1.UVOD

Fizika je fudametalna prirodna nauka koja proučava:

- opšta svojstva i
- zakone kretanja materije.

Opažanje pojava je staro koliko i čovečanstvo. Čovek je spoznavao da se na neke od pojava (između kojih inače postoje značajne sličnosti i zakonitosti) može uticati, pa ih čak i podvrgavati svojoj volji.

Materija je u stalnom kretanju, koje se odvija u prostoru i vremenu. Najstarija i osnovna grana fizike je MEHANIKA. Mehanika je svoje ime dobila po Galileju i zasniva se na opažanju, iskustvima,ogledima i na teoriji. Naziv potiče od grčke reči „***mehane***" što znači mašina, sprava. Sam pojam datira još iz stare Grčke, ali prave temelje mehanika dobija tek u delu Isaka Njutna: *Matematički principi prirodne filozofije,* 1687 godine. Osim temeljnih zakona, Njutn uvodi infinitezimalni račun.
Mehanika j, dakle, prirodna nauka, koja se temelji na opažanju, iskustvu i eksperimentu. To je nauka o opštim zakonima mehaničkih kretanja i ravnoteže materijalnih tela. Radi lakšeg razumevanja, mehanika je podeljena na podoblasti.

Prema agregatnom stanju, materijalnog tela, mehanika se deli na:
- mehaniku čvrstih tela,
- mehaniku tečnih tela ili hidromehaniku i
- mehaniku gasovitih tela ili aeromehaniku.

Mehaniku čvrstih tela delimo na:
- mehaniku krutog tela i
- mehaniku deformabilnog tela.

Mehaniku krutog tela delimo (s obzirom na vrstu proučavanih pojava) na:
- statiku,
- kinematiku i
- dinamiku.

<u>Statika</u> je deo mehanike koja proučava uslove mirovanja tj. ravnoteže materijalnih tela pod dejstvom sila nezavisnih od vremena

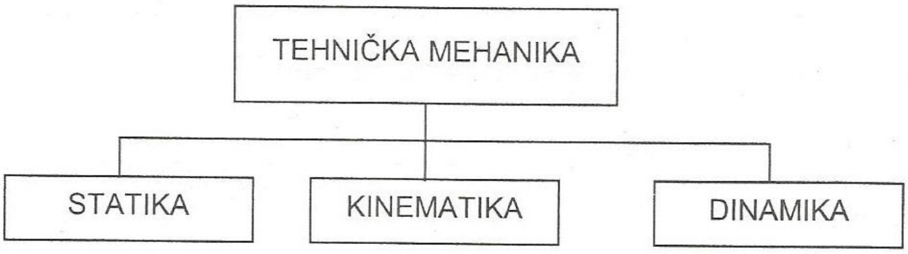
<u>Kinematika proučava kretanje, ne vodeći računa o uzorcima kretanja (ne uzima u obzir masu tela, niti sile koje na njega deluju).</u>

Postoji još jedna podela mehanike, i to na:

- opštu mehaniku i
- tehničku mehaniku.

Opšta mehanika proučava osnovne zakone mehanike, a tehnička mehanika primenu tih opštih zakona i principa na praktične tehničke probleme.

Sama tehnička mehanika se deli na (šema 1):



Šema 1: Podela mehanike

1.1. Osnovni pojmovi u mehanici

U narednim paragrafima će biti obrađeni pojmovi koji se koriste u mehanici.

Prostor je trodimenzionalno geometrijsko područje, koje naravno može imati svoje jednodimenzijske i dvodimenzijske oblike, kao što su pravac i tačka.

Koordinatni sistem: Položaj tela u prostoru se u mehanici određuje prema koordinatama. U mehanici se koristi Dekartov koordinatni sistem – usvojen je konvencijom ili dogovorom. Ako se ovakav koordinatni sistem pričvrsti za Zemlju, može se smatrati nepomičan u prostoru, jer je odstupanje od temeljnih dinamičkih jednačina neuvaživo. Položaj tačke je određen sa tri koordinate.

Vreme je skalarna veličina koja se stalno menja. U mehanici se vreme se smatra univerzalnim tj. ono nepovratno teče na isti način, bez obzira na izbor referentnog koordinatnog sistema.

Masa – koristi se za obeležavanje i upoređivanje tela na temelju osnovnih ogleda u mehanici.

Pod **kretanjem tela** se podrazumeva promena njegovog položaja tokom vremena u odnosu na neko drugo telo.

Njutnovi zakoni:

I zakon: Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu, sve dok nema sila koja na njega deluju to stanje ne promeni. Ovaj se zakon često naziva ***ZAKON INERCIJE.***

II zakon: Ubrzanje je proporcionalno sili koja deluje na telo, a deluje u smeru delovanja sile.

$\frac{d(mv)}{dt} = F$ ili $m\frac{dv}{dt} = ma = F$ .... (1.1)

III zakon: Akciji je uvek jednaka i suprotno usmerena reakcija. Ovaj se zakon naziva ***ZAKON AKCIJE I REAKCIJE.***

Inercija: Svojstvo tela da se suprostavlja promeni položaja.

Čestica: Za opisivanje kretanja tela koristi se neko zamišljeno telo i pojava, koji su modeli prirodnog zbivanja. Kada 1 tački možemo pripisati svojstva kretanja celog tela, tada telo može da se aproksimira tačkom (česticom).

Gravitacija: Sila gravitacije je direktno srazmerna proizvodu masa dva tela, a obrnuto srazmerna kvadratu njihovog rastojanja.

$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ .... (1.2)

k – gravitaciona konstanta koja iznosi *6.673·10*$^{-11}$ $\frac{m^3}{kgs^2}$

Sila teže: Ubrzanje Zemljine teže se izračunava $g = \frac{k \cdot m_0}{r^2}$

$m_0 = 5{,}976 \cdot 10^{24}\ kg$ – masa Zemlje
k – gravitaciona konstanta
$r = 6{,}371 \cdot 10^6 m$ – poluprečnik Zemlje
$g = 9{,}824\ \frac{m}{s^2}$

U većini inženjerskih zadataka i proračuna $\boldsymbol{g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}}$ **.**

1.2. Dodatni pojmovi u mehanici

Telo – deo materije ograničen ravnim ili krivim površinama.

Slobodno telo – telo koje nije neposredno vezano za druga tela, koje može da zauzme svaki položaj u prostoru.

Čvrsto telo – svako prirodno ili veštačko stvoreno telo koje se pod dejstvom spolašnjih sila može više ili manje deformisati.

Kruto telo – model za realno telo koje ispunjava uslov zadržavanja nepromenljive forme, pod dejstvom opterećenja. Telo koje ne menja ni oblik ni dimenzije pod dejstvom opterećenja.

Materijalna tačka – tačka sa masom, čije se dimenzije u određenom trenutku mogu zanemariti, smatrajući da je celokupna masa skoncentrisana u samoj toj tački.

Skalari i vektori

Skalarnom veličinom nazivamo onu veličinu koja je u potpunosti određena samo jednim brojnim podatkom. Skalarne veličine su npr: dužina, masa, površina..

Vektorskom veličinom nazivamo onu veličinu koju potpuno određuju: napadna tačka, brojna vrednost tj. intenzitet, pravac i smer. Vektorske veličine su npr: sila, brzina i ubrzanje. Smer strelice određuje smer vektorske veličine.

1.3 Osnovne veličine i veličine u mehanici

Sve veličine SI delimo na osnovne i izvedene. U tabelama 1 i 2 su prikazane veličine koje se koriste u mehanici.

Tabela 1:Osnovne SI jedinice

Osnovne veličine	Simbol	Jedinica
Dužina	L	metar$[m]$
Masa	m	kilogram $[kg]$
Vreme	t	sekund $[s]$

Tabela 2:Izvedene jedinice SI

Izvedene veličine	Simbol	Jedinica
Brzina	v	m/s
Ubrzanje	a	m/s^2
Sila	F	$N=kg\cdot m/s^2$
Rad	A	$J=N\cdot m$
Energija	E	$J=N\cdot m$
Snaga	P	W=J/s
Pritisak	P	$Pa=N/m^2$
Frekvencija	F	$H_Z=1/s$

Tabela 3: Prefiksi veličina u Srbiji

Vrednost	Naziv	Oznaka
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hekto	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p

2. STATIKA

Statika krutog tela je deo tehničke mehanike koji proučava ravnotežu tela pod dejstvom sila. Stoga, statika:

- određuje uslove koji moraju biti ispunjeni da bi telo bilo u ravnoteži i
- pronalazi i propisuje metode određivanja ravnoteže.

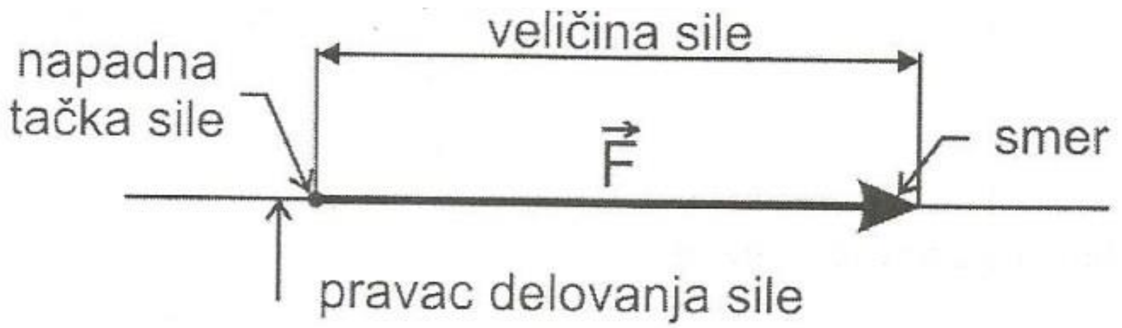
Za tela koja obrađuje statika se kaže da su to tela čija se težina ne može zanemariti i obično se težina zamenjuje jednom silom koja deluje u težištu tela. U nekim slučajevima, ako je težina mnogo manja od ostalih sila, može se zanemariti. Takođe, iako sva tela imaju tri dimenzije, radi pojednostavljenja se uzimaju samo jedna, dve ili tri dimenzije.
U statici se sva tela tretiraju kao apsolutno kruta (kruti štap, kruta figura, kruto prostorno telo).

Telo je u ravnoteži ako miruje ili se kreće jednolikom brzinom i pravolinijski.

