др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

03. термин

Детерминанте

Детерминанте

Теоријски увод

ДЕФИНИЦИЈА:

Детерминанта матрице A, у ознаци

$$\det(A), \quad |A| \quad \text{или} \quad \det A,$$

ДЕФИНИЦИЈА:

Детерминанта матрице A, у ознаци

$$\det(A), \quad |A| \quad \text{или} \quad \det A,$$

је сума по свим пермутацијама σ из скупа $\mathbf{S}_n$:

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\ a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}.$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left| a_{11} \right| =$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left| a_{11} \right| = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$+$$

$$\begin{aligned} D = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$\qquad\qquad\qquad + \qquad +$$

$$\begin{aligned} D = \; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array}$$

$$D = \begin{array}{ccccc} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$-$

$$D = \begin{matrix} & a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ - & a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - \end{matrix}$$

$$D = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} D = & \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$
D = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} \right.
$$

$$
\begin{aligned}
D = {} & \quad a_{11}a_{22}a_{33} \quad + \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad + \quad a_{13}a_{21}a_{32} \\
& -a_{13}a_{22}a_{31} \quad - \quad a_{11}a_{23}a_{32} \quad - \quad a_{12}a_{21}a_{33}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \\
&\qquad \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)
\end{aligned}
$$

Детерминанте 4×4, 5×5,...

МОРАЈУ

се рачунати

Лапласовим развојем

или

свођењем на детерминанту троугаоне матрице.

ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ

1° Нека је A^{T} транспонована матрица матрице A. Тада је

$$|A^{\mathrm{T}}| = |A|.$$

Транспонована матрица се добија тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^{T} и обрнуто.

Транспонована матрица се добија тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^{T} и обрнуто.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матрица се добија тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^{T} и обрнуто.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$2 \times 3 \qquad\qquad\qquad 3 \times 2$$

2° Ако A има врсту (колону) са свим елементима 0
$$|A| = 0.$$

2° Ако A има врсту (колону) са свим елементима 0

$$|A| = 0.$$

3° Ако A има две једнаке врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

2° Ако A има врсту (колону) са свим елементима 0

$$|A| = 0.$$

3° Ако A има две једнаке врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

4° Ако A има две пропорционалне врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

4° Ако A има две пропорционалне врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

5° Ако је A *троугаона матрица*

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(детерминанта је једнака производу елемената са *главне дијагонале*).

5° Ако је A *троугаона матрица*

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(детерминанта је једнака производу елемената са *главне дијагонале*).

6° Ако A и B имају пропорционалне елементе у некој врсти ($b_{ij} = m \cdot a_{ij}$), а остале врсте су им једнаке

$$|B| = m \cdot |A|.$$

6° Ако A и B имају пропорционалне елементе у некој врсти $(b_{ij} = m \cdot a_{ij})$, а остале врсте су им једнаке

$$|B| = m \cdot |A|.$$

7° Ако се B добија од A тако што у матрици A две врсте (колоне) замене места

$$|B| = -|A|.$$

7° Ако се B добија од A тако што у матрици A две врсте (колоне) замене места

$$|B| = -|A|.$$

8° Ако се B добија тако што у A i–тој врсти (колони) додамо j–ту врсту (колону) помножену бројем m

$$|B| = |A|.$$

8° Ако се B добија тако што у A i–тој врсти (колони) додамо j–ту врсту (колону) помножену бројем m
$$|B| = |A|.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i–те врсте и j–те колоне.

8° Ако се B добија тако што у A i–тој врсти (колони) додамо j–ту врсту (колону) помножену бројем m

$$|B| = |A|.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i–те врсте и j–те колоне.

Кофактор елемента a_{ij} квадратне матрице A је

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i–те врсте и j–те колоне.

Кофактор елемента a_{ij} квадратне матрице A је

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

Лапласов развој по ел. i–те врсте

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i–те врсте и j–те колоне.

Кофактор елемента a_{ij} квадратне матрице A је

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

Лапласов развој по ел. i–те врсте

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Лапласов развој по ел. j–те колоне

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Знаке $(-1)^{i+j}$ можемо памтити као

$$\begin{matrix} \boxed{+} & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad \text{односно} \qquad \begin{matrix} \boxed{+} & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Задаци

1. З. I кол 2017-8. З. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix}$$

Задаци

1. 3. I кол 2017-8. 3. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = 40321 \cdot 2017 - 40341 \cdot 2016$$

тешко множење!

1. 3. I кол 2017-8. 3. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = 40321 \cdot 2017 - 40341 \cdot 2016$$

тешко множење!

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40321 & 20 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I}$$

1. 3. I кол 2017-8. 3. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = 40321 \cdot 2017 - 40341 \cdot 2016$$

тешко множење!

