др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

08. термин

Изводи, диференцијал; монотоност, конвексност

Испитивање функција:

1. Област дефинисаности функције (или домен функције) D_f

2. Нуле и знак функције; пресек са y-осом

3. Парност и периодичност функције

4. Граничне вредности функције (лимеси) на крајевима домена D_f и асимптоте функције

$\boxed{\textbf{5.}}$ Први извод, монотоност и локални екстреми функције

$\boxed{\textbf{6.}}$ Други извод, конвексност и превојне тачке функције

$\Rightarrow$ Скицирање графика функције.

8. Изводи

Теоријски увод

Дефиниција 1. Извод функције $f(x)$ је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Користи се и ознака $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ за извод функције f по x.

Извод функције $f(x)$ у тачки $x = a$ је

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Леви извод је $f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$,

десни извод је $f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Извод у $x=a$, $f'(a)$, постоји ако је:

1° f непрекидна у тачки $x=a$, тј.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x);$$

2° $f'_-(a) = f'_+(a)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ диференцијабилна у $x=a$.

$f(x)$ је диф. на интервалу ако је диф. у свакој тачки тог интервала.

Основна правила.

c константа, а $f(x)$ и $g(x)$ функције по x.

$$\mathbf{1.}\ (c)' = 0,$$

$$\mathbf{2.}\ (x)' = 1,$$

$$\mathbf{3.}\ (c \cdot f)' = c \cdot f',$$

$$\mathbf{4.}\ (f \pm g)' = f' \pm g',$$

$$\mathbf{5.}\ (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

$$\mathbf{6.}\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Таблица извода.

$$\mathbf{1.}\ (x^n)' = nx^{n-1},\ \mathbf{2.}\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\mathbf{3.}\ (e^x)' = e^x,\ \mathbf{4.}\ (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$\mathbf{5.}\ (\ln x)' = \frac{1}{x},\ \mathbf{6.}\ (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a},$$

$$\mathbf{7.}\ (\sin x)' = \cos x,\ \mathbf{8.}\ (\cos x)' = -\sin x,$$

$$\mathbf{9.}\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ \mathbf{10.}\ (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$\mathbf{11.}\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \mathbf{12.}\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mathbf{13.}\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ \mathbf{14.}\ (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Други извод функције је извод првог извода:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

n–ти извод је

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Диференцијал функције $f(x)$ је једнак

$$\mathrm{d}f = f'_x \cdot \mathrm{d}x.$$

Диференцијал другог реда је $\mathrm{d}^2 f = f'' \cdot \mathrm{d}x^2$.

Извод сложене функције.

Ако је $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тј. $y = f(\varphi(x))$, тада је

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x.$$

Извод инверзне функције.

Ако је $y = f(x)$ функција која има инверзну функцију $f^{-1} = g$, тј. $x = f^{-1}(y) = g(y)$, онда важи:

$$f'_x = \frac{1}{g'_y}.$$

Извод параметарски задате функције

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

је дат са

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g'_t}{f'_t} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\,.$$

Овај извод је такође параметарски задата функција од истог параметра t!

Извод имплицитно задате функције.

Имплицитно задата функција је $F(x, y) = 0$. Диференцирамо $F(x, y) = 0$ по x сматрајући да је y функција од x (по правилима за извод сложене функције) и одатле „извучемо“ y'_x.

Логаритамски извод.

Користи се за рачунање извода ф-је на ф-ју

$$y(x) = f(x)^{g(x)}$$

(не можемо да користимо ни **1.** ни **4.** из таблице извода, јер су n и a константе, а не ф-је!).

Логаритамски извод.

Користи се за рачунање извода ф-је на ф-ју

$$y(x) = f(x)^{g(x)}$$

(не можемо да користимо ни **1.** ни **4.** из таблице извода, јер су n и a константе, а не ф-је!).

$$y = f^{g} \qquad / \ \ln$$

$$\ln y = \ln f^{g}$$

$$\ln y = g \cdot \ln f \qquad / \ '$$

$$\frac{1}{y} \cdot y'_x = g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} f' \qquad / \ \cdot y$$

$$y'_x = y \cdot (g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} f')$$

$$y'(x) = f^{g} \cdot \left(g' \cdot \ln f + \frac{g f'}{f} \right).$$

5. Први извод, монотоност и локални екстреми функције

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Први извод, монотоност и локални екстреми функције

Функција је *монотоно растућа* на (a, b), што означавамо стрелицом $\nearrow$, ако

$$\big(\forall x_1, x_2 \in (a, b)\big) \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2).$$

Функција је *монотоно опадајућа* на (a, b), што означавамо стрелицом $\searrow$, ако

$$\big(\forall x_1, x_2 \in (a, b)\big) \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Први извод, монотоност и локални екстреми функције

Према правилима диференцирања се одреди I извод $f'(x)$ функције $f(x)$.