2.1 Pojam sile

Sila je svako delovanje koje nastoji da promeni stanje kretanja nekog tela. U matematičkom smislu, to je VEKTOR! **Svaka sila** je, dakle, potpuno određena (slika 1):

- ***svojim pravcem delovanja*** (prava linija, duž ograničena strelicom koja određuje smer),
- ***veličinom*** – brojnom vrednošću i
- ***smerom delovanja*** – određuje strelica na pravcu.



Slika 1. Sila kao vektor

U statici, napadna tačka nema nekog značaja – sila može kliziti po pravcu delovanja. Ovo je dozvoljeno i ne utiče na rezultate rešavanja, jer se telo smatra krutim. Sam pojam sile se vezuje za Njutnov II zakon:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ .... (1.4)

Ako Njutnov zakon primenimo na težinu, onda je:

$\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ .... (1.5)

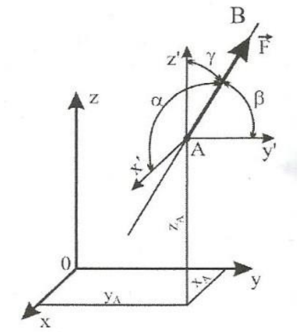
***NAPOMENA**: masa se meri, težina se izračunava!*

Jedinica za silu je ***N (Njutn***). To je izvedena jedinica SI sistema. Po definiciji je Njutn sila koja telo mase 1 kg ubrzava za 1 m/s^2.

$$[F] = [m] \cdot [a] \ \Rightarrow N = kg \cdot \frac{m}{s^2} \quad \text{..........} \quad (1.6)$$

2.1.1 Analitičko predstavljanje sile

Za analitičko predstavljanje sile se koristi Dekartov koordinatni sistem desne orjentacije. Analitički se sila određuje sa 6 podataka, od kojih je jedna uvek veličina sile. Razlikujemo nekoliko slučajeva potpunog određivanja sile, a polazimo od opšteg položaja sile u prostoru.



Slika 2. Dekartov desni koordinatni sistem

<u>I slučaj:</u>

Ukoliko su nam poznate koordinate jedne tačke sile i dva od tri ugla (α, β, γ) koje vektor sile zaklapa sa pravcima x', y', z' osa koje su paralelne istoimenim osama koordinatnog sistema Oxyz, treći ugao se određuje iz jednakosti:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \quad \text{..........} \quad (1.7)$$

Adekvatni uglovi se mogu odrediti iz jednakosti:

$$cos\alpha = \frac{X_A - X_B}{\overline{AB}} \qquad cos\beta = \frac{Y_A - Y_B}{\overline{AB}} \qquad cos\gamma = \frac{Z_A - Z_B}{AB} \quad \text{..........} \quad (1.8)$$

Pri tome je rastojanje $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} \quad \text{..........} \quad (1.9)$$

Algebarske vrednosti projekcija prostorne sile iznose:

$$F_x = F \cdot cos\alpha \ , \quad F_y = F \cdot cos\beta \ , \quad F_z = F \cdot cos\gamma \quad \text{..........} \quad (1.10)$$

II slučaj:

Obrnuti slučaj od projektovanja sile jeste određivanje intenziteta i pravca sile u prostoru ako su poznate projekcije F_x , F_y , F_z . Tada je:

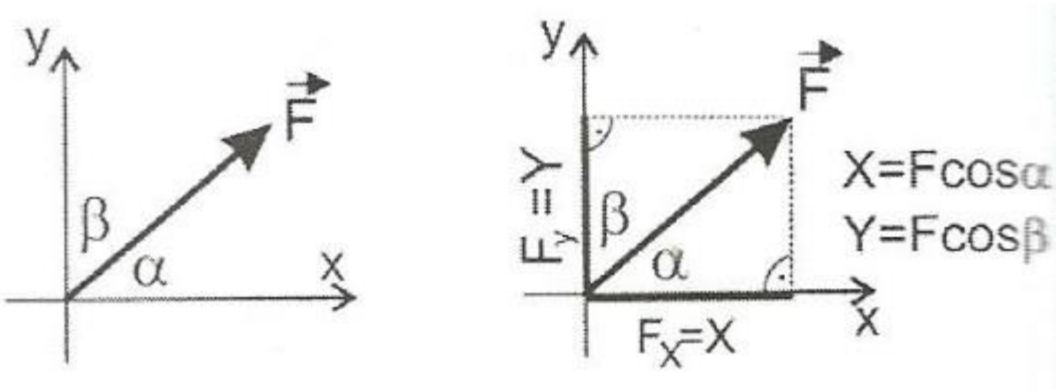
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad \text{.........} \quad (1.11)$$

a sami uglovi se određuju na osnovu kosinusne teoreme:

$$cos\alpha = \frac{F_x}{F} \ , \ cos\beta = \frac{F_y}{F} \ , \quad cos\gamma = \frac{F_z}{F} \quad \text{.........} \quad (1.12)$$

U slučaju da se sila nalazi u ravni, ove relacije su jednostavnije i glase:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \ , \quad cos\alpha = \frac{F_x}{F} \ , \ cos\beta = \frac{F_y}{F} \quad \text{.........} \quad (1.13)$$



Slika 3: Određivanje sile i komponenti sile

2.1.2 Geometrijsko prikazivanje sile

Kod geometrijskog prikazivanja sile se ne vodi računa o koordinatnom sistemu, već samo o međusobnom pravcu delovanja sile i naravno o njihovom smeru. Prikazivanje u razmeri se vrši prema izrazu:

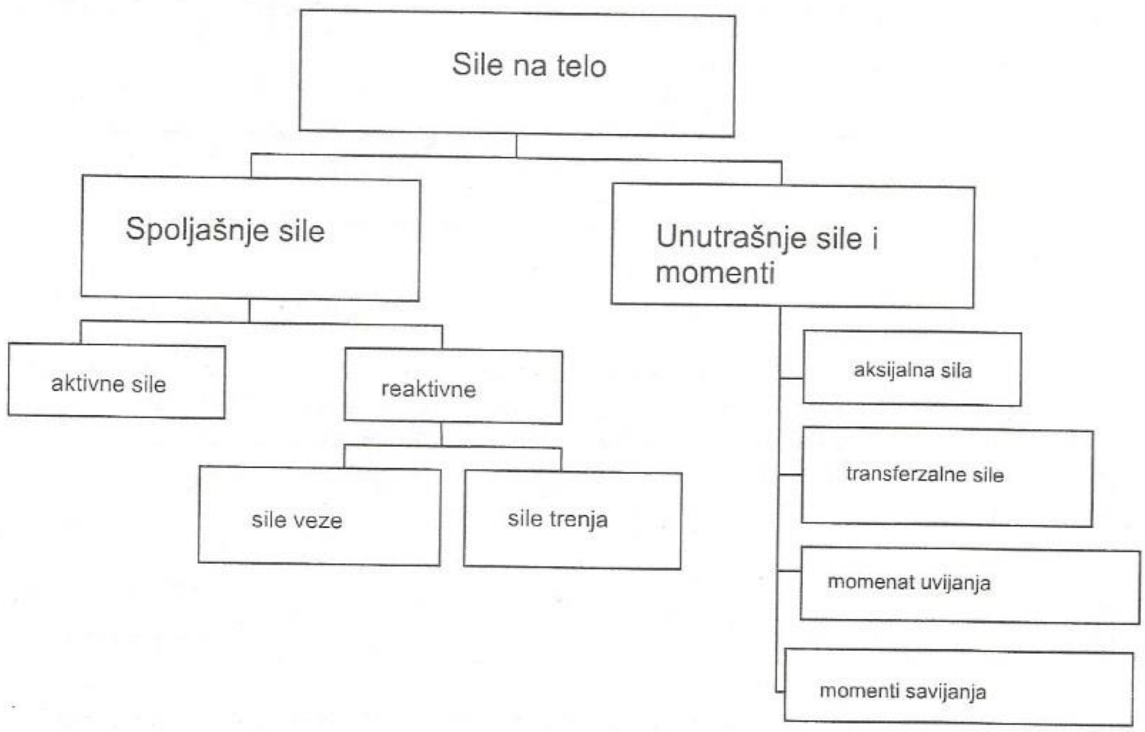
$u_F = \frac{aN}{1cm}$ – što znači da 1cm dužine duži na grafiku predstavlja a i Njutna.

2.1.3 Aktivne i pasivne sile. Spoljašnje i unutrašnje sile.

Aktivne sile su one koje nastoje izazvati kretanje, dok su ***pasivne sile*** one sile koje ograničavaju kretanje i nazivamo ih reakcijama veze.
Prema mestu delovanja, sile možemo podeliti na 2 grupe:

- sile koje deluju na površini tela - nazivamo ih ***spoljašnje sile***
- sile koje deluju po preseku ili zapremini tela - nazivamo ih ***unutrašnjim silama***.

Na slici 4 možemo videti uopštenu podelu sila.



Slika 4: Podela sila

2.2 Aksiomi statike

Osnovu statike čini 7 osnovnih zakona, od kojih su prva 4 aksiomi tehničke mehanike, a preostala tri su principi statike. Pomoću ovih zakona je moguće za dati problem definisati adekvatan idealan model i matematički izraziti uslove ravnoteže.

<u>Aksioma 1:</u> Pod dejstvom dve sile $(\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{F_2})$ kruto delo se nalazi u ravnoteži ako i samo ako su te dve sile istog pravca delovanja, istog intenziteta, ali suprotnog smera.

$[F_1 = F_2]\ i\ \overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$ .... (1.14)

Ovakve dve sile čine najprostiji sistem uravnoteženih sila – nula sila.

<u>Aksioma 2:</u> Mehaničko kretanje tela se neće promeniti ako se sistemu sila koje na njega deluju doda ili oduzme uravnotežen sistem sila.

> *<u>Posledica:</u>* sila koja deluje na telo je klizeći vektor – može se menjati napadna tačka dejstva sile, duž istog napadnog pravca, a da se dejstvo sile na telo ne menja.

