др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

09. термин

Изводи – основне теореме; геометријска интерпретација

9. Лопиталово правило

Теоријски увод

Лопиталово правило (може се применити само на лимесе облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$!) $\underset{\frac{0}{0}}{\overset{\text{л.п.}}{=}}$ $\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{л.п.}}{=}}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Лопиталово правило (може се применити само на лимесе облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$!) $\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$ $\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Кад имамо $g\cdot h$ облика $0\cdot\infty$ то сводимо на $\frac{g}{\frac{1}{h}}=\frac{g}{h^{-1}}$ (што је $\frac{0}{0}$) или $\frac{h}{\frac{1}{g}}=\frac{h}{g^{-1}}$ (што је $\frac{\infty}{\infty}$).
Један од ова два свођења води ка решењу, док други даје још сложенији лимес!

Код лимеса облика 1^∞ и 0^0 уместо да тражимо дати лимес L, тражићемо $\ln L$.

Задаци

1. 7.89. $$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$$

1. **7.89.** $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Решење.

$$L=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

1. **7.89.** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Решење.

$$L = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{x\to 5} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 - 0}{1-0} =$$

1. **7.89.** $$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\,.$$

Решење.

$$L=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to5}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot1-0}{1-0}=$$

$$\lim_{x\to5}\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{4}\,.$$ ■

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}$.

Решење 1. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot(2x-4)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2} \ldots \qquad \blacksquare$$

Решење 2. $x \to +\infty \Rightarrow x > 0$, па $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

Решење 2. $x \to +\infty \Rightarrow x > 0$, па $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2})}}{x - 2}$$

Решење 2. $x \to +\infty \Rightarrow x > 0$, па $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2})}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

Решење 2. $x \to +\infty \ \Rightarrow x > 0$, па $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

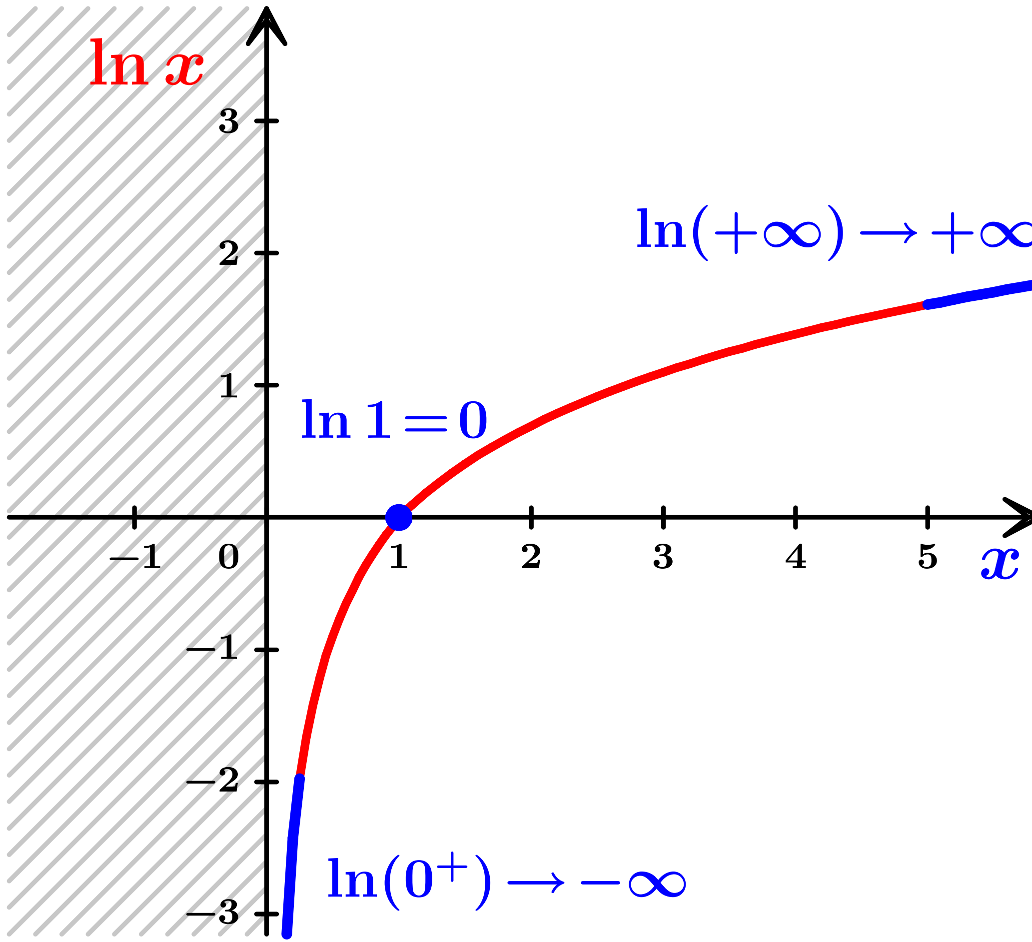
$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2})}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}(1 - \frac{2}{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = 1. \qquad \blacksquare$$

3. 7.98. $\alpha > 0$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

$\boxed{\ln(0^+) = -\infty}$ $\boxed{\ln(+\infty) = +\infty}$



3. 7.98. $\alpha > 0$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

Решење.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x^{1}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0. \quad \blacksquare$$

4. 7.99. $a, b > 0$. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

4. 7.99. $a, b > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

Решење 1.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

4. 7.99. $a, b > 0$. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

Решење 1.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax} \cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx} \cdot \cos bx \cdot b} =$$

4. 7.99. $\quad a, b > 0. \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

Решење 1.

