Вероватноћа
(класична и условна)

припремио *др Владимир Балтић*

У математичкој теорији вероватноће, елементаран исход (елементаран догађај) се узима као основни појам. Ми ћемо га схватати као исход који се не може разложити на простије исходе. Као резултат опита може се појавити само један од елементарних исхода. Елементарне догађаје ћемо означавати са $e, e_1, e_2, \ldots$ Скуп свих могућих елементарних догађаја неког опита ћемо означавати са Ω. Сваки подскуп A скупа Ω, $A \subseteq \Omega$, је случајан догађај. Случајни догађај A се остварио (реализовао) ако је резултат експеримента један од елементарних исхода који припађу догађају A. Нека је Ω коначан скуп, тј. $|\Omega| = n \in \mathbb{N}$, где је $|\Omega|$ ознака за број елемената скупа Ω. Тада је вероватноћа догађаја A ($|A| = m$), за коју се користе ознаке $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{p}(A)$, дата формулом

$$\mathrm{p}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

Елементарни исходи су једноелементни подскупови скупа Ω те су и они случајни догађаји и вероватноћа сваког њих је једнака $\mathrm{p} = 1/n$. Случајан догађај $A = \Omega$ је сигуран догађај и његова вероватноћа је $\mathrm{p}(\Omega) = 1$. Празан подскуп $\emptyset$ скупа Ω је немогућ догађај и $\mathrm{p}(\emptyset) = 0$. Вероватноћа $\mathrm{p}(A)$ произвољног догађаја A је број за који важи

$$0 \leqslant \mathrm{p}(A) \leqslant 1.$$

Супротан догађај S догађаја A је догађај који се остварује ако и само ако се догађај A не остварује и пишемо $S = A^c$ или $S = \overline{A}$. Важи $S = \Omega \setminus A$, а за вероватноће

$$\mathrm{p}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{p}(A).$$

Пресек догађаја A и B је случајан догађај C који се реализује ако и само ако се реализију и A и B и пишемо $C = A \cap B$ или $C = AB$. Ако је пресек догађаја A и B немогућ догађај ($A \cap B = \emptyset$) тада кажемо да су догађаји A и B дисјунктни. Унија догађаја A и B је случајан догађај D који се реализује ако и само ако се реализује бар један од елемената из A или B и пишемо $D = A \cup B$. За вероватноћу уније важи

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(AB).$$

Ако су догађаји A и догађаји A и B дисјунктни тада уместо $A \cup B$ пишемо $A + B$

$$\mathrm{p}(A + B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B).$$

Пример 1. Која је вероватноћа да се бацањем две коцке добије да је сума добијених бројева једнака 7?

Решење. Представимо сваки исход бацања две коцке са уређеним паром (i, j), где је i број добијен бацањем прве коцке, а j друге коцке. Према принципу производа постоји укупно 36 могућних исхода, и то $(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)$; они су, у случају правилних коцки, једнако вероватни. На Слици 1 су представљени сви елементарни исходи, а заокружени су они код којих је збир једнак 7.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$\boxed{(1,6)}$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$\boxed{(2,5)}$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$\boxed{(3,4)}$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$\boxed{(4,3)}$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$\boxed{(5,2)}$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$\boxed{(6,1)}$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Слика 1: Сви елементарни и повољни исходи.

Повољни исходи су $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ и $(6,1)$; дакле има их укупно 6. Стога је тражена вероварноћа једнака $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. ■

Пример 2. Генерисан је низ од n битова на случајан начин. Колика је вероватноћа да је бар један од битова једнак 1?

Решење. Нека је A догађај да је бар један од битова једнак 0. Посматрајмо комплементарни догађај догађаја A, то јест догађај $\overline{A}$ за који су сви битови једнаки 0. Тада је

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Вероватноћа догађаја $\overline{A}$ се може добити следећим резоновањем: низ од n битова се може схватити као један од 2^n бројева $(0, 1, \ldots, 2^{n-1})$ репрезентованих у бинарном систему са n цифара. Догађај $\overline{A}$ одговара избору броја 0. Како је избор сваког броја једнако вероватан, закључак непосредно следи. ■

Следећи проблем представља парадигму пробабилистичког резоновања. Поставио га је каваљер де Мер (фра. Chevalier de Meére), чувени коцкар и бонвиван, а решили су га Блез Паскал и Пјер Ферма.