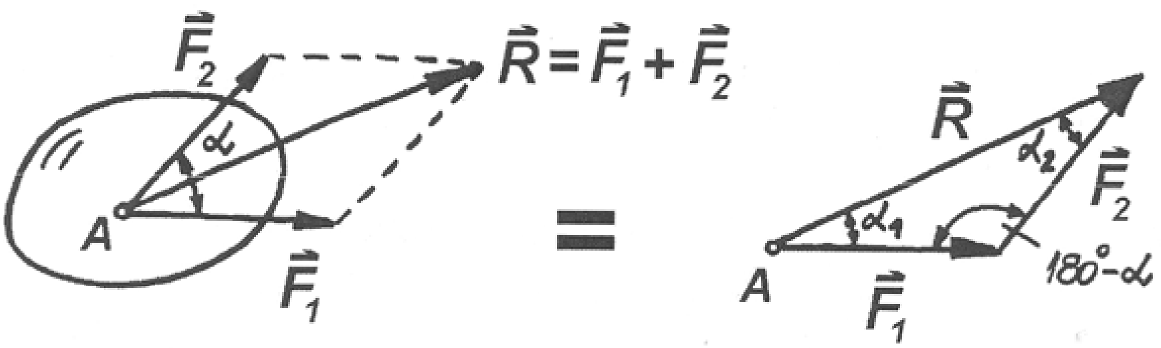
Slika 5. Dodavanje uravnoteženog sistema sila

Aksioma 3: Delovanje dveju sila na telo se može zameniti delovanjem jedne sile koja je jednaka dijagonali paralelograma čije su stranice te dve sile (slika 6)

Sile koje sabiramo nazivamo komponente, a njihov zbir rezultanta.

Matematički, ovaj zakon se zapisuje:

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$



Slika 6: Konstruisanje paralelograma ili trougla sila

Pravac rezultante ćemo uraditi na osnovu sinusne teoreme (slika 6)

$$\frac{F_1}{sin\gamma} = \frac{F_2}{sin\beta} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} \quad \text{..........} \quad (1.15)$$

pošto je: $\mathbf{sin(\pi - \alpha) = sin\ \alpha}$

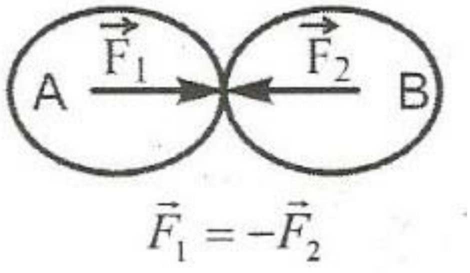
$$\frac{F_1}{sin\gamma} = \frac{F_2}{sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} \quad \text{..........} \quad (1.16)$$

Ovako je ugao β potpuno određen.

Rezultantu sila možemo izračunati i primenom kosinusne teoreme iz paralelograma:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot cos\alpha} \quad \text{..........} \quad (1.17)$$

Aksioma 4: Dva tela deluju jedno na drugo uzajamnim silama koje su istog intenziteta, pravca, ali suprotnog smera (slika 7).



Slika 7: Sile akcije i reakcije

Dva zaključka proističu iz ovoga: *da ne postoji telo izolovano od drugih, kao ni sila, i da bi nastala sila moraju dva tela delovati jedno na drugo.*

Peta aksioma: Ako se deformabilno telo nalazi u stanju ravnoteže pod dejstvom sila, onda se to neće promeniti ni kada telo postane kruto. Suprotno ne važi.

Princip oslobađanja od veze:

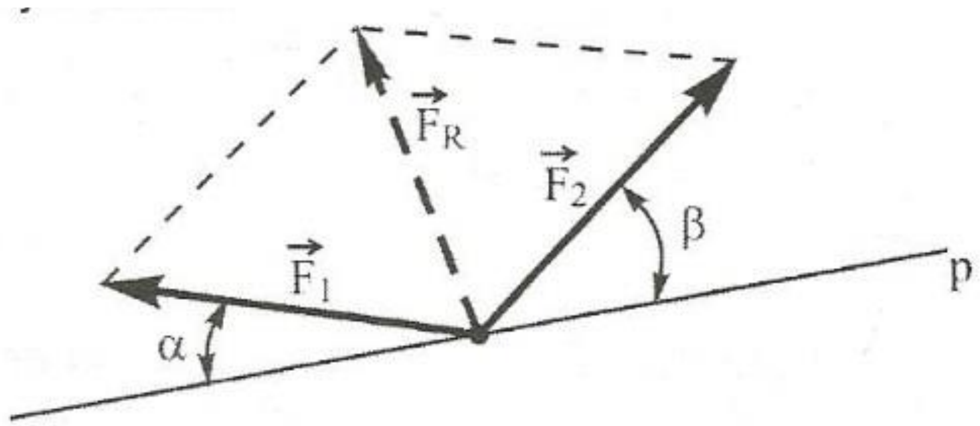
Veze koje ograničavaju slobodu kretanja krutog tela mogu se zameniti silama takvim da kruto telo ostane u stanju mirovanja. Ove sile nazivamo reakcije veze.

Odrediti ravnotežu $\Longleftrightarrow$ *odrediti reakciju veze.*

Princip poništavanja dveju sila:

Dve sile se poništavaju ako imaju isti pravac delovanja, jednaku veličinu i suprotni smer.

Ovaj princip proizilazi iz zakona o paralelogramu sila. Ako se uglovi $\alpha \; i \; \beta$, koje sile $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ zaklapaju sa pravcem p, smanjuju, veličina sile $\overrightarrow{F_R}$ postaje jednaka nuli za $\alpha = 0 \; i \; \beta = 0$.



Slika 8. Sile koje deluju u istoj tački

2.3 Veze i reakcije veze

Telo se pomera u ravni ili u prostoru pod dejstvom opterećenja. Vezivanjem sa podlogom ih dovodimo u ravnotežno stanje.

Veze su mehanički ili fizički uređaji koji sprečavaju kretanje tela. Telo čije je kretanje ograničeno, naziva se ***vezano telo***, a telo koje ograničava kretanje se naziva **veza.**

Sila kojom veza deluje na telo je *istog intenziteta, pravca ali suprotnog smera* od sile reakcije veze.

Sile koje ne predstavljaju reakciju veze nazivamo **aktivnim silama**.

Ako na telo ne deluju neke aktivne sile, reakcija veze jednaka je nuli.

2.3.1 Vrste veza

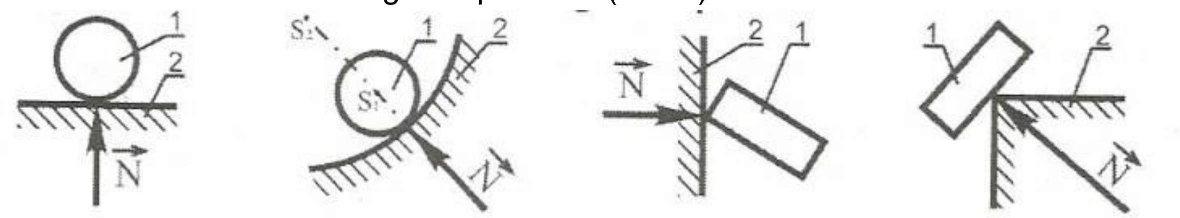
U zavisnosti od broja promenljivih koje se pojavljuju kod rešavanja ovakvih statičkih problema, za njihovo rešavanje je potrebno uvođenje reazličitog broja promenljivih. U suštini. veze mogu biti:

- Dodirne veze - jednostrana ili dvostrana veza -(1 promenljiva),
- cilindrični zglob – (dve promenljive),
- sferni zglob – (tri promenljive),
- uklještenje - (tri nepoznate) ,
- uže (nit)- (promenljiva) i
- štap – jedna promenljiva.

2.3.1.1 Dodirne veze

Dodirne veze mogu biti:

a) jednostrana dodirna veza – glatka površina (ravan) ili oslonac.

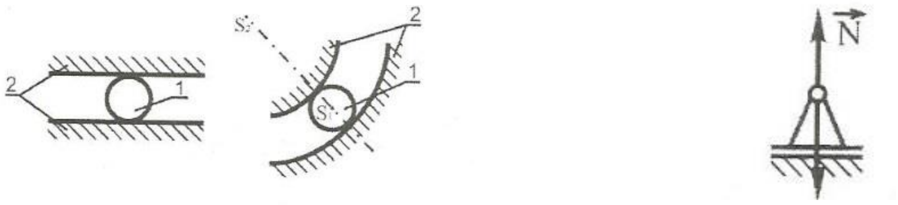


Slika 9. Primeri sile $\vec{N}$i ili $\overrightarrow{Fn}$

Glatkom površinom se smatra ravna površina kod koje se trenje tela koje se nalazi na njoj može zanemariti. Takva površina sprečava kretanje tela samo u pravcu zajedničke normale na površine dodirnih tela, a u tački njihovog dodira.

Sila reakcija $\overrightarrow{F_N}$ glatke površine ili glatkog oslonca usmerena je po zajedničkoj normali na površine dodirnih tela, a tačka njihovog dodira je u isto vreme i napadna tačka reakcije.