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax} \cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx} \cdot \cos bx \cdot b} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \overset{\nearrow 1}{\frac{\sin bx}{bx}} \cdot \frac{1}{\underset{\searrow 1}{\dfrac{\sin ax}{ax}}} \cdot \frac{\cos ax}{\cos bx} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1. \qquad \blacksquare$$

4. 7.99. $a, b > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

Решење 2.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot \cos bx \cdot b} =$$

$$\frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx \cdot \cos ax}{\sin ax \cdot \cos bx} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

4. 7.99. $a, b > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

Решење 2.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot \cos bx \cdot b} =$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx \cdot \cos ax}{\sin ax \cdot \cos bx} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos bx \cdot b \cdot \cos ax + \sin bx \cdot (-\sin ax)\cdot a}{\cos ax \cdot a \cdot \cos bx + \sin ax \cdot (-\sin bx)\cdot b} =$$

$$\frac{a}{b}\cdot \frac{b\ +\ 0}{a\ +\ 0} = 1. \qquad \blacksquare$$

4. 7.99. $a, b > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

Решење 3.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax} \cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx} \cdot \cos bx \cdot b} =$$

$$\frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx \cdot \cos ax}{\sin ax \cdot \cos bx} \overset{*}{=}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{\sin ax} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos ax}{\cos bx}$$

$*$ може када је бар један од ова 2 лимеса коначан број $\neq 0$

4. 7.99. $\quad a, b > 0.\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}\ .$

Решење 3.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot \cos bx \cdot b} =$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx \cdot \cos ax}{\sin ax \cdot \cos bx} \overset{*}{=}$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{\sin ax}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos ax}{\cos bx}\ 1$$

$*$ може када је бар један од ова 2 лимеса коначан број $\neq 0$

4. 7.99. $\quad a, b > 0.\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}\,.$

Решење 3.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot \cos ax \cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot \cos bx \cdot b} =$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx \cdot \cos ax}{\sin ax \cdot \cos bx} \overset{*}{=}$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{\sin ax}\cdot \cancelto{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos ax}{\cos bx}} = \frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{\sin ax}\cdot 1 \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos bx \cdot b}{\cos ax \cdot a} = \frac{a\cdot \cos 0 \cdot b}{b\cdot \cos 0 \cdot a} = 1. \qquad \blacksquare$$

5. 7.100. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x \, , \ \alpha > 0.$

Результат. $L = 0.$ ■

6. 7.95. $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

6. 7.95. $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Решење. $$L=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln x\cdot 1}=$$

6. 7.95. $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Решење. $$L=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln x\cdot 1}=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{(x-1)+x\cdot\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1+x\cdot\ln x}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+\ln x+1}=\frac{1}{1+\ln 1+1}=\frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

7. 7.103. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

Результат. $$L = e^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$ ■

9. Тејлоров и Маклоренов полином

Теоријски увод

$f(x)$ има у околини тачке $x = a$ изводе до реда $n+1$, тада ту важи:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

T_n је Тејлоров полином степена n функције $f(x)$ у околини тачке $x = a$:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$R(n)$ је остатак (грешка) Тејлорове формуле.

Важи апроксимација:

$$f(x) \approx T_n(x) \quad (x \approx a).$$

Остатак у Лагранжовом облику:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где је θ неки број између a и x.

у Пеановом облику:

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right),$$

када $(x \to a)$.

Тејлоров полином полинома.

Када је $f(x)$ полином $P_n(x)$ степена n:

$$P_n(x) = T_n(x).$$

За зад: „развити полином по потенцијама (степенима) од $(x-a)$“.

Тејлоров полином полинома.
Када је $f(x)$ полином $P_n(x)$ степена n:

$$P_n(x) = T_n(x).$$

За зад: „развити полином по потенцијама (степенима) од $(x-a)$“.

За $a = 0$ *Маклоренов полином*:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Апроксимација функције $f(x) = \sin(4x) \cdot \cos x$ Маклореновим полиномом 9-ог степена:

$$T_9(x) = 4 \cdot x - \frac{38}{3} \cdot x^3 + \frac{421}{30} \cdot x^5 - \frac{10039}{1260} \cdot x^7 + \frac{246601}{90720} \cdot x^9.$$