Пример 3. Проблем каваљера де Мера. Шта је вероватније, да се шестица појави када се једна коцка баца 4 пута, или да се појаве две шестице када се пар коцки баца 24 пута?

Решење. Опет ћемо користити вероватноће комплементарних догађаја. Вероватноћа првог догађаја је $1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 51.77\%$, док је вероватноћа другог догађаја $1 - (\frac{35}{36})^4 \approx 49.14\%$. Вероватноћа првог догађаја је већа. Стога би се требало кладити на прву варијанту[1]. ■

Наредни пример, интерпретиран као Загонетка три кутије (изворно енг. Monty Hall problem), побудио је недавно велику пажњу.

Пример 4. Загонетка три кутије. У ТВ игри дате су три кутије, две празне и једна пуна новца. Учесник ТВ игре бира једну од кутију, и ако изабере ону са новцем добија, као награду, сав новац. Међутим, пре него што је отвори, водитељ игре, који зна у којој кутији је новац, отвара једну од преостале две кутије, и то ону која је празна (или било коју ако су обе празне). Потом нуди учеснику у игри да, ако жели, промени свој избор. Сада се поставља питање коју стратегију користити? Да ли изабрати неку другу кутију, или ништа не мењати?

Решење. Вероватоћа добитка (пре наступа водитеља са његовом понудом) је 1/3, пошто можемо сматрати да су све кутије подједнако вероватне. Ако не мењамо изабрану кутију, тада ће одговарајућа вероватноћа остати непромењена.

Шта ако мењамо изабрану кутију? Тада у два случаја (то јест када изаберемо празну кутију у првобитном избору) добијамо награду. Наиме, пошто је изабрана кутија празна, а такође и она коју је водитељ отворио, новац ће бити у трећој кутији, и стога променом добијамо награду. У последњем случају (то јест када изаберемо кутију са новцем) остајемо без награде. Стога је вероватноћа добитка једнака 2/3.

Коначан закључак је да у Загонетки 3 кутије увек треба мењати изабрану кутију јер се тиме вероватноћа добитка дуплира. ■

Напомена. Овај пример се може решити и помоћу условних вероватноћа, што је материја која следи.

Условна вероватноћа

Нека случајни догађај B има позитивну вероватноћу (тј. $\mathrm{p}(B) \neq 0$) и нека је A случајни догађај из истог скупа исхода, Ω. Тада условна вероватноћа догађаја A у односу на догађај B (у ознаци $\mathrm{p}(A|B)$ или $\mathrm{p}_B(A)$) је вероватноћа да се реализује догађај A под условом да знамо да се реализује B и тада важи

$$\mathrm{p}(A|B) = \frac{\mathrm{p}(AB)}{\mathrm{p}(B)}.$$

Најважније особине условне вероватноће су: $0 \leqslant \mathrm{p}(A|B) \leqslant 1$, $\mathrm{p}(A^c|B) = 1 - \mathrm{p}(A|B)$ и $\mathrm{p}(AB) = \mathrm{p}(B) \cdot \mathrm{p}(A|B)$.

Ако су догађаји A и B независни онда је $\mathrm{p}(A|B) = \mathrm{p}(A)$, па је $\mathrm{p}(AB) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B)$, што повлачи да важи $\mathrm{p}(AB) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}(B)$.

Пример 5. Низ битова дужине 4 генерисан је на случајан начин тако да је свака од 16 могућности једнако вероватна. Колика је вероватноћа да низ садржи најмање две узастопне 0, ако се зна да је први бит 0?

Решење. Нека је A догађај да низ бита дужине 4 садржи бар две узастопне 0, а B догађај да је први бит у низу (дужине 4) једнак 0. Тада је

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

[1] То је и један од разлога зашто је каваљер де Мер банкротирао.