b) Dvostrana dodirna veza



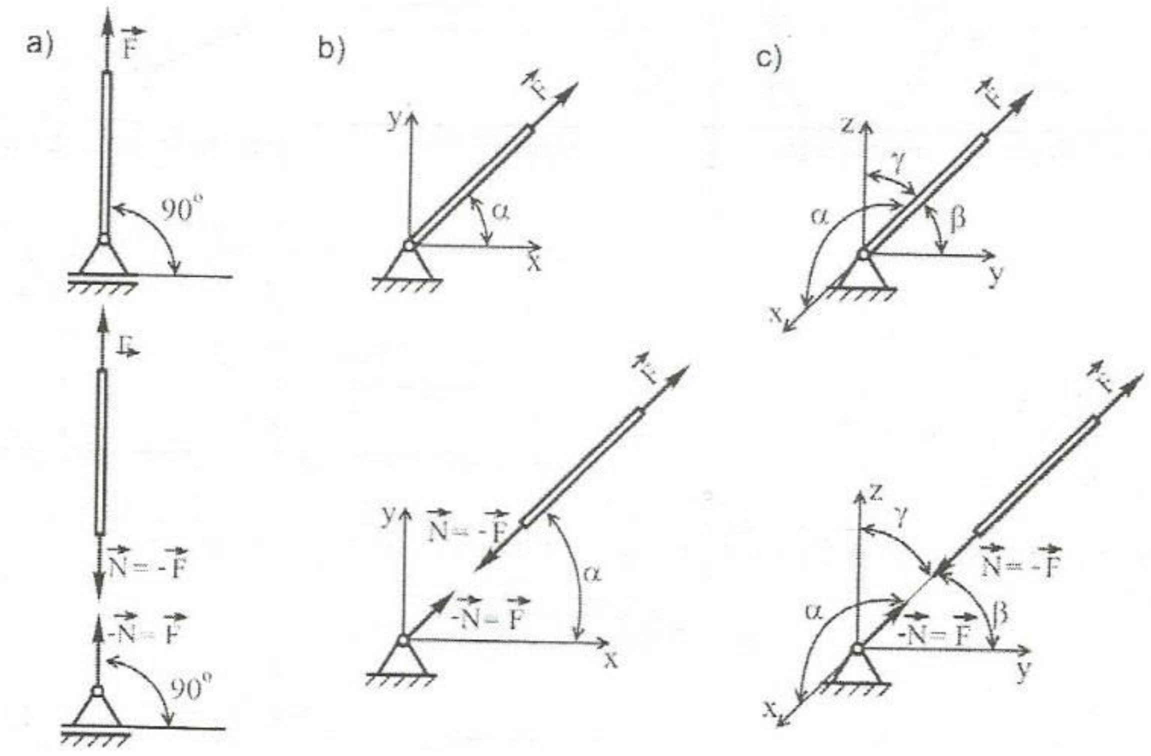
Slika 10: Dvostrane dodirne veze

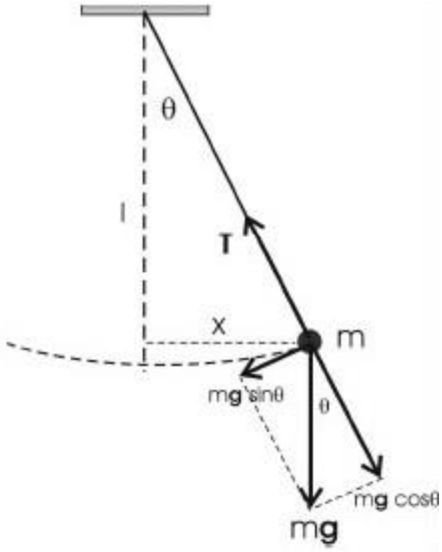
Smer reakcije je uvek suprotan smeru u kome veza ne dozvoljava pomeranje. Ove veze unose jednu nepoznatu u rešavanje statičkog problema.

Nepoznata je samo veličina reakcije, jer je pravac određen geometrijom, a smer se određuje prema predznaku veličine reakcije – ako se dobije predznak + znači da se smer poklapa sa pretpostavljenim.

2.3.1.2 Uže (nit, konac)

Ovaj vid veze može biti ostvaren u vidu savitljivog konopca i ovakva veza ne dozvoljava datom telu A, težine G, da se udalji od tačke vešanja B, u pravcu AB (slika 11).



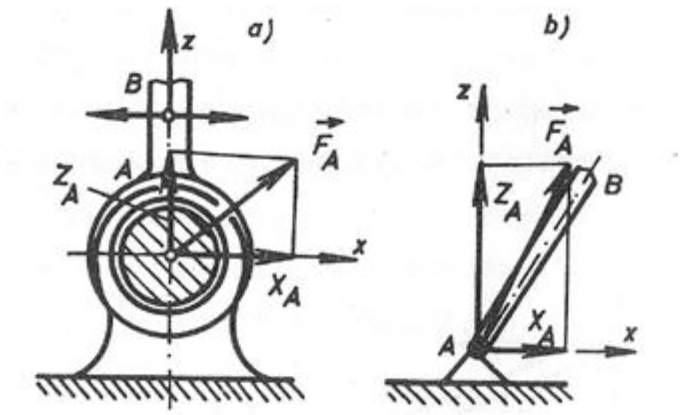


Slika 11: Grafički prikaz sila u užetu ili štapu

Reakcija veze $\vec{S}$ u ovom slučaju ima pravac konca i usmerena je u smeru tačke vešanja.

2.3.1.3 Veza ostvarena pomoću cilindričnog zgloba (ležišta)

Ovo je slučaj u kome je jedno telo spojeno sa drugim telom vezom pomoću otvora i zajedničke osovinice koja je u otvor postavljena, dok je pri tome telo, koje služi kao veza, vezano za nepokretnu ravan.

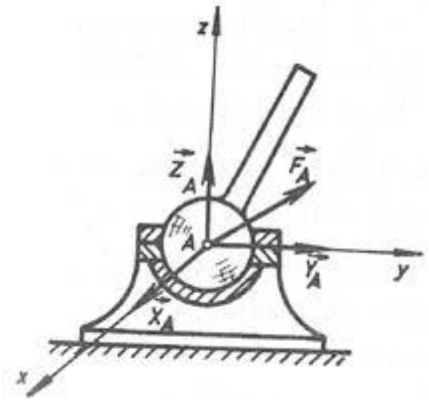


Slika 12: Cilindrični zglob

Telo može da se okreće oko ose koja prolazi kroz tačku A, a upravna je na ravan štapa AB, dok tačka A štapa AB ne može da se pomera ni u kom pravcu. Trenje između tela se zanemaruje. Sila reakcije je $\overrightarrow{F_A}$ i predstavlja se prekonjenih komponenti, $\overrightarrow{X_A}\ i\ \overrightarrow{Z_A}$, sa napadnom tačkom u tački A, jer se u ovoj tački ostvaruje veza.

2.3.1.4 Veza ostvarena pomoću sferičnog zgloba (ležišta)

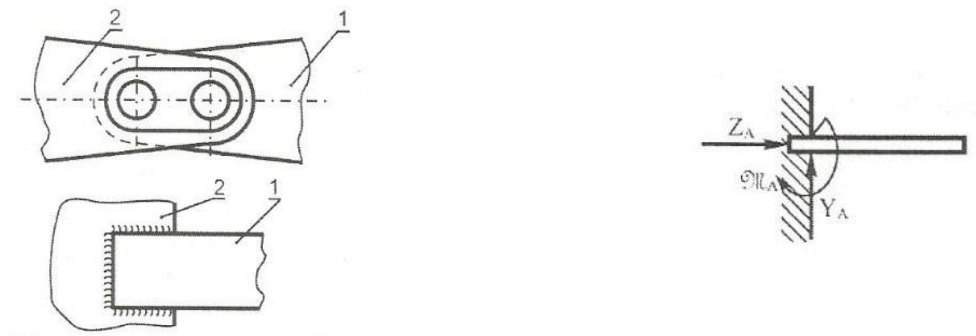
Telo je svojim krajem A obrađeno u obliku kugle tako da se može obrtati na proizvoljan način unutar sferne površine drugog tela, koje služi kao veza i koje je vezano za nepokretnu ravan.
Tačka A , centar kugle, štapa AB se ne može pomeriti ni u jednom pravcu, i samo telo može da zauzme bilo koji pravac u prostoru, pa prema toku reakcija $\overrightarrow{F_A}$ može da zauzme bilo koji pravac u prostoru. To znači, da se njene upravne komponente $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Z_A}$ pretpostavljaju, a kada se one odrede, ukupna reakcija je određena dijagonalom paralelopipeda konstruisanog nad tim komponentama. (slika 13).



Slika 13. Sferni zglob

2.3.1.5 Uklještenje

Model uklještenja je prikazan na slici 14.

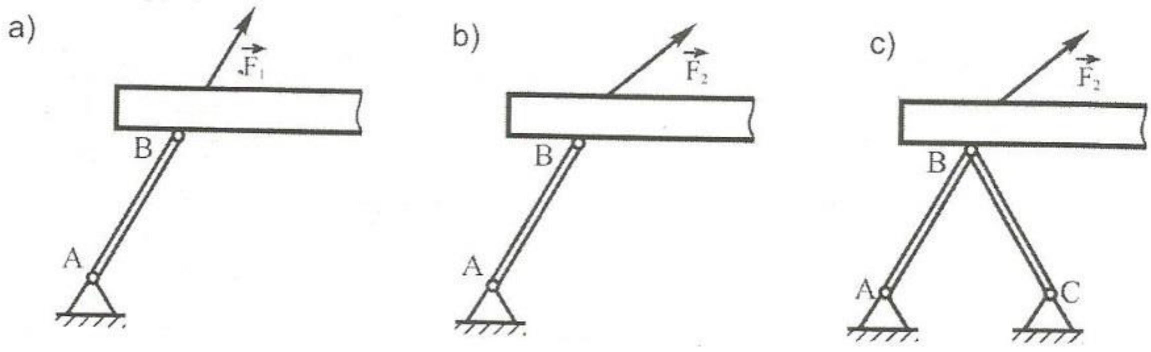


Slika 14. Uklještenje

Uklještenje, kao reakciju veze, daje silu proizvoljnog pravca u ravni i spreg koji se naziva moment uklještenja. S obzirom na činjenicu da je za definisanje sile proizvoljnog pravca potrebno znati njenu veličinu i ugao koji pravac delovanja zaklapa sa nekom referentnom osom, to je problem uklještenja problem sa tri nepoznate.

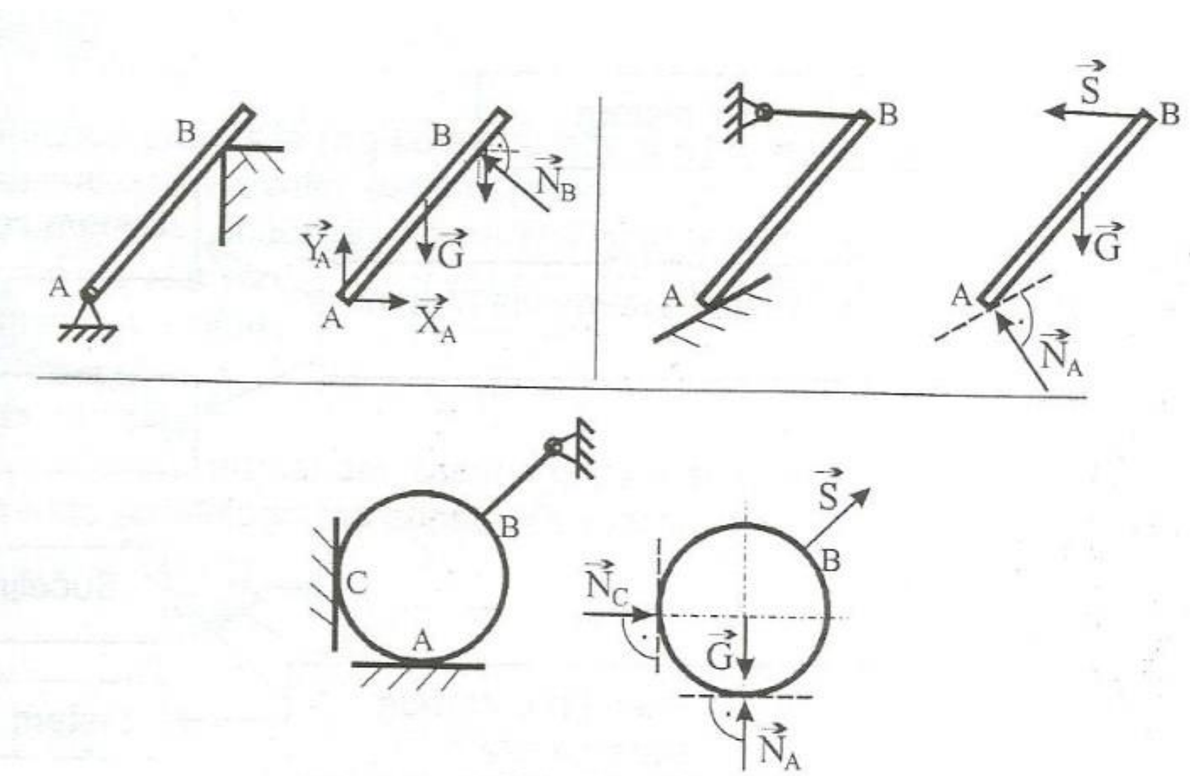
2.3.1.6 Štap

Ukoliko se tanki štap, na čijim krajevima deluju dve sile, nalaze u ravnoteži, onda, prema aksiomi 1, te dve sile moraju delovati u pravcu štapa. U tom slučaju, štap radi samo na zatezanje ili pritisak. Ukoliko takav štap, u bilo kojoj konstrukciji ostvaruje vezu, onda će reakcija štapa $\overrightarrow{F_N}$ imati pravac ose štapa.