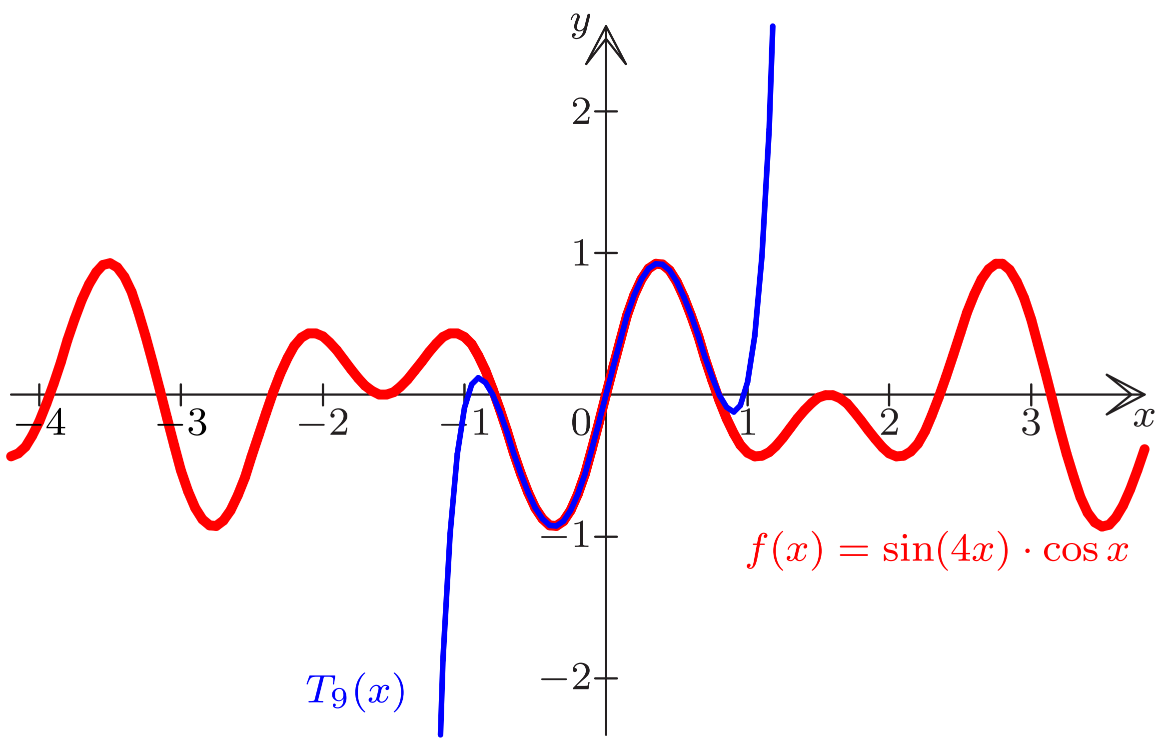


Таблица основних Маклоренових полинома:

$f(x)$	$T(x)$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$
$(1+x)^a$	$1+ax+\binom{a}{2}x^2+\ldots+\binom{a}{n}x^n$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$
$\sin x$	$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Задаци

1. 8.2.

Функцију $f(x) = \sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом 3. степена у околини тачке $x = 1$.

1. 8.2.

Функцију $f(x) = \sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом 3. степена у околини тачке $x = 1$.

Решење.

$$T_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

1. 8.2.

Функцију $f(x) = \sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом 3. степена у околини тачке $x = 1$.

Решење.

$$T_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

1. 8.2.

Функцију $f(x) = \sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом 3. степена у околини тачке $x = 1$.

Решење.

$$T_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} & &\Rightarrow & f(1) &= 1\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & &\Rightarrow & f'(1) &= \frac{1}{2}\\
f''(x) &= \frac{-1}{4x\sqrt{x}} & &\Rightarrow & f''(1) &= -\frac{1}{4}\\
f'''(x) &= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} & &\Rightarrow & f'''(1) &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

1. 8.2.

Функцију $f(x) = \sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом 3. степена у околини тачке $x = 1$.

Решење.

$$T_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} & &\Rightarrow & f(1) &= 1\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & &\Rightarrow & f'(1) &= \frac{1}{2}\\
f''(x) &= \frac{-1}{4x\sqrt{x}} & &\Rightarrow & f''(1) &= -\frac{1}{4}\\
f'''(x) &= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} & &\Rightarrow & f'''(1) &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

1. 8.2.

Функцију $f(x)=\sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом 3. степена у околини тачке $x=1$.

Решење.

$$T_3(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$\begin{array}{lcl} f(x)=\sqrt{x} & \Rightarrow & f(1)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} & \Rightarrow & f'(1)=\frac{1}{2} \\ f''(x)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}} & \Rightarrow & f''(1)=-\frac{1}{4} \\ f'''(x)=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}} & \Rightarrow & f'''(1)=\frac{3}{8} \end{array}$$

$$T_3(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$$

$$\sqrt{x}\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3 \quad (x\approx 1)$$

$\blacksquare$

2. 8.3.

Одредити Тејлоров полином 4. степена ф-је $f(x) = e^x$ у околини тачке $x = -1$.

2. 8.3.

Одредити Тејлоров полином 4. степена ф-је $f(x) = e^x$ у околини тачке $x = -1$.

Решење.

$$T_4(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{IV}(-1)}{4!}(x+1)^4$$

2. 8.3.

Одредити Тејлоров полином 4. степена ф-је $f(x) = e^x$ у околини тачке $x = -1$.

Решење.

$$T_4(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{IV}(-1)}{4!}(x+1)^4$$

За $f(x) = e^x$ имамо

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2. 8.3.

Одредити Тејлоров полином 4. степена ф-је $f(x) = e^x$ у околини тачке $x = -1$.

Решење.

$$T_4(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{IV}(-1)}{4!}(x+1)^4$$

За $f(x) = e^x$ имамо

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$T_4(x) = \frac{1}{e}\left[1 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)^3 + \frac{1}{24}(x+1)^4\right].$$

■

3. 8.5. в).

Полином $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ развити по потенцијама од $(x-2)$.

3. 8.5. в).

Полином $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ развити по потенцијама од $(x-2)$.

Решење 1. (Тејлоров полином у околини 2):

$$\begin{array}{lcl}
P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1 & \Rightarrow & P(2) = 11 \\
P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x & \Rightarrow & P'(2) = 24 \\
P''(x) = 12x^2 - 6x + 2 & \Rightarrow & P''(2) = 38 \\
P'''(x) = 24x - 6 & \Rightarrow & P'''(2) = 42 \\
P^{IV}(x) = 24 & \Rightarrow & P^{IV}(2) = 24
\end{array}$$

$$P(x) = T_4(x) = 11 + 24(x-2) + 19(x-2)^2 + 7(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

■

Решење 2. (Вишеструка Хорнерова шема) делимо полином $P(x)$ са $x-2$:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 3 & 6 & \boxed{11} \\
2 & 1 & 3 & 9 & \boxed{24} & \\
2 & 1 & 5 & \boxed{19} & & \\
2 & 1 & \boxed{7} & & & \\
2 & \boxed{1} & & & &
\end{array}
$$

$$P(x) = 11 + 24(x-2) + 19(x-2)^2 + 7(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

■

4. Полином $P(x) = x^4 - 9x^2 - x + 1$ развити по степенима од $(x+3)$.

