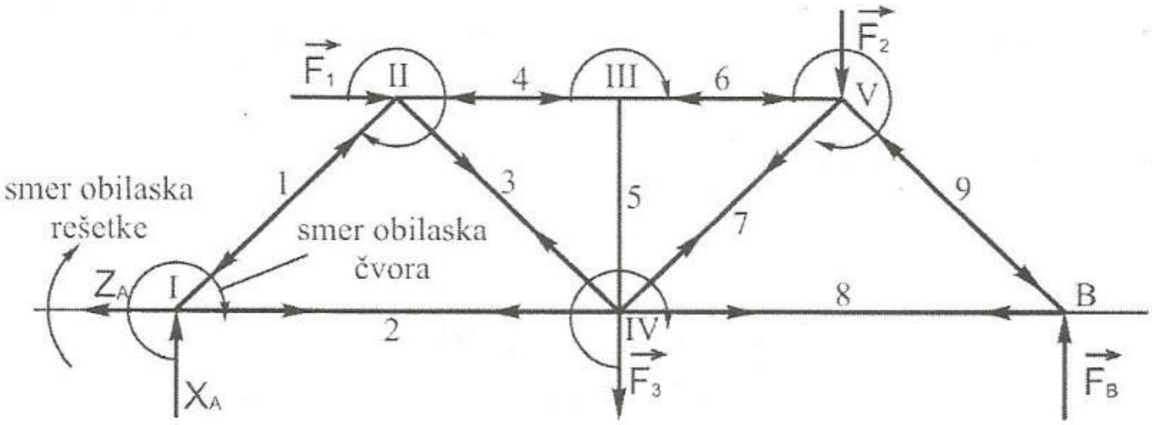
a) analitičkim putem naći otpore oslonaca
b) kremoninim planom sila odrediti sile u štapovima
c) u preseku c-c odrediti sile u štapovima metodama Kulona i Ritera



Podaci:

$F_1 = 4\ kN \quad F_2 = 6\ kN \quad F_3 = 4\ kN$

Rešetka ima n=6 čvorova i s=9 štapova.
Inače, uslov nepromenljivosti forme ravnog rešetkastog nosača je zadovoljen:
$s = 2n - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$
Shvatamo li čvorove kao čestice, a štapove kao njihove veze, tada možemo čvorove osloboditi veze koje moramo prema aksiomi oslobođanja od veza nadomestiti reakcijama veze, što će obezbediti ravnoteži čvorova.



Oslobođenje od veza:
Jednačine:

(1) $\sum Y_i = 0 \Rightarrow \; X_A - F_2 - F_3 + F_B = 0$

(2) $\sum Z_i = 0 \;\Rightarrow\; F_1 - Z_A = 0$

(3) $\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; -F_1 \cdot l - F_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 2l + F_B \cdot 4l = 0$

Iz jednačine (2) $\Rightarrow Z_A = F_1 = 4\ kN$

Iz jednačine (1) $\Rightarrow F_B = F_2 + F_3 - X_A$

Iz jednačine (3) $\Rightarrow -F_1 \cdot l - 2 \cdot F_3 \cdot l - 3 \cdot F_2 \cdot l + 4 \cdot l \cdot (F_2 + F_3 - X_A) = 0$

$4 \cdot l \cdot F_2 + 4 \cdot l \cdot F_3 - 4 \cdot l \cdot X_A = F_1 \cdot l + 2 \cdot F_3 \cdot l + 3 \cdot F_2 \cdot l$

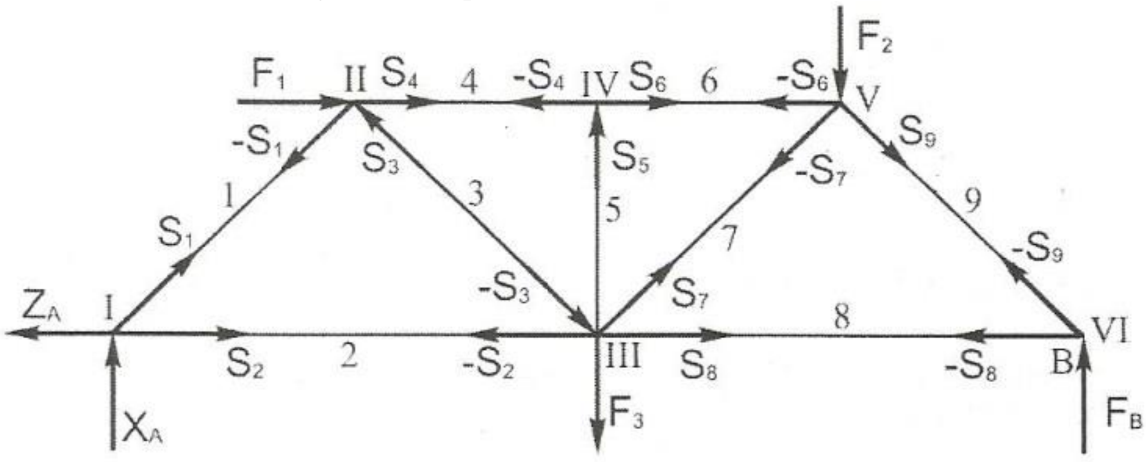
$4 \cdot F_2 + 4 \cdot F_3 - 4 \cdot X_A = F_1 \cdot +2 \cdot F_3 + 3 \cdot F_2$