Slika 15.

NAPOMENA:
Pogledajmo sada ove primere.



Slika 16: Primeri sa oslobađanjem od veza

Veza sa 2 štapa je ekvivalent cilindričnom zglobu. Veza sa 3 štapa je ekvivalent sfernom zglobu. Reakcije veze imaju uvek suprotan smer od smera mogućeg kretanja tela.

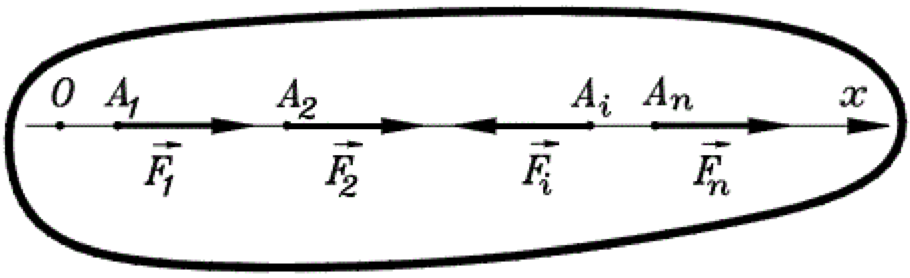
3. SISTEM SILA

Sile koje deluju na telo mogu biti različitog pravca, smera i intenziteta. U zavisnosti od toga kakav je njihov međusobni odnos, možemo govoriti o:

- **kolinearnom sistemu sila** – sve sile leže na istom pravcu,
- **komplanarnom sistemu sila** – sve sile leže u jednoj ravni.
  a) *sistem paralelnih sila u ravni* – pravci sila su međusobno paralelni
  b) *sistem sučeljenih sila* – pravci delovanja svih sila seku se u jednoj tački
  c) proizvoljni sistem sila
- **prostornom sistemu sila**
  a) *sistem paralelnih sila u prostoru* – pravci delovanja svih sila su međusobno paralelni
  b) *prostorni sistem sučeljenih sila* – pravci delovanja svih sila se seku u jednoj tački
  c) sistem mimoilaznih sila i
  d) *opšti slučaj prostornog sistema sila*.

3.1 Kolinearni sistem sila

Zbir kolinearnih sila se dobija prostim sabiranjem intenziteta sila po pravcu njihovog delovanja, a smer se određuje na osnovu predznaka zbira intenziteta. Pozitivan smer sila je usmeren u pozitivnu stranu pravca.



Slika 18 Kolinearne sile

Za ravnotežu kolinearnog sistema sila potreban i dovoljan uslov je da:

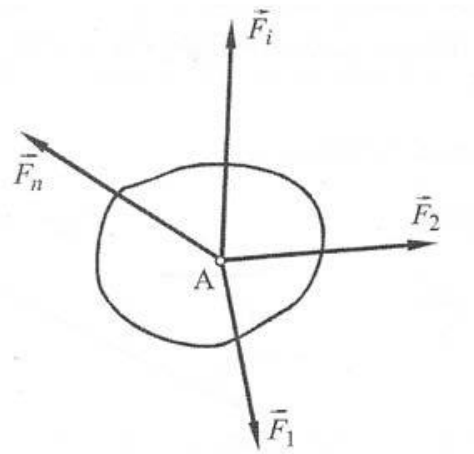
$\overrightarrow{F_R} = \sum_{i=1}^{n} F_i$ ……………………………………………………………………………… (3.1)

Jer je:

$\overrightarrow{F_R} = 0 \; ili \; \overrightarrow{F_R} \neq 0.$

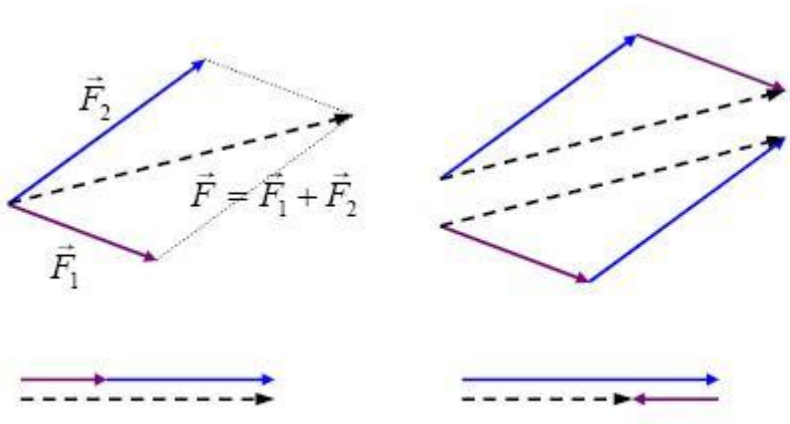
3.2 Sučeljeni sistem sila

Položaji sila na pravcima delovanja nisu bitni, već uglovi između pravaca delovanja, veličine sila i njihovi smerovi.



Slika 19 Sučeljni sistem sila

3.2.1 Grafičko svođenje dve sučeljene sile



Slika 20

Rezultanta se, po intenzitetu izračunava na osnovu kosinusne teoreme (paralelogram):

$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2cos\gamma$ ……………………………………………………………………… (3.2)

$\gamma - ugao\ izme\text{đ}u\ \overrightarrow{F_1}\ i\ \overrightarrow{F_2}$

Primenom sinusne teoreme :

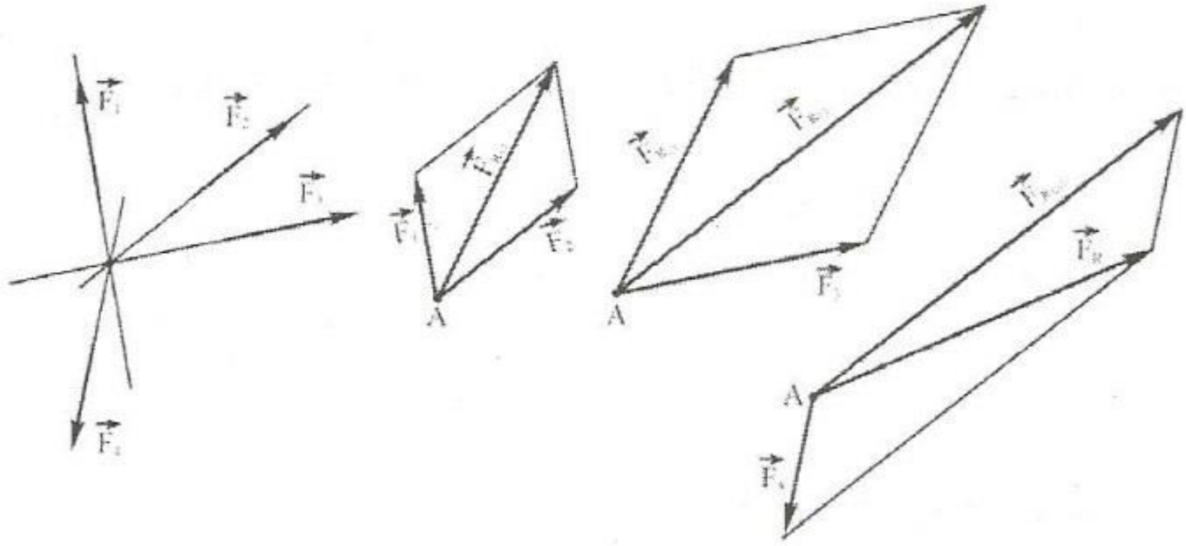
$\frac{F_R}{sin\gamma} = \frac{F_2}{sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\alpha}$ ……………………………………………………………………….......... (3.3)

Ako sile $\overrightarrow{F_1}\ i\ \overrightarrow{F_2}$ zaklapaju ugao od 90^0, onda važi jednakost:

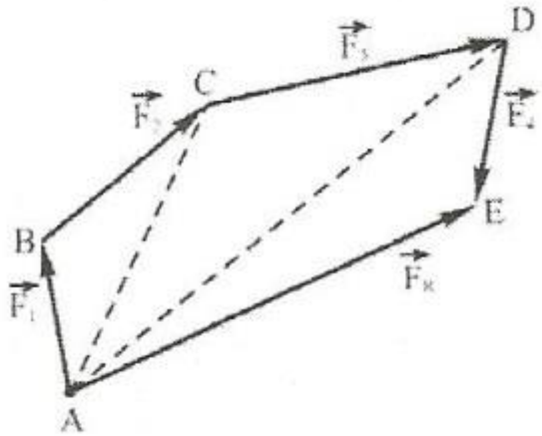
$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2$

3.3 Rezultanta tri ili više sila

Ovo možemo grafički rešiti na dva načina: kreiranjem paralelograma i to tako što prvo nađemo rezultantu $\overrightarrow{F_1}\ i\ \overrightarrow{F_2}$, pa potom konstruisamo paralelogram od njihove rezultante i $\overrightarrow{F_3}$ i tako redom. Konstruišemo n-1 paralelogram, ako imamo n sila.