Резултат.

$P(x) = T_4(x) = 4 - 55(x+3) + 45(x+3)^2 - 12(x+3)^3 + (x+3)^4$.

■

5. 8.21.

Одредити Тејлоров полином 3. степена којим се $f(x) = x^2 \ln x$ апроксимира у околини $x_0 = 1$ и проценити грешку апроксимације за $|x-1| < \frac{1}{4}$.

5. 8.21.

Одредити Тејлоров полином 3. степена којим се $f(x) = x^2 \ln x$ апроксимира у околини $x_0 = 1$ и проценити грешку апроксимације за $|x-1| < \frac{1}{4}$.

Решење. $f(x) = x^2 \cdot \ln x \Rightarrow f(1) = 0$,

$f'(x) = x(2\ln x + 1) \Rightarrow f'(1) = 1$,

$f''(x) = 2\ln x + 3 \Rightarrow f''(1) = 3$,

$f'''(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'''(1) = 2.$

5. 8.21.

Одредити Тејлоров полином 3. степена којим се $f(x) = x^2 \ln x$ апроксимира у околини $x_0 = 1$ и проценити грешку апроксимације за $|x-1| < \frac{1}{4}$.

Решење. $f(x) = x^2 \cdot \ln x \Rightarrow f(1) = 0$,

$f'(x) = x(2\ln x + 1) \Rightarrow f'(1) = 1$,

$f''(x) = 2\ln x + 3 \Rightarrow f''(1) = 3$,

$f'''(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'''(1) = 2$.

$T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.

$f'^{V}(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow$ грешка у Лагранжовом обл.

$$R_3(x) = \frac{-\frac{2}{\theta^2} \cdot (x-1)^4}{4!} = \frac{-(x-1)^4}{12\theta^2}\,.$$

Како je $|x-1| < \frac{1}{4}$, тj. $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ добиjамо да je и $\frac{3}{4} < \theta < \frac{5}{4}$ (θ je између 1 и x).

Стога je $\min\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \max\frac{1}{\theta^2} = \frac{16}{9}$.

Максимална вредност за $|x-1|$ je $\frac{1}{4}$, па имамо

$$|R_3(x)| < \frac{(\frac{1}{4})^4}{12 \cdot (\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{1728} < 0.0006. \qquad \blacksquare$$

6. 8.24.

Одредити Маклоренов полином 2. степена ф-је $y(x) = \sqrt[5]{1-x}$. Служећи се тим развојем наћи приближну вредност за $\sqrt[5]{0.99}$.

6. 8.24.

Одредити Маклоренов полином 2. степена ф-је $y(x) = \sqrt[5]{1-x}$. Служећи се тим развојем наћи приближну вредност за $\sqrt[5]{0.99}$.

Решење. $y(x) = (1-x)^{1/5} \Rightarrow y(0) = 1$,

$y'(x) = \frac{-1}{5}(1-x)^{-4/5} \Rightarrow y'(0) = \frac{-1}{5}$,

$y''(x) = \frac{-4}{25}(1-x)^{-9/5} \Rightarrow y''(0) = \frac{-4}{25}$.

6. 8.24.

Одредити Маклоренов полином 2. степена ф-је $y(x)=\sqrt[5]{1-x}$. Служећи се тим развојем наћи приближну вредност за $\sqrt[5]{0.99}$.

Решење. $y(x)=(1-x)^{1/5} \Rightarrow y(0)=1$,
$y'(x)=\frac{-1}{5}(1-x)^{-4/5} \Rightarrow y'(0)=\frac{-1}{5}$,
$y''(x)=\frac{-4}{25}(1-x)^{-9/5} \Rightarrow y''(0)=\frac{-4}{25}$.
Маклоренов пол. $T_2(x)=1-\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}x^2$, па је $\sqrt[5]{1-x}\approx 1-\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}x^2 \ (x\approx 0)$.

6. 8.24.

Одредити Маклоренов полином 2. степена ф-је $y(x) = \sqrt[5]{1-x}$. Служећи се тим развојем наћи приближну вредност за $\sqrt[5]{0.99}$.

Решење. $y(x) = (1-x)^{1/5} \Rightarrow y(0) = 1$,
$y'(x) = \frac{-1}{5}(1-x)^{-4/5} \Rightarrow y'(0) = \frac{-1}{5}$,
$y''(x) = \frac{-4}{25}(1-x)^{-9/5} \Rightarrow y''(0) = \frac{-4}{25}$.
Маклоренов пол. $T_2(x) = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$, па је
$\sqrt[5]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 \ (x \approx 0)$.

$\sqrt[5]{0.99} = \sqrt[5]{1-0.01} = y(0.01) \approx T_2(0.01) = 0.997992.$

6. 8.24.

Одредити Маклоренов полином 2. степена ф-је $y(x) = \sqrt[5]{1-x}$. Служећи се тим развојем наћи приближну вредност за $\sqrt[5]{0.99}$.

Решење. $y(x) = (1-x)^{1/5} \Rightarrow y(0) = 1$,

$y'(x) = \frac{-1}{5}(1-x)^{-4/5} \Rightarrow y'(0) = \frac{-1}{5}$,

$y''(x) = \frac{-4}{25}(1-x)^{-9/5} \Rightarrow y''(0) = \frac{-4}{25}$.