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40321 & 20 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{I} - 20 \cdot \mathrm{II} \quad =$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I}$$

$$\begin{vmatrix} 40321 - 20 \cdot 2016 & 20 - 20 \cdot 1 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix} =$$

1. 3. I кол 2017-8. 3. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = 40321 \cdot 2017 - 40341 \cdot 2016$$

тешко множење!

$$\begin{vmatrix} 40321 & 40341 \\ 2016 & 2017 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40321 & 20 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{I} - 20 \cdot \mathrm{II} \qquad =$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I}$$

$$\begin{vmatrix} 40321 - 20 \cdot 2016 & 20 - 20 \cdot 1 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2016 & 1 \end{vmatrix} =$$

$1 \cdot 1 - 0 \cdot 2016 = 1 - 0 = 1.$ ■

2. 3. I кол 2017-8. 8. гр.

Одредити алгебарски кофактор A_{32} матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. 3. I кол 2017-8. 8. гр.

Одредити алгебарски кофактор A_{32} матрице

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. 3. I кол 2017-8. 8. гр.

Одредити алгебарски кофактор A_{32} матрице

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & 2 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

2. 3. I кол 2017-8. 8. гр.

Одредити алгебарски кофактор A_{32} матрице

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6.$$

$\blacksquare$

3.

Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix},$$

при чему je $a^3 = 1$ и $a \neq 1$.

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{matrix} =$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left| \begin{matrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{matrix} =$$

$1 \cdot 1 \cdot 1$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{matrix} =$$

$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & a^2 & a \end{array}\right. =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{matrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - (a \cdot 1 \cdot a^2$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{matrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - (a \cdot 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 \cdot a$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & a^2 & a \end{array}\right. =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - (a \cdot 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot 1) =$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{matrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - (a \cdot 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot 1) =$$

$$1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & a^2 & a \end{array}\right. =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

$$a^3 \cdot a - 2 + a^2 = a - 2 + a^2 = 1 + a + a^2 - 3 =$$

Решење 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{array} =$$

$$1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot a^2\cdot a^2 + a\cdot 1\cdot a - a\cdot 1\cdot a^2 - 1\cdot a^2\cdot a - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

$$a^3\cdot a - 2 + a^2 = a - 2 + a^2 = 1 + a + a^2 - 3 =$$

$$(1 + a + a^2)\cdot \frac{1-a}{1-a} - 3 = \frac{1-a^3}{1-a} - 3 = 0 - 3 = -3.$$

$\blacksquare$

Решење 2. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \text{ II}-\text{I} \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 - a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Решење 2. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \;\mathrm{II}-\mathrm{I}\; = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 - a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Лапласов развој по II врсти: $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

$$D = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} - (a^2 - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

Решење 2. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \quad \text{II}-\text{I} \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Лапласов развој по II врсти.

$$D = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} - (a^2-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$-(a^2-a)\cdot(a-a^2) = (a^2-a)^2 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

$$\ldots = -3. \qquad \blacksquare$$

4. 3. I кол 2017-8. 2. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}$$

4. 3. I кол 2017-8. 2. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}$$

Сарусом   тешко множење!

Решење.

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix} \; \mathrm{II} - 30 \cdot \mathrm{II} \quad = \begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}$$

Решење.

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix} \; \mathrm{II} - 30 \cdot \mathrm{II} \quad = \begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}_{\mathrm{III}-\mathrm{II}}$$

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2016 & -1 \end{vmatrix}$$

Решење.

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix} \; \mathrm{II} - 30 \cdot \mathrm{II} \quad = \begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}_{\mathrm{III}-\mathrm{II}}$$

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2016 & -1 \end{vmatrix}$$

Решење.

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 60482 & 60452 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix} \text{II} - 30 \cdot \text{II} \quad = \begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2016 & 2015 \end{vmatrix}_{\text{III}-\text{II}}$$

$$\begin{vmatrix} 1009 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2016 & -1 \end{vmatrix} = 1009 \cdot 2 \cdot -1 = -2009. \qquad \blacksquare$$

5.

Користећи Лапласов развој израчунати

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решење. Лапласов развој по II колони (јер она има 2 елемента 0):

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по II колони (јер она има 2 елемента 0):

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{array} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по II колони (јер она има 2 елемента 0):

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{array} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\Big((20+8+0) - (16+0+10)\Big) - 0 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

јер су I и III колона једнаке. $\blacksquare$

6. 2.5.