$4 \cdot X_A = 4 \cdot F_2 + 4 \cdot F_3 - 2 \cdot F_3 - 3 \cdot F_2 - F_1$

$4 \cdot X_A = F_2 + 2 \cdot F_3 - F_1$

$$X_A = \frac{F_2 + 2 \cdot F_3 - F_1}{4} = \frac{6 + 2 \cdot 4 - 4}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5\ kN$$

b) Analitičko određivanje sila u štapovima



I čvor:

$$\sum Z_i = 0 \;\Rightarrow\; S_2 - Z_A + S_1 \cdot cos45 = 0$$

$$\sum X_i = 0 \;\Rightarrow\; Y_A + S_1 \cdot sin45 = 0 \Rightarrow S_1 = \frac{Y_A}{sin45}$$

II čvor:

$$\sum Z_i = 0 \;\Rightarrow\; F_1 - S_3 \cdot cos45 + S_4 - S_1 \cdot cos45 = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \;\Rightarrow\; S_3 \cdot cos45 - S_1 \cdot sin45 = 0$$

III čvor:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_2 + S_8 + S_7 \cdot cos45 + S_3 \cdot cos45 = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_3 \cdot cos45 - S_1 \cdot sin45 = 0$$
IV čvor:
$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_6 - S_4 = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_5 = 0$$
VI čvor:
$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_8 - S_9 \cdot cos45 = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_B - S_9 \cdot cos45 = 0$$

Rešavanje zadataka:
I Identifikovati telo
II Posmatrati ga kao slobodno – nacrtati sve sile koje na njega deluju, i sve reakcije veza, pošto smo veze uklonili
Potom, da bi se uslovi ravnoteže dobili u što jednostavnijem obliku, potrebno je pridržavati se sledećih preporuka:

a) jednu od koordinatnih osa treba povući tako da bude normalna na neku od nepoznatih sila,
b) pri postavljanju momentnih jednačina, momentne tačke treba birati tako, da se što veći broj nepoznatih sila seče u tački
c) često je pogodno silu razložiti na njene sastavne komponente, a potom primeniti Varinjonovu teoremu.

U tehničkoj praksi, najčešće se srećemo sa tri vrste oslonaca:

1) pokretni oslonac – reakcija takvog oslonca je usmerena po normali na površinu na koju se oslanja pokretni oslonac (slika 34, oslonac A)
2) nepokretni oslonac – ova sila reakcije može biti proizvoljnog pravca (slika 34, oslonac B)

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$$

Slika 34

d) Uklještenje

Slika 35

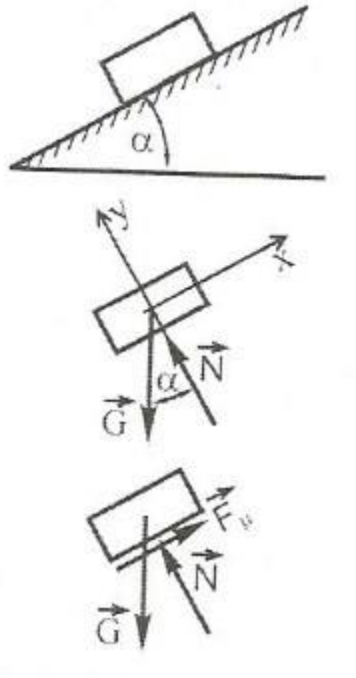
Oslobađanje od veze ostvarene uklještenjem donosi sa sobom kontinualno raspoređeno opterećenje koje ćemo redukovati u tačku A i zameniti nepoznatom silom $\overrightarrow{F_A}$ i spregom M_A, koji takođe nije poznat. Silu $\overrightarrow{F_A}$ rastavljamo na komponente.

6. TRENJE

U stvarnosti je kod dodirne veze pojavljuje tangencijalna reakcija koja se uvek protivi kretanju i naziva se otpor trenja kretanju, a same veze nazivamo veze sa trenjem (realne veze). Većina pojava trenja se može opisati pomoću dve osnovne vrste trenja:

- trenje klizanja
- trenje kotrljanja

6.1 TRENJE



Posmatramo telo težine G na strmoj ravni, koje se nalazi u stanju mirovanja.