Маклоренов пол. $T_2(x) = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$, па је $\sqrt[5]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 \ (x \approx 0)$.

$\sqrt[5]{0.99} = \sqrt[5]{1-0.01} = y(0.01) \approx T_2(0.01) = 0.997992.$

Дигитроном $\sqrt[5]{0.99} = 0.9979919516614\ldots$ ■

7. 8.41. б).

Одредити косу ас. функције $f(x) = xe^{1/x}$.

7. 8.41. б).

Одредити косу ас. функције $f(x) = xe^{1/x}$.

Решење.

$$f(x) = x \cdot e^{1/x} = x \cdot \big(1 + \tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x})\big) = x + 1 + o(1)$$

(Маклоренов развој: $\quad e^t = 1 + t + o(t)$

кад $x \to \pm\infty$ онда $t = \frac{1}{x} \to 0$),

7. 8.41. б).

Одредити косу ас. функције $f(x) = xe^{1/x}$.

Решење.

$$f(x) = x \cdot e^{1/x} = x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 1 + o(1)$$

(Маклоренов развој: $\quad e^t = 1 + t + o(t)$
кад $x \to \pm\infty$ онда $t = \frac{1}{x} \to 0$),

$\Rightarrow$ права $y = x + 1$ је обострана коса асимптота. ■

8. Одредити асимптоте ф-je $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

8. Одредити асимптоте ф-je $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

Решење. $\quad f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} = x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

8. Одредити асимптоте ф-је $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

Решење. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} = x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

Када $x \to +\infty$ важи $f(x) = x + x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x + x \cdot (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = x + x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) = 2x + \frac{1}{2} + o(1)$

$\Rightarrow$ права $y = 2x + \frac{1}{2}$ десна коса асимптота.

8. Одредити асимптоте ф-је $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

Решење. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} = x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

Када $x \to +\infty$ важи $f(x) = x + x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x + x \cdot (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = x + x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) = 2x + \frac{1}{2} + o(1)$ $\Rightarrow$ права $y = 2x + \frac{1}{2}$ десна коса асимптота.

Када $x \to -\infty$ важи $f(x) = x - x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x - x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) = -\frac{1}{2} + o(1)$ $\Rightarrow$ права $y = -\frac{1}{2}$ лева хор. асимптота. $\blacksquare$

9. 8.31. в).

Израчунати $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

9. 8.31. в).

Израчунати $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решење. Маклоренови развоји:

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

9. 8.31. в).

Израчунати $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решење. Маклоренови развоји:

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (за $t = -\frac{1}{2}x^2$) $\Rightarrow$

$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$.

9. 8.31. в).

Израчунати $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решење. Маклоренови развоји:

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (за $t = -\frac{1}{2}x^2$) $\Rightarrow$

$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$.

$L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4} =$

9. 8.31. в).

Израчунати $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решење. Маклоренови развоји:

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (за $t = -\frac{1}{2}x^2$) $\Rightarrow$

$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{12} + o(1) = -\frac{1}{12}. \quad \blacksquare$$

10. 8.31. a).

Израчунати $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

10. 8.31. а).

Израчунати $L = \lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

Решење. Када $x \to +\infty$ онда $\frac{1}{x} \to 0$ и $\ln(1+t) = t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$:

10. 8.31. a).

Израчунати $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

Решење. Када $x \to +\infty$ онда $\frac{1}{x} \to 0$ и $\ln(1+t) = t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[x - x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\big(\frac{1}{x^2}\big)\right)\right] =$$

10. 8.31. а).

Израчунати $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

Решење. Када $x \to +\infty$ онда $\frac{1}{x} \to 0$ и $\ln(1+t) = t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x - x - \frac{1}{2} + o(1) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} + o(1) = -\frac{1}{2}.$$

■

11. 8.31. д).

Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Резултат. $L = \frac{1}{2}$. ■

12. 8.33.

а) Написати Маклоренове полиноме трећег степена за функције e^{2x} и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3}$

12. 8.33.

а) Написати Маклоренове полиноме трећег степена за функције e^{2x} и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3}$

Решење. **а)** $g(x) = e^{2x} \Rightarrow g(0) = 1$,

$g'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g'(0) = 2$,

$g''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow g''(0) = 4$,

$g'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow g'''(0) = 8$.

12. 8.33.

а) Написати Маклоренове полиноме трећег степена за функције e^{2x} и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3}$

Решење. **а)** $g(x) = e^{2x} \Rightarrow g(0) = 1,$

$g'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g'(0) = 2,$

$g''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow g''(0) = 4,$

$g'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow g'''(0) = 8.$

$T_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3,$ тј.

$g(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$

Решење. **а)** $g(x) = e^{2x} \Rightarrow g(0) = 1,$

$g'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g'(0) = 2,$

$g''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow g''(0) = 4,$

$g'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow g'''(0) = 8.$

$T_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3,$ тј.

$g(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$

$h(x) = \sin 2x \Rightarrow h(0) = 0,$

$h'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow h'(0) = 2,$

$h''(x) = -4\sin 2x \Rightarrow h''(0) = 0,$

$h'''(x) = -8\cos 2x \Rightarrow h'''(0) = -8.$

Решење. **а)** $g(x) = e^{2x} \Rightarrow g(0) = 1,$

$g'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g'(0) = 2,$

$g''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow g''(0) = 4,$

$g'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow g'''(0) = 8.$

$T_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3,$ тј.