Како је $AB = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100\}$, следи да је $P(AB) = 5/16$. Како има тачно 8 низова дужине 3 који почињу са битом 0, следи да је $P(B) = 8/16 = 1/2$. Одавде је $P(AB) = 5/8$. ■

Формула тоталне вероватноће. Вероватноћа догађаја A, који може да се реализује при било којој од n дисјунктних хипотеза $H_1, H_2, \ldots, H_n$, које чине потпуни систем хипотеза (тј. за које је $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega$, односно $H_i \cap H_j = \emptyset$ за $i \neq j$ и $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$ – кажемо да је ово разбијање скупа Ω на скупове $H_1, H_2, \ldots, H_n$) је

$$\mathrm{p}\,(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{p}\,(H_j) \cdot \mathrm{p}\,(A|H_j).$$

Пример 6. Посматрајмо три кутије са по 10 производа, при чему у првој има 4, у другој 3 а у трећој 5 неисправних производа. Из једне кутије се узимају три производа. Колика је вероватноћа да је међу та 3 производа k неисправних?

Решење. Нека K_1, K_2 и K_3 означавају догађаје да су производи извучени редом из прве, друге и треће кутије. Означимо са N_k догађај да је k производа неисправно. Тада је

$$N_k = K_1 \cdot N_k + K_2 \cdot N_k + K_3 \cdot N_k.$$

Наиме догађај N_k може наступити као резултат наступања догађаја K_i (за $i = 1, 2, 3$). На основу Формуле тоталне вероватноће добијамо да је

$$P(N_k) = P(K_1)P(N_k \mid K_1) + P(K_2)P(N_k \mid K_2) + P(K_3)P(N_k \mid K_3).$$

Одавде, на пример за $k = 2$, имамо

$$P(N_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{107}{360} \approx 29.72\%.$$ ■

Бајесова формула даје вероватноћу да ако је наступио догађај A да се то десило под хипотезом H_k:

$$\mathrm{p}\,(H_k|A) = \frac{\mathrm{p}\,(H_k A)}{\mathrm{p}\,(A)} = \frac{\mathrm{p}\,(H_k) \cdot \mathrm{p}\,(A|H_k)}{\mathrm{p}\,(A)},$$

где се именилац $\mathrm{p}\,(A)$ израчунава по формули тоталне вероватноће.

На пример, у Примеру 6, ако је наступио догађај N_k, могли смо се запитати која је вероватноћа да се реализовала i-та хипотеза, тј. да је извлачење три производа обављено из i-те кутије? Тада је

$$P(K_i \mid N_k) = \frac{P(K_i)P(N_k \mid K_i)}{P(K_1)P(N_k \mid K_1) + P(K_2)P(N_k \mid K_2) + P(K_3)P(N_k \mid K_3)}.$$

Пример 7. Имамо сто са 4 фиоке које редом садрже 3 златна, 2 златна и 1 сребрн, 1 златан и 2 сребрна, 3 сребрена новчића. Бира се једна фиока, узима један новчић и констатује се да је он златан. Која је вероватноћа да је он узет из i-те фиоке?

Решење 1. Нека је F_i догађај да је изабрана i-та фиока, а Z да је извучени новћић златан. Нас интересује условна вероватноћа $P(F_i \mid Z)$. Применом Бајесове формуле имамо

$$P(F_i \mid Z) = \frac{P(F_i)P(Z \mid F_i)}{P(F_1)P(Z \mid F_1) + P(F_2)P(Z \mid F_2) + P(F_3)P(Z \mid F_3) + P(F_4)P(Z \mid F_4)}.$$

С обзиром да су све фиоке једнако вероватне (дакле $P(F_i) = \frac{1}{4}$) добијамо да је

$$P(F_i \mid Z) = \frac{P(Z \mid F_i)}{P(Z \mid F_1) + P(Z \mid F_2) + P(Z \mid F_3) + P(Z \mid F_4)}.$$

Одавде за $i = 1$ добијамо да је $P(Z \mid F_1) = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{0}{3}} = \frac{1}{2}$.

За $i = 2$ је $P(Z \mid F_2) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{0}{3}} = \frac{1}{3}$. За $i = 3$ је $P(Z \mid F_3) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{0}{3}} = \frac{1}{6}$.