Slika 21. Konstrukcija poligona



Slika 22. Poligon sila

3.3 SISTEMI SILA I SPREGOVI U RAVNI

3.3.1 STATIČKI MOMENT SILE ZA TAČKU

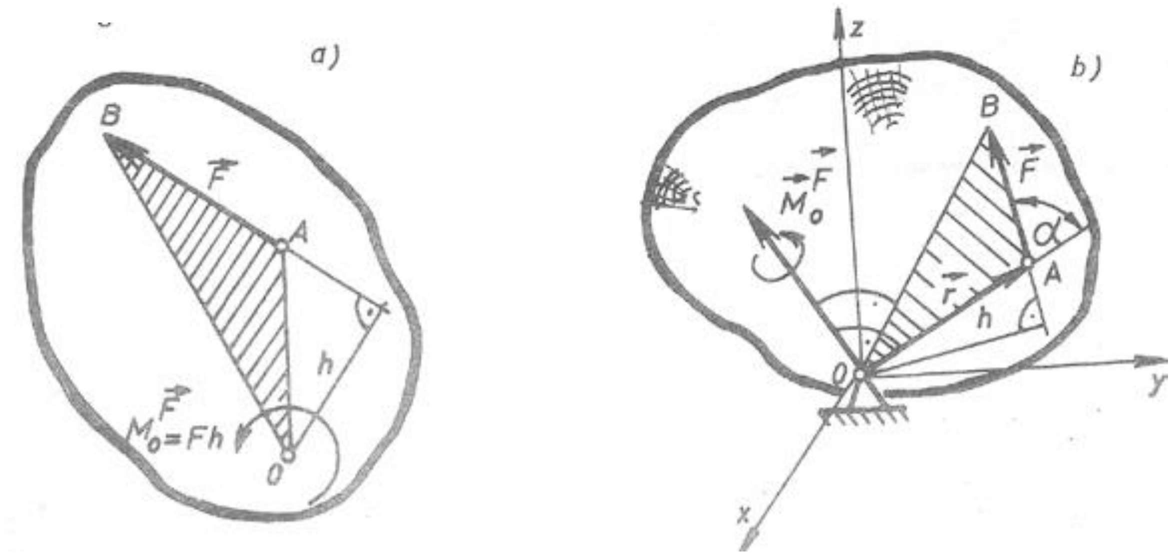
Obrtni efekat sile karakteriše se njenim momentom.

Neka sila $\vec{F}$ napada kruto telo u tački A. Ova sila, pretpostavimo, teži da obrne kruto telo oko tačke O. ***Normala h, spuštena iz tačke (centra) 0 na napadnu liniju sile $\vec{F}$, naziva se krakom sile za tačku.***

Kako napadnu tačku sile možemo proizvoljno pomerati duž njene napadne linije, to **obrtni efekat sile zavisi od:**

a) intenziteta sile F i dužine kraka h,
b) položaja ravni obrtanja OAB, koja prolazi kroz tačku O i kroz silu $\vec{F}$ i
c) od smera obrtanja u toj ravni.

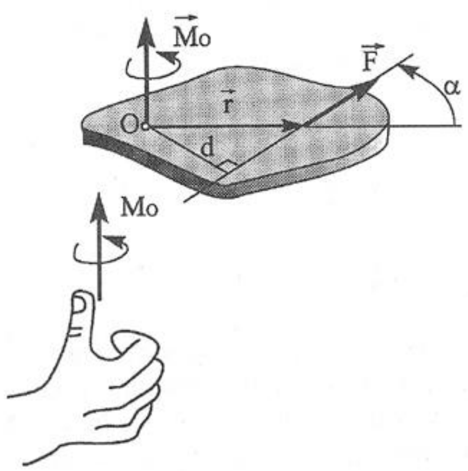
Ukoliko sile deluju u ravni, onda je ravan obrtanja za sve sile ista.



Slika 23. Moment sile za tačku

Moment ima znak plus ako teži da obrne kruto telo oko tačke O u smeru suprotnom od smera obrtanja kazaljke na satu.

Pravilo dlana desne ruke: Ako sila nastoji da okrene telo u smeru savijenih prsta desne ruke, tada vektor momenata ima smer ispruženog palca.



Slika 24. Pravilo desne ruke

Osobine momenta sile:

1) Moment sile se ne menja pri pomeranju napadne tačke sile duž njene napadne linije,
2) Moment sile za tačku O jednak je nuli samo u slučaju kada je sila jednaka nuli ili samo napadna linija sile prolazi kroz tačku O (krak sile jednak nuli)
3) Vrednost sile je jednaka dvostrukoj površini trougla OAB:

   $M_O^{\vec{F}} = \pm 2 \cdot površine\ \Delta OAB$

   jer je $\Delta OAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot F \cdot h$ ………………………………………………………… (3.8)

4) Moment sile $\vec{F}$ za tačku O određuje tačku kroz koju prolazi napadna linija sile; ta tačka je udaljena od tačke O za rastojanje:

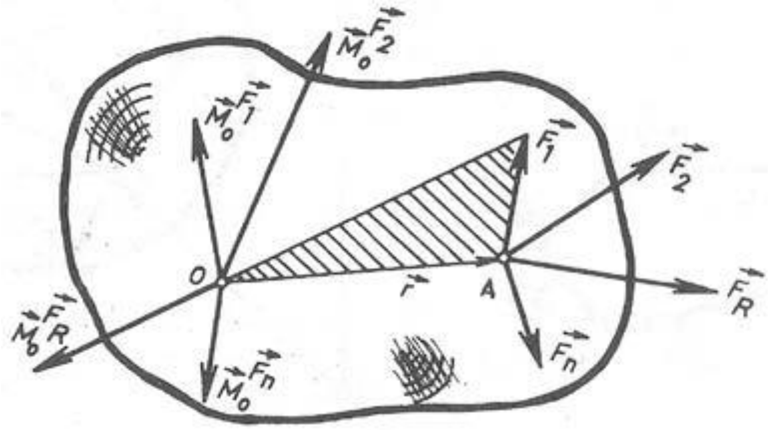
   $h = \frac{\left|M_O^{\vec{F}}\right|}{F}$ ………………………………………………………………………… (3.9)

pri čemu se h nanosi na normali na pravac vektora $\vec{F}$ u stranu koja je određena znakom momenta.

3.4 VARINJONOVA TEOREMA O MOMENTU REZULTANTE SUČELJENIH SILA

VARINJONOVA TEOREMA:

Moment rezultante ravnog sistema sučeljenih sila za proizvoljnu tačku jednak je algebarskom zbiru momenata komponenti za istu tačku.



Slika 25. Rezultujući moment sučeljenih sila

Povucimo osu Ox upravno na pravu OA. Tada je:

2xpovršina ΔOAB=$\boldsymbol{\overline{OA} \cdot \overline{Ob} = \overline{OA} \cdot x_1}$ ………………………………………………………… (3.10)

pri čemu je:

– x_1 – projekcija sile $\vec{F}$ na x osu

– $M_O^{\vec{F}} = \pm\overline{OA} \cdot x_1$ – moment sila

Ukoliko imamo sistem sučeljenih sila sa rezultantom $\overrightarrow{F_R} = \sum \overrightarrow{F_i}$ onda je $X_R = \sum X_i$. Ako obe strane prethodne jednačine pomnožimo sa $\overline{OA}$, dobićemo:

$M_O^{\vec{F}} = \sum_{i=1}^{n} M_o^{\overrightarrow{F_i}}$ ……………………………………………………………………… (3.11)

3.4.1 USLOVI RAVNOTEŽE RAVNOG SISTEMA SUČELJENIH SILA

Za ravnotežu ravnog sistema sučeljenih sila potreban i dovoljan uslov je da su sume momenata sila za bilo koje dve tačke B i C, koje leže u istoj ravni, ali nisu na istoj pravoj sa A jednake nuli.

$\sum_{i=1}^{n} M_B^{\overrightarrow{F_i}} = 0$

$\sum_{i=1}^{n} M_C^{\overrightarrow{F_i}} = 0$ ……………………………………………………............................... (3.12)

a) Geometrijski uslovi ravnoteže

Za ravnotežu sučeljenog sistema sila, potrebno je i dovoljno, da poligon, konstruisan od tih sila, bude zatvoren.

b) Analitički uslovi ravnoteže

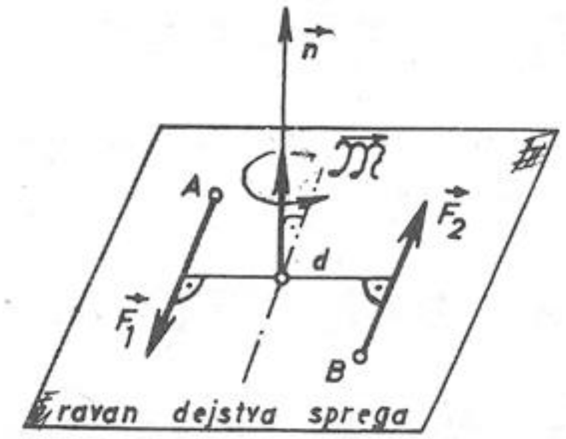
Ako je F_R rezultanta svih sučeljnih sila, potreban i dovoljan uslov je da zbir projekcija tih sila na obe (ravan) ili sve tri (prostor) ose bude jednak nuli.

$\sum X_i = 0 \quad \sum Y_i = 0 \; i \; \sum Z_i = 0$ ……………………………………………………….. (3.13)

Rešavanje problema tri sile svodi se na to da se trougao sila skicira, označe se nepoznati elementi i sračunavaju primenom sinusne ili kosinusne teoreme.

3.5 SPREG SILA U RAVNI

Pogledajmo slike 26.