$g(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$

$h(x) = \sin 2x \Rightarrow h(0) = 0,$

$h'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow h'(0) = 2,$

$h''(x) = -4\sin 2x \Rightarrow h''(0) = 0,$

$h'''(x) = -8\cos 2x \Rightarrow h'''(0) = -8.$

$T_3(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3,$ тј.

$h(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$

Напомена. Коришћењем готових развоја:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\ \ (t \approx 0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o\big((2x)^3\big) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)\ \ (x \approx 0) \end{aligned}$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\ \ (t \approx 0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \frac{2x}{1!} - \frac{(2x)^3}{3!} + o\big((2x)^3\big) \\ &= 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)\ \ (x \approx 0) \end{aligned}$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)-1-2x^2}{x^3}$$

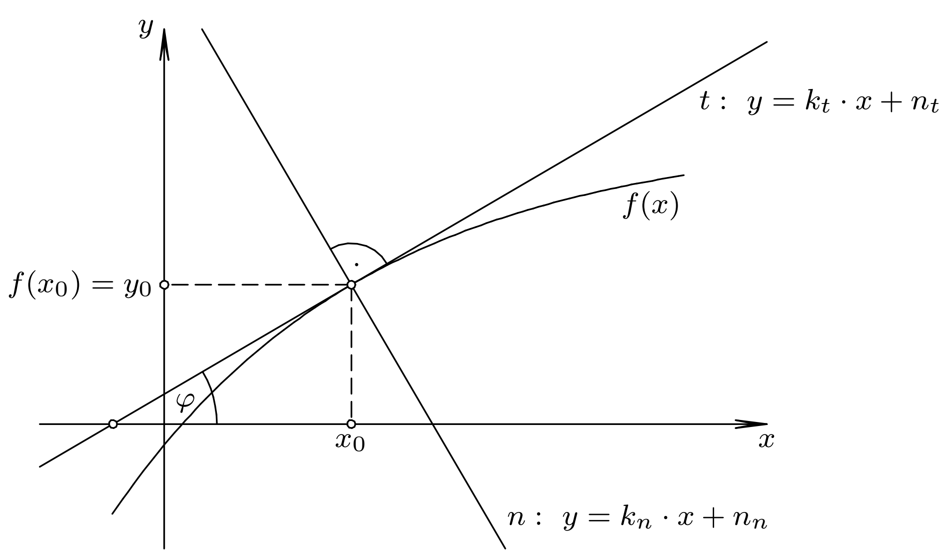
б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)-1-2x^2}{x^3}$$

$= \dfrac{8}{3} + o(1)$, те je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{8}{3}$. ■

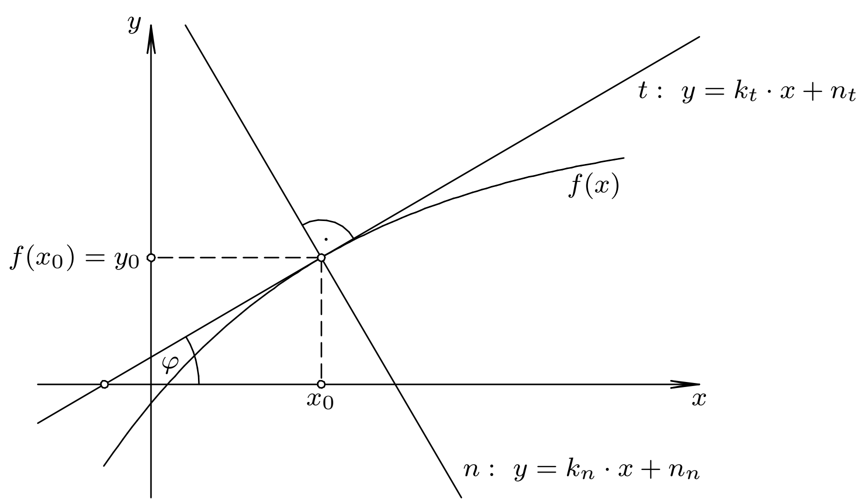
9. Геометријска интерпретација извода и диференцијала

Теоријски увод



Вредност I извода у $M(x_0, y_0)$ представља коефицијент правца k_t тангенте t на криву $f(x)$ у M (то је и тангенс угла φ који тангента заклапа са позитивним делом x-осе):

$$k_t = f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

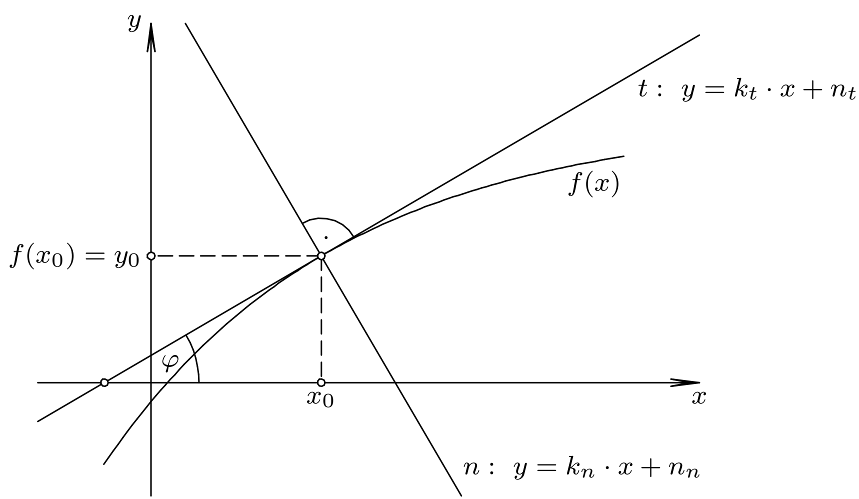


Коеф. правца k_n нормале n на криву у M:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пресек тангенте (нормале) са y-осом, n_t (n_n), одређујемо из услова $M \in t$ $(M \in n)$:

$n_t = y_0 - k_t \cdot x_0 \quad (n_n = y_0 - k_n \cdot x_0)$.