За $i = 4$ је $P(Z \mid F_4) = \frac{\frac{0}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{0}{3}} = 0$. ■

Решење 2. У овом примеру до резултата можемо доћи само здраво-разумским расуђивањем и применом класичне дефиниције вероватноће.

Како укупно имамо $3 + 2 + 1 + 0 = 6$ златних новчића, то је вероватноћа да је изабрани новчић један од 3 златна новчића из прве фиоке једнака

$$P(Z \mid F_1) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Слично добијамо и $P(Z \mid F_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(Z \mid F_1) = \frac{1}{6}$ и $P(Z \mid F_1) = \frac{0}{6} = 0$. ■

Задаци

1. Новчић се баца три пута и региструје се низ у коме се појављују "писмо" и "грб". Одредити Ω.

2. Новчић се баца три пута и региструје се број колико пута се појави "писмо". Одредити Ω, као и вероватноћу свих могућих исхода.

3. Коцка за игру баца се три пута. Наћи вероватноћу да се у трећем бацању добије број 4.

4. Колика је вероватноћа да ће две бачене коцке показати бројеве чији је збир 8?

5. Бачене су две коцке. Колика је вероватноћа да је збир бројева који су пали $\leqslant 4$?

6. Баца се коцка за игру. Догађај A је да је пао паран број, а догађај B да је пао број дељив са 3. Одредити вероватноће $\mathrm{p}(A), \mathrm{p}(B), \mathrm{p}(AB), \mathrm{p}(A \cup B)$.

7. У једном одељењу има тридесет ученика. Ниједан од њих није рођен преступне године. Колика је вероватноћа да не постоје два ученика који рођендан славе истог дана?

8. Седам расејаних професора је ишло на неко предавање. У гардероби су оставили своје шешире. Након предавања свако од њих је узео први шешир који му је био под руком. Колика је вероватноћа да:
а) свако узме свој шешир; **б)** тачно шест професора узме свој шешир?

9. У једној кутији се налази 5 црвених и 5 белих куглица, а у другој 8 црвених и 2 беле. Не зна се која је од те две кутије прва, а која друга. Студент из прве кутије извлачи белу куглицу и пребацује је у другу кутију. Затим студент из друге кутије извлачи белу куглицу и пребацује је у прву кутију. На крају, студент поново извлачи куглицу из прве кутије. Уколико је та куглица бела, колика је вероватноћа да је та кутија на почетку имала по 5 белих и 5 црвених куглица?

10. Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

11. У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

12. Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

13. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 3 куглице одједном. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице плаве боје?

14. Из кутије у којој се налази 7 црвених и 9 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице одједном. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

15. У првој кутији је 5 белих и 10 црвених, а у другој 3 беле и 7 црвених куглица. Из друге кутије смо у прву пребацили једну куглицу, а затим смо из прве кутије извукли једну куглицу. Која је вероватноћа да смо извукли белу куглицу?

16. У кутији се налази 30 белих и 10 црвених куглица.

а) Извлачимо 4 куглице из кутије, једну за другом, тако што сваки пут поново вратимо извучену куглицу у кутију, да би извлачење поновили из кутије са почетним бројем куглица;

б) извлачимо 4 куглице из кутије одједном.

Наћи вероватноћу да ће од 4 извучене куглице 2 бити беле и 2 црвене.

17. Из кутије у којој се налази 8 белих и 9 црвених куглица извлачимо 2 куглице. Одредити вероватноћу догађаја A да, извлачећи куглице одједном, извучемо 2 беле куглице; догађаја B да, извлачећи куглице одједном, извучемо 2 куглице различитих боја; као и догађаја C да, извлачећи куглице једну за другом, без враћања, извучемо другу куглицу беле боје.

18. Из кутије у којој се налази 7 белих, 8 црвених и 9 зелених куглица извучене су одједном 2 куглице. Испоставило се да су те 2 куглице различитих боја. Наћи вероватноћу догађаја A да је једна од њих бела и једна црвена и догађаја B да је једна од њих бела.

19. Из кутије у којој се налази 8 белих и 9 црвених куглица једна куглица је изгубљена. Да бисмо, на основу експеримента, извели закључак о боји изгубљене куглице, извукли смо случајно одједном 3 куглице, и то 1 белу и 2 црвене. Наћи вероватноћу догађаја B да је изгубљена куглица беле боје и догађаја C да је изгубљена куглица црвене боје.