Slika 26. Spreg sila

Posmatrajmo dve paralelne sile različitog smera, koje deluju u ravni π i odredimo njihov moment. Moment od para sila $F_1 \; i \; F_2$ za tačku O je:

$M_o^{(F_1,F_2)} = h_2 \cdot F_2 - h_1 \cdot F_1 \;\; (\overline{OA} = h_1, \overline{OB} \; = h_2 \,)$ ………………………………………………........... (3.13)

Ako sile $\overrightarrow{F_1} \; i \; \overrightarrow{F_2}$ imaju istu veličinu: $F = F_1 - F_2$, prethodni izraz možemo transformisati:

$M_o^{(F_1,F_2)} = F \cdot (h_2 - h_1) \quad h_2 - h_1 = d - krak\ sprega$ .... (3.14),

pa je

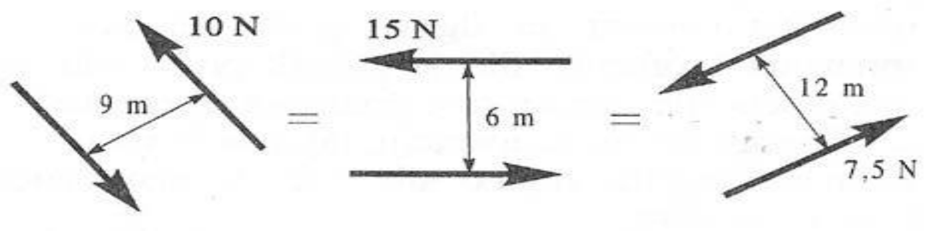
$M_o^{(F_1,F_2)} = F \cdot d = M_{O_1}^{(\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2})}$ ………………………………………………........................ (3.15)

Statički moment dveju paralelnih sila iste veličine, a suprotnog smera isti je za bilo koju tačku u ravni u kojoj sile deluju, a veličina mu zavisi od udaljenosti pravaca delovanja sila. ***Ovakav par sila se naziva spreg sila.***

Dve paralelne sile iste veličine, a suprotnog smera grade spreg sila. Ako moment sprega označimo slovom M, onda je:

$M = \pm \, F \cdot d \, ; \quad M = Nm$ ………………………………………….................................. (3.16)

Primer: Ekvivalentni spregovi



Slika 27. Ekvivalentni spregovi

Za dva sprega se kaže da su ekvivalentni ako imaju iste veličine i smer – ekvivalentni spregovi mogu se razlikovati u veličini sila i krakova, ali mora biti:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \;\Rightarrow\; M_1 = M_2$$

Sabiranje spregova

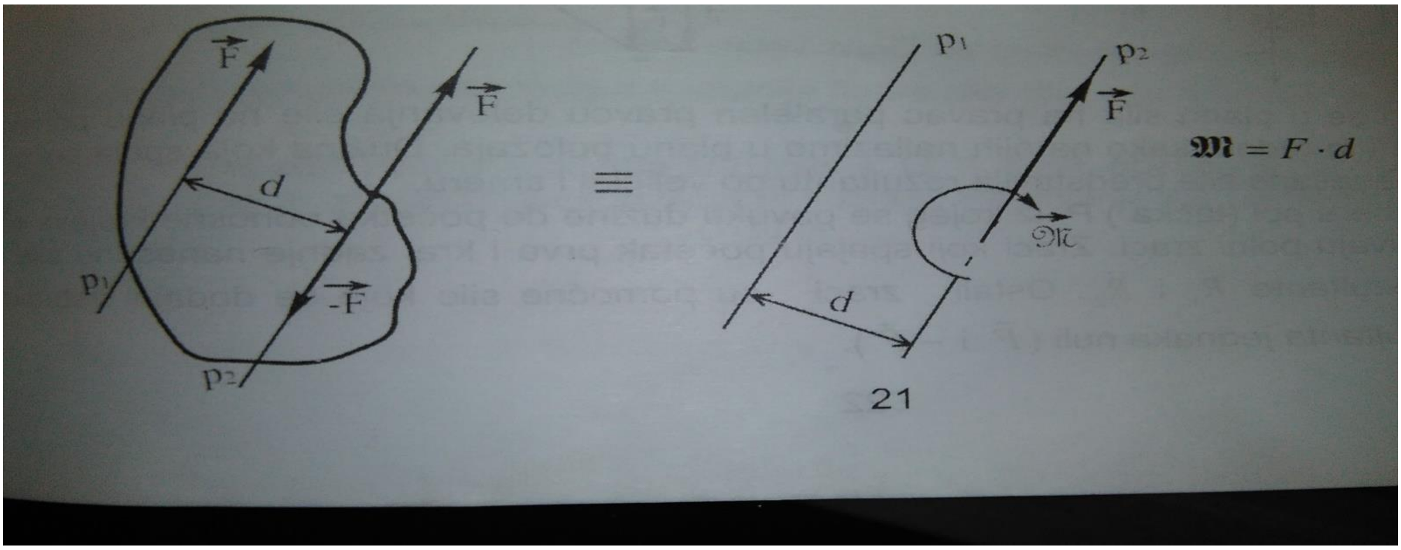
Ako imamo n spregova sila koje deluju na neko telo u ravni, onda se rezultujući spreg dobija kao:

$M_R = \sum_{i=1}^{n} M_i$ .... (3.17)

Za ravnotežu pod dejstvom ravnog sistema spregova potrebno je da algebarska suma momenata tih spregova bude jednaka nuli.

$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$ .... (3.18)

Teorema o paralelnom prenošenju sile: pogledajmo sledeću sliku



Slika 27.

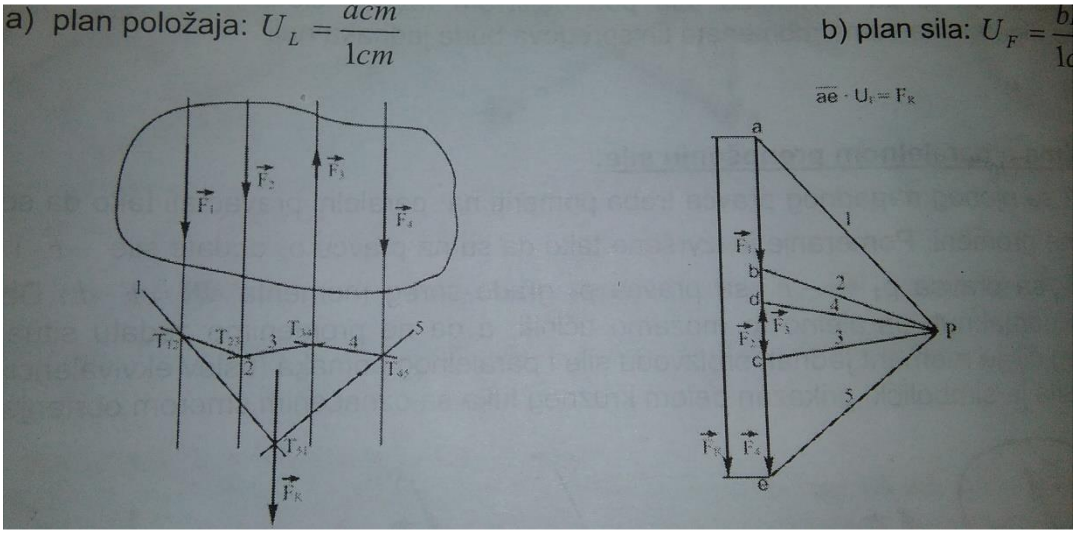
Sila $\vec{F}$ se sa pravaca p_1 prenosi se na pravac p_2 tako što se na pravcu p_2 dodaju sile + $\vec{F}\; i - \vec{F}$, pa se stoga dobija situacija kao na slici 27.b.

ZADATAK:

3.6 PARALELNI SISTEM SILA U RAVNI

3.6.1 Grafičko svođenje paralelnog sistema sila

Grafičko svođenje sila ćemo objasniti na primeru 4 paralelne sile. Postupak podrazumeva da pravce delovanja sila produžimo, a potom van crteža, desno, prenesemo sve sile, jednu za drugom, na istom pravcu, ali uvažavajući smerove. Početak sile 1 obeležimo sa a, a kraj sa b, na to dodajemo silu 2, čiji je kraj c itd. Potom odaberemo bilo koju tačku sa desne strane ove tako dobijene rezultante, tzv. pol P, i spajamo zracima uz obeležavanje redosleda pol P, na određenim počecima odnosno krajevima sila. Potom se vraćamo na prvi deo slike, pa paralelno prenosimo zrake krajeva. U preseku 1 i 5 zraka dobijamo tačku, kroz koju povučemo pravu paralelnu silama i nanesemo veličinu rezultante.



Slika 28. Grafičko svođenje paralelnih sila

3.6.2 Analitičko svođenje paralelnih sila

Izaberemo proizvoljan koordinatni sistem, slika 29 i sistem paralelnih sila ucrtamo u njega. Osa y je paralelna sa pravcem delovanja sila.

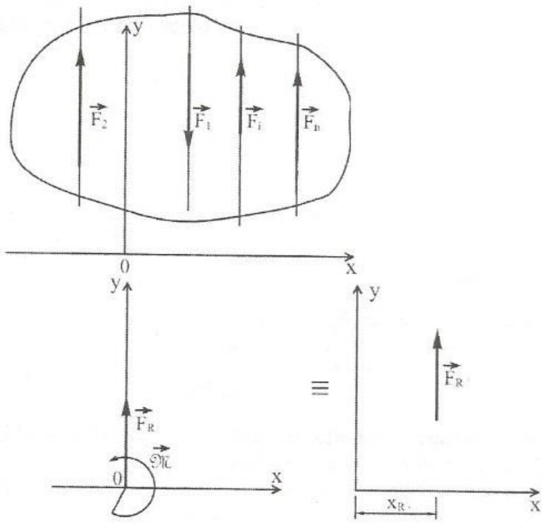
Paralelnim pomeranjem sila na y osu se dobija:

$\sum Y_i = Y_R = \sum F_i$ .... (3.19)

Pri pomaku svake sile, mora se uvesti redukcija:

$M_0^{\vec{F_i}} = x_i \cdot F_i$ ... . (3.20)

$M_0^{\vec{F_R}} = \sum M_0^{\vec{F_i}} = \sum x_i \cdot F_i = x_R \cdot F_R$ .... (3.21)



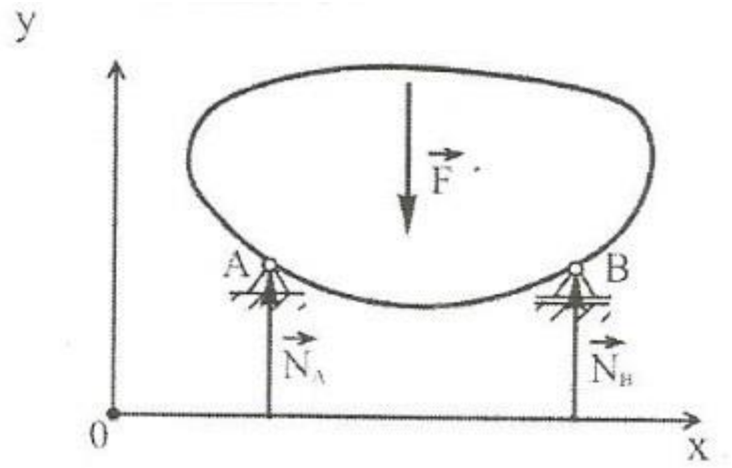
Slika 29. Analitičko svođenje paralelnih sila

Možemo odrediti veličinu x_R – položaj napadnog pravca F_R:

3.6.3 Uslovi ravnoteže paralelnog sistema sila u ravni

Dva uslova ravnoteže su:

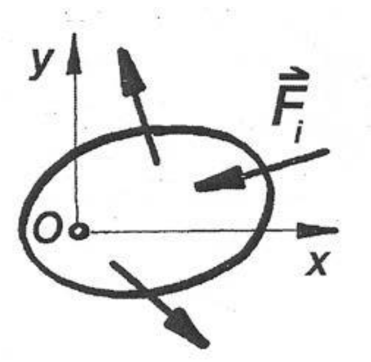
1. $\sum Y_i = 0$
2. $\sum M_A^{\vec{F_i}} = 0$ ili
3. $\sum M_B^{\vec{F_i}} = 0$ .... (3.22)



Slika 30 Uslovi ravnoteže paralelnog sistema sila

3.7 USLOVI RAVNOTEŽE PROIZVOLJNOG RAVNOG SISTEMA SILA

Neka na telo deluje ravan sistem sila



Slika 23. Proizvoljan ravan sistem sila

Za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila, potrebno je i dovoljno da jednovremeno budu ispunjeni uslovi:

$\overrightarrow{F_R} = 0 \ i \ M_0 = 0$ ………………………………………………………………………………… (3.23)

Gde je o bilo koja tačka u ravni, jer ako je $\overrightarrow{F_R} = 0,$ onda M_0 ne zavisi od izbora tačke 0.