Диференцијал I реда, $\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$, може се искористити за апроксимирање прираштаја функције $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f$$

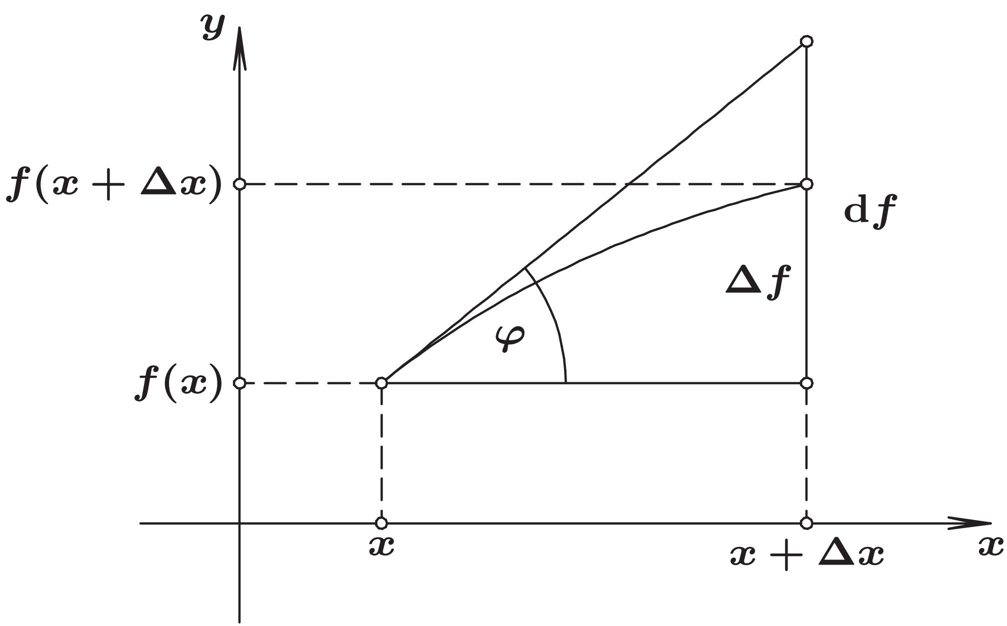
$(\Delta x = \mathrm{d}x)$. Ова формула се своди на:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{d}f = f'(x)\cdot \mathrm{d}x \approx \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x):$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Геометријска интерпретација диференцијала дата је на следећој слици:



1. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Наћи пресек тих тангената.

1. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Наћи пресек тих тангената.

Решење. Пресек – решимо систем:

$$x - y + 1 = 0, \qquad y = x^2 - 4x + 5$$

1. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Наћи пресек тих тангената.

Решење. Пресек – решимо систем:

$$x - y + 1 = 0, \qquad y = x^2 - 4x + 5$$

тј. $y = x + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = 4$

1. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Наћи пресек тих тангената.

Решење. Пресек – решимо систем:

$$x - y + 1 = 0, \qquad y = x^2 - 4x + 5$$

тj. $y = x + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = 4$

$y_1 = 2, \qquad y_2 = 5 \qquad\qquad A(1,2) \qquad B(4,5)$

1. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Наћи пресек тих тангената.

Решење. Пресек – решимо систем:

$$x - y + 1 = 0, \qquad y = x^2 - 4x + 5$$

тј. $y = x + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = 4$

$y_1 = 2, \qquad y_2 = 5 \qquad\qquad A(1,2) \qquad B(4,5)$

$y = x^2 - 4x + 5 \;\Rightarrow y' = 2x - 4$

1. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Наћи пресек тих тангената.

Решење. Пресек – решимо систем:

$$x - y + 1 = 0, \qquad y = x^2 - 4x + 5$$

тј. $y = x + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = 4$

$y_1 = 2, \qquad y_2 = 5 \qquad\qquad A(1,2) \qquad B(4,5)$

$y = x^2 - 4x + 5 \;\Rightarrow y' = 2x - 4$

2. Одредити једначине тангенти и нормала на криву линију $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ у њеним пресечним тачкама са хиперболом $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Под којим угловима се секу те две криве
(у пресечним тачкама)?

2. Одредити једначине тангенти и нормала на криву линију $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ у њеним пресечним тачкама са хиперболом $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Под којим угловима се секу те две криве (у пресечним тачкама)?

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

3. Наћи једначину нормале и тангенте на функцију $x = \ln(t^2+1)+t+1, \quad y = t^4+t+1$ у тачки $M(1,1)$.

3. Наћи једначину нормале и тангенте на функцију $x = \ln(t^2+1)+t+1, \quad y = t^4+t+1$ у тачки $M(1,1)$.

Решење.

$M(1,1) \Rightarrow x = \ln(t^2+1)+t+1 = 1,\ y = t^4+t+1 = 1$

3. Наћи једначину нормале и тангенте на функцију $x = \ln(t^2+1)+t+1, \quad y = t^4+t+1$ у тачки $M(1,1)$.

Решење.

$M(1,1) \Rightarrow x = \ln(t^2+1)+t+1 = 1,\ y = t^4+t+1 = 1$

$y = t^4+t+1 = 1,\ t(t^3+1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -1.$

$t_1 = 0 \Rightarrow x = \ln 1 + 0 + 1 = 1 \quad (t_2 = -1 \Rightarrow x = \ln 2$ ↯$).$

3. Наћи једначину нормале и тангенте на функцију $x=\ln(t^2+1)+t+1, \quad y=t^4+t+1$ у тачки $M(1,1)$.