Користећи особине детерминанти израчунати

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Решење.

$$D = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV} \end{array} =$$

Решење.

$$D=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{array}=\begin{array}{l}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 2 & 2 & -2 & -2\\ 3 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}\\ \ \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}\end{array}=$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}+\mathrm{II}\end{array}=\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}.$$

Решење.

$$D = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV} \end{array} =$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+\mathrm{II} \end{array} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Добили смо детерминанту троугаоне матрице, па је: $D = 10 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-4) = 160.$

■

7. 2.24.

Израчунати

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}.$$

Решење.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II+I} \\ \mathrm{III+I} \\ \mathrm{IV+I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} =$$

Решење.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II+I} \\ \mathrm{III+I} \\ \mathrm{IV+I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} =$$

$$a \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2d = 8abcd.$$

■

8. 3. I кол 2017-8. 12. гр.

Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 & 0 \\ 6 & -4 & 4036 & 0 \\ 9 & 1842 & 6059 & 0 \\ 12 & 798 & 10518 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решење. Лапласов развој по IV колони (јер она има 3 елемента 0):

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 & 0 \\ 6 & -4 & 4036 & 0 \\ 9 & 1842 & 6059 & 0 \\ 12 & 798 & 10518 & -1 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по IV колони (јер она има 3 елемента 0):

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 & 0 \\ 6 & -4 & 4036 & 0 \\ 9 & 1842 & 6059 & 0 \\ 12 & 798 & 10518 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-0 + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 6 & -4 & 4036 \\ 9 & 1842 & 6059 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по IV колони (јер она има 3 елемента 0):

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 & 0 \\ 6 & -4 & 4036 & 0 \\ 9 & 1842 & 6059 & 0 \\ 12 & 798 & 10518 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-0 + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 6 & -4 & 4036 \\ 9 & 1842 & 6059 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} =$$

Решење. Лапласов развој по IV колони

$$D = -0 + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 6 & -4 & 4036 \\ 9 & 1842 & 6059 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1842 & 5 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по IV колони

$$D = -0 + 0 - 0 + (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 6 & -4 & 4036 \\ 9 & 1842 & 6059 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3\cdot \mathrm{I} \end{matrix} =$$

Лапласов развој по I колони

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1842 & 5 \end{vmatrix} = -\left(+3\cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1842 & 5 \end{vmatrix} - 0 + 0 \right) =$$

Решење. Лапласов развој по IV колони

$$D = -0+0-0+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 6 & -4 & 4036 \\ 9 & 1842 & 6059 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{array} =$$

Лапласов развој по I колони

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2018 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1842 & 5 \end{vmatrix} = -\left(+3\cdot\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1842 & 5 \end{vmatrix}-0+0\right) =$$

$$-(+3\cdot(-20-0)) = 60. \qquad \blacksquare$$

9. *ФОН, I колоквијум 2008.*

Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 4 & w \end{vmatrix}$.

За које вредности параметра w је $D = 0$?

9. *ФОН, I колоквијум 2008.*

Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 4 & w \end{vmatrix}$.

За које вредности параметра w je $D = 0$?

Решење.

III колона $=$ $-$I колона

9. *ФОН, I колоквијум 2008.*

Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 4 & w \end{vmatrix}$.

За које вредности параметра w је $D = 0$?

Решење.

III$=$ $-$I $\Rightarrow D = 0$ $\boxed{\text{за свако } w \in \mathbb{R}}$ $\blacksquare$

10. Решити неједначину: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 4 & x & 2 \\ 7 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

10. Решити неједначину: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 4 & x & 2 \\ 7 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \leqslant 0.$

Решење.

... $D = -6x^2 - 6x + 12$

10. Решити неједначину: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 4 & x & 2 \\ 7 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \leqslant 0.$

Решење.

$D = -6x^2 - 6x + 12 \leqslant 0$ за $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

■

11. 3. I кол 2017-8. 7. гр.

За које вредности x важи неједнакост:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} \leqslant -2x\,?$$

11. 3. I кол 2017-8. 7. гр.

За које вредности x важи неједнакост:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} \leqslant -2x\,?$$

Решење. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} = -x^2 + 3x - 4$$

11. 3. I кол 2017-8. 7. гр.

За које вредности x важи неједнакост:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} \leqslant -2x\,?$$

Решење. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} = -x^2 + 3x - 4$, па је

неjед. $-x^2 + 3x - 4 \leqslant -2x$, тj. $-x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$.

11. 3. I кол 2017-8. 7. гр.

За које вредности x важи неједнакост:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} \leqslant -2x\,?$$

Решење. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -2 & x & -3 \end{vmatrix} = -x^2 + 3x - 4$, па је

неjед. $-x^2 + 3x - 4 \leqslant -2x$, тj. $-x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$.

Њено реш. је $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. ∎

КРАЈ ЧАСА