Даља анализа се своди на одређивање нула и знака I извода:
када је $f'(x_M) = 0$ и $x_M \in D$ имамо кандидата за локални екстрем (max или min).

на инт. где је $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \nearrow$,
на инт. где је $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \searrow$,

кандидат $x_M = a$ је лок.max ако је f: $\nearrow a \searrow$
(да је max могло и на основу $f''(a) > 0$)

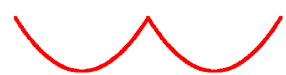
кандидат $x_M = a$ је лок.min ако је f: $\searrow a \nearrow$
(да је min могло и на основу $f''(a) < 0$)

када је $f'(x_M) = 0$ и $x_M \in D$ имамо кандидата за локални екстрем (max или min).

на инт. где је $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \nearrow$,
на инт. где је $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \searrow$,

кандидат $x_M = a$ је лок.max ако је f: $\nearrow a \searrow$
(да је max могло и на основу $f''(a) > 0$)

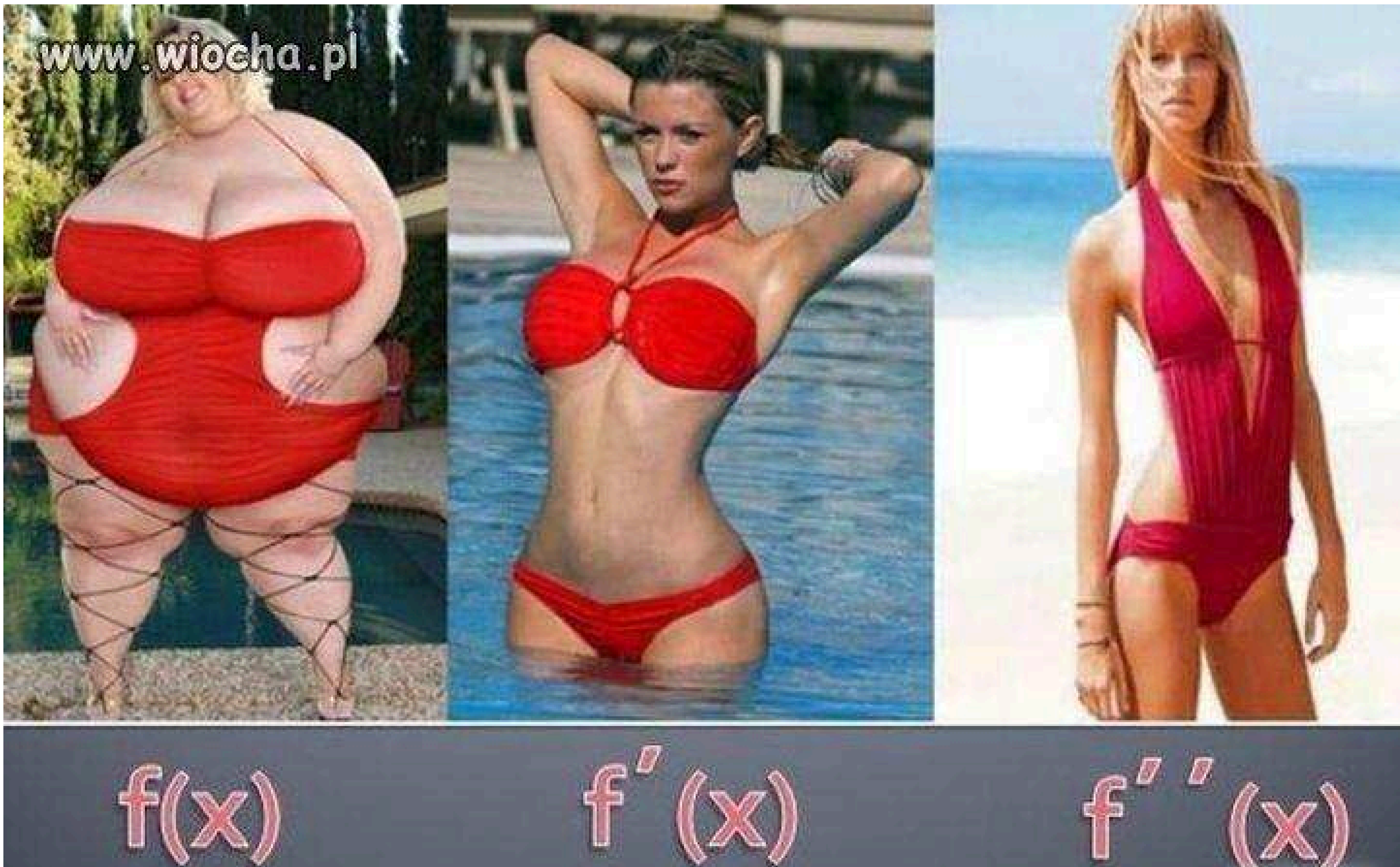
кандидат $x_M = a$ је лок.min ако је f: $\searrow a \nearrow$
(да је min могло и на основу $f''(a) < 0$)