Решење.

$M(1,1) \Rightarrow x=\ln(t^2+1)+t+1=1,\ y=t^4+t+1=1$

$y=t^4+t+1=1,\ t(t^3+1)=0 \Rightarrow t_1=0,\ t_2=-1.$

$t_1=0 \Rightarrow x=\ln 1+0+1=1 \quad (t_2=-1 \Rightarrow x=\ln 2$ $)$.

$$\dot{x}=\tfrac{2t}{t^2+1}+1,\ \dot{y}=4t^3+1 \Rightarrow y'_x=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{4t^3+1}{\frac{2t}{t^2+1}+1}.$$

3. Наћи једначину нормале и тангенте на функцију $x = \ln(t^2+1)+t+1, \quad y = t^4+t+1$ у тачки $M(1,1)$.

Решење.

$M(1,1) \Rightarrow x = \ln(t^2+1)+t+1 = 1,\ y = t^4+t+1 = 1$

$y = t^4+t+1 = 1,\ t(t^3+1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -1.$

$t_1 = 0 \Rightarrow x = \ln 1 + 0 + 1 = 1 \quad (t_2 = -1 \Rightarrow x = \ln 2$ ↯$).$

$$\dot{x} = \frac{2t}{t^2+1} + 1,\ \dot{y} = 4t^3+1 \Rightarrow y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4t^3+1}{\frac{2t}{t^2+1}+1}.$$

$$k_t = y'_x\Big|_M = y'_x\Big|_{t=0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$t: \qquad y = 1 \cdot x + n$

Решење.

$M(1,1) \Rightarrow x = \ln(t^2+1)+t+1 = 1,\ y = t^4+t+1 = 1$

$y = t^4 + t + 1 = 1,\ t(t^3+1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -1.$

$t_1 = 0 \Rightarrow x = \ln 1 + 0 + 1 = 1 \quad (t_2 = -1 \Rightarrow x = \ln 2\ \lightning).$

$$\dot{x} = \frac{2t}{t^2+1} + 1,\ \dot{y} = 4t^3 + 1 \Rightarrow y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4t^3+1}{\frac{2t}{t^2+1}+1}.$$

$$k_t = y'_x \Big|_M = y'_x \Big|_{t=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$t:\quad y = 1 \cdot x + n_t$

$M(1,1)$: $1 = 1 \cdot 1 + n_t$

$\Rightarrow n_t = 0$

$t:\quad y = x.$

Решење.

$$M(1,1) \Rightarrow x = \ln(t^2+1)+t+1 = 1,\ y = t^4+t+1 = 1$$

$$y = t^4 + t + 1 = 1,\ t(t^3+1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -1.$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow x = \ln 1 + 0 + 1 = 1 \quad (t_2 = -1 \Rightarrow x = \ln 2\ \lightning).$$

$$\dot{x} = \tfrac{2t}{t^2+1} + 1,\ \dot{y} = 4t^3 + 1 \Rightarrow y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4t^3+1}{\frac{2t}{t^2+1}+1}.$$

$$k_t = y'_x \Big|_M = y'_x \Big|_{t=0} = \tfrac{1}{1} = 1 \qquad\qquad k_n = \frac{-1}{k_t} = -1$$

$$t: \quad y = 1 \cdot x + n_t \qquad\qquad n: \quad y = -1 \cdot x + n_n$$

$$M(1,1):\ 1 = 1 \cdot 1 + n_t \qquad\qquad M(1,1):\ 1 = -1 \cdot 1 + n_n$$

$$\Rightarrow n_t = 0 \qquad\qquad \Rightarrow n_n = 2$$

$$t: \quad y = x \qquad\qquad n: \quad y = -x + 2. \qquad \blacksquare$$

4. Апроксимирајући прираштај функције диференцијалом, одредити приближну вредност за $\sqrt[4]{1{,}01^3}$.

Решење. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$

4. Апроксимирајући прираштај функције диференцијалом, одредити приближну вредност за $\sqrt[4]{1{,}01^3}$.

Решење. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \mathrm{d}x$.

$f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$, $\quad f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$

4. Апроксимирајући прираштај функције диференцијалом, одредити приближну вредност за $\sqrt[4]{1{,}01^3}$.

Решење. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \mathrm{d}x$.

$f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}, \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$

$x + \Delta x = 1{,}01 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ и $\Delta x = \mathrm{d}x = 0{,}01.$

4. Апроксимирајући прираштај функције диференцијалом, одредити приближну вредност за $\sqrt[4]{1{,}01^3}$.

Решење. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \mathrm{d}x$.

$f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}, \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$

$x + \Delta x = 1{,}01 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad$ и $\quad \Delta x = \mathrm{d}x = 0{,}01.$

$f(1,01) \approx f(1) + f'(1)\cdot 0{,}01$

$1,01^{3/4} \approx 1^{3/4} + \frac{3}{4}\cdot 1^{-1/4}\cdot 0{,}01$

$1,01^{3/4} \approx 1{,}0075.$

Дигитроном $\sqrt[4]{1,01^3} = 1{,}00749063844\ldots$ ■

5. Апроксимирајући прираштај функције диференцијалом, одредити приближну вредност за $\ln 1{,}02$.

Резултат. $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02.$ ■

6. Апроксимирајући прираштај функције диференцијалом, одредити приближну вредност за $\operatorname{arctg} 0{,}01$.

Резултат. $\operatorname{arctg} 0{,}01 \approx 0{,}01.$ ■

КРАЈ ЧАСА