Gore pomenuti uslovi su neophodni, jer ako nisu ispunjeni, onda se sistem sila koji deluje na telo svodi na rezultantu, $\overrightarrow{F_R} \neq 0$ ili na spreg $M_0 \neq 0$, i prema tome, sistem nije uravnotežen.

Uslove ravnoteže možemo podeliti u 3 osnovna oblika:

I Osnovni oblik uslova ravnoteže:

$\overrightarrow{F_R^2} = X_R^2 + Y_R^2$ i $M_0 = \sum M_0^{\overrightarrow{F_i}}$

gde je $X_R = \sum X_i$ i $Y_R = \sum Y_i$ ……………………………………………………………… (3.4)

Uslovi ravnoteže biće zadovoljeni samo ako kada su zadovoljeni uslovi:

$X_R = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

$$Y_R = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

$\sum M_0^{\overrightarrow{F_i}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_0^{\overrightarrow{F_i}} = 0$ ……………………………………………………………………… (3.5)

Definicija:

Za ravnotežu proizvoljnog sistema sila, potrebno je i dovoljno da suma projekcija sila na svaku od dve ose koordinatnog sistema budu jednake nuli i da suma momenata svih sila za bilo koju tačku, koja leži u ravni dejstva sila, bude jednaka nuli.

II oblik uslova ravnoteže :

Za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila potrebno je i dovoljno da suma momenata svih sila, za bilo koje dve proizvoljne izabrane tačke A i B i suma projekcija na bilo koju osu O koja je normalna na pravcu AB, bude jednaka nuli:

$\sum M_A^{\overrightarrow{F_i}} = 0 \qquad \sum M_B^{\overrightarrow{F_i}} = 0$ i $\sum X_i = 0$ …………………………………………………………… (3.6)

III oblik uslova ravnoteže:

Za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila, potrebno je i dovoljno da suma momenata svih sila za proizvoljno izabrane tačke A,B i C, koje ne leže na istoj pravoj, budu jednake nuli:

$\sum_{i=1}^{n} M_A^{\overrightarrow{F_i}} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B^{\overrightarrow{F_i}} = 0$$

$\sum_{i=1}^{n} M_C^{\overrightarrow{F_i}} = 0$ ……………………………………………………………………… (3.7)

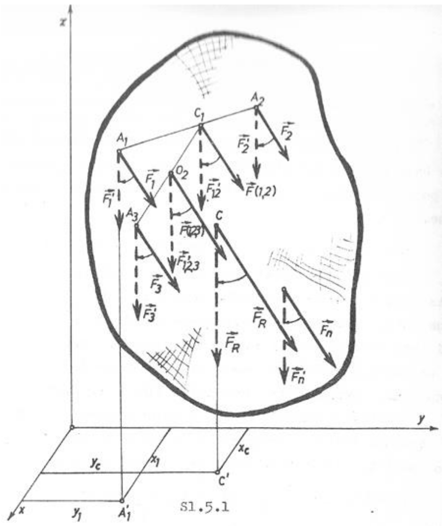
Zaključci:

1) Ako imamo sučeljni sistem sila, on se može svesti na jednu silu,
2) Ako se sistem sila sastoji od 2 sile, a one nisu kolinearne, rezultanta je uvek različita od nule
3) Sistemi od tri i više sila mogu imati rezultantu ili jednaku nuli
4) Kod grafičkog reduciranja $\overrightarrow{F_R}$ je jednako O, ako je poligon sila zatvoren

Ako je kod reduciranja $X_R = 0 \ i \ Y_R = 0$, tada je rezultanta sistema jednaka nuli ($F_R = 0$)

4. TEŽIŠTE HOMOGENIH LINIJA, POVRŠINA I TELA

Uzmimo primer jednog tela na koje deluje sistem paralelnih sila: $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2} \ldots\ldots \overrightarrow{F_n}$. Rezultanta tih sila je $\overrightarrow{F_R}$, čiji je pravac delovanja paralelan pravcu delovanja svih sila. Napadna tačka rezultante je neka tačka C. Ukoliko sve sile okrećemo za neki isti ugao, rezultata $\overrightarrow{F_R}$ će takođe, menjati svoj pravac delovanja, ali će jedna tačka uvek biti na tom pravcu. To je tačka C.



Slika 1

Napadna tačka ove rezultante se naziva središte sistema paralelnih sila C.

Primenom Varinjonove teoreme na zaokrenuti koordinatni sistem važi:

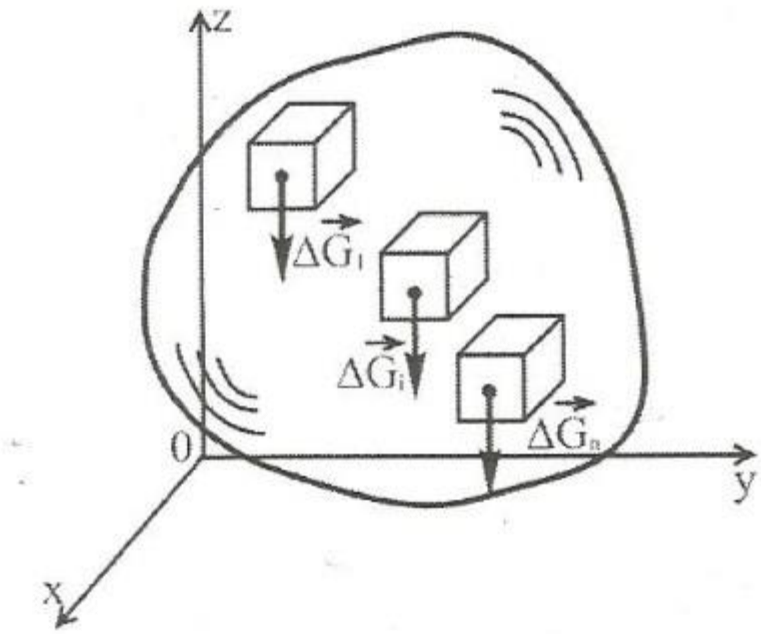
$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i \cdot x_i}{F_R}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i \cdot y_i}{F_R}$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i \cdot z_i}{F_R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.1)$$

Za određivanje težišta tela poslužićemo se sledećem, zamislimo da smo telo podelili na veliki broj manjih tela. Svako telo možemo zameniti manjim sistemom sila, a oblik svakog tela mora biti pozat, da bi im se odredila napadna tačka njihove težine.

$G = \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i$ .... (4.2)



Slika 2 Težište tela proizvoljnog oblika

Koordinate težišta tela se određuju na osnovu formula:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta G_i \cdot x_i}{G}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta G_i \cdot y_i}{G}$$

$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta G_i \cdot z_i}{G}$ .... (4.2)

Težište je geometrijska tačka i može da se nalazi izvan konture datog tela. Kod homogenog tela:

$\Delta G_i = \gamma \cdot \Delta V_i$ pa je i $G = \gamma \cdot V$
$V - zapremina$
$\gamma - specifična\ težin$ .... (4.3)

Koordinate x_c, y_c, z_c tela sa težinom G se tako određuju po formuli:

$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta V_i \cdot x_i}{V}$
$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta V_i \cdot y_i}{V}$ .... (4.4)

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta V_i \cdot z_i}{V}$$

Kod nekih tela se treća dimenzija može zanemariti, pa ta tela postaju dvodimenzionalna. U tom slučaju jednačine postaju:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot x_i}{A}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot y_i}{A}$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot z_i}{A} \quad \text{..........} \quad (4.5)$$

U slučaju homogene ploče, koja se nalaze u ravni xOy, dobija se:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot x_i}{A}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot y_i}{A}$$

$$z_c = 0 \quad \text{..........} \quad (4.6)$$

$S_y = \Delta A_i \cdot x_i$ – statički moment za osu y
$S_x = \Delta A_i \cdot y_i$ – statički moment za osu x

Kada se tela mogu zanemariti 2 dimenzije, takva tela nazivamo teške linije. Koordinate težišta c homogene linije se određuju:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta L_i \cdot x_i}{L}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta L_i \cdot y_i}{A}$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta A_i \cdot z_i}{A} \quad \text{..........} \quad (4.7)$$

U slučaju da linija leži u ravni xOy, $z_c = 0$.

Kada nije moguće svesti telo na male sitne delove, onda se vrši izračunavanje koordinata težišta uz pomoć integrala.

$x_c = \frac{\int x dV}{\int dV}$ $y_c = \frac{\int y dV}{\int dV}$ $z_c = \frac{\int z dV}{\int dV}$ - za telo sa III dimenzije

$x_c = \frac{\int x dA}{\int dA}$ $\quad$ $y_c = \frac{\int y dA}{\int dA}$ $\quad$ $z_c = \frac{\int z dA}{\int dA}$ - za telo sa II dimenzije

$x_c = \frac{\int x dL}{\int dL}$ $\quad$ $y_c = \frac{\int y dL}{\int dL}$ $\quad$ $z_c = \frac{\int z dL}{\int dL}$ - za telo sa I dimenzijom .... (4.8)