До екстрема можемо доћи и када имамо шпицеве ( или ), као и кад је ф-ја деф. у тачки и само са 1 њене стране.

Остала два случаја ($\searrow a \searrow$ и $\nearrow a \nearrow$) нису екстреми.

Ако смо добили екстрем тад треба израчунати вредност функције, $f(a)$, и тачку $M(a, f(a))$ означавамо на графику.

6. Други извод, конвексност и превојне тачке функције



$\boxed{\mathbf{6.}}$ Други извод, конвексност и превојне тачке функције

Функција је *конвексна* (или *конвексна надоле*) на (a, b), што означавамо $\cup$, ако $\big(x_1, x_2 \in (a, b)\big)$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Функција је *конкавна* (или *конвексна нагоре*) на (a, b), што означавамо $\cap$, ако $\big(x_1, x_2 \in (a, b)\big)$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Други извод, конвексност и превојне тачке функције

Израчунамо II извод $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$.

Даља анализа се своди на одређивање нула и знака II извода:

за $f''(x) = 0$ имамо кандидата за превојну тачку.

на инт. $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \cup$ (конвексна),

на инт. $f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \cap$ (конкавна),

кандидат $x_M = a$ је превојна тачка ако је f: $\cup\ a\ \cap$ или $\cap\ a\ \cup$

И код п.т. одређујемо вредност функције, $f(a)$, и тачку $P(a, f(a))$ означавамо на графику.

Напомена. Погрешно је рећи да је функција конвексна на унији интервала (тј. тамо где је $f''(x) > 0$), јер је она конвексна на сваком од тих интервала понаособ!

Слично важи и за монотоност.

Стога, је монотоност и конвексност боље само записивати у таблици.

Задаци

1. Израчунати по дефиницији извод ф-је $y(x) = e^{2x}$.

Задаци

1. Израчунати по дефиницији извод ф-je $y(x) = e^{2x}$.

Решење. $y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{2(x+h)} - e^{2x}}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{2x}(e^{2h} - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} 2e^{2x} \cdot \frac{e^{2h} - 1}{2h} = 2e^{2x}. \qquad \blacksquare$$

2. Израчунати по дефиницији извод ф-је $y(x) = x^2$ за $x = 2$.

2. Израчунати по дефиницији извод ф-је $y(x) = x^2$ за $x = 2$.

Решење. $$y'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(4 + h) = 4.$$ ■

Израчунати изводе следећих функција:

3. $f(x) = \operatorname{tg} x + 3x.$

Израчунати изводе следећих функција:

3. $f(x) = \operatorname{tg} x + 3x.$

Решење. $$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' + (3x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cdot \underset{1}{(x)'}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 3.$$ ■

4. $f(x) = 2e^{x} - \cos x + 5;$

4. $f(x) = 2e^x - \cos x + 5;$

Решење. $f'(x) = 2 \cdot (e^x)' - (\cos x)' + (5)'$

4. $f(x) = 2e^x - \cos x + 5;$

Решење. $f'(x) = 2 \cdot (e^x)' - (\cos x)' + \cancel{(5)'}$ 0

$f'(x) = 2 \cdot e^x - (-\sin x) + 0$

$f'(x) = 2e^x + \sin x.$ ■

5. 7.69.