20. Из кутије у којој се налазе 4 беле, 6 плавих и 8 зелених куглица, случајно извлачимо 3 куглице. Одредити вероватноћу догађаја A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице различитих боја.

21. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

22. У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

23. У првој кутији има b белих и c црвених куглица, у другој x белих и y црвених, док се у трећој кутији налазе само беле куглице. Случајно одабирамо кутију и из ње случајно извлачимо једну куглицу и то беле боје. Која је вероватноћа да смо куглицу извукли из прве, друге, односно треће кутије?

24. Бацају се два новчића четири пута.

а) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања падне иста страна на оба новчића.

б) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања на новчићима падне различита страна.

в) Одредити вероватноћу догађаја да у једном бацању на новчићима падну исте, а у преостала три бацања различите стране.

25. У рулету, у једној игри, куглица се може зауставити на једном од поља означеним бројевима од 0 до 36. Посматрамо резултат 13 одређених игара. Колика је вероватноћа случајног догађаја да да се у посматраним играма куглица заустави:

A – редом на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

B – на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

C – сваки пут на истом броју;

D – сваки пут на броју 3?

Резултати и решења

1. $\Omega = \{ППП, ППГ, ПГП, ПГГ, ГПП, ГПГ, ГГП, ГГГ\}$. Вероватноћа свих елементарних догађаја је $\dfrac{1}{8}$.

2. Ω је исто као и у претходном примеру. Скуп свих исхода је $\{0,1,2,3\}$ (треба разликовати ова два скупа!). $\mathrm{p}(0) = \mathrm{p}(3) = \dfrac{1}{8}$, а $\mathrm{p}(1) = \mathrm{p}(2) = \dfrac{3}{8}$.

3. $\dfrac{1}{6}$. **4.** $\dfrac{5}{36}$. **5.** $\dfrac{1}{6}$. **6.** $\mathrm{p}(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{p}(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{p}(AB) = \dfrac{1}{6}$, $\mathrm{p}(A \cup B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

7. Означимо са A догађај да не постоје два ученика који славе рођендан истог дана. Тада је тражена вероватноћа $\mathrm{p}(A) = \dfrac{365}{365} \cdot \dfrac{364}{365} \cdot \dfrac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \dfrac{365}{337} \cdot \dfrac{336}{365} \approx 0.2936837573 \approx 29.4\%$.

Напомена. За 50 ученика је $\mathrm{p}(A) \approx 0.02962642042 \approx 3\%$, а $\mathrm{p}(\overline{A}) \approx 97\%$.

8. а) $\mathrm{p}(A) = \dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{5040} \approx 0.02\%$. **б)** То је немогућ догађај па је $\mathrm{p}(B) = 0$. **9.** $\dfrac{2}{7}$.

10. Укупан број мањих коцки ће бити 27, од којих њих 8 има обојене по три стране (то су оне коцкице у углу велике коцке), њих 12 има обојене по две стране (то су оне коцкице на ивицама велике коцке), њих 6 има обојену по једну страну (то су оне коцкице у средишту страна велике коцке), а једна коцка је необојена (то је она коцкице која се налази у самом центру велике коцке). Означимо са H_3, H_2, H_1 и H_0, редом, догађаје да смо одабрали и бацили коцку са 3, 2, 1 и 0 обојених страна. Ови догађаји чине један потпун систем догађаја, па по формули потпуне вероватноће имамо:

$$P(A) = P(A \mid H_3)\cdot P(H_3) + P(A \mid H_2)\cdot P(H_2) + P(A \mid H_1)\cdot P(H_1) + P(A \mid H_0)\cdot P(H_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27} + \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{27} + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{27} + \frac{0}{6}\cdot\frac{1}{27} = \frac{1}{3}.$$

Напомена. Приметимо да смо овај задатак могли решити и непосредно: укупан број могућих догађаја представља укупан број страница насталих коцки: $27\cdot 6$, док број повољних догађаја представља број обојених страница: $9 \cdot 6$.