$F_{\mu} = \mu \cdot N$ – sila trenja ima smer suprotan od smera kretanja tela

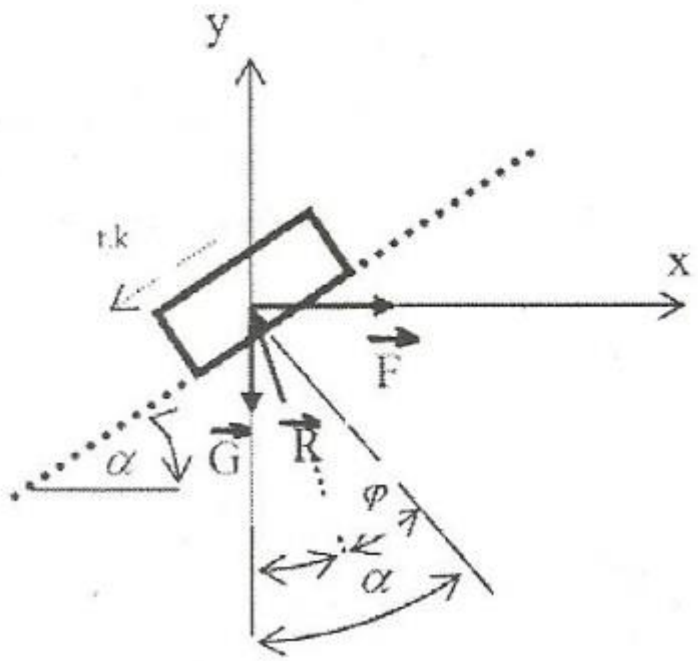
Da bi telo počelo da klizi po površini drugog tela, potrebno je da savlada određenu silu. Ova sila je sila otpora protiv relativnog klizanja. Pojava trenja je uslovljena hrapavošću dodirnih površina.

Kada prisiljavamo neko telo da se pomeri po površini drugog tela, u dodirnoj ravni nastaje sila trenja, koja može imati vrednosti od nule do $F_{gr} = \mu_0 \cdot F_N = \mu_0 \cdot N$.

Veličina granične sile ne zavisi od veličine dodirne površine, već od koeficijenta trenja μ – zavisi od vrste površina u dodiru.

$\mu_0 = 0{,}4\ do\ 0{,}7 - drvo\ o\ drvo$
$\mu_0 = 0{,}15\ do\ 0{,}25 - metal\ o\ metal$
$\mu_0 = 0{,}027 - čelik\ \ o\ led$

6.2 Trenje na strmoj ravni



$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F - R \cdot \sin(\alpha - \varphi) = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \ -G + R \cdot \cos(\alpha - \varphi) = 0$$
$F = G \cdot tg(\alpha - \varphi)$
α- ugao nagiba strme ravni
φ- otklon reakcije podloge od normale na ravan podloge

Na osnovu ovog, dolazimo do zaključaka:

1) za $\alpha = \varphi \Rightarrow F = 0\ \Rightarrow telo\ se\ nalazi\ na\ granici\ klizanja$
2) za $\alpha < \varphi \Rightarrow F < 0\ \Rightarrow za\ pomeranje\ tela\ niz\ strmu\ ravan\ je\ potrebna\ sila$
3) za $\alpha > \varphi \Rightarrow F > 0\ \Rightarrow potrebna\ je\ sila\ da\ drži\ telo\ na\ strmoj\ ravni$

Uslov samokočenja: $\alpha \leq \varphi$

6.3 Trenje kotrljanja

Trenjem kotrljanja se naziva otpor koji nastaje pri kotrljanju jednog tela po površini drugog tela.
Neka kružni cilindar poluprečnika R i težine G leži na horizontalnoj hrapavoj ravni. Neka u visini ose cilindra deluje sila $\overrightarrow{F_1}$, koja je manja od $\overrightarrow{F_{gr}}$. U tom slučaju u tački A nastaje sila trenja $\overrightarrow{F_\mu}$, brojčano jednaka sili $\overrightarrow{F_1}$, koja sprečava klizanje cilindra po površini. Ako sila

normalne reakcije podloge $\overrightarrow{F_N}$, ili $\vec{N}$ deluje takođe u tački A, onda će ona uravnotežiti silu $\vec{G}$, dok sile $\overrightarrow{F_1}$ i $\overrightarrow{F_N}$, obrazuju spreg, koji izaziva kotrljanje cilindra.
Kotrljanje ovako nastaje dejstvom ma kako male sile $\overrightarrow{F_1}$.
Međutim, kotrljanje neće nastupiti ako je sila $\overrightarrow{F_1}$ veoma mala. Zbog deformacije tela, površine se dodiruju duž površine AB.