Одредити диференцијал $\mathrm{d}f$ функције $f(x) = xe^x$.

5. 7.69.

Одредити диференцијал $\mathrm{d}f$ функције $f(x) = xe^x$.

Решење.

$$f'(x) = (x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x.$$

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = (1+x)e^x\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $y'(x) = 12x^2 - 4x - 1$,

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $y'(x) = 12x^2 - 4x - 1$,

$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = 24x - 4$,

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $y'(x) = 12x^2 - 4x - 1,$

$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = 24x - 4,$

$y'''(x) = \big(y''(x)\big)' = 24,$

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $\quad y'(x) = 12x^2 - 4x - 1,$

$$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = 24x - 4,$$

$$y'''(x) = \big(y''(x)\big)' = 24,$$

$$y'^{V}(x) = \big(y'''(x)\big)' = 0,$$

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $y'(x) = 12x^2 - 4x - 1,$

$$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = 24x - 4,$$

$$y'''(x) = \big(y''(x)\big)' = 24,$$

$$y^{\prime V}(x) = \big(y'''(x)\big)' = 0,$$

$$y^{V}(x) = \big(y^{\prime V}(x)\big)' = 0. \qquad \blacksquare$$

6. Одредити први, други, ... пети извод ф-је $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $y'(x) = 12x^2 - 4x - 1$,

$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = 24x - 4$,

$y'''(x) = \big(y''(x)\big)' = 24$,

$y^{IV}(x) = \big(y'''(x)\big)' = 0$,

$y^{V}(x) = \big(y^{IV}(x)\big)' = 0$. ∎

Напомена. Важи $y^{(k)}(x) = 0$ за $k \geqslant 4$.

7. Одредити све изводе ф-је $\quad y(x) = e^x.$

7. Одредити све изводе ф-је $\qquad y(x) = e^x.$

Решење. $\qquad y'(x) = e^x,$

$$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = e^x,$$

$$y'''(x) = \big(y''(x)\big)' = e^x,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}(x) = e^x.$$

$\blacksquare$

8. Испитати монотоност и конвексност ф-је $f(x) = x^5 \cdot \ln x$.

8. Испитати монотоност и конвексност ф-је $f(x) = x^5 \cdot \ln x$.

Решење. $f'(x) = 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = 5x^4 \ln x + x^4 = x^4(5 \ln x + 1)$.

8. Испитати монотоност и конвексност ф-је $f(x) = x^5 \cdot \ln x$.

Решење. $f'(x) = 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = 5x^4 \ln x + x^4 = x^4(5\ln x + 1)$.

$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = x^3(20\ln x + 9)$. ∎

9. $f(x) = x \sin x + 5 \sin 5.$

9. $f(x) = x\sin x + 5\sin 5$.

Решење. $5\sin 5$ нема нигде x, па је константа!

9. $f(x) = x\sin x + 5\sin 5$.

Решење. $5\sin 5$ нема нигде x, па је константа!

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + 0$$

$$f'(x) = \sin x + x\cos x. \qquad \blacksquare$$

10. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}.$

10. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$.

Решење. $f'(x) = \dfrac{(\operatorname{arctg} x)' \cdot (2x) - \operatorname{arctg} x \cdot (2x)'}{(2x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x - \operatorname{arctg} x \cdot 2}{4x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{2x^2}$$

■

11. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

11. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

Решење 1. $$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$u = \sin x + \cos x$

$u' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\cos x - \sin x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \; .$$

■

11. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

Решење 1. $\quad (\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

$u = \sin x + \cos x$

$u' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\cos x - \sin x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} .$$

■

Решење 2.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\sin x + \cos x)' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} .$$

■

12. $f(x) = \sin^2 x.$

12. $f(x) = \sin^2 x$.

Решење. Ово je сложена функција

$$f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2.$$

Како je $(u^2)' = 2u \cdot u'$ имамо

$f'(x) = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x$

$f'(x) = \sin 2x$. ■

13. $f(x) = \sin x^2$.

13. $f(x) = \sin x^2$.

Решење. Ово је сложена функција

$$f(x) = \sin x^2 = \sin(x^2).$$

Како је $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ имамо

$f'(x) = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cos(x^2)$.

∎

14. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

14. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

Решење. $$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$\frac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} =$$

$$\frac{-1 - x - 1 + x}{1 + 2x + x^2 + 1 - 2x + x^2} = \frac{-2}{2 + 2x^2} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

■

15. $f(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}.$

15. $f(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$.