11. Означимо са A и B, редом, догађај да смо извукли прву, односно другу коцку, и са C догађај појављивања броја 1 при бацању (било које) извучене коцке. Биће: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C \mid A) = \frac{1}{2}$ и $P(C \mid B) = \frac{1}{3}$, одакле, по Бајесовој формули добијамо:

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)\cdot P(C \mid A)}{P(A)\cdot P(C \mid A) + P(B)\cdot P(C \mid B)} = \frac{3}{5}$$

Слично би било и: $P(B|C) = \frac{2}{5}$, или преко $P(B \mid C) = P(\overline{A} \mid C) = 1 - P(A \mid C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

12. Означимо са A_i $(i = 1,2,3)$ догађај да i–та библиотека има тражену књигу у свом књижном фонду и са B_i догађај да је у i–тој библиотеци књига слободна, што, наравно, подразумева и чињеницу да i–та библиотека већ има тражену књигу у свом књижном фонду, па је, свакако, $P(B_i) = P(B_i \mid A_i)$, што значи да су догађаји A_i и B_i међусобно независни. Дакле, имамо: $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{2}$ $(i = 1,2,3)$.

Означимо са B догађај да студент није добио књигу ни у једној библиотеци. Имаћемо да је догађај B баш једнак: $B = (\overline{A_1} + A_1\overline{B_1})(\overline{A_2} + A_2\overline{B_2})(\overline{A_3} + A_3\overline{B_3})$, што представља пресек међусобно независних догађаја, па следи:

$$P(B) = P(\overline{A_1} + A_1\overline{B_1})P(\overline{A_2} + A_2\overline{B_2})P(\overline{A_3} + A_3\overline{B_3}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 = \tfrac{27}{64}$$

одакле налазимо тражену вероватноћу: $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.

13. Нека је C догађај да су извучене 3 црвене куглице. Тада је $\mathrm{p}(B) = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} = \dfrac{2}{13}$, $\mathrm{p}(C) = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} = \dfrac{5}{91}$, а одатле добијамо $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(B \cup C) = \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}(C) = \dfrac{\binom{8}{3} + \binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} = \dfrac{19}{91}$.

14. Означимо са A_c догађај да су извучене 4 црвене куглице, а са A_p догађај да су извучене 4 плаве куглице. На сличан начин као у претходном примеру добијамо $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A_c) + \mathrm{p}(A_p) = \dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{16}{4}} + \dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{16}{4}} = \dfrac{23}{260}$.
Означимо са B_i $(i = 0,1,2,3,4)$ догађај да је извучено i плавих куглица (и $4 - i$ црвених куглица). Тада је $\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(B_2) + \mathrm{p}(B_3) + \mathrm{p}(B_4) = \dfrac{\binom{7}{2}\binom{9}{2}}{\binom{16}{4}} + \dfrac{\binom{7}{1}\binom{9}{3}}{\binom{16}{4}} + \dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{16}{4}} = \dfrac{21}{26}$.

Напомена. На други начин до овог резултата можемо доћи преко комплементарног догађаја:
$\mathrm{p}(B) = 1 - \mathrm{p}(\overline{B}) = 1 - \big(\mathrm{p}(B_0) + \mathrm{p}(B_1)\big) = 1 - \left(\dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{16}{4}} + \dfrac{\binom{7}{3}\binom{9}{1}}{\binom{16}{4}}\right) = \dfrac{21}{26}.$

15. Означимо са B догађај да је извучена бела куглица (из I кутије након пребацивања), са H_B догађај да је из II кутије пребачена бела куглица, а са H_C да је пребачена црвена.
Тада имамо $\mathrm{p}(H_B) = \dfrac{3}{10}$ (од 10 куглица из II кутије 3 су беле) и $\mathrm{p}(B|H_B) = \dfrac{6}{16}$ (јер кад пребацимо куглицу у I кутију имамо 6 белих и 10 црвених куглица). Слично добијамо и $\mathrm{p}(H_C) = \dfrac{7}{10}$ и $\mathrm{p}(B|H_C) = \dfrac{5}{16}$. Када ово убацимо у формулу тоталне

$$\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(H_B)\,\mathrm{p}(B|H_B) + \mathrm{p}(H_C)\,\mathrm{p}(B|H_C) = \frac{3}{10}\cdot\frac{6}{16} + \frac{7}{10}\cdot\frac{5}{16} = \frac{53}{160}.$$

16. а) Вероватноћа извлачења беле куглице је $\dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4}$, а црвене је $\dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$. Стога је тражена вероватноћа да ће од четири извучене куглице две бити беле и две црвене једнака $\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128} = 0.2109375$.