Решење. $\quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$

$$f(x) = (\sin x \cdot \ln x) \cdot \sqrt{x}$$

$$f'(x) = (\sin x \cdot \ln x)' \cdot \sqrt{x} + (\sin x \cdot \ln x) \cdot (\sqrt{x})'$$

$$\vdots$$

$$f'(x) = \frac{2x \cos x \ln x + 2 \sin x + \ln x \sin x}{2\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$$

15. I кол. ЕкоФ 2007.

$f(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)$.
Одредити $f'(2)$.

15. I кол. ЕкоФ 2007.

$f(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)$.
Одредити $f'(2)$.

Решење.

$$f(x) = (x-2)\cdot\big((x-1)(x-3)(x-4)(x-5)\big).$$

$$f'(x) = 1\cdot\big((x-1)(x-3)(x-4)(x-5)\big) + (x-2)\cdot\big((x-1)(x-3)(x-4)(x-5)\big)'.$$

$$f'(2) = 1\cdot\big((2-1)(2-3)(2-4)(2-5)\big) + 0$$

$$f'(2) = 1\cdot\big(1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\big) = -6. \quad \blacksquare$$

16. $f(x) = \sin(\ln \sqrt{x}\,).$

16. $f(x) = \sin(\ln\sqrt{x}\,)$.

Решење 1. $\qquad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$u = \ln\sqrt{x} \qquad\qquad u' = (\ln\sqrt{x}\,)' = (\ln w)' = \frac{1}{w}\cdot w'$.

$w = \sqrt{x} \qquad\qquad w' = (\sqrt{x}\,)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$u' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

$f'(x) = \cos(\ln\sqrt{x}\,) \cdot \frac{1}{2x} = \frac{\cos(\ln\sqrt{x}\,)}{2x}$. ■

16. $f(x)=\sin(\ln\sqrt{x}\,)$.

Решење 1. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$u=\ln\sqrt{x}$ $\qquad$ $u' = (\ln\sqrt{x}\,)' = (\ln w)' = \frac{1}{w}\cdot w'$.

$w=\sqrt{x}$ $\qquad$ $w' = (\sqrt{x}\,)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

$$f'(x) = \cos(\ln\sqrt{x}\,)\cdot\frac{1}{2x} = \frac{\cos(\ln\sqrt{x}\,)}{2x}. \qquad \blacksquare$$

Решење 2. $f'(x) = \cos(\ln\sqrt{x}\,)\cdot(\ln\sqrt{x})' =$
$\cos(\ln\sqrt{x}\,)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}\,)' = \cos(\ln\sqrt{x}\,)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$\frac{\cos(\ln\sqrt{x}\,)}{2x}$. $\qquad \blacksquare$

17. писмени ВИСЕР ММ1 септ 2018.

Израчунати први извод функције

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right).$$

Када функција $f(x)$ расте?

17. писмени ВИСЕР ММ1 септ 2018.

Израчунати први извод функције

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right).$$

Када функција $f(x)$ расте?

Резултати. $$f'(x) = \frac{-4}{x^3-4x}.$$

17. писмени ВИСЕР ММ1 септ 2018.

Израчунати први извод функције

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right).$$

Када функција $f(x)$ расте?

Резултати. $$f'(x) = \frac{-4}{x^3-4x} = \frac{-4}{x(x^2-4)}.$$

Резултати. $$f'(x) = \frac{-4}{x^3 - 4x} = \frac{-4}{x(x^2-4)}.$$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
-4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	$-$	$-$	$-$	x	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	x	$-$	$-$	$-$	x	$+$
f'	$+$	x	$-$	x	$+$	x	$-$
f	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	?	$\searrow$

Резултати. $$f'(x) = \frac{-4}{x^3 - 4x} = \frac{-4}{x(x^2-4)}.$$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
-4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	$-$	$-$	$-$	x	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	x	$-$	$-$	$-$	x	$+$
f'	$+$	x	$-$	x	$+$	x	$-$
f	$\nearrow$	x	$\searrow$	x	$\nearrow$	x	$\searrow$
		$\notin D_f$		$\notin D_f$		$\notin D_f$	