б) $\dfrac{\binom{30}{2}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}} = \dfrac{3915}{18278} \approx 0.2141919247.$

17. $\mathrm{p}(A) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{17}{2}} = \dfrac{7}{34}.$ $\quad\mathrm{p}(B) = \dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{17}{2}} = \dfrac{9}{17}.$ $\quad\mathrm{p}(C) = \dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1} + \binom{9}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{17}{1}\cdot\binom{16}{1}} = \dfrac{8}{17}.$

18. $\mathrm{p}(A) = \dfrac{\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{1} + \binom{7}{1}\cdot\binom{9}{1} + \binom{8}{1}\cdot\binom{9}{1}} = \dfrac{56}{191}.$ $\quad\mathrm{p}(B) = \dfrac{\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{1} + \binom{7}{1}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{1} + \binom{7}{1}\cdot\binom{9}{1} + \binom{8}{1}\cdot\binom{9}{1}} = \dfrac{119}{191}.$

19. Означимо са $b = 8$ и $c = 9$ број куглица беле, односно црвене боје, а са B и C, редом, догађаје да је изгубљена куглица беле, односно црвене боје, а са A означимо резултат нашег експеримента. Према формули тоталне вероватноће имамо:

$$P(A) = P(B)\cdot P(A \mid B) + P(C)\cdot P(A \mid C) = \frac{b}{b+c}\cdot\frac{\binom{b-1}{1}\binom{c}{2}}{\binom{b+c-1}{3}} + \frac{c}{b+c}\cdot\frac{\binom{b}{1}\binom{c-1}{2}}{\binom{b+c-1}{3}} = \frac{36}{85}.$$

Одакле добијамо на основу Бајесове формуле: $P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$.

Како је $C = \overline{B} \ \Rightarrow \mathrm{p}(C|A) = \frac{1}{2}$.

20. $\mathrm{p}(A) = \dfrac{\binom{4}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3}}{\binom{18}{3}} = \dfrac{4+20+56}{816} = \dfrac{5}{51}\,.$ $\quad\mathrm{p}(B) = \dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{18}{3}} = \dfrac{4\cdot 6\cdot 8}{816} = \dfrac{4}{17}\,.$

22. а) Нека је B претпоставка да је из прве кутије у другу пребачена бела куглица, а C — да је то била црвена куглица. Биће: $P(B) = \frac{b}{b+c}$, $P(C) = \frac{c}{b+c}$, $P(A \mid B) = \frac{x+1}{x+y+1}$ и $P(A \mid C) = \frac{x}{x+y+1}$, па је на основу формуле тоталне вероватноће:

$$P(A) = P(B)\cdot P(A \mid B) + P(C)\cdot P(A \mid C) = \frac{b}{b+c}\cdot\frac{x+1}{x+y+1} + \frac{c}{b+c}\cdot\frac{x}{x+y+1}\,.$$

б) Разматрамо следеће две претпоставке: B — из друге кутије смо извукли куглицу која се првобитно налазила у првој кутији, и C — из друге кутије смо извукли куглицу која се и првобитно налазила у другој кутији. Тада $P(B) = \frac{3}{x+y+3}$, $P(C) = \frac{x+y}{x+y+3}$, $P(A \mid B) = \frac{b}{b+c}$ и $P(A \mid C) = \frac{x}{x+y}$, па је на основу формуле тоталне вероватноће:

$$P(A) = P(B)\cdot P(A \mid B) + P(C)\cdot P(A \mid C) = \frac{3}{x+y+3}\cdot\frac{b}{b+c} + \frac{x+y}{x+y+3}\cdot\frac{x}{x+y}\,.$$