Резултати. $$f'(x) = \frac{-4}{x^3 - 4x} = \frac{-4}{x(x^2-4)}.$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
-4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	$-$	$-$	$-$	x	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	x	$-$	$-$	$-$	x	$+$
f'	$+$	x	$-$	x	$+$	x	$-$
f	$\nearrow$	x	$\searrow$	x	$\nearrow$	x	$\searrow$

$$D_f = (0,2)$$

Резултати. $\quad f'(x) = \dfrac{-4}{x^3-4x} = \dfrac{-4}{x(x^2-4)}.$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
-4	x	x	x	x	$-$	x	x
x	x	x	x	x	$+$	x	x
x^2-4	x	x	x	x	$-$	x	x
f'	x	x	x	x	$+$	x	x
f	x	x	x	x	$\nearrow$	x	x

$D_f = (0,2) \;\Rightarrow\; f$ увек расте! $\blacksquare$

18. Ако је $x = \dfrac{1}{t}$ и $y = t^2 - 3t + 2$ израчунати y'_x за $x = \frac{1}{2}$.

18. Ако je $x = \dfrac{1}{t}$ и $y = t^2 - 3t + 2$ израчунати y'_x за $x = \frac{1}{2}$.

Решење. $\dot{y} = 2t - 3,\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2}$

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-3}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2(2t-3) = 3t^2 - 2t^3.$$

18. Ако је $x = \dfrac{1}{t}$ и $y = t^2 - 3t + 2$ израчунати y'_x за $x = \frac{1}{2}$.

Решење. $\dot{y} = 2t - 3,\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2}$

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-3}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2(2t-3) = 3t^2 - 2t^3.$$

$x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow t = 2$

18. Ако је $x = \dfrac{1}{t}$ и $y = t^2 - 3t + 2$ израчунати y'_x за $x = \frac{1}{2}$.

Решење. $\dot{y} = 2t - 3,\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2}$

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-3}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2(2t-3) = 3t^2 - 2t^3.$$

$$x = \tfrac{1}{2} \ \Rightarrow t = 2 \ \Rightarrow$$

$$y'_x(\tfrac{1}{2}) = y'_x \Big|_{t=2} = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 = -4. \qquad \blacksquare$$

19. Одредити извод y'_x имплицитно задате ф-je $3y^5 + 2y^3 + y - x = 0$.

19. Одредити извод y'_x имплицитно задате ф-је $3y^5 + 2y^3 + y - x = 0.$

Решење 1.

Израчунајмо изводе по x и изразимо y'_x:

19. Одредити извод y'_x имплицитно задате ф-је $3y^5 + 2y^3 + y - x = 0$.

Решење 1.
Израчунајмо изводе по x и изразимо y'_x:

$$15y^4 \cdot y'_x + 6y^2 \cdot y'_x + y'_x - 1 = 0$$

$$y'_x(15y^4 + 6y^2 + 1) = 1$$

$$y'_x = \frac{1}{15y^4 + 6y^2 + 1}\,. \qquad \blacksquare$$

19. Одредити извод y'_x имплицитно задате ф-је $3y^5 + 2y^3 + y - x = 0.$

Решење 1.

Израчунајмо изводе по x и изразимо y'_x:

$$15y^4 \cdot y'_x + 6y^2 \cdot y'_x + y'_x - 1 = 0$$

$$y'_x(15y^4 + 6y^2 + 1) = 1$$

$$y'_x = \frac{1}{15y^4 + 6y^2 + 1}\,. \qquad \blacksquare$$

Решење 2. $\quad x = 3y^5 + 2y^3 + y \qquad$ инв.ф-ја

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(3y^5 + 2y^3 + y)'_y} = \frac{1}{15y^4 + 6y^2 + 1}\,. \qquad \blacksquare$$

20. Одредити извод функције $f : x \mapsto y$ задате имплицитно $$e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0.$$

20. Одредити извод функције $f : x \mapsto y$ задате имплицитно $$e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0.$$

Резултат. $$y'_x = -\frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}\,. \qquad \blacksquare$$

21. Одредити извод функције $f(x) = x^{\sin x}$.

21. Одредити извод функције $f(x) = x^{\sin x}$.

Решење. $\quad f = x^{\sin x} \qquad / \ \ln$

$\ln f = \ln x^{\sin x}$

$\ln f = \sin x \cdot \ln x \qquad / \ '$

$\frac{1}{f} \cdot f' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' \qquad / \ \cdot f$

$f' = f \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right). \qquad \blacksquare$$

КРАЈ ЧАСА